

2025 年北京市大学生程序设计竞赛 暨“小米杯”全国邀请赛

正式赛



题目列表

A	删除 01 串
B	疲配
C	砵码
D	最近公共祖先
E	布置 WAP
F	腐蚀与膨胀
G	萤火虫难题
H	矩阵除法
I	最小 LCM
J	四舍五入
K	最小生成树

本试题册共 11 题，11 页。
如果您的试题册不完整，请立即通知志愿者。

2025 年 4 月 20 日

承办方



命题方



题目 A. 删除 01 串

给定一个长度为 n 的仅由 0 和 1 组成的字符串 s ，你可以进行任意次（可以是 0 次）以下操作：

- 选择一个首尾不同的子串，并删除这个子串。

例如，对于 $s = 0001110$ ，子串 001 的第一个字符和最后一个字符不同。选择该子串并删除后，原串变为 0110 。

进行任意次操作后，字符串 s 的字典序[†]最小是多少？

[†] 对于两个字符串 s 和 t ，设两字符串第一个不同的位置为 i 。若 s_i 是 0 且 t_i 是 1，则称 s 的字典序小于 t 的字典序。若这样的 i 不存在，则称长度较小的字符串字典序更小。空字符串的字典序小于任意其它字符串。

输入格式

每个测试文件包含多组测试数据。第一行包含测试数据的组数 T ($1 \leq T \leq 10^5$)。每组测试数据的格式如下。

第一行包含一个整数 n ($1 \leq n \leq 10^6$)，表示字符串的长度。

第二行包含一个长度为 n 的字符串 s ，其中的字符仅有 0 和 1。

在每个测试文件内，保证所有测试数据的 n 之和不超过 10^6 。

输出格式

对于每组数据，输出一行字符串，代表可以通过操作得到的字典序最小的字符串。特别地，当答案是空字符串时，请输出“empty”。

样例

standard input	standard output
4	empty
2	0
01	empty
4	11
0010	
5	
10011	
5	
11011	

题目 B. 疲配

何山老翁鬓垂雪？
担负樵苏清晓发。
城门在望来路长，
樵重身羸如疲鳖。

——宋·吕南公

给定一个二分图，其中左右两侧各包含 n 个顶点。图中每条边均有一个颜色，颜色可以用一个整数表示，范围在 1 到 k 之间。

对于任意颜色子集 $S \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ ，我们称它为好的，当且仅当存在一组完美匹配，使得该匹配使用的边的颜色恰好为 S 。具体来说，所寻找的完美匹配需要满足以下两个条件：

- 匹配中的所有边颜色均来自 S ；
- 对于 S 中的任一颜色 c ，匹配中至少存在一条边的颜色为 c 。

现在，你可以修改至多一条边的颜色为这条边原来颜色的相邻颜色。对于每个颜色子集，你想知道是否存在一种修改方案，使得修改后这个颜色子集是好的。称颜色 x 和颜色 y 相邻，当且仅当 $|x - y| = 1$ 或 $|x - y| = k - 1$ 。

请对每个颜色子集 S 输出相应的判定结果。

输入格式

每个测试文件包含多组测试数据。第一行包含测试数据的组数 T ($1 \leq T \leq 50$)。每组测试数据的格式如下。

第一行三个整数 n, m, k ($1 \leq n \leq 50, 1 \leq m \leq n^2, 1 \leq k \leq 10$)，分别代表二分图的点数、边数和颜色数量。

接下来 m 行，每行三个整数 u, v, c ($1 \leq u, v \leq n, 1 \leq c \leq k$)，表示有一条边连接左部第 u 个点和右部第 v 个点，其颜色为 c 。保证图中不存在重边。

在每个测试文件内，保证所有测试数据的 2^k 之和不超过 2048。

输出格式

对于每组数据，输出一行 2^k 个字符。第 i 个字符代表如下颜色集合 S 的答案：对于 $j \in [1, k]$ ，如果 $i - 1$ 的二进制表示中从低到高第 j 位为 1，则 $j \in S$ ，否则 $j \notin S$ 。对于这个集合 S ，如果至多修改一条边为其相邻颜色后存在合法的完美匹配，则输出“1”，否则输出“0”。

