

# Notas de Clase: Mecánica de los Medios Continuos

Grupo de Investigación en Mecánica Aplicada

Grupo de Investigación en Mecánica Aplicada  
Departamento de Ingeniería Civil  
Escuela de Ingenierías  
Universidad EAFIT  
Medellín, Colombia  
2017

# Índice general

<b>1. Repaso: Álgebra Vectorial</b>	<b>5</b>
<b>2. Conceptos Preliminares</b>	<b>6</b>
2.1. Introducción . . . . .	6
2.2. Concepto de densidad generalizada . . . . .	7
2.3. Conexión entre el continuo físico y el continuo matemático . . . . .	9
2.4. Características generales de un modelo del medio continuo . . . . .	10
2.5. Conceptos Preliminares . . . . .	20
2.5.1. Hipótesis Básica de Continuidad . . . . .	20
2.5.2. Partícula o Punto Material . . . . .	21
2.5.3. Punto . . . . .	21
2.5.4. Cuerpo . . . . .	22
<b>3. Análisis de Tensiones</b>	<b>23</b>

3.1. Introducción . . . . .	23
3.2. Interacciones mecánicas-Origen del concepto de tensión . . . . .	24
3.2.1. Fuerzas de cuerpo . . . . .	25
3.2.2. Fuerzas de superficie-El vector de tracciones . . . . .	27
3.2.3. Primer postulado de Cauchy (o Principio de Euler-Cauchy 1822)	30
3.2.4. Fuerzas por unidad de superficie sobre un plano con dirección normal $\hat{n}$ . . . . .	33
3.2.5. Tensor de tensiones . . . . .	36
3.2.6. Transformación por rotación. Caso general . . . . .	40
3.2.7. Transformación por rotación 2D. Círculo de Mohr . . . . .	43
3.3. Valores y direcciones principales para un estado de tensiones en 3D .	61
3.4. Ejercicios . . . . .	69
<b>4. Equilibrio</b>	<b>92</b>
4.1. Introducción . . . . .	92
4.2. Ecuaciones de Equilibrio diferencial . . . . .	93
4.2.1. Coordenadas cilíndricas . . . . .	101
4.3. Soluciones clásicas para sólidos . . . . .	112
4.3.1. Barra prismática soportada en la superficie superior y sometida a la acción de su propio peso . . . . .	112
4.3.2. Viga Cantilever . . . . .	113

4.3.3. Cilindro sometido a presión interna y externa . . . . .	114
4.3.4. Flamant . . . . .	115
4.4. Ejercicios . . . . .	120
<b>5. Análisis de Deformaciones</b>	<b>139</b>
5.1. Introducción . . . . .	139
5.1.1. Concepto intuitivo de deformación . . . . .	141
5.2. Transformaciones lineales . . . . .	145
5.2.1. Componente rotacional . . . . .	148
5.2.2. Componente simétrica . . . . .	150
5.2.3. Componentes escalar y distorsional . . . . .	152
5.3. Tensor de deformaciones unitarias . . . . .	160
5.3.1. Rotación de cuerpo rígido . . . . .	165
5.3.2. Componente simétrica $\varepsilon$ . . . . .	167
5.3.3. Componente escalar, volumétrica o isotrópica . . . . .	168
5.3.4. Componente distorsional . . . . .	169
5.3.5. Ejemplo: Barra apoyada sometida a su peso propio . . . . .	175
5.4. Ejercicios . . . . .	178
<b>6. Elasticidad</b>	<b>194</b>
6.1. Introducción . . . . .	194

## ÍNDICE GENERAL

IV

6.2. Hipótesis básicas . . . . .	196
6.3. Relación tensión-deformación . . . . .	196
6.4. Idealizaciones en 2D . . . . .	197
6.4.1. Tensión plana . . . . .	198
6.4.2. Deformación plana . . . . .	198
6.5. Ejercicios . . . . .	205
<b>Referencias</b>	<b>211</b>

## Presentación

Gran parte de los problemas de Ingeniería se encuentran enmarcados en el correcto cálculo, determinación y análisis de la distribución de desplazamientos, tensiones y cambios de configuración para medios deformables sometidos a diferentes tipos de excitaciones. La mecánica del medio continuo es el modelo matemático desarrollado a partir de principios físicos introducidos en la mecánica Newtoniana que permite resolver dicho problema. En el mejor escenario posible y dependiendo del grado de complejidad de las geometrías de los medios a tratar, de las condiciones de frontera o del comportamiento mismo de los materiales constitutivos, se pueden lograr soluciones analíticas a dichos problemas. Sin embargo, en las situaciones más complejas es necesario abordarlo mediante el uso de herramientas computacionales o experimentales. En cualquier caso, el Ingeniero debe tener el suficiente conocimiento y dominio de las hipótesis básicas de los diferentes modelos matemáticos, así como de las ecuaciones que gobiernan el problema para poder así resolver, plantear, interpretar y analizar la amplia gama de posibles situaciones en el campo de la mecánica de medios continuos.

Estas notas de clase, desarrolladas por diversos docentes adscritos al Grupo de Investigación en Mecánica Aplicada, están orientadas a servir como herramienta de apoyo a los estudiantes del curso Mecánica de los Medios Continuos del pregrado en Ingeniería Civil de la Universidad EAFIT. Los contenidos de las mismas no son otra cosa que una recopilación más o menos concienzuda de material disponible en diferentes textos estructurado de manera que el material sea de fácil acceso a estudiantes con una formación física y matemática correspondiente al cuarto semestre de pregrado. Es importante aclarar que estas notas no tienen el rigor en cuanto a formato y redacción de un texto y que no buscan reemplazar la gran cantidad de excelentes contribuciones en Mecánica de los Medios Continuos disponibles en la literatura (ver sección de Bibliografía).

Las notas están organizadas de manera consistente con el curso cuya estructura y contenido se describe a continuación.

## Objetivos generales del curso

Permitir al estudiante entender el modelo del medio continuo como una estrategia ingenieril de solución al problema central de la mecánica en un sistema de “infinitas” partículas de manera que se genere un soporte físico-matemático lo suficientemente robusto para enfrentar problemas de la mecánica aplicada.

## Objetivos específicos

- Desarrollar el concepto matemático y físico de un tensor de orden 2.
- Identificar las hipótesis fundamentales y que de manera conjunta con el concepto del continuo matemático reducen los conceptos de fuerza y desplazamientos relativos entre partículas a los conceptos de tensión y deformación y al mismo tiempo re-visitar los conceptos de tensión y deformación y conocer algunas de las leyes constitutivas que gobiernan la relación entre estos.
- Reducir el problema central de la mecánica para un sistema de infinitas partículas, al de determinar los campos de desplazamientos, tensiones y deformaciones.
- Identificar matemáticamente el problema de la determinación de desplazamientos, tensiones y deformaciones en un medio continuo como un Problema de Valores en la Frontera (PVF).

## Metodología

Exposiciones magistrales, Elaboración de Ejemplos, Lecturas asignadas. El curso se divide en 2 partes. En la parte I se revisan las hipótesis básicas que sustentan el modelo y se hace un breve repaso de álgebra vectorial. En la parte II se presentan los contenidos teóricos del modelo. En esta se parte de una revisión de los conceptos de tensión y deformación y obteniendo como resultado final las ecuaciones gobernantes o ecuaciones de campo. Posteriormente se ligan las tensiones y deformaciones a través de un modelo constitutivo o ley de Hooke e introduce la hipótesis simplificadora de suponer el equilibrio en la configuración no-deformada del medio para

llegar a la teoría linealizada de la elasticidad. A la luz de esta teoría idealizada se estudian finalmente algunas soluciones analíticas o cerradas, discutiendo brevemente los métodos de solución y concentrándose más en el análisis y entendimiento de la solución misma.

## Contenido de la materia

### I. Introducción

1. Presentación del problema (1.5 semanas).
  - 1.1 Motivación del modelo del continuo.
  - 1.2 Repaso álgebra vectorial.
  - 1.3 Introducción del modelo del medio continuo.

### II. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

- 2.a Análisis de tensiones. Parte 1 (4.5 semanas).
  - 2.1 Concepto de tensión (Definición, Primer postulado de Cauchy, Definición de tensor).
  - 2.2 Ecuaciones de transformación en 3D y 2D.
  - 2.3 Círculo de Mohr 2D y valores de las tensiones extremas.
    - Parcial 01.
- 2.b Análisis de tensiones. Parte 2 (4.0 semanas).
  - 2.4 Solución del problema de valores propios en 3D (ecuación característica).
  - 2.5 Ecuaciones de equilibrio en un medio continuo.
  - 2.6 Estudio e interpretación de soluciones de tensiones.
    - Parcial 02.
3. Análisis de Deformaciones (4 semanas).
  - 3.1 Transformaciones lineales.
  - 3.2 Definición de concepto de deformación.
  - 3.3 Tensor de deformaciones.
  - 3.4 Problemas.
    - Parcial 03.

4. Teoría de la Elasticidad (2 semanas).
  - 4.1 Ley de Hooke.
  - 4.2 Problema de valores en la frontera. Deformación plana, tensión plana.
  - 4.3 Problemas.
    - Examen Final.

# Capítulo 1

## Repaso: Álgebra Vectorial

Al final de esta sección el estudiante debe estar en la capacidad de:

- Entender el concepto de cantidades vectoriales como entes matemáticos describiendo de manera simultánea información de magnitud y dirección.
- Identificar, realizar e interpretar físicamente las principales operaciones del álgebra vectorial.
- Reconocer las notaciones más comunes para describir vectores.
- Transformar las componentes de un vector de un sistema de referencia a otro.

# Capítulo 2

## Conceptos Preliminares

### 2.1. Introducción

En esta sección se presentan las hipótesis básicas que permiten construir el modelo del medio continuo. Dicho modelo debe entenderse como una propuesta ingenieril para abordar problemas de mecánica de sistemas de infinitas partículas usando como herramienta matemática las ideas de continuidad matemática propuestas en el cálculo diferencial.

Al final de esta sección el estudiante debe estar en la capacidad de:

- Entender el paso de variables discretas a variables continuas en términos de densidades.
- Identificar la diferencia entre el concepto de partícula en el modelo de la mecánica Newtoniana y el concepto de punto material en el modelo del continuo.
- Identificar las funciones fuente o causa y efecto o respuesta en el modelo del continuo.
- Identificar los límites de aplicabilidad del modelo del continuo.

## 2.2. Concepto de densidad generalizada

A una escala de tamaño lo suficientemente pequeña la materia goza de una composición molecular/atómica/microestructural o, en general, de carácter discreto. Lo anterior significa que un volumen finito de material no es otra cosa que una gran colección de partículas, sean estas moléculas, átomos, partículas subatómicas o cualquier otro ente discreto.

Si para esta colección se desea calcular la distribución en el tiempo de alguna función **respuesta** o **efecto**  $\beta$  resultante de la consideración de alguna función **causa**  $\alpha$ , será entonces necesario resolver un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias tan grande (en número de ecuaciones) como partículas posea la colección. Este sistema de ecuaciones es obtenido a partir de algún principio físico fundamental, conectando las funciones  $\alpha$  y  $\beta$ , y postulado a partir de observación experimental. En términos generales es posible escribir este principio como en la ecuación (2.1),

$$f\left(\frac{d\beta}{dt}\right) = \alpha, \quad (2.1)$$

en la cual  $\beta$  es la cantidad física que experimenta cambios en el tiempo y que denominaremos en lo que sigue como función **flujo**, mientras que  $\alpha$  es la cantidad física que genera los cambios y la denominaremos la función **interacción**.

Por ejemplo, en el problema mecánico la ecuación (2.1) correspondería a la segunda ley de Newton en cuyo caso identificamos  $\alpha \equiv \vec{F}$ , siendo  $\vec{F}$  la fuerza actuante sobre una partícula de masa  $m$  y  $\vec{\beta} \equiv m\vec{V}$  la cantidad de movimiento asociada con la velocidad  $\vec{V}$  de esta partícula. En este caso  $f$  estaría definida como  $f(x) = x$  para un argumento  $x$ .

Por tanto, si se dispone de un postulado físico fundamental como el dado en la ecuación (2.1), la determinación de las funciones flujo  $\beta$  para cada una de las partículas es simplemente una tarea operativa. Sin embargo, la gran cantidad de partículas de las cuales puede estar compuesto el sistema hacen que este tratamiento “exacto” a nivel discreto sea imposible de realizar en términos prácticos. Es decir, la posibilidad de una solución exacta al problema se encuentra limitada por razones operacionales o computacionales. En términos prácticos es válido considerar el volumen finito de material como un sistema de infinitas partículas para cuya solución se requiere tratar con infinitas ecuaciones diferenciales ordinarias. Este planteamiento puede entenderse como la pregunta o problema general que se busca resolver mediante un **modelo**

de los medios continuos. Este busca una solución práctica al problema de calcular una distribución de funciones flujo, debidas a unas interacciones en un sistema de “infinitas” partículas.

Un tratamiento aproximado se hace posible gracias a la Hipótesis Básica de Continuidad Matemática. Esta encuentra su motivación en el carácter continuo que soporta el espacio matemático; entre dos puntos, sin importar que tan cercanos se encuentren, siempre es posible encontrar otro punto. Se tiene, entonces, la definición clásica de continuidad matemática o concepto de límite y en la cual el punto podría definirse a partir de una celda volumétrica  $\Delta V$  cuyo tamaño se reduce por un proceso de paso al límite

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \Delta V = \text{Punto}. \quad (2.2)$$

La generalización de este concepto al sistema de infinitas partículas se reduce a despreciar el carácter discreto de la materia y asumir que estas se encuentran distribuidas en el espacio matemático de manera continua, es decir, esta generalización equivale a afirmar que las infinitas partículas ocupan un volumen finito sin dejar vacíos ni discontinuidades entre las mismas. En lo que sigue denominaremos esta distribución físicamente ficticia **El Continuo Físico**. En otras palabras la celda de volumen  $\Delta V$  independientemente de su tamaño siempre estará compuesta del mismo material ya que se ha despreciado completamente todo ente micro-estructural.

Podemos en este punto precisar el objetivo fundamental de un modelo de los medios continuos:

Un modelo de los medios continuos pretende estudiar la distribución espacio-temporal de las interacciones y flujos resultantes en un sistema discreto de infinitas partículas que es aproximado mediante un proceso de promediado basado en la hipótesis básica de continuidad y por ende, convirtiendo las variables involucradas a nivel discreto en campos o distribuciones.

## 2.3. Conexión entre el continuo físico y el continuo matemático

Retomando el tratamiento del problema de determinación de una función **respuesta**  $\beta$  para un sistema de muchas partículas sometidas a algún tipo de **excitación** externa o **interacción**  $\alpha$ , es claro que, desde el punto de vista operativo, es imposible resolver las ecuaciones resultantes (discretas) para un sistema de infinitas partículas, por lo que es necesario recurrir a la hipótesis de continuidad matemática con dos consecuencias inmediatas:

- Se renuncia al concepto de partícula.
- Se hace disponible la potente herramienta del continuo matemático o cálculo diferencial.

Por ejemplo, en el caso de la mecánica de los medios continuos no tendrá sentido hablar términos como “la fuerza aplicada a una partícula” en el sentido discreto. Más aún, en las ecuaciones gobernantes a nivel del continuo este concepto mismo de fuerza discreta desaparece matemáticamente y es necesario utilizar representaciones equivalentes que tengan significado dentro del contexto de los medios continuos, es decir funciones, como en este caso la función tensorial de tensiones.

La hipótesis de continuidad genera entonces un modelo que producirá resultados correspondientes a una aproximación con respecto a una solución discreta <sup>1</sup>. El orden del error en la aproximación, será siempre relativo y estará fuertemente ligado a la relación entre el tamaño característico del espécimen en cuestión y el tamaño característico de la micro-estructura que se ha despreciado. Por ejemplo, considere el caso de una viga de concreto. En ésta, la menor dimensión característica del espécimen correspondería al espesor  $h$  mientras que la mayor dimensión característica de la micro-estructura sería el diámetro del agregado grueso  $\phi$ . La aproximación introducida al asumir el medio como un continuo físico dará errores despreciables siempre que  $h \gg \phi$ . En la medida en que  $h \rightarrow \phi$  la contribución del agregado a la interacción mecánica es relevante y el modelo del continuo se vuelve impreciso.

El hecho de renunciar al concepto de partícula y de apelar al continuo matemático

---

<sup>1</sup>Si se asume que el resultado que se obtendría de un modelo discreto en caso de ser este.

implica que toda variable de tipo discreto o asociada al concepto de partícula es tratada ahora como una distribución o función. Replanteando en estos términos y por segunda vez el objetivo fundamental de un modelo de los **Medios Continuos** este se debería reescribir como sigue:

Un modelo de los medios continuos pretende estudiar la variación espacio-temporal de las distribuciones o funciones de **respuesta** (o efecto) debidas a una distribución espacio-temporal de funciones **fuente** (o causa).

En el caso particular del problema **Mecánico** el interés es describir la respuesta del sistema en términos de **cantidad de movimiento**. En este escenario las fuentes corresponden a fuerzas o mejor aún, a distribuciones de fuerzas. Más concretamente, una vez introducida la hipótesis de continuidad, el objetivo será el de determinar funciones continuas representativas de la cantidad de movimiento en respuesta a funciones representativas de las fuentes o fuerzas.

Se puede afirmar entonces que el carácter infinito del sistema de partículas genera la necesidad de un modelo matemático para describir ahora la interacción <sup>2</sup> entre 2 sistemas. Uno de los sistemas es el medio continuo en cuestión (sistema de muchas partículas) que interactúa o en el caso mecánico intercambia cantidad de movimiento con otro sistema externo. Denominaremos este (otro medio continuo) como el medio ambiente <sup>3</sup>.

