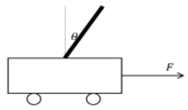
自控期中作业

09118139 王明灏



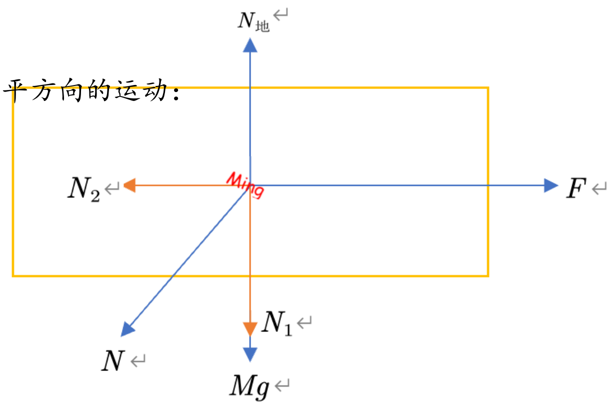
如图所示小车倒立摆模型，其中
小车质量M=2kg
杆质量m=0.1kg
杆长L=0.3m
重力加速度g=9.8m/s^2

（1）建立合适的微分方程描述该系统
（2）分别给出该系统的传递函数与状态空间表达
（3）判断该系统的稳定性
（4）设计合适的控制输入F使倒立摆稳定，分析闭环系统的稳定裕度

解:

(1)

对小车进行受力分析(忽略摩擦力)，发现小车只有水平方向的运动：

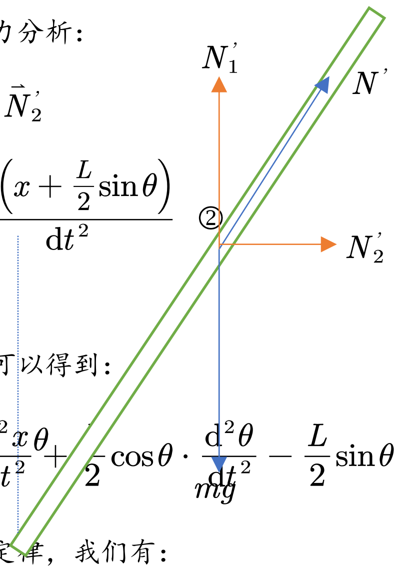


$$\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 \text{ (这里的} N_1 \text{和} N_2 \text{实际上不存在)}$$

$$F - N_2 = Ma$$

$$F - N_2 = M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \quad ①$$

对杆进行受力分析：



$$\vec{N}' = \vec{N}_1' + \vec{N}_2'$$

$$N_2' = m\frac{\mathrm{d}^2\left(x + \frac{L}{2}\sin\theta\right)}{\mathrm{d}t^2} \quad ②$$

由②式我们可以得到：

$$N_2' = m\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{2}\cos\theta\cdot\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} - \frac{L}{2}\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) \quad ③$$

由牛顿第二定律，我们有：

$$N_2 = N_2' \quad ④$$

把①③④式联立，我们有：

$$\begin{cases} F-N_2=M\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \quad ① \\ N_2^{'}=m\left(\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{L}{2}\cos\theta\cdot\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{L}{2}\sin\theta\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\right) \quad ③ \\ N_2=N_2^{'} \quad ④ \end{cases}$$

解这个方程组，我们会得到：

$$F=(M+m)\ddot{x}+m\frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta-m\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta \quad ※$$

以上是对小车和杆水平方向的受力分析，下面我们进行竖直方向的受力分析：

对杆：$N_1^{'}-mg=m\dfrac{\mathrm{d}^2\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right)}{\mathrm{d}t^2}$

化简后可以得到：$N_1^{'}-mg=-m\dfrac{L}{2}\sin\theta\dfrac{d^2\theta}{dt^2}-m\dfrac{L}{2}\cos\theta\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2$ ⑤

杆的转动方程：$N_1^{'}\dfrac{L}{2}\sin\theta-N_2^{'}\dfrac{L}{2}\cos\theta=I\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$ ⑥

将③⑤⑥式联立，我们有：

$$\begin{cases} N_2^{'}=m\left(\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{L}{2}\cos\theta\cdot\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{L}{2}\sin\theta\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\right) \quad ③ \\ N_1^{'}-mg=-m\dfrac{L}{2}\sin\theta\dfrac{d^2\theta}{dt^2}-m\dfrac{L}{2}\cos\theta\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad ⑤ \\ N_1^{'}\dfrac{L}{2}\sin\theta-N_2^{'}\dfrac{L}{2}\cos\theta=I\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \quad ⑥ \end{cases}$$

解这个方程组，我们会得到：

$$\left(I+m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\ddot{\theta}=mg\frac{L}{2}\sin\theta-m\frac{L}{2}\ddot{x}\cos\theta \quad ※※$$