样例

standard input	standard output
2	0101
3 5 2	00010111
1 2 1	
2 1 1	
3 3 2	
3 2 1	
1 3 1	
5 12 3	
1 2 1	
1 3 2	
1 5 1	
2 4 3	
2 3 2	
2 2 3	
3 1 3	
3 5 1	
4 2 2	
4 4 1	
5 3 3	
5 5 1	

题目 C. 砝码

Link 有 m 个砝码，每个砝码的重量都是一个正整数。

已知 Link 可以用这些砝码称出 1 到 n 中的所有整数重量（砝码仅能放在天平的同一边），Link 手上最重的砝码至少有多重？

注意：Link 手上的砝码能否表示出 $n + 1$ 或更大的重量是未知的。

输入格式

每个测试文件包含多组测试数据。第一行包含测试数据的组数 T ($1 \leq T \leq 2 \times 10^5$)。每组测试数据的格式如下。

第一行包含两个整数 n 和 m ($1 \leq n, m \leq 10^9$)，表示砝码能表示的已知最大重量和砝码的数量。

输出格式

对于每组数据，输出一行一个整数，表示 Link 手上最重的砝码的重量的最小值。如果不可能用 m 个砝码表示出 1 到 n 中的所有重量，请输出“-1”。

样例

standard input	standard output
2	13
40 6	-1
16 4	

题目 D. 最近公共祖先

给定两棵包含 n 个点的树 S 和 T ，节点的编号均为 1 到 n ，根节点均为 1 号点。计算有多少个二元组 (x, y) 满足 $x < y$ 且 $\text{LCA}_S(x, y) = \text{LCA}_T(x, y)$ 。

[†] $\text{LCA}_S(x, y)$ 代表树 S 中 x 和 y 两点的最近公共祖先，即一个离根最远的节点 z ，满足其同时是 x 和 y 的祖先。

输入格式

每个测试文件包含多组测试数据。第一行包含测试数据的组数 T ($1 \leq T \leq 2 \times 10^4$)。每组测试数据的格式如下。

第一行一个整数 n ($2 \leq n \leq 2 \times 10^5$)，表示树的节点数。

接下来 $n - 1$ 行，每行包含两个整数 $u_{S,i}$ 和 $v_{S,i}$ ($1 \leq u_{S,i}, v_{S,i} \leq n$)，表示树 S 上的一条边。

接下来 $n - 1$ 行，每行包含两个整数 $u_{T,i}$ 和 $v_{T,i}$ ($1 \leq u_{T,i}, v_{T,i} \leq n$)，表示树 T 上的一条边。

在每个测试文件内，保证所有测试数据的 n 之和不超过 2×10^5 。

输出格式

对于每组数据，输出一行一个整数，表示满足条件的二元组的数量。

样例

standard input	standard output
4	1
2	2
1 2	2
2 1	12
3	
1 2	
1 3	
1 2	
2 3	
3	
1 3	
2 3	
1 2	
1 3	
7	
1 2	
1 3	
2 4	
2 5	
3 6	
3 7	
1 2	
1 4	
2 5	
2 3	
4 6	
4 7	

题目 E. 布置 WAP

平面上有 n 台设备, 第 i 台设备位于点 (x_i, y_i) 。此外, 平面上有一条无限长的光纤, 其所在直线的方程为 $ax + by + c = 0$ 。