## 2.4. Características generales de un modelo del medio continuo

Para apoyar el análisis considérese un medio infinito ocupando un volumen  $B(t)$  y que representa en este caso el medio ambiente, figura 3.1. Este medio se encuentra acotado por una superficie  $S_\infty$  localizada a una distancia infinita de cualquier punto del medio. Consideramos además un medio continuo (**el sistema**) ocupando un

---

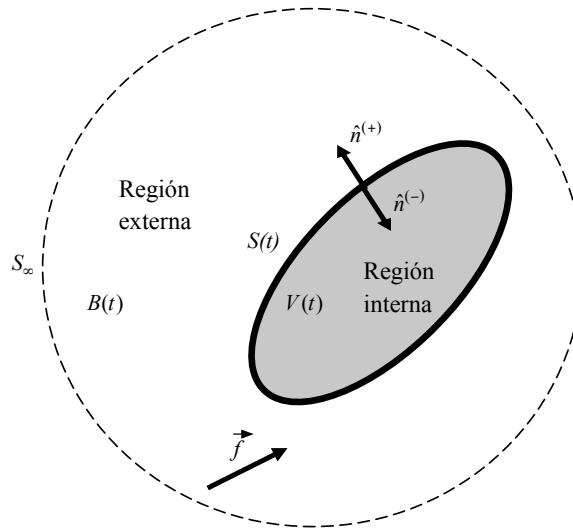
<sup>2</sup>En el caso mecánico una fuerza no es otra cosa que la representación equivalente de una interacción entre dos sistemas.

<sup>3</sup>Cadavid, J (2009). Mecánica del Medio Continuo Una Iniciación. Fondo Editorial Universidad EAFIT.

volumen  $V(t)$  y localizado al interior de este espacio infinito. La interfase entre el sistema y el medio ambiente corresponde a una superficie  $S(t)$ <sup>4</sup>. Las preguntas que nos proponemos responder son:

- ¿Cómo describir la interacción o intercambio de cualquier variable física del tipo **respuesta** entre el medio (ambiente) infinito  $B(t)$  y el medio continuo  $V(t)$  debido a una distribución de variables de tipo **fuente** o **causa**?
- ¿Cómo expresar esta interacción como una función continua, es decir llevada a nivel del punto matemático como se hace en el cálculo diferencial?

Con referencia a la figura 3.1 utilizaremos la siguiente descripción de las regiones involucradas. La región localizada del lado positivo del vector normal  $\hat{n}^{(+)}$  a  $S(t)$  se denominará en lo que sigue la **región externa**. De manera consistente, la región localizada del lado negativo del vector normal  $\hat{n}^{(-)}$  a  $S(t)$  se denominará la **región interna**. Deseamos entonces caracterizar la interacción entre las regiones interna y externa debida a la existencia de una fuente localizada ya sea sobre  $B(t)$  o sobre  $V(t)$ . Además queremos describir esta interacción como una función continua.



**Figura 2.1.** Medio continuo interactuando con un espacio infinito.

---

<sup>4</sup>En la figura 3.1 la frontera del medio continuo representada por  $S$  podría ser por ejemplo la de una viga, una presa o si se quiere tan solo una frontera matemática.

En el problema planteado, tanto las variables **fuente** como las variables **causa** se encuentran conectadas en términos discretos a través de una ley como la indicada en ecuación (2.1). Ya señalamos que para tratar estas variables de carácter discreto como una función, se procede partiendo del concepto de límite. Para esto supondremos que realizaremos particiones del medio continuo en celdas de volumen (cada una de las cuales será también un sistema de infinitas partículas dado que se ha despreciado la microestructura a todas las escalas) y que para eliminar la dependencia del tamaño de la partición daremos a estas celdas un tamaño cada vez más pequeño hasta alcanzar un estado límite en el cual supondremos que cada celda se convierte en lo que denominaremos por ahora un punto material para diferenciarlo del punto matemático. Es decir a la celda de volumen de la ecuación (2.3) le estamos asignando material.

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \Delta V = \text{Punto material} \quad (2.3)$$

- A la luz de la continuidad matemática el punto material definido en la ecuación (2.3) no posee tamaño. Este sin embargo encierra o esta conformado por infinitas partículas; es decir, el punto material es a la vez un medio continuo.
- Matemáticamente dicho punto siempre existe, esta es la hipótesis básica de continuidad. Físicamente en el proceso de cálculo del límite dado en la ecuación (2.3) eventualmente se alcanzará un tamaño finito donde la hipótesis de continuidad comienza a colapsar y el límite deja de ser válido; a partir de este tamaño el efecto de la micro-estructura despreciada desde el inicio comienza a ser importante y en el límite eventualmente la celda se convierte en una de las partículas de la micro-estructura. De hecho, podría convertirse en un vacío.
- Si las dimensiones características del espécimen son varios órdenes de magnitud mayores que este tamaño límite finito, siempre será valido trabajar con la definición matemática de punto, ecuación (2.3). Es decir si el  $\Delta V$  físico es menor en varios órdenes de magnitud que todas las dimensiones importantes del sistema de infinitas partículas será válida la hipótesis de continuidad física dada en la ecuación (2.3).

Regresemos nuevamente al nivel de la **partícula** y mantengamos la designación de  $\alpha$  para la variable **fuente** o **causa** que aparece de forma explícita en asocio con

una partícula y la cual produce cambios de una variable tipo **efecto** o **respuesta**  $\beta$ . Deseamos considerar esta variable como una distribución o función en el medio continuo. Denotaremos esta función resultante como  $\Phi$ . Esta puede ser de carácter escalar, vectorial o en general tensorial. Recordemos además que las variables  $\alpha$  y  $\beta$  están relacionadas mediante una ley general o principio fundamental;

$$f\left(\frac{d\beta}{dt}\right) = \alpha \quad (2.4)$$

El tratamiento propuesto en la ecuación (2.4) necesariamente nos lleva a tener que promediar la variable  $\alpha$  sobre las celdas de volumen, es decir a asociarlas al punto, vía el concepto de límite implicado en el cálculo diferencial. Por ejemplo, supondremos que a una celda volumétrica finita  $\Delta V_1$  le corresponde un  $\Delta\alpha_1$ , a una celda inferior  $\Delta V_2$  un  $\Delta\alpha_2$  y así sucesivamente de manera tal que en el estado límite del punto en el sentido de ecuación (2.3) la relación  $\Delta\alpha/\Delta V$  tenderá a una función continua  $\Phi$  y que en el punto material asume por lo tanto un valor constante.

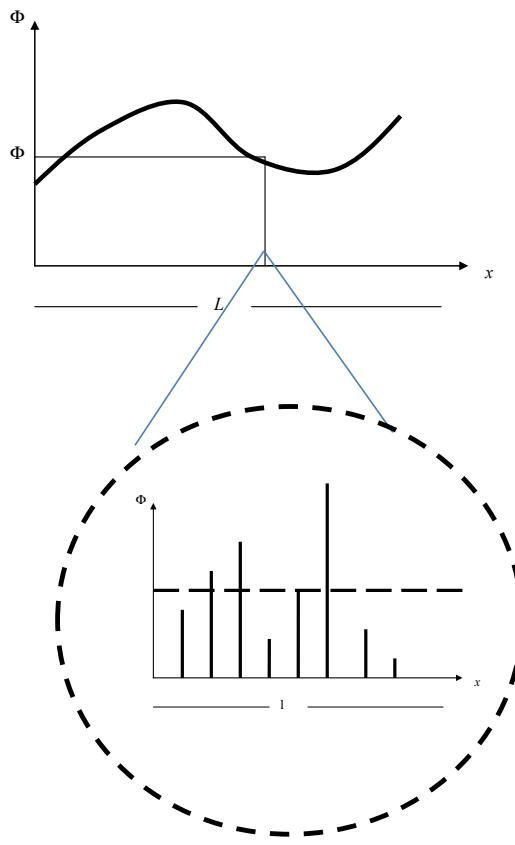
$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta V} = \Phi \quad (2.5)$$

- En ecuación (2.5)  $\Delta V$  tiende a cero mientras que la relación  $\Delta\alpha/\Delta V$  se asume aproximándose al valor dado  $\Phi$ .
- El límite de la ecuación (2.5) no ha sido calculado a través de ningún procedimiento matemático explícito sino que su existencia se impone en el modelo como hipótesis de partida. Es decir se asume la existencia de dicho límite.
- El proponer la existencia del límite dado por la ecuación (2.5) ha sido motivado por la hipótesis de continuidad física y su relación directa con el continuo matemático. En estos términos la existencia de dicho límite podría entenderse como un postulado fundamental sobre el cual se está construyendo el modelo del medio continuo.
- Si los resultados del modelo construido a partir del límite dado en ecuación (2.5) logran predecir las observaciones experimentales entonces el modelo resultante habrá sido exitoso, en caso contrario este debe ser enriquecido, mejorado o en el caso extremo abandonado. Por ejemplo si  $\Phi$  en ecuación (2.5) no asume un

valor constante sino una variación (por ejemplo lineal) entonces será posible capturar fluctuaciones lineales (o localizaciones) de  $\Phi$  en el punto material. Este principio podría seguirse extendiendo para considerar fluctuaciones más fuertes como por ejemplo cuadráticas y de orden superior, hasta que eventualmente se alcanzaría un nivel de refinamiento comparable en términos de precisión con un resultado discreto. Lógicamente, en la medida en que se aumenta el orden de la fluctuación asumida sobre el punto material aparecen cada vez más ecuaciones.

- Finalmente, la nueva función  $\Phi$  estará asociada con un punto material en el sentido de la ecuación (2.3) y se tratará ahora como una cantidad de  $\alpha$  por unidad de volumen que varía de manera continua a lo largo de  $V(t)$ , es decir como un campo. Se dice entonces que la función  $\Phi$  representa una densidad volumétrica de  $\alpha$ . Cuando son vistas en asocio con una superficie estas densidades se convierten en densidades superficiales; cantidad de  $\alpha$  por unidad de superficie.

En la figura 2.2 se esquematiza un problema para un espécimen uni-dimensional de tamaño  $L$ . La escala de tamaño del espécimen se denominará en lo que sigue la macro-escala. En ésta, una función del tipo  $\Phi$  varía a lo largo del dominio matemático ocupado por el sistema de partículas o puntos materiales. En un punto material cualquiera del dominio  $L$ , la variable  $\Phi$  asume un valor constante de manera consistente con el límite dado en la ecuación (2.3). Sin embargo ya es claro que físicamente sobre el punto material se presentan o existen entes de carácter discreto y sobre los cuales las variables presentan fuertes fluctuaciones. Por ejemplo en el inserto de la figura 2.2 se denota por  $\ell$  la escala de tamaño sobre la cual se presentan las fluctuaciones. Este dominio se denominará en lo que sigue la micro-estructura. En esta misma figura se esquematiza también mediante la línea punteada el valor promedio de las fluctuaciones y correspondiente al valor constante asignado en el punto material de la parte superior de la Figura. Como conclusión las fluctuaciones asociadas con la micro-estructura o carácter discreto de la materia no serán capturadas por el modelo del continuo válido sobre el dominio o a la escala de tamaño  $L$ .



**Figura 2.2.** Dominio del Medio Continuo representando la Macro-escala y la micro-escala.

A través del concepto del límite establecido en ecuación (2.3) lo que se hace entonces es asignar al volumen o punto material matemático el valor promedio acomodado sobre el punto o volumen material físico. En estos términos es claro que la distribución de la función  $\Phi$  a nivel macro representa una aproximación con respecto a la distribución a nivel micro. Las predicciones a nivel del continuo basado en la ecuación (2.3) serán válidas mientras se de la condición  $L \gg \ell$ .

Más aún, nos referiremos al volumen o punto material físico (como el de la parte superior de la figura 2.2) como Volumen Representativo del Material (VRM). De acuerdo con esto se tiene entonces que un continuo clásico puede entenderse como

una variedad <sup>5</sup> de puntos materiales abstractos o Volúmenes Representativos del Material.

De acuerdo con la hipótesis de continuidad matemática estos puntos materiales a la vez están conformados por un número infinito de puntos materiales de manera que matemáticamente o por abstracción siempre será posible seguir descendiendo en tamaño sin nunca encontrar los entes micro-estructurales o de tipo discreto. Sin embargo en otros modelos del continuo (denominados como no-clásicos) el VRM puede ser dotado de alguna capacidad de describir (aunque aún en términos del continuo) cierto tipo de fluctuaciones micro-estructurales. Más adelante se hará referencia a este tipo de propuestas.

## Volumen Representativo del Material <sup>6</sup>

Habiendo identificado el VRM como el bloque constitutivo fundamental de un modelo del medio continuo es útil en esta sección dar un poco más de precisión a esta definición. Para esto se presentan algunas micro-estructuras relativas y se reitera sobre la manera de producir un continuo clásico en términos de asignaciones de variables a puntos materiales abstractos e ideales correspondientes a valores promedios calculados sobre puntos materiales físicos e identificables en el laboratorio.

De la discusión precedente es claro que implícita en la estrategia utilizada en la hipótesis básica de continuidad se encuentra un proceso de homogenización o transición de menor a mayor escala de tamaño. Por homogenización nos referimos a la asignación de propiedades físicas a los puntos materiales correspondientes a un promedio de los valores asumidos por varias partículas sobre un volumen finito de material.

Como ya se mencionó y de acuerdo con postulados fundamentales de la mecánica cuántica los sistemas formados por átomos, electrones, protones, neutrones y partículas subatómicas carecen de continuidad. Es decir, a este nivel no se logra una precisión aceptable si se opera bajo la hipótesis de continuidad.

---

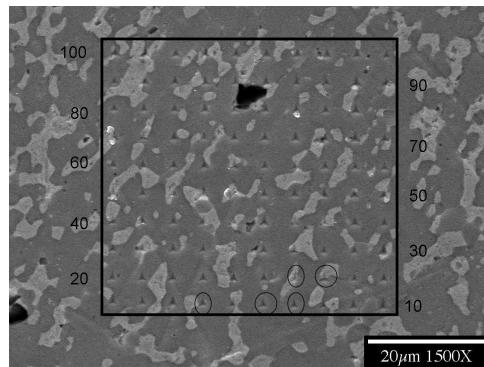
<sup>5</sup>Variedad o en Ingles la denominada Manifold. Correspondiente a una estructura topológica

<sup>6</sup>Algunos casos de determinación del VRM se presentan en las referencias [1, 2].

En la dirección ascendente en cuanto a tamaño el siguiente nivel de fragmentación se identifica en la molécula. La mecánica clásica de los medios continuos ha sido construida sobre la hipótesis de que a este nivel efectivamente se logran resultados con la precisión adecuada y de que por encima de este nivel no existen otros entes micro-estructurales. Es decir, para volúmenes de tamaños iguales y superiores a la molécula las aproximaciones basadas en la hipótesis básica de continuidad usadas en la mecánica clásica permitirían llegar a resultados aceptables.

Sin embargo desarrollos relativamente recientes, motivados por las nuevas tendencias hacia la miniaturización, han revelado escalas de tamaño varios órdenes de magnitud superior a la escala molecular donde la mecánica clásica también comienza a agotar su nivel de precisión. Este es el caso particular de los denominados materiales con micro-estructura. De lo anterior se desprende el hecho de que existe un volumen mínimo de material por debajo del cual es impreciso abordar el problema de las infinitas partículas a partir de la hipótesis básica de continuidad. Desde el punto de vista matemático dicho volumen será siempre considerado infinitamente pequeño.

Pudiéramos pensar en esta escala como la correspondiente a la microestructura del material a través de la cual sería posible identificar de manera discreta vacíos, impurezas, defectos o en general heterogeneidades. Supongamos que en esta escala las heterogeneidades se encuentran separadas a unas distancias promedio  $\ell$  (la micro-escala definida en la sección anterior). Por ejemplo, consideremos un volumen de material de tamaño característico comparable a esta distancia  $\ell$ . Es claro que si se estuviera analizando un espécimen con dimensiones características  $L$  (la macro-escala) cercanas o comparables con  $\ell$  la validez de un tratamiento con base en la hipótesis de continuidad sería fácilmente cuestionable pues se generarían fluctuaciones como las de la figura 2.2. La figura 2.3 ilustra una de estas microestructuras correspondiente a una aleación plomo/estaño en la cual la separación de los defectos es del orden de  $5.0\mu m$ . Si se estuviera analizando vía la mecánica del medio continuo un espécimen con un tamaño cercano al de estas micro-estructuras, los resultados no capturarían concentraciones de las variables del tipo  $\Phi$  sobre las diferentes fases, por ejemplo sobre la fase de plomo o de estaño. La pregunta es entonces: ¿a partir de qué tamaño  $L$  del espécimen es válido comenzar a suponer que efectivamente se tiene un comportamiento representable como un medio continuo? En otras palabras, a partir de qué tamaño  $L$  es válido afirmar que si se divide el medio en celdas infinitesimales a las cuales se les confieren propiedades mecánicas promedio, las predicciones del modelo estarán dentro de rangos de precisión aceptables desde el punto de vista de la ingeniería?



**Figura 2.3.** Fotografía aumentada de una aleación de plomo/estaño utilizada en aplicaciones de microelectrónica.

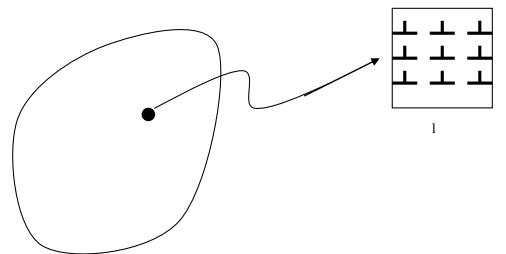
La respuesta depende claramente del tipo de micro-estructura inherente en cada material. En los desarrollos tempranos de la mecánica del medio continuo el problema fue evadido asumiendo que se estaba a escalas varias veces por encima de las distancias intra-moleculares despreciando la existencia de entes fundamentales de tamaño superior. Aunque para la ingeniería clásica este modelo del medio continuo ha resultado ser lo suficientemente preciso, el desarrollo de tecnologías e industrias emergentes <sup>7</sup> ha empezado a llevar al modelo al límite de su precisión. En esta presentación se llama la atención sobre la existencia de esta escala inferior por debajo de la cual no sería válido proceder vía el continuo y se introduce el concepto de volumen representativo del material como una propiedad mecánica adicional cuyo valor depende de cada material. Claramente esta propiedad  $\ell$  tiene dimensiones de longitud y varía de material a material y de microestructura a microestructura.