因为θ很小，我们做以下的近似：

$\sin\theta\approx\theta$，$\cos\theta\approx1$，$\dot{\theta}^2\approx0$

杆绕一点的转动惯量公式为：$I=\dfrac{1}{3}mL^2$

那么，※式和※※式就变成以下的形式：

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x}+m\dfrac{L}{2}\ddot{\theta}=F=u(t) \\ \dfrac{7}{6}L\ddot{\theta}=g\theta-\ddot{x} \end{cases} \quad (\varsigma),$$

上式即为我们做出的微分方程。

(2)

对式(ς)进行 Laplace 变换，我们可以得到：(推导时假设初始状态为 0)

$$\begin{cases} (M+m)X(s)s^2+m\dfrac{L}{2}\Theta(s)s^2=U(s) \\ \dfrac{7}{6}L\Theta(s)s^2=g\Theta(s)-X(s)s^2 \end{cases}$$

整理后得到传递函数：

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)}=\frac{1}{(M+m)g-\frac{7}{6}MLs^2-\frac{2}{3}mLs^2}$$

设系统状态空间方程为：

$\begin{cases} \dot{X}=AX+Bu \\ y=CX+Du \end{cases}$，对式$(\varsigma)$进行整理可以得到：

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}=\dfrac{-3mg}{7M+4m}\theta+\dfrac{7}{7M+4m}u \\ \ddot{\theta}=\dfrac{6g(M+m)}{L(7M+4m)}\theta-\dfrac{6}{L(7M+4m)}u \end{Bmatrix}$$

$$\dot{X}=\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-3mg}{7M+4m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{6g(M+m)}{L(7M+4m)} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{7}{7M+4m} \\ 0 \\ \dfrac{-6}{L(7M+4m)} \end{bmatrix}u$$

$y=\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}u$ 根据题干中给出的信息，我们得到：

$M=2kg$，$m=0.1kg$，$g=9.8m/s^{-2}$，$L=0.3m$

则：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{-3mg}{7M+4m} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dfrac{6g(M+m)}{L(7M+4m)} & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{7}{7M+4m}\\ 0\\ \dfrac{-6}{L(7M+4m)}\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1\,0\,0\,0\\ 0\,0\,1\,0\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

(3)&(4)

将数据输入 matlab 进行建模：

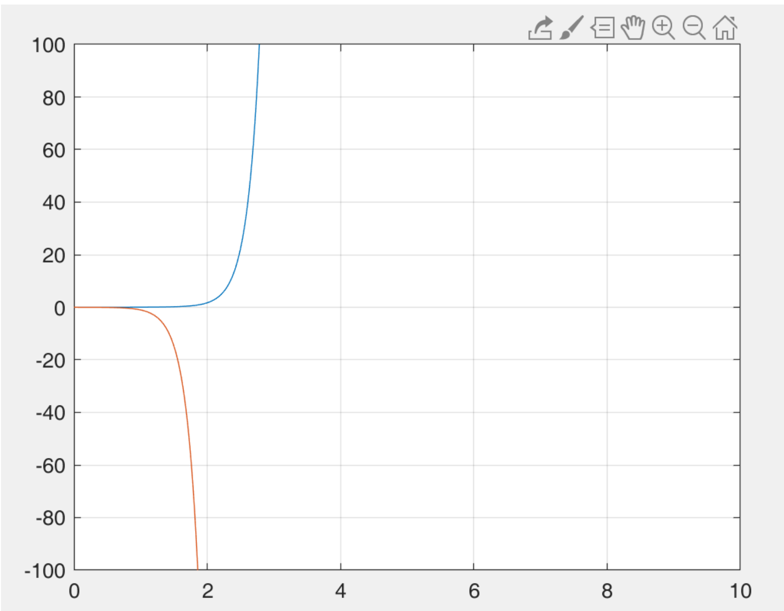
① ：用状态空间判断系统稳定性

求开环系统的阶跃响应并显示

代码部分：

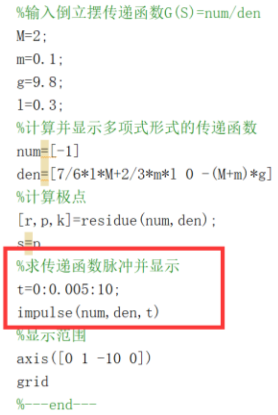
```
%p 用于状态方程计算
%输入倒立摆方程并显示
A=[0 1 0 0;
0 0 -3*m*g/(7*M+4*m) 0;
0 0 0 1;
0 0 6*g*(M+m)/1/(7*M+4*m) 0]
B=[0;
7/(7*M+4*m);
0;
-6/1/(7*M+4*m)]
C=[1 0 0 0;
0 0 1 0]
D=[0;
    0]
%求开环系统的阶跃响应并显示
T=0:0.005:10;
U=0.2*ones(size(T));
[Y,X]=lsim(A,B,C,D,U,T);
plot(T,Y)
axis([0 10 -100 100])
grid
%end
```