你拥有一台无线接入点 (WAP), 你可以在光纤上的任意位置部署 WAP, 使其连接到光纤。你的目标是最小化 WAP 到最远设备的距离。

输入格式

每个测试文件包含多组测试数据。第一行包含测试数据的组数 T ($1 \leq T \leq 10^4$)。每组测试数据的格式如下。

第一行包含一个整数 n ($1 \leq n \leq 10^5$), 表示设备的数量。

接下来 n 行, 每行两个整数 x_i 和 y_i ($|x_i|, |y_i| \leq 10^4$), 表示设备的位置。

最后一行包含三个整数 a, b 和 c ($|a|, |b|, |c| \leq 10^4$, a 和 b 不同时为 0), 描述光纤所在直线的方程。

在每个测试文件内, 保证所有测试数据的 n 之和不超过 10^5 。

输出格式

对于每组数据, 输出一行一个浮点数, 表示 WAP 到最远设备的距离的最小值。

当你的输出与标准答案的绝对误差或相对误差不超过 10^{-6} 时, 你的输出将会被判定为正确。

具体地说, 令你的答案为 a , 标准答案为 b 。你的答案被认为是正确的当且仅当 $\frac{|a-b|}{\max(1, |b|)} \leq 10^{-6}$ 。

样例

standard input	standard output
3	0.707106781186547524
4	1.000000114514
0 0	2.236067977499789696
0 1	
1 0	
1 1	
1 -1 0	
3	
0 1	
0 2	
0 3	
1 0 0	
3	
-1 1	
0 1	
1 1	
0 1 1	

题目 F. 腐蚀与膨胀

腐蚀和膨胀是数字图像处理中的两个基本操作，分别用于缩小或扩展二值图像中的白色区域。

现在给定一个 $n \times n$ 的 01 矩阵 A 和一个操作序列。操作序列中包含以下两种操作：

- 0 k ，将所有位置的值根据以下规则进行更新：如果某个位置的切比雪夫距离小于等于 k 的范围内存在一个值为 0 的位置，则该位置的值变为 0。形式化地，对于位置 (x_a, y_a) ，如果存在位置 (x_b, y_b) 使得 $\max(|x_a - x_b|, |y_a - y_b|) \leq k$ 且 $A(x_b, y_b) = 0$ ，则更新 $A(x_a, y_a) = 0$ 。
- 1 k ，将所有位置的值根据以下规则进行更新：如果某个位置的切比雪夫距离小于等于 k 的范围内存在一个值为 1 的位置，则该位置的值变为 1。形式化地，对于位置 (x_a, y_a) ，如果存在位置 (x_b, y_b) 使得 $\max(|x_a - x_b|, |y_a - y_b|) \leq k$ 且 $A(x_b, y_b) = 1$ ，则更新 $A(x_a, y_a) = 1$ 。

注意：每次操作的所有更改是同时进行的。

你需要根据操作序列对矩阵 A 进行一系列操作，并输出最后一个操作完成后的矩阵。

输入格式

每个测试文件包含多组测试数据。第一行包含测试数据的组数 T ($1 \leq T \leq 100$)。每组测试数据的格式如下。

第一行包含两个整数 n 和 q ($1 \leq n \leq 500, 1 \leq q \leq 10^6$)，分别表示方阵 A 的边长和操作数量。

接下来 n 行，第 i 行包含一个长度为 n 的 01 串，表示矩阵 A 的第 i 行。

接下来 q 行，每行包含两个整数 op, k ($op \in \{0, 1\}, 1 \leq k \leq n$)，表示一个操作。

在每个测试文件内，保证所有测试数据的 n 之和不超过 500，保证所有测试数据的 q 之和不超过 10^6 。

输出格式

对于每组数据，输出 n 行，第 i 行包含一个长度为 n 的 01 串，表示最后一个操作完成后的矩阵的第 i 行。

样例

standard input	standard output
2	00000
5 3	00000
00001	11100
00000	11100
00000	11100
11000	000011
11000	000011
0 1	000011
1 3	000111
0 1	111111
6 2	111111
000000	
000001	
000011	
000111	
001111	
011111	
1 2	
0 2	