En lo que sigue asumiremos que el sistema de infinitas partículas (no necesariamente todas iguales) estará ocupando un espacio físico de manera continua (en el sentido físico y matemático), o equivalentemente se asumirá continuidad de puntos y de partículas; *entre dos partículas del sistema, sin importar que tan cercanas se encuentren siempre será posible asignar otra partícula*. En otras palabras se le está confiriendo acá a la partícula el carácter de punto material. Este espacio se subdividirá en volúmenes infinitesimales  $\Delta V$  a cada uno de los cuales se les conferirán propiedades (mecánicas) constantes. Nos referiremos a este volumen como **Volumen Representativo del Material (VRM)** <sup>8</sup>. Asumiremos

<sup>7</sup>Como por ejemplo la micro-electrónica y la nano-tecnología

<sup>8</sup>VRM: Mínimo volumen sobre el cual el material es estadísticamente homogéneo,  $F(x) = x$

además que siempre estaremos operando en especímenes con tamaños superiores a este VRM y que estaremos haciendo mediciones a escalas igualmente superiores. La presencia de la microestructura y de un punto material físico o VRM se esquematiza en la figura 2.4. Cabe anotar que la ingeniería moderna ha reconocido la potencia práctica de la hipótesis del medio continuo como herramienta de solución de problemas y ha planteado modelos que intentan ampliar las capacidades del mismo a escalas bastante cercanas a las del VRM. Estas se han denominado como teorías no-locales, de cinemática enriquecida o simplemente teorías no-clásicas de la mecánica de los medios continuos.<sup>9</sup>.



**Figura 2.4.** Esquematización del Volumen Representativo del Material y de las macro y meso-escalas.

Con base en las discusiones anteriores, estos modelos no-clásicos lo que hacen es dotar al VRM de información referente a la micro-estructura en términos de variables que varían de manera continua, como por ejemplo parámetros relativos a su tamaño, que permiten describir distribuciones no-constantes localizadas al interior del punto material matemático lo que permite dar cuenta en términos del continuo de fluctuaciones no capturables por una propuesta clásica.

<sup>9</sup> Algunas de estas son las propuestas por Voigt, W(1887). Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Krystalle. Abh. Königlichen Gesellschaft Wiss. Gottingen., Cosserat, E., and Cosserat, F(1909). Theorie des Corps Déformables. Paris: A Hermann & Fils., Aero, E., Kuvshinsky, E(1961). Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles. Soviet Physics Solid State. Vol 2. pp 1272., Eringen, A.C(1968). Theory of Micropolar Elasticity. In Fracture, and advanced treatise. Eds Leibowitz, H. Academic Press, New York, pp 621-729., Mindlin, R(1964). Micro-structure in Linear Elasticity. Arch. Ration. Mech. Anal. Vol 16, pp 51-78., Toupin, R(1962). Elastic Materials with Couple-Stresses. Arch.Rational Mech.Anal. Vol 11, pp385-414.

## 2.5. Conceptos Preliminares

Antes de presentar el método general que se utilizará para reducir las variables discretas a distribuciones, densidades o campos es necesario introducir algunos conceptos preliminares.

### 2.5.1. Hipótesis Básica de Continuidad

Aunque la descripción de los cambios de configuración a los cuales se puede someter un medio continuo se estudiará de manera formal y detallada en secciones posteriores, será útil hacer acá una referencia inicial a este respecto, en particular en lo concerniente con la descripción del movimiento en el caso de un medio deformable. En este sentido resultará útil y común comparar las configuraciones, localizaciones o lugar geométrico de las infinitas partículas del sistema en dos instantes.

- Un instante o configuración inicial que denotamos como correspondiente a  $t = 0$ , donde  $t$  representa un marco de referencia temporal. Nos referiremos a esta configuración indistintamente como el medio continuo en  $t = 0$ , *la configuración de referencia o la configuración no-deformada*. Se asumirá que en esta configuración el medio continuo se encuentra libre de interacciones con el medio ambiente.
- Un instante o configuración posterior  $t = t$ . Nos referiremos a esta configuración indistintamente como el **medio continuo** en  $t = t$ , *la configuración actual o la configuración deformada*. Se asume que el medio continuo es llevado a esta configuración precisamente por la acción de interacciones externas.

Al comparar estas dos configuraciones se asumirá que en ambos estados la cantidad de materia es la misma. Más aún, siguiendo un enfoque causa-efecto supondremos que es la acción de las interacciones externas la que produce los cambios de configuración entre  $t = 0$  y  $t = t$ .

La hipótesis básica de continuidad desde el punto de vista físico consiste en suponer que las infinitas partículas que conforman el sistema ocupan o llenan de manera

continua un espacio físico determinado de volumen  $V$  y acotado por una superficie o frontera  $S$ . Esta hipótesis física permite ahora representar todas las propiedades como funciones continuas y posibilita el uso del cálculo como herramienta matemática. Más adelante se identificarán algunas consecuencias de esta hipótesis básica.

### 2.5.2. Partícula o Punto Material

En el contexto de la mecánica de los medios continuos por partícula o punto material se estará haciendo referencia a cantidad de materia o porción infinitesimal de un cuerpo pero sin conceder a esta geometría alguna tal y como se estipula en el límite dado en la ecuación (2.3). Tampoco se detalla ésta es un átomo, molécula o que tipo de ente fundamental. A pesar de la carencia de geometría la partícula tendrá siempre asociado un volumen y una densidad de masa. Esta contradicción aparente es una consecuencia del uso del concepto matemático de límite. El punto material podrá experimentar desplazamiento, velocidad, aceleración, cambios de momentum o en general flujos e interacciones. El punto material se considerará como el elemento constitutivo primario o elemental de un modelo de los medios continuos.

### 2.5.3. Punto

Por punto se hará referencia a una localización geométrica fija con respecto a un sistema de referencia. El punto como tal tampoco posee geometría alguna y mucho menos tendrá asociadas cantidades físicas. Sin embargo, en un instante dado, un punto puede estar siendo ocupado por un punto material con propiedades físicas asociadas. En este caso hablaremos de la propiedad en el punto pero teniendo en cuenta que en realidad esta será debida a la contribución del punto material. Más aún, pueden existir interacciones del punto con el medio externo de manera tal que cuando una partícula ocupa este punto, está siente una contribución adicional o agente modificador de sus propiedades.

### 2.5.4. Cuerpo

Nos referimos a un cuerpo como un sistema de infinitas partículas (ahora puntos materiales) lo cual no constituye ninguna novedad ya que en cursos básicos de física se había trabajado con el caso de cuerpos rígidos. Se trataba precisamente de un sistema de infinitas partículas pero en este caso el apelativo de cuerpo rígido hacía referencia al hecho de que las distancias intra-particulares antes y después de la consideración de las fuerzas permanecían constantes. Claramente esta hipótesis permitía abordar el problema sin la necesidad de hacer referencia alguna al material constitutivo y permitía tratarlo como una partícula con la adición de la interacción rotacional.

En lo que sigue se liberará la hipótesis anterior y se asumirá que como resultado de las interacciones del sistema con el medio ambiente este puede exhibir cambios en las distancias intra-particulares. La magnitud de estos cambios dependerá en cada caso de la naturaleza de las fuerzas inherentes que le dan el carácter denso al sistema, es decir enlaces electroquímicos, electromagnéticos, etc. En otras palabras a igual intensidad de fuerzas aplicadas a cuerpos de igual geometría pero de materiales diferentes los cambios en distancias entre partículas dependerán del material del cuerpo. Los cambios en las distancias intra-partícula se reflejarán posiblemente no solo en cambios de posición sino también de forma y de tamaño del cuerpo. Uno de los propósitos del modelo de la mecánica del medio continuo es caracterizar o describir estos cambios a nivel local o del punto material definido este en el sentido de la ecuación (2.2) en la sección introductoria.

# Capítulo 3

## Análisis de Tensiones

### 3.1. Introducción

En la sección introductoria se presentaron algunas ideas simples que permitían pasar del problema discreto (modelo de partículas) al continuo (modelo de puntos materiales). En términos generales, se planteaba la conversión de las ecuaciones gobernantes representativas de principios físicos propuestos a nivel de la partícula a ecuaciones de campo mediante un proceso de homogenización.

En esta sección se particulariza el problema al caso de la Mecánica Newtoniana para sistemas de muchas partículas, dando como resultado el concepto de tensión el cual resulta ser una cantidad de tipo tensorial (descrita ahora por 3 vectores indicando la distribución de fuerzas a lo largo de 3 direcciones).

Al final de esta sección el estudiante deberá estar en la capacidad de:

- Reconocer los tipos de fuerzas presentes en el modelo de los medios continuos.
- Reconocer en el concepto de esfuerzo (o fuerza por unidad de superficie) y en su carácter tensorial una herramienta matemática para describir los cambios de cantidad de movimiento en el modelo del medio continuo.

- Entender el vector de tracciones como una descripción de las fuerzas por unidad de superficie asociadas con un plano determinado.
- Determinar las componentes del vector de tracciones en asocio con un plano determinado dado el tensor de esfuerzos en un punto del medio.
- Transformar de un sistema de referencia a otro las componentes del tensor de esfuerzos.
- Evaluar condiciones de falla en términos de tensiones a través de un punto del medio continuo.
- Identificar los invariantes del tensor de esfuerzos como las descripciones absolutas del estado de tensiones en un punto.
- Determinar las tensiones extremas y las direcciones en que estas se presentan para un estado de tensiones en 2D y 3D.
- Calcular los invariantes para estados de tensiones en 2D y 3D.
- Representar el tensor de tensiones en la orientación principal.

### 3.2. Interacciones mecánicas-Origen del concepto de tensión

En el caso particular del problema mecánico, la ecuación (3.1) tomada de la sección introductoria

$$f \left( \frac{d\beta}{dt} \right) = \alpha \quad (3.1)$$

se reduce a la segunda ley de Newton para una partícula de masa  $m$ , velocidad  $\vec{V}$ , fuerza  $\vec{F}$  y cantidad de movimiento  $\vec{P} = m\vec{V}$ . Nuevamente estipulamos que en este caso la variable respuesta o efecto  $\beta$  corresponde a la cantidad de movimiento  $\vec{P} = m\vec{V}$  y la variable fuente o causa  $\alpha$  que introduce cambios temporales en  $\beta$  corresponde a la fuerza  $\vec{F}$ . La ley general de la ecuación (3.1) válida a nivel de la

partícula se reduce entonces a la segunda ley de Newton que relaciona los cambios en la cantidad de movimiento y la fuerza como

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \equiv \frac{dm\vec{V}}{dt}. \quad (3.2)$$

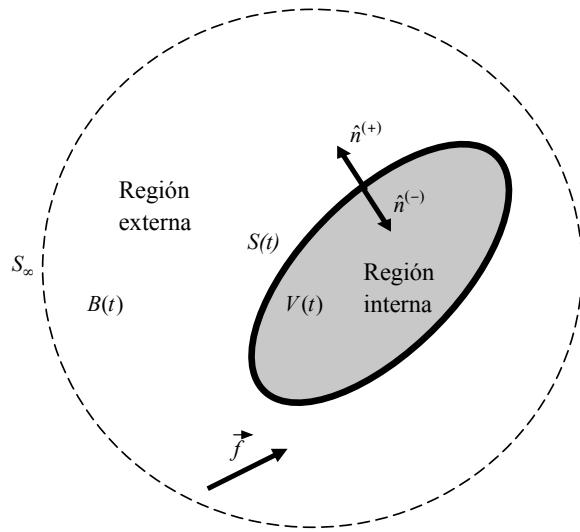
Esta ley de carácter discreto<sup>1</sup> indica que la fuerza es el **dispositivo matemático** que permite representar cambios de cantidad de movimiento entre una partícula y el medio ambiente. Claramente identificamos en el concepto matemático de fuerza el punto de partida del modelo de la **Mecánica de los Medios Continuos**.

### 3.2.1. Fuerzas de cuerpo

Nuevamente nos apoyaremos en la esquematización de la figura 3.1 en la cual se considera un medio infinito que representa **el medio ambiente**. Este se encuentra acotado por una superficie  $S_\infty$  encerrando el volumen  $B(t)$ . Consideraremos además un medio continuo (**el sistema**) localizado al interior de este espacio infinito y delimitado por una superficie  $S(t)$  que acota un volumen  $V(t)$  y que se encuentra en contacto directo con el medio ambiente a través de su frontera  $S(t)$ .

---

<sup>1</sup>Discreto significa existente a nivel de la partícula



**Figura 3.1.** Medio continuo interactuando con un espacio infinito.

Utilizaremos la siguiente descripción de las regiones involucradas: La región localizada del lado positivo del vector normal  $\hat{n}^{(+)}$  a  $S(t)$  se denominará en lo que sigue la **región externa**. De manera consistente, la región localizada del lado negativo del vector normal  $\hat{n}^{(-)}$  a  $S(t)$  se denominará la **región interna**.

Se desea entonces caracterizar la interacción mecánica entre las regiones interna y externa debida a la existencia de una **fuente de cantidad de movimiento** pero tratada esta como una distribución o función. Se denota allí esta función como  $\tilde{f}$ , la cual en lo que sigue equivale a la función general  $\Phi$  y representa una densidad de fuerza (fuerza por unidad de volumen).

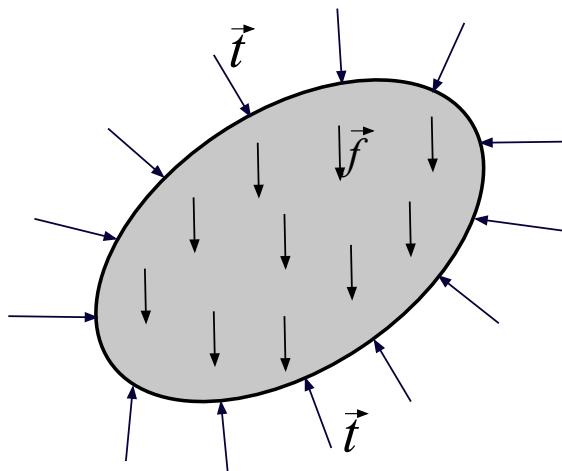
Aunque esta densidad se representa en la figura como localizada en un punto se enfatiza en que la misma puede estar distribuida en todo el volumen incluyendo la región interna o estar localizada solo en el infinito de la región externa. En cualquier caso esta fuente es introducida por algún agente externo.

En el primer caso de fuentes internas o una distribución interna de fuerzas por unidad de volumen decimos que estas son representativas de interacciones a distancia. Esto significa que el agente externo que las produce no se encuentra en la vecindad del medio en cuestión. Estos son por ejemplo los campos gravitacionales o

electromagnéticos.

### 3.2.2. Fuerzas de superficie-El vector de tracciones

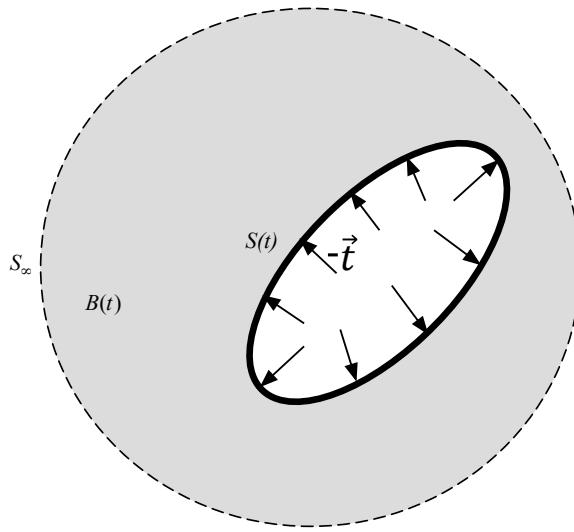
De cualquier forma, ya sea que existen fuentes internas o externas se generara también una interacción a través de la superficie o por contacto directo entre los dos medios. La figura 3.2 representa el diagrama de cuerpo libre de la región interna. En éste se muestran las interacciones  $\vec{t}$  generadas por contacto directo a través de la superficie  $S(t)$  y las interacciones a distancia  $\vec{f}$ , distribuidas estas sobre todo el volumen  $V(t)$ . La función vectorial  $\vec{t}$  representa una función o distribución de fuerzas por unidad de superficie equivalente acá a la interacción por contacto directo entre las regiones interna y externa. Estas fuerzas en la superficie son necesarias para mantener la condición de continuidad entre el medio ambiente y el medio continuo.



**Figura 3.2.** Diagrama de cuerpo libre de la región interna interactuando con la región externa.

La figura 3.3 muestra el correspondiente diagrama de cuerpo libre para la región externa. En esta figura, la función  $\vec{t}$  nuevamente representa la fuerza por unidad de superficie sobre la superficie  $S(t)$  de la región externa que es igual y opuesta a la función  $\vec{t}$  actuando sobre la superficie  $S(t)$  de la región interna (y de acuerdo con el principio de acción y reacción). Estas fuerzas son equilibradas por una función análoga pero localizada sobre la frontera o superficie  $S_\infty$ .

Nuevamente la función  $\vec{t}$  ha sido construida con fundamento en el continuo matemático y su definición de estado límite. En el modelo clásico de la mecánica de los medios continuos el carácter de esta interacción por contacto directo se encuentra descrito por el primer postulado de Cauchy. Como tal, este admite verificación experimental más no demostración matemática. Se llegará entonces a un modelo de la mecánica de los medios continuos basado en la definición de fuerzas superficiales de Cauchy.