输出结果：



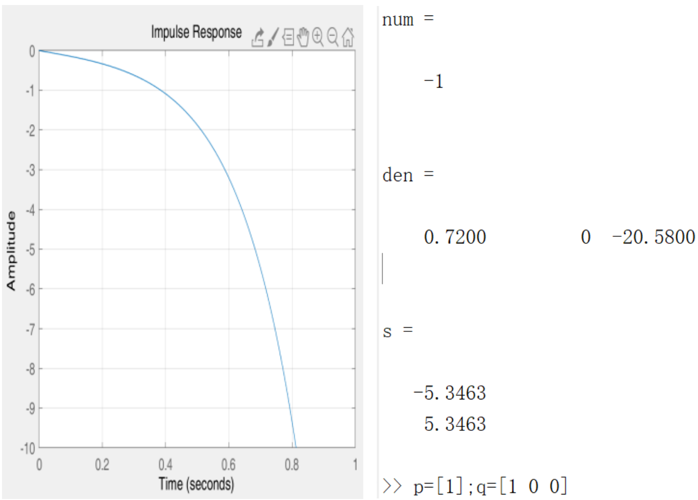
② ：利用传递函数判断系统稳定性

求传递函数脉冲并显示



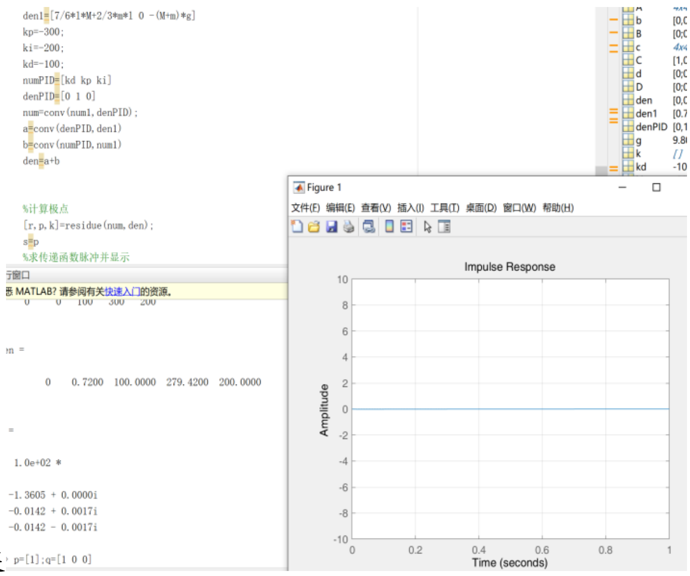
```
%输入倒立摆传递函数G(S)=num/den
M=2;
m=0.1;
g=9.8;
l=0.3;
%计算并显示多项式形式的传递函数
num=[-1]
den=[7/6*l*M+2/3*m*l 0 -(M+m)*g]
%计算极点
[r,p,k]=residue(num,den);
s=p
%求传递函数脉冲并显示
t=0:0.005:10;
impulse(num,den,t)
%显示范围
axis([0 1 -10 0])
grid
%---end---
```

代码部分：



输出结果：

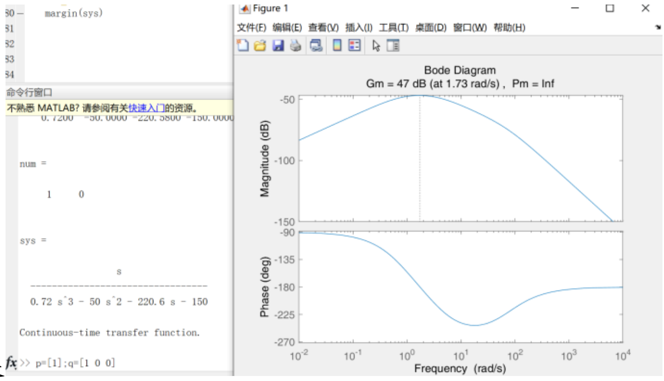
③ ：通过 *pid* 控制器使系统稳定（*F* 是 *pid* 控制器）



结果

这里 *kp=-300,ki=-200,kd=-100.*

④ ：绘制 Bode 图



运行结果

```
den=[0.72 -50 -220.58 -150]
num=[1 0]
sys=tf(num,den)
margin(sys)
```

代码截图

最终结果：Gm=47dB(at 1.73 rad/s),Pm=Inf。

End.