题目 G. 萤火虫难题

这天，小 L 来到了郊外，发现了一种新奇的萤火虫，它们五颜六色、亮度各异，喜欢排成一列栖息在路边。小 L 盯上了它们，想要捉走其中一些。

路边共有 n 只萤火虫排成一列，第 i 只萤火虫的亮度为 w_i ，颜色为 c_i 。小 L 想从中捉走一些（不必连续），并按它们在路边的顺序排成一列。最终的萤火虫序列需要满足：

1. 相邻的萤火虫颜色不同。
2. 相邻的萤火虫亮度不互质。

现在，小 L 想知道他最多能捉多少萤火虫，你能帮帮他吗？

输入格式

每个测试文件仅有一组测试数据。

第一行包含一个整数 n ($1 \leq n \leq 5 \times 10^5$)，表示萤火虫个数。

第二行包含 n 个正整数 w_1, w_2, \dots, w_n ($1 \leq w_i \leq 5 \times 10^5$)，表示第 i 只萤火虫的亮度。

第三行包含 n 个正整数 c_1, c_2, \dots, c_n ($1 \leq c_i \leq 5 \times 10^5$)，表示第 i 只萤火虫的颜色。

输出格式

输出一行一个整数，表示小 L 最多能捉的萤火虫个数。

样例

standard input	standard output
6 6 6 6 6 6 6 1 1 2 2 3 3	3
10 2 3 6 10 8 9 6 3 2 10 1 2 3 2 3 2 4 5 2 1	7

备注

在样例的第一组测试数据中：所有萤火虫的亮度都是一样的，任意的方案都满足”不互质”的要求。要使相邻萤火虫的颜色不同，一种最优的方案是选择第 1,3,5 只萤火虫。

在样例的第一组测试数据中：一种最优的方案是选择第 1,3,4,5,7,9,10 只萤火虫。

题目 H. 矩阵除法

对于 $n \times m$ 的 01 矩阵 A 和 $m \times p$ 的 01 矩阵 B , 定义它们的乘积为一个 $n \times p$ 的 01 矩阵 C 。其中, $C_{i,j} = \oplus_{k=1}^m A_{i,k} \& B_{k,j}^{\dagger}$ 。

现在, Link 希望进行乘法的逆运算——除法。给定 $n \times m$ 的 01 矩阵 A 和 $n \times p$ 的 01 矩阵 C , 你需要找到一个 $m \times p$ 的矩阵 B , 使得 A 与 B 的乘积恰好等于 C 。

$\dagger \oplus$ 表示按位异或运算, $\&$ 表示按位与运算。例如: $(0011)_2 \oplus (0101)_2 = (0110)_2$, $(0011)_2 \& (0101)_2 = (0001)_2$ 。

输入格式

每个测试文件仅有一组测试数据。

第一行包含三个整数 n, m, p ($1 \leq n, m, p \leq 1000$)。

接下来 n 行, 第 i 行包含 m 个整数 $A_{i,1}, A_{i,2}, \dots, A_{i,m}$ ($A_{i,j} \in \{0,1\}$), 表示矩阵 A 的元素。

接下来 n 行, 第 i 行包含 p 个整数 $C_{i,1}, C_{i,2}, \dots, C_{i,p}$ ($C_{i,j} \in \{0,1\}$), 表示矩阵 C 的元素。

输出格式

如果不存在满足条件的矩阵 B , 请输出 “No”。

如果存在满足条件的矩阵 B , 请在第一行输出 “Yes”, 然后输出 m 行, 每行 p 个整数 $B_{i,1}, B_{i,2}, \dots, B_{i,p}$ ($B_{i,j} \in \{0,1\}$), 表示你找到的 B 矩阵。

如果存在多个满足条件的矩阵 B , 你可以输出任何一个。

样例

standard input	standard output
3 2 3 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0	Yes 0 0 0 0 1 0
3 2 3 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1	No

题目 I. 最小 LCM

给定三个正整数 a, b, k ，求 $\text{LCM}(a + x, b + y)^\dagger$ 的最小值，其中 x 和 y 都是不大于 k 的非负整数。
 $^\dagger \text{LCM}(a, b)$ 表示 a 和 b 的最小公倍数。例如 $\text{LCM}(5, 7) = 35$ ， $\text{LCM}(10, 6) = 30$ 。