**Figura 3.3.** Diagrama de cuerpo libre de la región externa interactuando con la región interna.

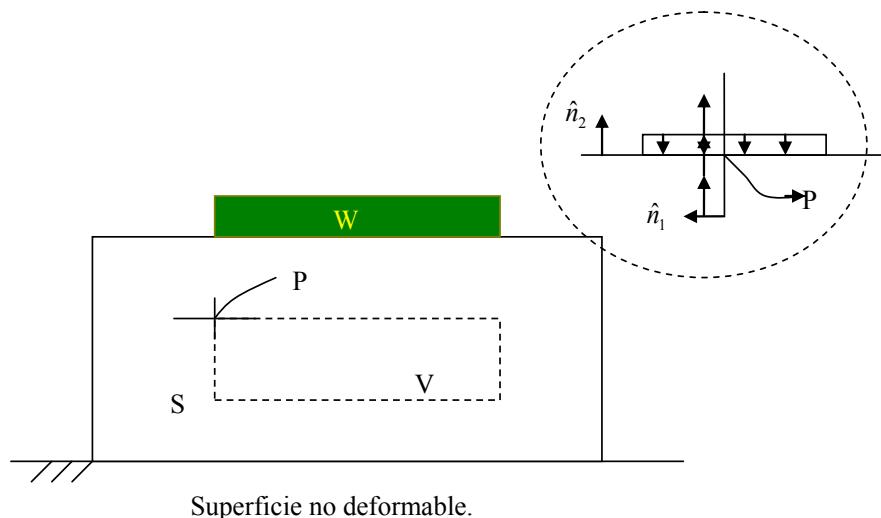
En algunos tratamientos es común encontrar las funciones  $\vec{f}$  y  $\vec{t}$  diferenciadas como “fuerzas” externas e internas. Esto es motivado en el hecho de que las segundas aparecen toda vez que propongamos un nuevo diagrama de cuerpo libre haciendo cortes o exponiendo nuevas superficies extraídas del sistema original. Por ejemplo si del volumen  $V(t)$  aisláramos un nuevo volumen  $b(t)$ , sobre la nueva superficie expuesta aparecería entonces una nueva función  $\vec{t}$  que efectivamente mantiene unidas las dos porciones resultantes. En estos términos la distribución  $\vec{t}$  era una fuerza interna antes de realizar la partición y aparece ahora como una fuerza externa en el nuevo diagrama de cuerpo libre. En cualquier caso la distribución  $\vec{t}$  aparece para equilibrar una función fuente externa  $\vec{f}$ . En este sentido también consideramos en este tratamiento a la función  $\vec{t}$  como externa.

Es válido entonces clasificar las fuerzas como **externas** cuando actúan sobre el sistema y como **internas** cuando actúan entre partes del sistema. Sin embargo debe aclararse que mediante una elección apropiada de un diagrama de cuerpo libre extraído del sistema original, cualquier fuerza interna al sistema original puede exponerse como una fuerza externa.

En este tratamiento denominaremos las fuentes o fuerzas  $\vec{f}$  como **fuerzas de cuerpo** y las fuerzas  $\vec{t}$  como fuerzas por unidad de superficie o **tracciones**. Tratamos ambas como externas con la salvedad de que las primeras son debidas a agentes externos a distancia mientras que las segundas son debidas a contacto directo a través de superficies del medio continuo.

### Dependencia del vector de tracciones en la dirección del vector normal

En lo que sigue se presentará un ejemplo (ver figura 3.4) aplicado a un caso particular que pretende servir de abrebotas o justificación para la introducción de manera formal del primer postulado de Cauchy conducente al concepto matemático de tensión.



**Figura 3.4.** Interacción por contacto en un punto  $P$  sobre la frontera de un medio continuo de volumen  $V$  acotado por la superficie  $S$ .

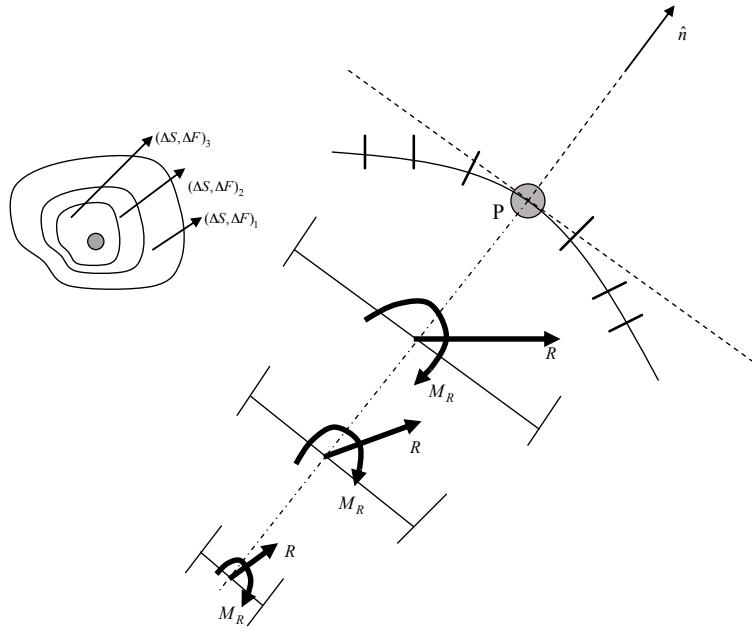
En el ejemplo ilustrado en la figura 3.4 se extrae o aísla para efectos de su análisis el volumen acotado internamente por la superficie matemática (abstracta, artificial o virtual)  $S$ . Este volumen a la vez pertenece a un medio general libre de fuerzas en sus fronteras laterales y soportando un peso  $W$  sobre parte de la frontera superior. En la figura inserta y correspondiente al punto  $P$ , se realizan cortes mediante planos con vectores normales  $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_2$  con dirección horizontal y vertical respectivamente.

La figura inserta muestra también una aproximación (si se quiere burda) a la distribución de fuerzas por unidad de superficie (fuerzas de contacto o tracciones) sentida desde dos planos pasando por el punto  $P$  y en las cercanías de este. Claramente, en un límite infinitesimal alrededor del punto  $P$  el vector normal a la superficie experimenta un cambio de dirección (de  $\hat{n}_2$  a  $\hat{n}_1$ ). Este cambio es análogo al que se presenta en las distribuciones de fuerza sobre los 2 planos pasando por  $P$ . Esta conexión sugiere que la distribución de fuerzas por unidad de superficie (o interacción por contacto directo) esta relacionada con la dirección del vector normal a la superficie. Esta dependencia de la interacción a nivel de la superficie con el vector normal a la misma fue propuesta por Cauchy en el siguiente postulado.

### 3.2.3. Primer postulado de Cauchy (o Principio de Euler-Cauchy 1822)

*En dos regiones externa e interna de un medio continuo de acuerdo con una superficie de separación  $S$  y un vector normal  $\hat{n}$ , la región externa ejerce sobre la región interna una fuerza (interacción) de contacto  $\Delta\vec{F} = \Delta\vec{F}(\Delta S, \hat{n})$  en cada punto  $P$  que depende solo de la posición del punto  $\vec{x}_P$  y de la dirección del vector normal  $\hat{n}$  a  $S$ .*

Considérese por ejemplo una serie de regiones o elementos de área alrededor de un punto  $P$  de la frontera matemática  $S$  tal y como se muestra en la figura 3.5. En esta se muestran las vistas frontal y transversal de diferentes elementos de área alrededor del punto  $P$ . La línea punteada representa un plano tangencial a la superficie  $S$  en  $P$  y cuya dirección normal se representa mediante el vector  $\hat{n}$ . Con cada elemento de área  $\Delta S$  alrededor del punto  $P$  es posible asociar una distribución de fuerzas sobre la superficie. Denominamos esta distribución como  $\Delta\vec{F}$ . La misma puede reducirse al sistema equivalente fuerza-momento resultante ( $\vec{R}_R, \vec{M}_R$ ) sobre el punto  $P$ .



**Figura 3.5.** Vector de tracciones en un punto del medio continuo  $P$ .

Para cada elemento de área considerado, la fuerza  $\vec{R}$  y momento  $\vec{M}_R$  resultantes forman un ángulo determinado con la dirección  $\hat{n}$ . El postulado de Cauchy propone que si se realiza un proceso continuo de reducción de los elementos de área  $\Delta S$ , las cantidades  $|\vec{R}|/\Delta S$  y  $|\vec{M}_R|/\Delta S$  tienden a límites definidos. En el primer caso la función resultante  $\vec{t}$  se denominará el **vector de tracciones o fuerzas por unidad de superficie** en el punto  $P$ , ecuación (6.7), mientras que en el segundo la función resultante  $\vec{\mu}$  se denominará el vector de **tracciones de par o momentos por unidad de superficie** y el cual asumiremos como cero en el estado límite, ecuación (3.4)<sup>2</sup>.

$$\vec{t}^{(\hat{n})} \equiv \lim_{\Delta S(\hat{n}) \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S(\hat{n})} = \frac{d\vec{F}}{dS}. \quad (3.3)$$

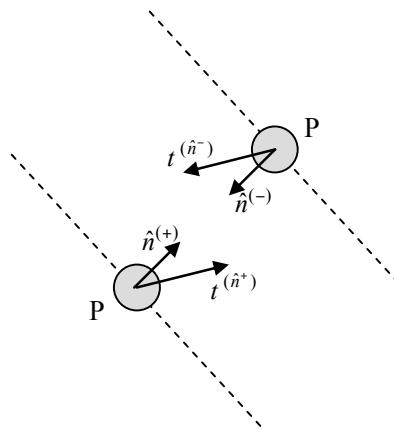
<sup>2</sup>El asumir este límite como cero da origen a un modelo clásico de la mecánica de los medios continuos. Podría ser perfectamente válido asumir este límite como diferente de cero.

$$\vec{\mu}^{(\hat{n})} \equiv \lim_{\Delta S(\hat{n}) \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta S(\hat{n})} = 0. \quad (3.4)$$

Mediante el proceso de límite fue posible reducir la interacción a nivel de la superficie a puntos (función continua). El vector de tracciones representa entonces una descripción intensiva de la interacción por contacto directo entre las regiones interna y externa. Esta interacción debe además satisfacer la tercera ley de Newton o principio de acción y reacción.

Como consecuencia nos encontramos con que este vector de tracciones es igual (en magnitud) y opuesto (en dirección) a la representación de la interacción sobre la región externa. Esta condición se expresa mediante la relación de equilibrio de la ecuación (3.5) para el punto  $P$ , figura 3.6, y el diagrama de cuerpo libre de la figura 3.3.

$$\vec{t}^{(\hat{n}^+)} + \vec{t}^{(\hat{n}^-)} = 0 \quad (3.5)$$



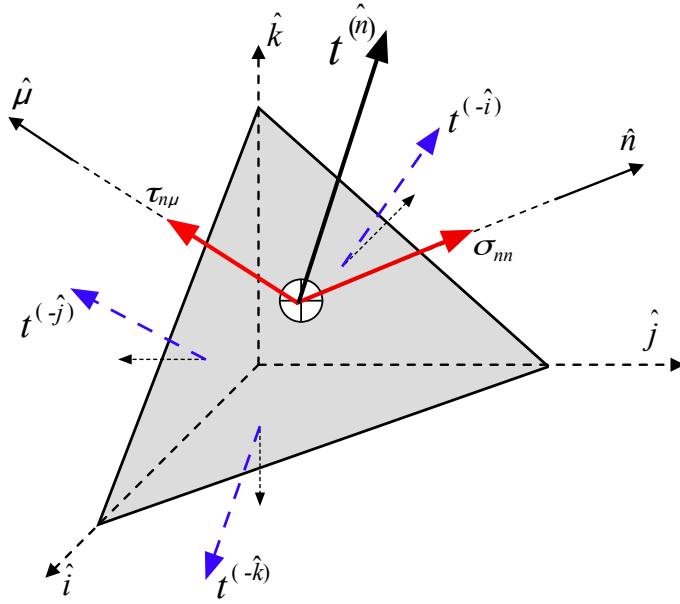
**Figura 3.6.** Transmisión de tracciones a ambos lados de una superficie pasando por el punto  $P$ .

### 3.2.4. Fuerzas por unidad de superficie sobre un plano con dirección normal $\hat{n}$

Consideremos ahora el elemento diferencial de la figura 3.7 el cual se ha construido alrededor de un punto material  $P$ . En el elemento se han realizado cortes a través de los 3 planos perpendiculares a los ejes cartesianos y con vectores normales  $-\hat{i}$ ,  $-\hat{j}$  y  $-\hat{k}$  y a través de un plano inclinado con vector normal  $\hat{n} = n_x\hat{i} + n_y\hat{j} + n_z\hat{k}$ . Sobre este plano también se traza un vector  $\hat{\nu} = \nu_x\hat{i} + \nu_y\hat{j} + \nu_z\hat{k}$  paralelo al plano. Los vectores de tracción sobre los planos cartesianos están dados por  $\vec{t}^{(-\hat{i})}$ ,  $\vec{t}^{(-\hat{j})}$  y  $\vec{t}^{(-\hat{k})}$ , mientras que el vector de tracciones sobre el plano inclinado está dado por  $\vec{t}^{(n)}$ . Si se sabe que el plano de corte tiene un vector de superficie  $d\vec{S} = dS\hat{n}$ , donde  $dS$  es el área de la sección superficial, se desea plantear las ecuaciones de equilibrio en las direcciones  $\hat{n}$  y  $\hat{\nu}$ .

Para resolver el problema será necesario convertir los vectores de tracción sobre cada una de las caras a vectores fuerza y posteriormente proyectar las fuerzas resultantes en las direcciones  $\hat{n}$  y  $\hat{\nu}$ . Denotando las componentes escalares del vector  $\vec{t}^{(n)}$  a lo largo de las direcciones  $\hat{n}$  y  $\hat{\nu}$  como  $\sigma_{nn}$  y  $\tau_{n\nu}$  respectivamente, este puede escribirse como;

$$\vec{t}^{(\hat{n})} = \sigma_{nn}\hat{n} + \tau_{n\nu}\hat{\nu}. \quad (3.6)$$



**Figura 3.7.** Elemento diferencial cortado con un plano de vector normal  $\hat{n}$  tras lo cual se expone el vector de tracciones  $\vec{t}^{(n)}$ .

Planteando primero  $\sum F_n = 0$  se tiene;

$$\sigma_{nn}dS - [\vec{t}^{(-\hat{i})} \cdot \hat{n}]dS_x - [\vec{t}^{(-\hat{j})} \cdot \hat{n}]dS_y - [\vec{t}^{(-\hat{k})} \cdot \hat{n}]dS_z = 0.$$

Ahora, expresando los vectores de tracción  $\vec{t}^{(-\hat{i})}$ ,  $\vec{t}^{(-\hat{j})}$  y  $\vec{t}^{(-\hat{k})}$  en términos de sus componentes escalares en las direcciones  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  es posible escribir la expresión anterior como:

$$\sigma_{nn}dS - (\sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z)dS_x - (\tau_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z)dS_y - (\tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z)dS_z = 0$$

finalmente, escribiendo las áreas de los planos cartesianos  $dS_x$ ,  $dS_y$  y  $dS_z$  en términos del área  $dS$  del plano inclinado de acuerdo con:

$$\begin{aligned} dS_x &= dS n_x \\ dS_y &= dS n_y \\ dS_z &= dS n_z \end{aligned}$$

se tiene que la fuerza por unidad de superficie en la dirección normal al plano de corte está dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \sigma_{xx} n_x^2 + \tau_{xy} n_x n_y + \tau_{xz} n_x n_z + \tau_{yx} n_x n_y \\ &+ \sigma_{yy} n_y^2 + \tau_{yz} n_z n_y + \tau_{zx} n_x n_z + \tau_{zy} n_y n_z + \sigma_{zz} n_z^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Procediendo de manera similar planteamos  $\sum F_\nu = 0$  como;

$$\tau_{n\nu} dS - [\vec{t}^{(-\hat{i})} \cdot \hat{\nu}] dS_x - [\vec{t}^{(-\hat{j})} \cdot \hat{\nu}] dS_y - [\vec{t}^{(-\hat{k})} \cdot \hat{\nu}] dS_z = 0.$$

y expresando nuevamente los vectores de tracción en términos de sus componentes escalares obtenemos;

$$\begin{aligned} \tau_{n\nu} dS - (\sigma_{xx} \nu_x + \tau_{xy} \nu_y + \tau_{xz} \nu_z) dS_x - (\tau_{yx} \nu_x + \sigma_{yy} \nu_y \\ + \tau_{yz} \nu_z) dS_y - (\tau_{zx} \nu_x + \tau_{zy} \nu_y + \sigma_{zz} \nu_z) dS_z = 0. \end{aligned}$$

Luego de usar nuevamente las expresiones para las áreas de las caras asociadas a los planos cartesianos en términos del área del plano inclinado de acuerdo con:

$$\begin{aligned} dS_x &= dS n_x \\ dS_y &= dS n_y \\ dS_z &= dS n_z \end{aligned}$$

se tiene que la fuerza por unidad de superficie en la dirección paralela al plano de corte está dada por:

$$\begin{aligned} \tau_{n\nu} &= \sigma_{xx} \nu_x n_x + \tau_{xy} \nu_y n_x + \tau_{xz} \nu_z n_x + \tau_{yx} \nu_x n_y \\ &+ \sigma_{yy} \nu_y n_y + \tau_{yz} \nu_z n_y + \tau_{zx} \nu_x n_z + \tau_{zy} \nu_y n_z + \sigma_{zz} \nu_z n_z. \end{aligned} \quad (3.8)$$

### 3.2.5. Tensor de tensiones

De las ecuación (3.7) y ecuación (3.8) es posible concluir que para determinar completamente el vector de tracciones  $\vec{t}^{(n)}$  en el punto material  $P$  sobre una superficie con dirección normal  $\hat{n}$  es necesario conocer los vectores de tracción  $\vec{t}^{(-\hat{i})}$ ,  $\vec{t}^{(-\hat{j})}$  y  $\vec{t}^{(-\hat{k})}$  asociados con 3 direcciones perpendiculares.<sup>3</sup>

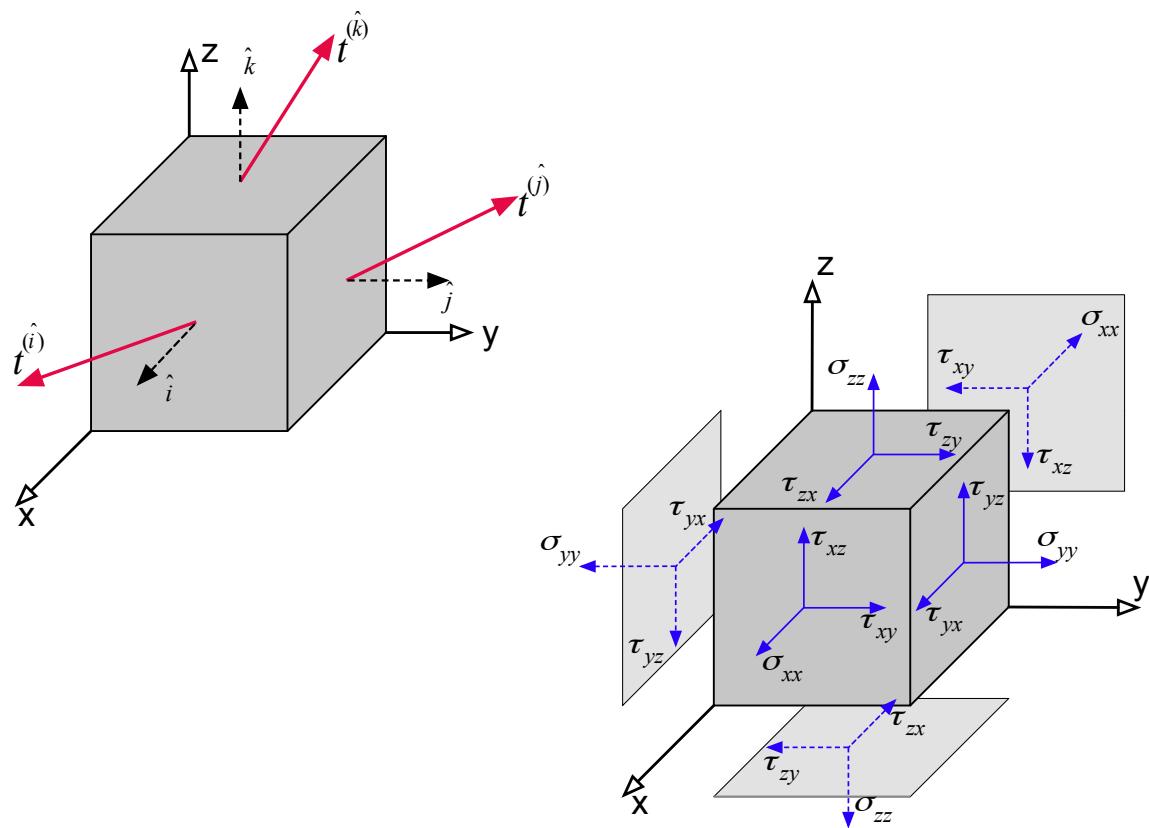
Estos 3 vectores de tracción (o equivalentemente sus respectivas componentes escalares) forman una cantidad tensorial (tensor de orden 2) denominada el tensor de tensiones. Estos permiten definir de manera completa el estado de fuerzas por unidad de superficie en asociación con cualquier dirección de un punto material del medio continuo. Es común almacenar o representar este tensor en una matriz de  $3 \times 3$  en la cual cada vector fila almacena las componentes escalares de los vectores de tracción.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

La figura 3.8 muestra estos vectores y sus componentes escalares. En dicha figura y en la representación matricial del tensor de tensiones los índices  $i$  y  $j$  en un término típico  $\sigma_{ij}$  hacen referencia al plano sobre el que está aplicado el vector de tracciones y a la dirección sobre la cual se está proyectando el mismo.

---

<sup>3</sup>Es posible demostrar que en realidad basta con conocer los 3 vectores de tracción sobre planos asociados con 3 direcciones no co-lineales y no necesariamente ortogonales. Sin embargo por conveniencia se eligen las 3 direcciones cartesianas.



**Figura 3.8.** Vectores de tracción actuando sobre los planos de un elemento diferencial en un sistema de referencia Cartesiano.

En esta representación también se han utilizado los simbolos  $\sigma$  y  $\tau$  para diferenciar las componentes normales (almacenadas en la diagonal de la matriz) y paralelas al plano (almacenadas por fuera de la diagonal de la matriz). Por ejemplo la componente  $\tau_{xy}$  hace referencia a la proyección en la dirección  $\hat{j}$  (índice y) del vector de tracciones asociado al plano con normal  $\hat{i}$  (índice x). Similarmente, la componente  $\tau_{zx}$  hace referencia a la proyección en la dirección  $\hat{i}$  (índice x) del vector de tracciones asociado al plano con normal  $\hat{k}$  (índice z).

**Cálculo del vector de tracciones sobre un plano con vector normal  $\hat{n}$  (Fórmula de Cauchy).**

En la sección anterior se derivaron las ecuación (3.7) y ecuación (3.8) las cuales permitían calcular las componentes  $\sigma_{nn}$  y  $\tau_{n\nu}$  que definían el vector de tracciones  $\vec{t}^{(n)}$  en el plano inclinado con vector normal  $\hat{n}$ , mediante las 9 componentes escalares del tensor de tensiones (o esfuerzos). Nótese que estas componentes permiten expresar el vector  $\vec{t}^{(n)}$  en el sistema de referencia  $\hat{n} - \hat{\nu}$  de acuerdo con:

$$\vec{t}^{(\hat{n})} = \sigma_{nn}\hat{n} + \tau_{n\nu}\hat{\nu}.$$

Aunque desde el punto de vista físico las componentes  $\sigma_{nn}$  y  $\tau_{n\nu}$  son bastante útiles toda vez que dan cuenta de lo que experimenta el medio a lo largo del plano en términos de tensiones normales y paralelas a este, en ocasiones resulta útil o inclusive necesario el determinar directamente el vector  $\vec{t}^{(n)}$  en el sistema de referencia  $x - y - z$  en el cual se conoce el tensor de tensiones  $\sigma_{ij}$ . Este cálculo corresponde simplemente a la proyección en la dirección  $\hat{n}$  de cada uno de los vectores  $\vec{t}^{(i)}$ ,  $\vec{t}^{(j)}$  y  $\vec{t}^{(k)}$  que definen el estado de tensiones en el punto  $P$  como se ilustra a continuación.

Primero escribimos el vector  $\vec{t}^{(n)}$  en términos de sus componentes escalares  $t_x^{(\hat{n})}$ ,  $t_y^{(\hat{n})}$  y  $t_z^{(\hat{n})}$  como:

$$\vec{t}^{(\hat{n})} = t_x^{(\hat{n})}\hat{i} + t_y^{(\hat{n})}\hat{j} + t_z^{(\hat{n})}\hat{k}.$$

Estas componentes se obtienen tras plantear y resolver las ecuaciones de equilibrio del elemento mostrado en la figura 3.7 en las direcciones  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  respectivamente. Las ecuaciones resultantes pueden escribirse de la forma:

$$t_x^{(\hat{n})} = \vec{t}^{(\hat{i})} \cdot \hat{n}$$

$$t_y^{(\hat{n})} = \vec{t}^{(\hat{j})} \cdot \hat{n}$$

$$t_z^{(\hat{n})} = \vec{t}^{(\hat{k})} \cdot \hat{n}$$

o en la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{Bmatrix} t_x^{(\hat{n})} \\ t_y^{(\hat{n})} \\ t_z^{(\hat{n})} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}. \quad (3.9)$$

La ecuación (3.9) correspondiente al producto entre el tensor de tensiones y el vector normal a una plano (o superficie de corte) se conoce como la fórmula de Cauchy. Matemáticamente ésta no es otra cosa que la proyección del tensor  $\sigma_{ij}$  a lo largo de la dirección  $\hat{n}$ . De manera condensada la ecuación (3.9) se puede escribir como:

$$\{t^{(n)}\} = [\sigma] \{n\} \quad (3.10)$$

### Ejemplo 1: Tracciones sobre un plano arbitrario a partir de $\sigma_{ij}$

El estado de tensiones sobre un punto material  $P$  de un medio continuo está dado por  $\sigma_{ij}$ . Determinar el vector de tracciones sobre un plano  $T$  definido por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Adicionalmente determinar las componentes de la tensión en la dirección normal y paralela al plano.

### Solución

Primero necesitamos determinar la ecuación del plano definido por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  y la dirección del vector normal. Recodando que la ecuación del plano esta dada por

$$ax + by + cz = d$$

donde los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  son las componentes del vector normal  $\hat{n}$ . Se tiene entonces que:

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}_{AC} \times \vec{r}_{AB}}{\|\vec{r}_{AC} \times \vec{r}_{AB}\|}$$

luego:

$$a \equiv n_x$$

$$b \equiv n_y$$

$$c \equiv n_z$$

mientras que  $d = ax_A + by_A + cz_A$ . Ahora es posible determinar el vector de tracciones sobre una superficie con vector normal  $\hat{n}$  usando la ecuación (3.9):

$$\begin{Bmatrix} t_x^{(\hat{n})} \\ t_y^{(\hat{n})} \\ t_z^{(\hat{n})} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}.$$

Para determinar las componentes normal y paralela se proyecta el vector  $\vec{t}^{(\hat{n})}$  a lo largo de  $\hat{n}$ . Si se denotan las componentes de  $\vec{t}^{(\hat{n})}$  por  $t_x^{(\hat{n})}$ ,  $t_y^{(\hat{n})}$  y  $t_z^{(\hat{n})}$  se tiene que:

$$\sigma_{nn} = \vec{t}^{(\hat{n})} \cdot \hat{n} \equiv t_x^{(\hat{n})} n_x + t_y^{(\hat{n})} n_y + t_z^{(\hat{n})} n_z$$

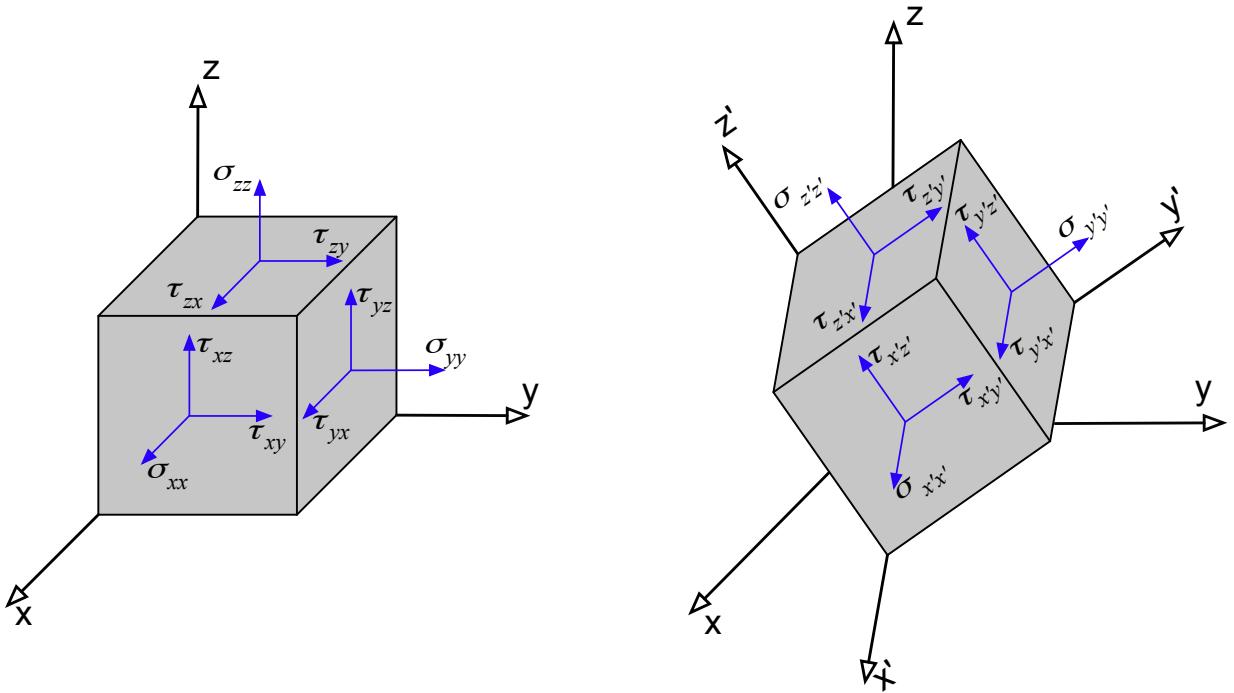
mientras que la tensión paralela al plano de corte se determina como:

$$\tau_{n\nu}^2 = \vec{t}^{(\hat{n})} \cdot \vec{t}^{(\hat{n})} - \sigma_{nn}^2$$

### 3.2.6. Transformación por rotación. Caso general

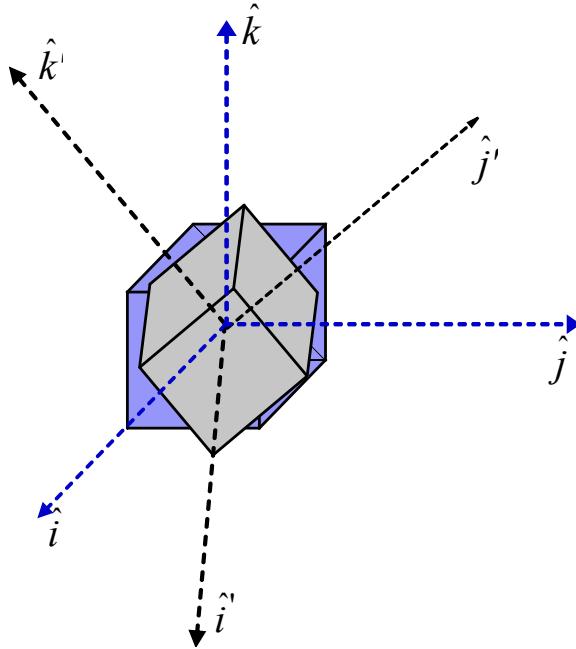
Al igual que en el caso vectorial, en varias aplicaciones será conveniente conocer la descripción del tensor de tensiones bajo la rotación de su sistema de referencia,

o más interesante aún, deseamos saber como varían las tensiones en las diferentes direcciones de un punto material del medio continuo. Este problema corresponde al problema de **transformación bajo rotación** o la determinación de las componentes del tensor de tensiones en un sistema de referencia primado  $x' - y' - z'$  a partir de las componentes en un sistema de referencia no primado  $x - y - z$ , ver figura 3.9.



**Figura 3.9.** Representación de tensor de tensiones en un sistema  $x - y - z$  y en un sistema alternativo  $x' - y' - z'$  rotado con respecto al primero.

En la figura se hace la descripción esquemática del tensor en el sistema primado y no primado respectivamente. En la sección anterior se resolvió el problema de la determinación del vector de tracciones en asocio con una dirección normal  $\hat{n}$  (ver ecuación (3.9)). Para resolver el problema de transformación bajo rotación basta con reconocer las direcciones  $\hat{i}'$ ,  $\hat{j}'$  y  $\hat{k}'$  del nuevo sistema de referencia como vectores normales a lo largo de los cuales se desea determinar los vectores de tracciones  $\vec{t}^{(i')}$ ,  $\vec{t}^{(j')}$  y  $\vec{t}^{(k')}$ . En la figura 3.10 se presentan en línea púrpura las direcciones asociadas con el sistema de referencia  $x - y - z$ , mientras que en línea negra se presentan las direcciones asociadas con el sistema de referencia primado  $x' - y' - z'$ . Denotaremos por  $\sigma$  al tensor de tensiones en el primer sistema de referencia y por  $\sigma'$  el del segundo.



**Figura 3.10.** Representación de tensor de tensiones en sistema  $x-y-z$  y  $x'-y'-z'$ .

Utilizando la ecuación (3.9), o equivalentemente la ecuación (3.10) determinemos el vector de tracciones en caras con vectores normales  $\hat{i}'$ ,  $\hat{j}'$  y  $\hat{k}'$  de acuerdo con:

$$\begin{aligned} \left\{ t^{(i')} \right\} &= [\sigma] \{ i' \} \\ \left\{ t^{(j')} \right\} &= [\sigma] \{ j' \} \\ \left\{ t^{(k')} \right\} &= [\sigma] \{ k' \} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ahora, estos vectores deben ser expresados en términos de componentes escalares en el sistema de referencia  $x' - y' - z'$  para lo cual proyectamos cada uno de ellos a lo largo de las direcciones  $\hat{i}'$ ,  $\hat{j}'$  y  $\hat{k}'$  como sigue;

$$\begin{aligned} \vec{t}^{(i')} &= [\vec{t}^{(i')} \cdot \hat{i}'] \hat{i}' + [\vec{t}^{(i')} \cdot \hat{j}'] \hat{j}' + [\vec{t}^{(i')} \cdot \hat{k}'] \hat{k}' \\ \vec{t}^{(j')} &= [\vec{t}^{(j')} \cdot \hat{i}'] \hat{i}' + [\vec{t}^{(j')} \cdot \hat{j}'] \hat{j}' + [\vec{t}^{(j')} \cdot \hat{k}'] \hat{k}' \\ \vec{t}^{(k')} &= [\vec{t}^{(k')} \cdot \hat{i}'] \hat{i}' + [\vec{t}^{(k')} \cdot \hat{j}'] \hat{j}' + [\vec{t}^{(k')} \cdot \hat{k}'] \hat{k}' \end{aligned} \quad (3.12)$$

Estas expresiones equivalen a:

$$\begin{aligned}\vec{t}^{(i')} &= \sigma_{x'x'}\hat{i}' + \tau_{x'y'}\hat{j}' + \tau_{x'z'}\hat{k}' \\ \vec{t}^{(j')} &= \tau_{y'x'}\hat{i}' + \sigma_{y'y'}\hat{j}' + \tau_{y'z'}\hat{k}' \\ \vec{t}^{(k')} &= \tau_{z'x'}\hat{i}' + \tau_{z'y'}\hat{j}' + \sigma_{z'z'}\hat{k}'.\end{aligned}$$

Finalmente si escribimos los vectores  $\hat{i}'$ ,  $\hat{j}'$  y  $\hat{k}'$  en el sistema de referencia  $x - y - z$  en términos de sus cosenos directores como:

$$\begin{aligned}\hat{i}' &= C_{x'x}\hat{i} + C_{x'y}\hat{j} + C_{x'z}\hat{k} \\ \hat{j}' &= C_{y'x}\hat{i} + C_{y'y}\hat{j} + C_{y'z}\hat{k} \\ \hat{k}' &= C_{z'x}\hat{i} + C_{z'y}\hat{j} + C_{z'z}\hat{k}\end{aligned}\tag{3.13}$$

Substituyendo las ecuación (3.11) y ecuación (3.13) en la ecuación (3.12) se tiene:

$$[\sigma'] = [C][\sigma][C]^T\tag{3.14}$$

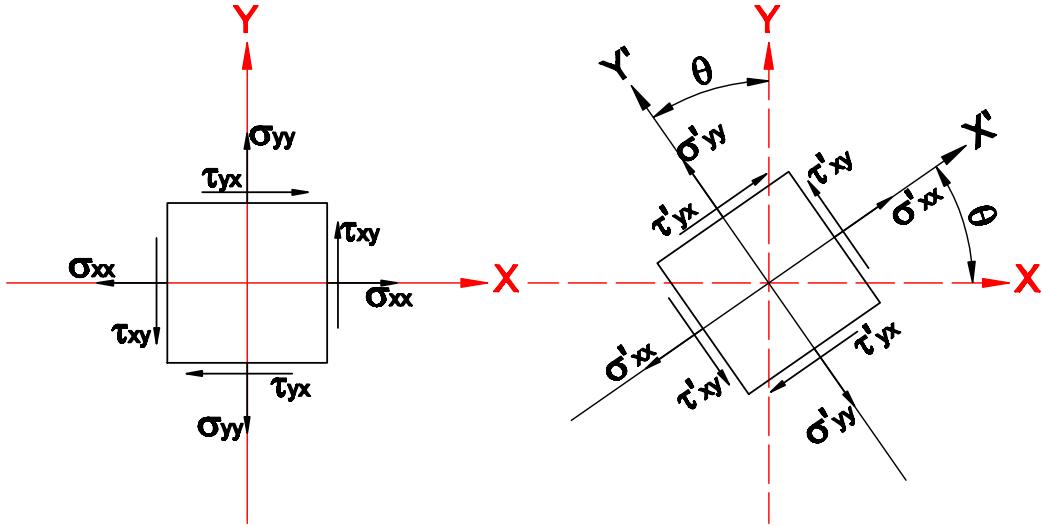
donde  $[C]$ , que es conocida como la matriz de cosenos que relacionan los dos sistemas y está dada por:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{x'x} & C_{x'y} & C_{x'z} \\ C_{y'x} & C_{y'y} & C_{y'z} \\ C_{z'x} & C_{z'y} & C_{z'z} \end{bmatrix}$$

### 3.2.7. Transformación por rotación 2D. Círculo de Mohr

En muchas aplicaciones prácticas los problemas de tensiones pueden ser estudiados mediante un análisis en dos dimensiones. Cuando éste es el caso la transformación por rotación puede ser desarrollada a partir de una herramienta gráfica conocida como el círculo de Mohr. En lo que sigue se deducen las expresiones para pasar de un

tensor con representación en un sistema  $x - y$  a su representación en un sistema primado  $x' - y'$ . En la figura 3.11 se muestra la descripción esquemática del tensor en el sistema primado y no primado respectivamente.