输入格式

每个测试文件包含多组测试数据。第一行包含测试数据的组数 T ($1 \leq T \leq 10^4$)。每组测试数据的格式如下。
第一行包含三个整数 a, b, k ($1 \leq a, b, k \leq 10^{14}$)。
在每个测试文件内，保证至多有 1 组测试数据满足 $\max(a, b) > 10^5$ 。

输出格式

对于每组数据，输出一行一个整数，表示你的答案。

样例

standard input	standard output
6	8
3 8 4	14
13 7 4	1
1 1 1	10
4 9 2	101
2 101 100	4999999999999990000000000000000
999999999999998 1000000000000000 1	

题目 J. 四舍五入

根据鸽巢原理, 至少有一个屋子有两个人。

——炸鸡块君

对于一个整数 x , 你可以进行以下操作任意次:

选择一个不超过 m 的进制 k , 将 x 写作 k 进制的形式, 然后“四舍五入”使得 x 的最低位为 0。形式化地说, 在一次操作中, 你可以选择一个整数 k ($2 \leq k \leq m$), 然后令 x 变为 $f(x, k)$, 其中:

$$f(x, k) = \begin{cases} \lfloor \frac{x}{k} \rfloor \cdot k & x \bmod k < \frac{k}{2} \\ \lceil \frac{x}{k} \rceil \cdot k & x \bmod k \geq \frac{k}{2} \end{cases}$$

请问, 要将 x 变为 y , 至少需要几次操作? 对于一个固定的 m , 你需要回答多个询问。

输入格式

每个测试文件仅有一组测试数据。

第一行包含两个整数 q 和 m ($1 \leq q \leq 10^5, 2 \leq m \leq 10^5$), 分别表示询问的数量和最大可用的进制。

接下来 q 行, 每行两个整数 x 和 y ($0 \leq x, y \leq 10^5, x \neq y$), 表示一个询问的初始数值和目标数值。

输出格式

对于每个询问, 输出一行一个整数, 表示将 x 变为 y 所需要的最小操作次数。如果 x 不能通过操作变为 y , 请输出“-1”。

样例

standard input	standard output
5 10	2
4 10	-1
3 11	5
11 3	2
5 0	23
1 72	

备注

对于样例的第 1 个询问, 一种最优的操作方案为: $4 \xrightarrow{k=5} 5 \xrightarrow{k=10} 10$ 。

对于样例的第 3 个询问, 一种最优的操作方案为: $11 \xrightarrow{k=8} 8 \xrightarrow{k=6} 6 \xrightarrow{k=5} 5 \xrightarrow{k=4} 4 \xrightarrow{k=3} 3$ 。

对于样例的第 4 个询问, 一种最优的操作方案为: $5 \xrightarrow{k=4} 4 \xrightarrow{k=10} 0$ 。

题目 K. 最小生成树

所有边排序
并查集寻找祖先
不同就合并
——最小生

——炸鸡块君

给定整数 n, k ，求有多少种不同的 n 个节点的无向连通图满足：

- 图中没有自环，且任意两个点之间至多有一条边。
- 所有边的边权为 $[1, k]$ 之间的整数。
- 对于图中的每条边，都至少存在一棵最小生成树包含该边。

两张图不同当且仅当存在一对节点 (u, v) ，使得一张图中 u, v 之间有边而另一张没有，或是两图中 u, v 之间的边权不同。

请计算满足条件的图的数量，对 998244353 取模。

输入格式

每个测试文件仅有一组测试数据。
第一行包含两个正整数 n 和 k ($1 \leq n \leq 5 \times 10^4, 1 \leq k \leq 10$)。

输出格式

一行一个整数，表示答案对 998244353 取模的结果。

样例

standard input	standard output
3 1	4
4 2	377
235 7	928998036