**Figura 3.11.** Izquierda: Tensor  $[\sigma]$  en el sistema de referencia  $x - y$ , Derecha: Tensor  $[\sigma']$  en el sistema de referencia  $x' - y'$ . El sistema de referencia  $x' - y'$  se encuentra rotado un ángulo  $\theta$  respecto a  $x - y$ .

Desarrollando de la forma expandida la ley de transformación por rotación presentada en ecuación (3.14), para el caso 2D se tiene:

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{xx} & \tau'_{xy} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta & S_\theta \\ -S_\theta & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta \\ S_\theta & C_\theta \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Desarrollando la multiplicación matricial y escribiendo las tres expresiones que definen los tres escalares  $\sigma'_{xx}$ ,  $\sigma'_{yy}$  y  $\tau'_{xy}$ :

$$\begin{aligned}\sigma'_{xx} &= \sigma_{xx}C_\theta^2 + \sigma_{yy}S_\theta^2 + 2\tau_{xy}S_\theta C_\theta \\ \sigma'_{yy} &= \sigma_{xx}S_\theta^2 + \sigma_{yy}C_\theta^2 - 2\tau_{xy}S_\theta C_\theta \\ \tau'_{xy} &= (\sigma_{yy} - \sigma_{xx})S_\theta C_\theta + \tau_{xy}(C_\theta^2 - S_\theta^2)\end{aligned}\quad (3.16)$$

Sumando la primera y la segunda en la expresión anterior se tiene:

$$\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \quad (3.17)$$

La ecuación (3.17) muestra que la suma de las componentes normales (elementos sobre la diagonal) es invariante (no cambia) bajo la rotación del sistema de referencia. Eliminando  $\sigma'_{yy}$ , se tiene:

$$\sigma'_{xx} - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(\sigma_{xx}S_\theta^2 + \sigma_{yy}C_\theta^2 - 2\tau_{xy}S_\theta C_\theta). \quad (3.18)$$

Utilizando las relaciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$$

$$\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos(2\theta)$$

$$\operatorname{sen}\theta \cos\theta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)$$

la ecuación (3.18) se puede reescribir como:

$$\sigma'_{xx} - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\left[\sigma_{xx}\frac{1 - C_{2\theta}}{2} + \sigma_{yy}\frac{1 + C_{2\theta}}{2} - \tau_{xy}S_{2\theta}\right]$$

o agrupando términos:

$$\sigma'_{xx} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}C_{2\theta} + \tau_{xy}S_{2\theta} \quad (3.19)$$

Reemplazando las identidades la tercer expresión de la ecuación (3.15) quedaría:

$$\tau'_{xy} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} S_{2\theta} + \tau_{xy} C_{2\theta} \quad (3.20)$$

Para terminar se suman los cuadrados de las ecuación (3.19) y ecuación (3.20)

$$\left[ \sigma'_{xx} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right]^2 + (\tau'_{xy})^2 = \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (3.21)$$

Comparando la ecuación (3.21) con la ecuación de un círculo,  $r^2 = x^2 + y^2$ , se puede concluir que ésta representa la ecuación de un círculo con radio  $R$  y centro  $C$  en el sistema de referencia  $\sigma - \tau$ .

$$R^2 = \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (3.22)$$

$$C = \left( \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}, 0 \right) \quad (3.24)$$

Reescribiendo la ecuación (3.21) se tiene una ecuación describe todos los vectores de tracción asociados con las infinitas direcciones del espacio para un tensor dado de acuerdo con:

$$(\sigma'_{xx} - C)^2 + (\tau'_{xy})^2 = R^2 \quad (3.25)$$

Las componentes del tensor en el espacio  $\sigma$  vs  $\tau$  corresponden a 2 puntos  $A$  y  $B$  dados por;

$$\begin{aligned} A &= (\sigma_{xx}, -\tau_{xy}) \\ B &= (\sigma_{yy}, +\tau_{xy}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

El punto  $A$  corresponde a la componente vectorial del tensor asociada con la dirección  $\hat{i}$  mientras que el punto  $B$  corresponde a la componente vectorial del tensor asociada con la dirección  $\hat{j}$ . Nótese que en la ecuación (3.26) el signo  $(-)$  que antecede a la componente  $\tau_{xy}$  del punto  $A$  es artificial. Esto equivale a distorsionar la componente vectorial asociada con la dirección  $\hat{i}$ . En la figura 3.12 se representan los puntos  $A$  y

$B$  sobre el círculo. En este caso se asume que  $\sigma_{yy} > \sigma_{xx}$  y  $\tau_{xy} > 0$ .

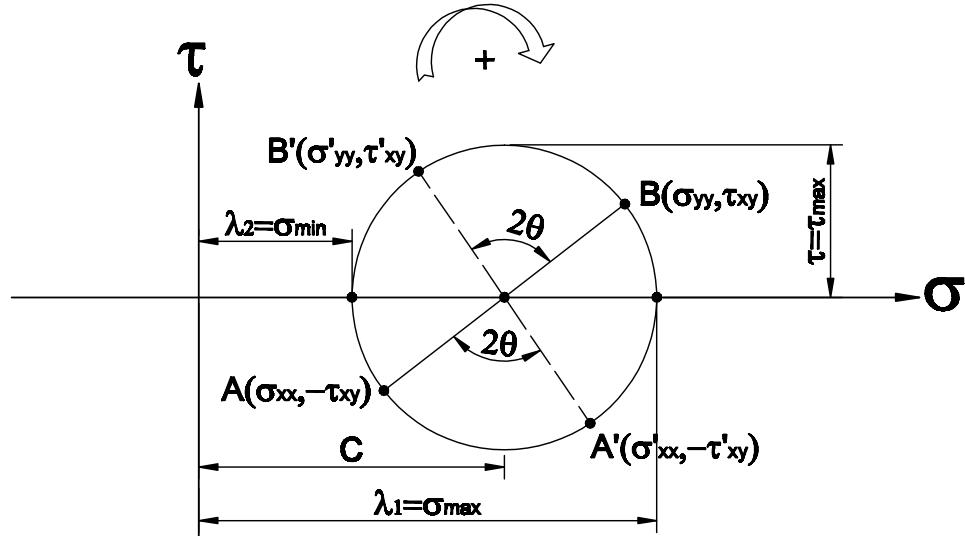


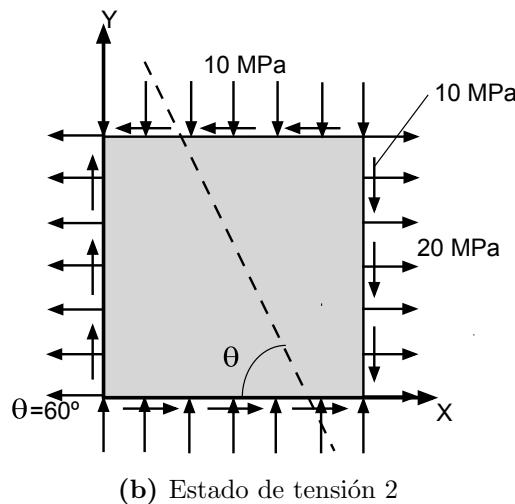
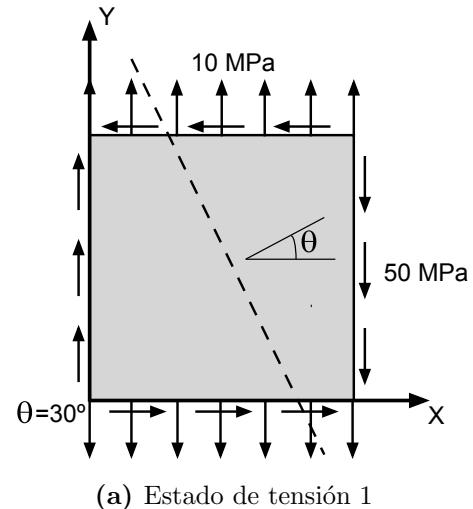
Figura 3.12. Círculo de Mohr para para  $\sigma_{yy} > \sigma_{xx}$  y  $\tau_{xy} > 0$ .

En conclusión, dado el tensor de tensiones  $\sigma_{ij}$  en el sistema de referencia  $x - y$  es posible trazar el círculo correspondiente al estado de esfuerzos en el punto mataerial y a partir de este se pueden determinar sus componentes en cualquier otra dirección. Esta aparece en el círculo con una orientación  $2\theta$  con respecto a la dirección original debido a la parametrización de las ecuaciones en la derivación misma de la ecuación del círculo. En consecuencia, un angulo de  $\theta$  en el problema físico aparece como  $2\theta$  en el círculo de Mohr.

Un problema de especial interés, y facilmente soluble con el círculo de Mohr, es el de determinar las direcciones en las cuales se presentan las máximas y mínimas tensiones normales y paralelas. Estas aparecen en el círculo de la figura 3.12 rotuladas como  $\lambda_1 = \sigma_{\max}$ ,  $\lambda_2 = \sigma_{\min}$  y  $\tau = \tau_{\max}$ .

**Ejemplo 2: Círculo de Mohr**

La figura 3.13 muestra dos estados de tensiones para el mismo punto de un medio continuo.



**Figura 3.13.** Estado de tensiones en un punto.

Para cada estado de carga mostrado en la figura 3.13a y en la figura 3.13b, respectivamente.

- Determinar los esfuerzos normales y cortantes sobre los planos mostrados con linea punteada.

**Solución:**

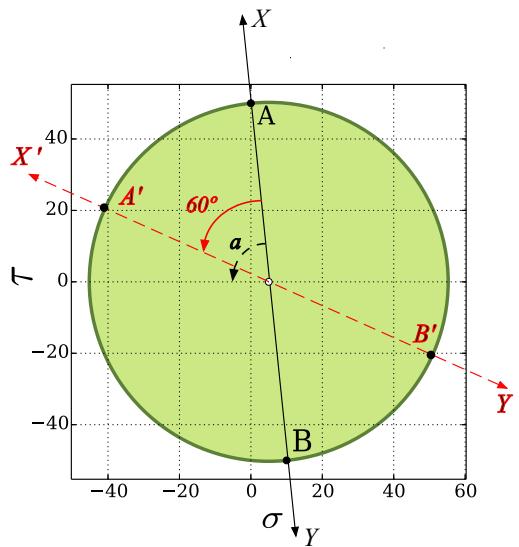
Inicialmente determinemos el tensor de tensiones para los estados 1 y 2 mostrados en la figura 3.13a y la figura 3.13b respectivamente.

$$[\sigma_1] = \begin{bmatrix} 0.0 & -50.0 \\ -50.0 & 10.0 \end{bmatrix} \quad [\sigma_2] = \begin{bmatrix} 20.0 & -10.0 \\ -10.0 & -10.0 \end{bmatrix}$$

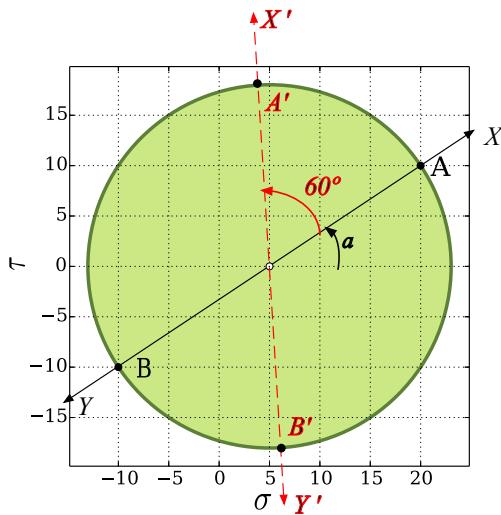
Aunque hay diversos caminos para llegar a una solución, para dar una mayor ilustración del manejo del círculo de Mohr haremos uso de esta herramienta <sup>4</sup>. En la figura 3.14a y en la figura 3.14b se muestra el círculo de Mohr para ambos estados de tensiones. Dicho estado se indica mediante la línea  $X - Y$ .

---

<sup>4</sup>Es buen ejercicio cotejar estos resultados haciendo uso del manejo matricial de la transformación.



(a) Estado de tensión 1



(b) Estado de tensión 2

**Figura 3.14.** Círculo de Mohr con tensor en sistema original  $x - y$  y sistema rotado  $x' - y'$

Para encontrar las tensiones normales y tangenciales solicitadas hacemos una rotación de  $60^\circ$  en el círculo de Mohr ( $30^\circ$  en el problema físico) en sentido contrario a las manecillas del reloj. Esta rotación se indica en el círculo de

Mohr de la figura 3.14 mediante las líneas punteadas color rojo  $X' - Y'$  que unen los puntos  $A'$  y  $B'$ . Si se lee la información de los puntos  $A'$  y  $B'$  se obtienen los tensores en el sistema  $x' - y'$ . El estado de tensiones en el sistema rotado sería entonces dado por:

$$\begin{aligned}\tau'_{xy} &= R \operatorname{sen}(\beta) \\ \sigma'_{xx} &= C - R \cos(\beta) \\ \sigma'_{yy} &= C + R \cos(\beta)\end{aligned}\quad (3.27)$$

Donde  $R$  y  $C$  son el radio y el centro del círculo de Mohr respectivamente.

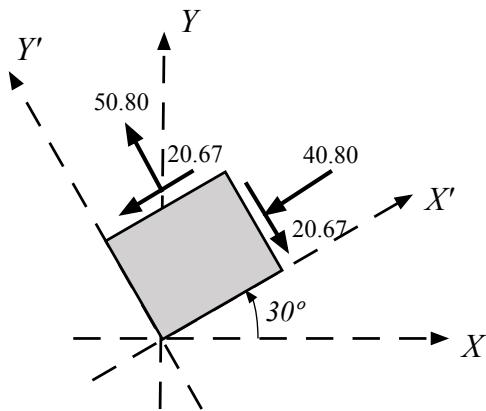
Para el estado 1  $R = 50.25$ ,  $C = 5.0$  y  $\beta = \alpha - 60^\circ$ .  $\alpha = \arctan\left(\frac{50}{5}\right)$

Para el estado 2  $R = 18.03$ ,  $C = 5.0$  y  $\beta = 180^\circ - (\alpha + 60^\circ)$ .  $\alpha = \arctan\left(\frac{10}{15}\right)$

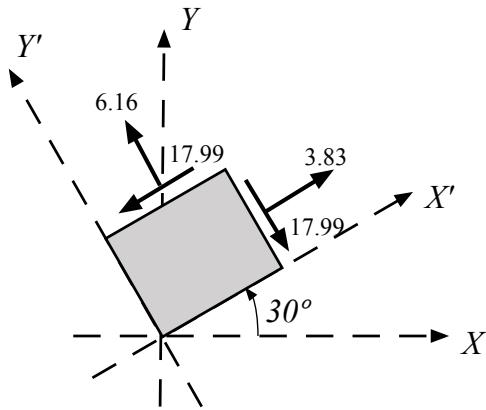
Los tensores en el sistema rotado serían:

$$[\sigma'_1] = \begin{bmatrix} -40.80 & -20.67 \\ -20.67 & 50.80 \end{bmatrix} \quad [\sigma'_2] = \begin{bmatrix} 3.83 & -17.99 \\ -17.99 & 6.16 \end{bmatrix}$$

A partir de los tensores anteriores se concluye que las tensiones normal y tangencial al plano solicitado son  $\sigma = -40.80$  y  $\tau = -20.67$  para el estado 1 y  $\sigma = 3.83$  y  $\tau = -17.99$  para el estado 2 respectivamente. En la figura 3.15a y en la figura 3.15b se representa el cubo de tensiones para cada estado.



(a) Estado de tensión 1



(b) Estado de tensión 2

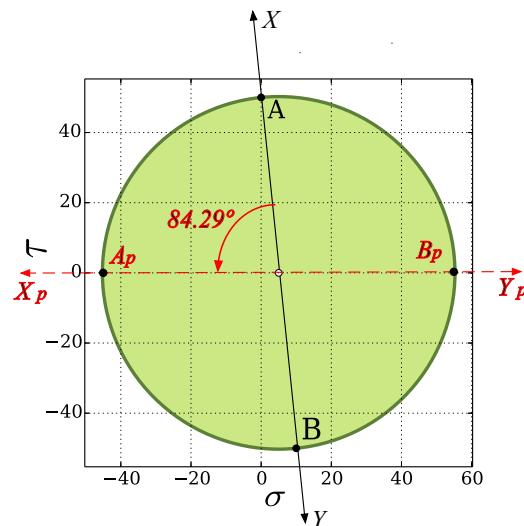
**Figura 3.15.** Cubo de Tensiones en sistema rotado  $x' - y'$ 

- Para cada uno de los estados de tensiones mostrados determinar los valores propios y las direcciones principales.

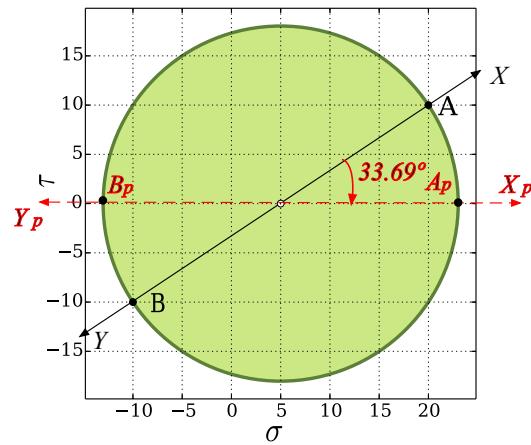
**Solución:**

Los valores principales no son otra cosa que los valores máximos axiales (normales) a los cuales está sometido el punto. Este estado se logra precisamente cuando el valor de las tensiones tangenciales es nulo. En la figura 3.16a y en la figura 3.16b se muestra en el círculo de Mohr, el sistema original  $x - y$  y el sistema principal  $x_p - y_p$ , mientras que en la figura 3.17a y en la figura 3.17b

se muestra el cubo de tensiones para el estado principal.

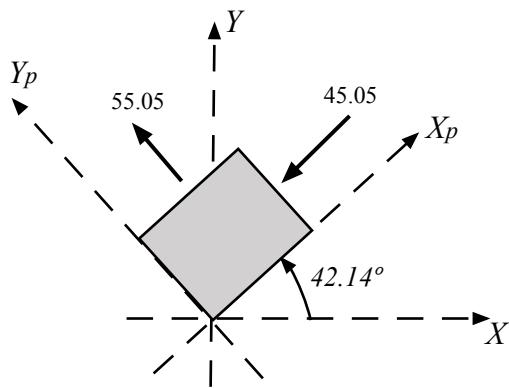


(a) Estado de tensión 1

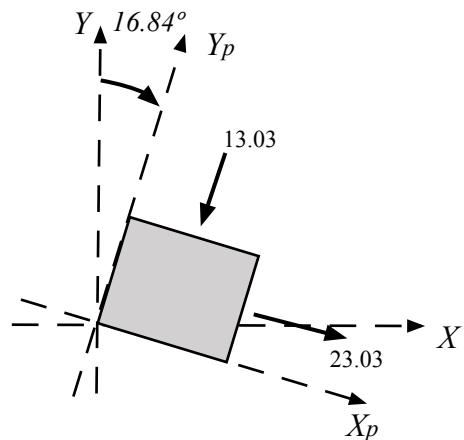


(b) Estado de tensión 2

**Figura 3.16.** Círculo de Mohr con valores máximos normales. Puntos  $A_p$ ,  $B_p$ .



(a) Estado de tensión 1



(b) Estado de tensión 2

**Figura 3.17.** Cubo de tensiones en sistema rotado  $x_p - y_p$ .

Nótese que para encontrar el estado principal 1 rotamos desde el sistema original  $xy$  un ángulo  $\alpha = \arctan\left(\frac{50}{5}\right)$  en sentido contrario a las manecillas del reloj, mientras que para el estado principal 2 rotamos un ángulo  $\alpha = \arctan\left(\frac{10}{15}\right)$

en sentido de las manecillas <sup>5</sup>. Por similitud a la ecuación (3.27) las ecuaciones para encontrar los valores se podrían escribir como:

$$\begin{aligned}\tau_{xy}^p &= R \\ \sigma_{xx}^p &= C \pm R \\ \sigma_{yy}^p &= C \mp R\end{aligned}\quad (3.28)$$

Los estados de tensiones principales quedarían escritos como:

$$[\sigma_1^p] = \begin{bmatrix} -45.25 & 0.0 \\ 0.0 & 55.25 \end{bmatrix} \quad [\sigma_2^p] = \begin{bmatrix} 23.03 & 0.0 \\ 0.0 & -13.03 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

- Asuma que ambos estados de tensiones ocurren al mismo tiempo y determine las direcciones principales y valores propios para el estado de tensiones resultantes.

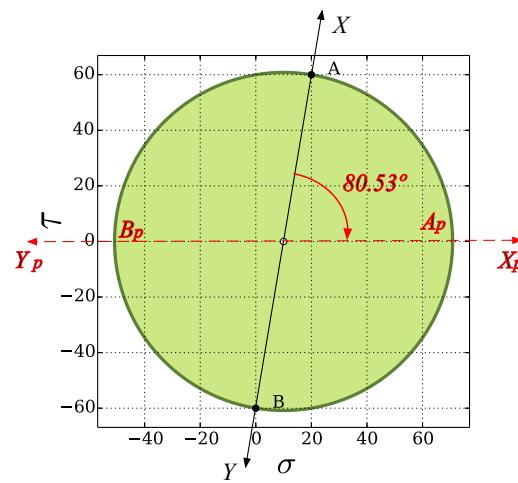
**Solución:** Para hacer superposición de los estados de tensiones ambos deben de estar en el mismo sistema de referencia. En nuestro caso se tiene que inicialmente ambos están escritos en el mismo sistema de referencia *xy*, por lo que bastará hacer la suma componente a componente de ambos tensores.

$$[\sigma_t] = \begin{bmatrix} 0.0 & -50.0 \\ -50.0 & 10.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20.0 & -10.0 \\ -10.0 & -10.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.0 & -60.0 \\ -60.0 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

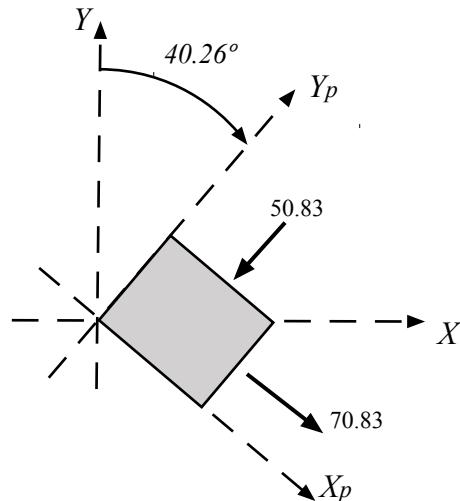
En la figura 3.18a se presenta el círculo de Mohr con el estado original producto de la superposición (línea *X* – *Y*) y el estado principal (línea *X<sub>p</sub>* – *Y<sub>p</sub>*) mientras que en la figura 3.18b se muestra el cubo de tensiones del estado principal.

---

<sup>5</sup>La rotación puede ser hecha en cualquier sentido; lo importante es no perder de vista la ubicación de los ejes y tener en cuenta que estas rotaciones coinciden en sentido con el problema físico pero que corresponden a valores de ángulo doble en el círculo



(a) Círculo de Mohr



(b) Cubo de tensiones

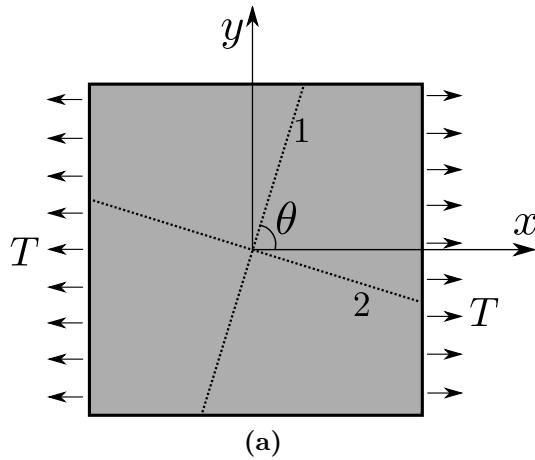
**Figura 3.18.** Estado de tensión principal superpuesto

El tensor escrito en direcciones principales es:

$$[\sigma_2^p] = \begin{bmatrix} 70.83 & 0.0 \\ 0.0 & -50.83 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

**Ejemplo 3: Planos de falla**

Un punto material en un medio continuo está sometido al estado de tensiones mostrado en la figura 3.19. Si las líneas punteadas corresponden a planos de falla del material y sabiendo que los dos planos **son perpendiculares entre sí**, se pide:

**Figura 3.19.** Estado de tensiones

- Calcular las tensiones normal y tangencial al plano 1.

**Solución:**

Escribiendo el estado de tensiones como:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para el plano 1 el vector normal es  $\hat{n}_1 = [-\sin \theta, \cos \theta]$ , y la tensión en el plano se calcula como:

$$t_1 = [\sigma] \hat{n}_1 = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$t_1 = \begin{bmatrix} -T \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

La tensión normal se calcula proyectando la tensión  $t_1$  sobre el vector  $\hat{n}_1$ ,

$$\sigma_n = t_1 \cdot \hat{n}_1 = \begin{bmatrix} -T \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \equiv T \sin^2 \theta$$

El esfuerzo tangencial se puede calcular proyectando la tensión  $t_1$  sobre un vector unitario inscrito en el plano 1. Dando como resultado:

$$\tau = T \sin \theta \cos \theta$$

- Calcular las tensiones normal y tangencial al plano 2.

**Solución:**

Siguiendo un proceso análogo al anterior, se llega a los siguientes resultados:

$$\sigma_n = T \cos^2 \theta$$

$$\tau = T \sin \theta \cos \theta$$

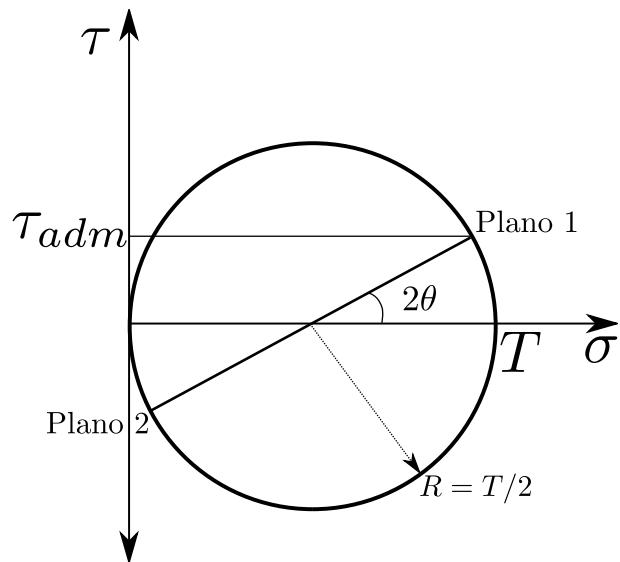
- Suponiendo que la falla va a ocurrir en alguno o en ambos planos, y que el material es infinitamente resistente a esfuerzos normales, pero no soporta esfuerzos cortantes mayores a  $\tau_{adm} = T/4$ , calcule el ángulo  $\theta$  al cual se produce la falla e indique en cuál plano se presenta la misma.

**Solución:**

Graficando el estado de tensiones como un círculo de Mohr (figura 3.20), se ubica  $\tau_{adm} = T/4$ . Luego se llega a la relación:

$$\sin 2\theta = \frac{T/4}{T/2} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{12}$$

La falla se da en cualquier plano, ya que el valor del cortante es igual en ambos por ser perpendiculares.



**Figura 3.20.** Círculo de Mohr correspondiente al Estado de tensiones de la figura 3.19

#### Ejemplo 4: Refuerzo

Un punto material de un medio continuo se encuentra sometido al estado de tensiones correspondiente al círculo de Mohr de la figura 3.21 y en el cual  $\tau_R$  es la resistencia al corte del material.

Si se requiere aplicar una tracción  $S = 3\tau_R$ , proponga una medida de mejoramiento del material, en términos de una aplicación adicional de tensiones, que garantice que éste no falle por cortante.

Del círculo de Mohr, se puede ver que la única manera de evitar que el material falle, es llevándolo a un estado de esfuerzos que no alcance  $\tau_R$ . En otras palabras, se necesita reducir el radio del círculo de Mohr. La reducción de radio necesaria se muestra en la figura 3.22.

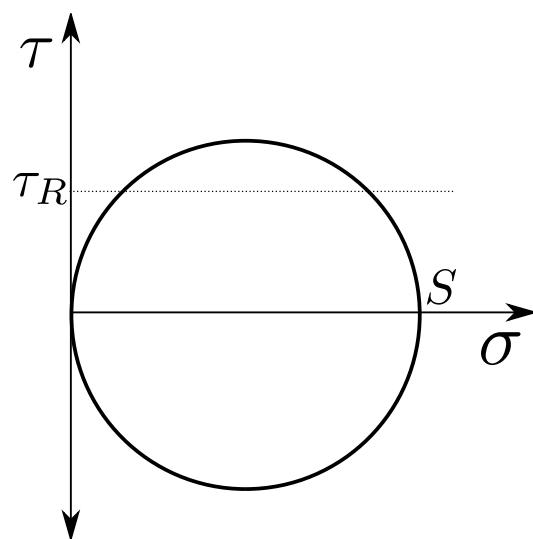
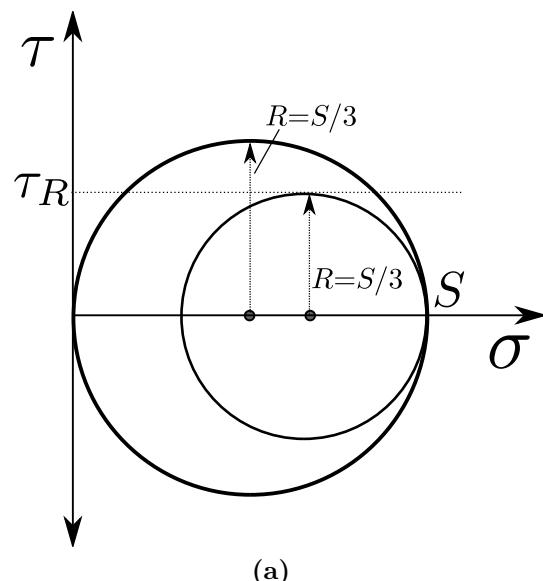


Figura 3.21. Estado de tensiones

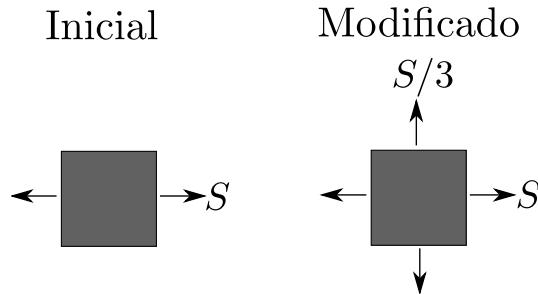


(a)

Figura 3.22. Cambio en el estado de tensiones

De la figura 3.22 se ve el radio inicial  $R = S/2$ . El radio del nuevo círculo debe ser  $R = S/3$  para que el material no falle por cortante. Entonces

$$R = \frac{S}{3} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \rightarrow \sigma_{yy} = \frac{S}{3}$$



**Figura 3.23.** Cambio en el estado de tensiones

En la figura 3.23 se ilustra le cambio en las configuraciones de tensiones.

### Ejemplo 5: Problema de Cauchy usando Python

En los enlaces:

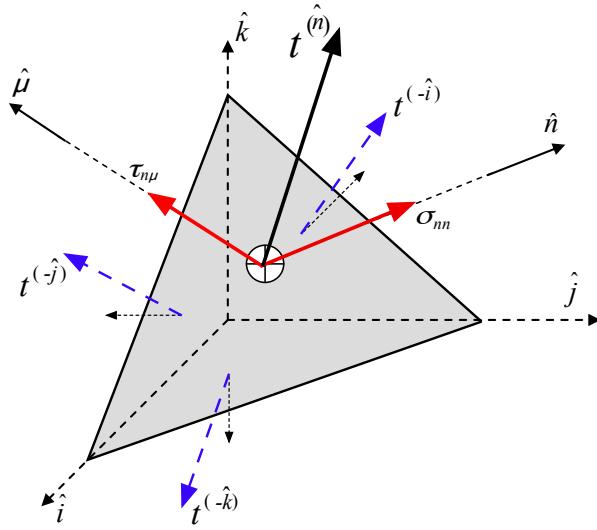
1. [http://nbviewer.ipython.org/github/casierraa/Notebooks\\_MMC/blob/master/Ej3\\_Cauchy.ipynb](http://nbviewer.ipython.org/github/casierraa/Notebooks_MMC/blob/master/Ej3_Cauchy.ipynb)
2. <https://github.com/casierraa/MMC/blob/master/Mohr2D.py>

se presenta un ejemplo adicionales relativos a la formula de Cauchy y adicionalmente se entrega un script en Python para manipulación del círculo de Mohr en 2D.

### 3.3. Valores y direcciones principales para un estado de tensiones en 3D

En la sección anterior, para el caso de estados de tensiones en 2 dimensiones (2D), identificamos direcciones o planos trazados por un punto material para los cuales el

vector de tracciones solo tenía componente en la dirección normal al plano. Mas aún, se demostró que estas componenetes correspondían a las tensiones máximas y mínimas que experimentaba el punto material. En esta sección se aborda el mismo problema para el caso de estados de tensiones en 3D.



**Figura 3.24.** Elemento diferencial cortado con un plano de vector normal  $\hat{n}$  tras lo cual se expone el vector de tracciones  $\vec{t}^{(n)}$ .

Para esto consideremos nuevamente el tetraedro de Cauchy (figura 3.24) representando el estado de tensiones en un punto material del medio continuo. Sobre este se traza un plano con vector normal externo  $\hat{n}$ . Adicionalmente, sobre este plano también trazamos un vector  $\hat{\mu}$  contenido en el plano inclinado. De otro lado, el vector de tracciones asociado con el plano inclinado se denota como  $\vec{t}^{(\hat{n})}$ . Nótese que el vector de tracciones y el vector normal  $\hat{n}$  no son colineales.

En la ecuación (3.32) el vector de tracciones se escribe en términos de sus componentes normal y paralela al plano, denotadas como  $\sigma_{nn}$  y  $\tau_{n\mu}$  respectivamente.

$$\vec{t}^{(\hat{n})} = \sigma_{nn} \hat{n} + \tau_{n\mu} \hat{\mu}. \quad (3.32)$$

De la representación anterior claramente se identifica que la máxima componente

normal  $\sigma_{nn}$  se presenta cuando las direcciones de  $\vec{t}^{(\hat{n})}$  y  $\hat{n}$  coincidan, en cuyo caso podemos escribir;

$$\vec{t}^{(\hat{n})} = \tilde{\sigma} \hat{n} \quad (3.33)$$

donde  $\tilde{\sigma}$  representa dicho valor máximo. De otro lado, tenemos que el vector  $\vec{t}^{(\hat{n})}$  también puede ser encontrado a partir del tensor de tensiones y de la dirección  $\hat{n}$  a través de la fórmula de Cauchy escrita en notación matricial como;

$$\{t^{(\hat{n})}\} = [\sigma] \{\hat{n}\}. \quad (3.34)$$

Comparando la ecuación (3.33) con la ecuación (3.34) podemos escribir;

$$[\sigma - \tilde{\sigma} I] \{\hat{n}\} = \{0\} \quad (3.35)$$

el cual corresponde a un problema de autovalores para la matriz de esfuerzos. Este problema tiene una solución no trivial ( $\hat{n} \neq 0$ ) cuando;

$$\det [\sigma - \tilde{\sigma} I] = 0.$$

En forma expandida escribimos;

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \tilde{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \tilde{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \tilde{\sigma} \end{bmatrix} = 0$$

y evaluando el determinante se tiene;

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^3 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\tilde{\sigma}^2 + (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{yy} - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2)\tilde{\sigma} - \\ (\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{xz}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2) = 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

- La ecuación (3.36) corresponde a la ecuación característica del problema de autovalores dado en ecuación (3.35).
- Dado que el tensor de tensiones es simétrico y real su ecuación característica tiene 3 raíces reales distintas denotadas como  $\tilde{\sigma}_1$ ,  $\tilde{\sigma}_2$  y  $\tilde{\sigma}_3$  y tales que  $\tilde{\sigma}_1 \geq \tilde{\sigma}_2 \geq \tilde{\sigma}_3$ .
- Los valores principales  $\tilde{\sigma}_1$ ,  $\tilde{\sigma}_2$  y  $\tilde{\sigma}_3$  corresponden a las tensiones máxima, intermedia y mínima que experimenta el punto material.
- Para cada raíz (tensión extrema) de la ecuación característica existe una dirección asociada  $\hat{n}$  la cual se encuentra usando la ecuación (3.35) y la condición  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ .

De otro lado, considerando que la ecuación (3.36) da como solución las tensiones principales  $\tilde{\sigma}_1$ ,  $\tilde{\sigma}_2$  y  $\tilde{\sigma}_3$  necesariamente se tiene que los coeficientes deben ser independientes del sistema de referencia en que se tenga el tensor de tensiones. De lo anterior se tiene que la ecuación característica se puede escribir como;

$$\tilde{\sigma}^3 - I_\sigma \tilde{\sigma}^2 + II_\sigma \tilde{\sigma} - III_\sigma = 0$$

donde;

$$\begin{aligned} I_\sigma &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\ II_\sigma &= \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{yy} - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 \\ III_\sigma &= \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{xz}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2 \end{aligned}$$

son constantes independientes del sistema de referencia<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup>Estas constantes se denominan los invariantes del tensor de tensiones y juegan un papel análogo a la magnitud de un vector la cual permanece constante independientemente del sistema de referencia en el que se escriba el vector

## Ejemplo 6: cálculo de valores principales

Consideremos el siguiente estado de tensiones con componentes correspondientes a un sistema de referencia  $x - y - z$ ;

$$\sigma = \begin{bmatrix} 200 & 100 & 300 \\ 100 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se pide determinar las tensiones principales y sus direcciones asociadas.

La ecuación característica esta dada por;

$$\tilde{\sigma}^3 - 200\tilde{\sigma}^2 - 100000\tilde{\sigma} = 0$$

donde identificamos los 3 invariantes como;

$$I_\sigma = 200$$

$$II_\sigma = -100000$$

$$III_\sigma = 0.$$

Resolviendo la ecuación característica determinamos las tensiones principales  $\tilde{\sigma}_1 = 432$ ,  $\tilde{\sigma}_2 = 0$  y  $\tilde{\sigma}_3 = -232$ .

La dirección asociada con la tensión  $\tilde{\sigma}_1 = 432$  resulta de resolver;

$$\begin{bmatrix} -232 & 100 & 300 \\ 100 & -432 & 0 \\ 300 & 0 & -432 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

y

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1.$$

De la segunda y tercera ecuación se tiene;

$$n_y = \frac{100}{432} n_x$$

y

$$n_z = \frac{300}{432} n_x.$$

Usando estas en  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$  se tiene que;

$$n_x = \pm 0.807$$

mientras que  $n_y = 0.187$  y  $n_z = 0.560$ . Por lo tanto la dirección asociada con la tensión principal  $\tilde{\sigma}_1 = 432$  corresponde al vector  $\hat{n}^1 = 0.807\hat{i} + 0.187\hat{j} + 0.560\hat{k}$ .

Similarmente, resolviendo para  $\tilde{\sigma}_2 = 0$  se tiene;

$$\begin{bmatrix} 200 & 100 & 300 \\ 100 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

De la segunda (o la tercera)  $n_x = 0$  mientras que de la primera  $n_y = -3n_z$ . Finalmente de la condición  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$  se tiene que la dirección asociada con la tensión principal  $\tilde{\sigma}_2 = 0$  corresponde a  $\hat{n}^2 = -948\hat{j} + 0.316\hat{k}$ .

Finalmente para la tensión principal  $\tilde{\sigma}_3 = -232$  resolvemos;

$$\begin{bmatrix} 432 & 100 & 300 \\ 100 & 232 & 0 \\ 300 & 0 & 232 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

De la segunda y la tercera se tiene que  $n_y = -\frac{100}{231}n_x$  y  $n_z = -\frac{300}{231}n_x$  mientras que de la condición  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$  se tiene que la dirección asociada con la tensión principal  $\tilde{\sigma}_3 = -232$  corresponde a  $\hat{n}^3 = 0.592\hat{i} - 0.255\hat{j} - 0.766\hat{k}$ .

Nótese que en el paso final del cálculo de las direcciones principales  $\hat{n}^1$ ,  $\hat{n}^2$  y  $\hat{n}^3$  se uso la condición  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$  para determinar una de las componentes a partir de las cuales era posible determinar las 2 restantes.

Por ejemplo en el caso de  $\tilde{\sigma}_1 = 432$  esta condición arrojó como resultado  $n_x = \pm 0.807$ . Para determinar las componentes  $n_y$  y  $n_z$  usamos las relaciones  $n_y = \pm \frac{100}{432}n_x$  y  $n_z = \pm \frac{300}{432}n_x$  sobre las cuales trasladamos los 2 posibles signos de  $n_x$ . Lo anterior indica que las direcciones principales corresponden a vectores con direcciones opuestas lo cual es equivalente a observar de manera simultánea las tracciones sobre la dirección positiva y negativa del punto material. Por ejemplo, en el caso de la tensión principal  $\tilde{\sigma}_1 = 432$  obtenemos las direcciones  $\hat{n}^1 = 0.807\hat{i} + 0.187\hat{j} + 0.560\hat{k}$  y su opuesta  $-\hat{n}^1 = -0.807\hat{i} - 0.187\hat{j} - 0.560\hat{k}$ .

### Tarea

Comprobar la ortogonalidad de las direcciones principales. Transformar el tensor de tensiones al sistema de referencia determinado por las direcciones principales y verificar que el tensor se diagonaliza en dicha dirección.

Con los tres valores principales  $\tilde{\sigma}_1$ ,  $\tilde{\sigma}_2$  y  $\tilde{\sigma}_3$  es posible realizar una representación plana del problema de tensión en 3D tal y como se muestra en figura 3.25. Estos círculos tienen centro y radio dados por;

$$\begin{aligned}\sigma_c^I &= \frac{\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_3}{2} \\ \sigma_c^{II} &= \frac{\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2}{2} \\ \sigma_c^{III} &= \frac{\tilde{\sigma}_2 + \tilde{\sigma}_3}{2}\end{aligned}$$

$$R_I = \frac{\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_3}{2}$$

$$R_{II} = \frac{\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2}{2}$$

$$R_{III} = \frac{\tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_3}{2}$$

Es claro que para poder graficar el círculo de Mohr en 3D es necesario resolver primero el problema de tensiones y direcciones principales. Aunque una vez disponible, el círculo se puede usar para localizar el estado de tensiones en otras direcciones (intersección de los 3 radios) por el momento solo se hará uso del mismo para calcular el cortante máximo.

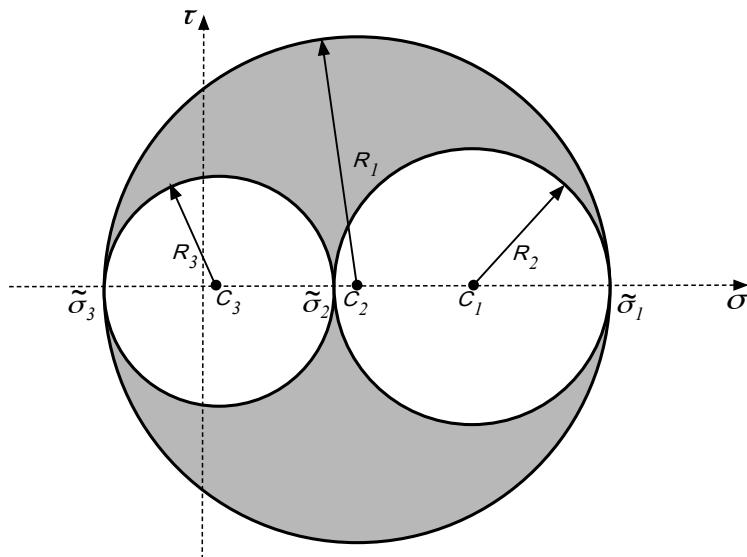


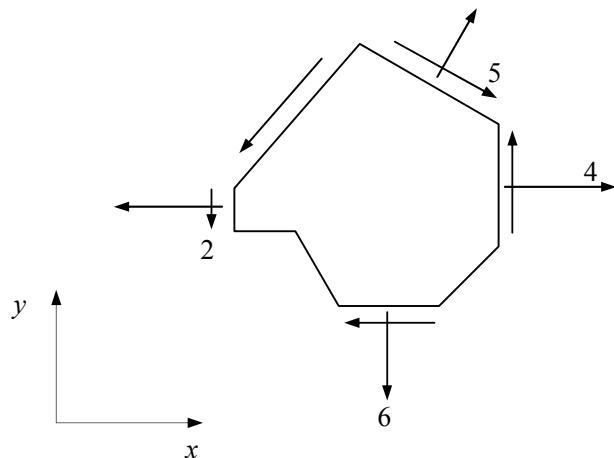
Figura 3.25. Círculo de Mohr

De figura 3.25 es importante resaltar que el esfuerzo cortante máximo está dado por:

$$\tau_{max} = \frac{\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_3}{2}$$

### 3.4. Ejercicios

1. La figura 3.26 muestra el estado de tensión en un punto  $P$  del Medio Continuo para varias direcciones:<sup>7</sup>



**Figura 3.26.** Estado de tensiones en el punto en diferentes direcciones.

- Obtener el estado de tensiones  $[\sigma]$  en el punto  $P$  del Medio Continuo.
  - Representar el estado de tensiones mediante el círculo de Mohr.
  - Hallar las tensiones normales máximas y la dirección en la que se presentan.
  - Utilizando el círculo de Mohr, hallar las tensiones cortantes máximas y la dirección en la que se presentan.
  - Hallar el esfuerzo cortante máximo.
  - Encontrar el estado de tensiones en un sistema de referencia cartesiano que se encuentra rotado  $30^\circ$  respecto al sistema mostrado en la figura.
  - En la figura 3.26 uno de los valores de corte presentado no es correcto. ¿Diga cual es y por que?
2. Las componentes del tensor de tensiones en un punto  $P$  son:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

<sup>7</sup>Tomado del problema 3.12 en Chávez, E. Problemas resueltos de mecánica del medio Continuo

Encontrar:

- El vector de tracción  $\mathbf{t}$  en  $P$  para un plano normal al eje  $x_1$ ;
  - El vector de tracción  $\mathbf{t}$  en  $P$  para un plano cuya normal es  $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$ ;
  - El vector de tracción  $\mathbf{t}$  en  $P$  para el plano  $2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ ;
3. La figura 3.27 muestra dos estados de tensiones para el mismo punto de un medio continuo. Tomado del problema 4.8 en Reddy, J.N (2010). An introduction to continuum mechanics

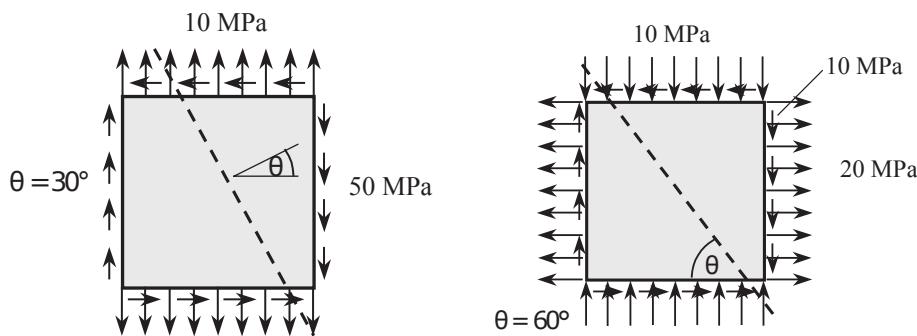
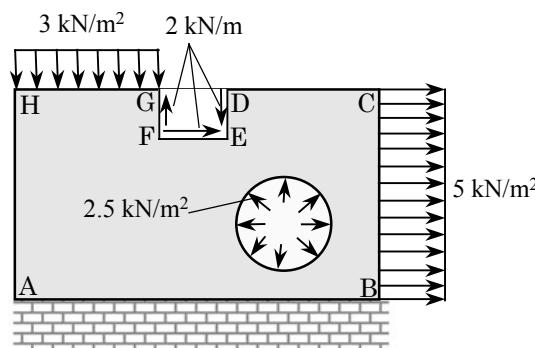


Figura 3.27. Estado de tensiones en un punto.

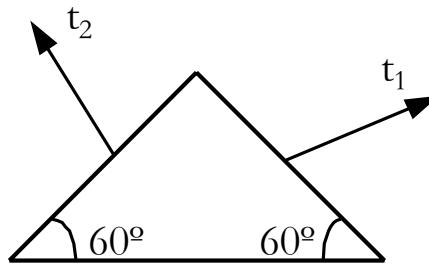
- Determinar los esfuerzos normales sobre los planos mostrados con linea punteada en las figuras para cada uno de los estados.
- Determinar los esfuerzos cortantes sobre los planos mostrados con linea punteada en las figuras para cada uno de los estados.
- Para cada uno de los estados de tensiones mostrados determinar los valores propios y las direcciones principales.
- Asuma que ambos estados de tensiones ocurren al mismo tiempo y determine las direcciones principales y valores propios para el estado de tensiones resultantes.
- Para el estado de tensiones resultante de sumar los estados mostrados, determinar el estado de tensiones en un sistema de referencia que se encuentra a  $90^0$  del mostrado en la figura.
- Para el estado de tensiones resultante de sumar los estados mostrados, determinar el estado de tensiones en un sistema de referencia que se encuentra a  $180^0$  del mostrado en la figura.

- g) Para el estado de tensiones resultante de sumar los estados mostrados, determinar el estado de tensiones en un sistema de referencia que se encuentra a  $270^0$  del mostrado en la figura.
- h) Para el estado de tensiones resultante de sumar los estados mostrados, determinar el estado de tensiones en un sistema de referencia que se encuentra a  $45^0$  del mostrado en la figura.
4. La figura 3.28 muestra un cuerpo sometido a diferentes tensiones en la superficie del mismo. Escribir el vector de tensiones en cada una de las superficies del medio continuo.<sup>8</sup>



**Figura 3.28.** Medio Continuo sometido a diferentes tensiones en su superficie.

5. En la figura 3.29 se dan las tensiones  $\vec{t}_1$  y  $\vec{t}_2$  en dos planos no perpendiculares:



**Figura 3.29.** Estado de tensiones en un punto.

<sup>8</sup>Tomado del problema 4.2 en Reddy, J.N (2010). An introduction to continuum mechanics

- a) Hallar el tensor de tensiones  $[\sigma]$  en el sistema  $x-y$  (horizontal y vertical), si  $\vec{t}_1 = 4\hat{i} + 2\sqrt{3}\hat{j}$  y  $\vec{t}_2 = -2\hat{i} + 0\hat{j}$ .
6. La figura 3.30 muestra dos estados de tensiones para el mismo punto de un medio continuo.

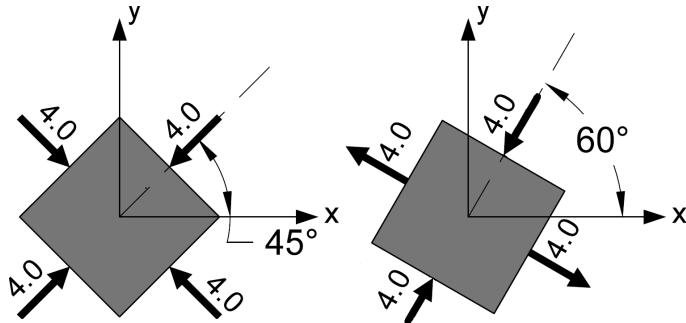


Figura 3.30. Estados de tensiones en un punto.

- Para cada uno de los estados de tensiones mostrados determinar los valores propios y las direcciones principales.
- Asuma que ambos estados de tensiones ocurren al mismo tiempo y determine las direcciones principales y valores propios para el estado de tensiones resultantes.
- Para el estado de tensiones resultante de sumar los estados mostrados, determinar el estado de tensiones en un sistema de referencia que se encuentra a  $90^\circ$  del mostrado en la figura.
- Para el estado de tensiones resultante de sumar los estados mostrados, determinar el estado de tensiones en un sistema de referencia que se encuentra a  $180^\circ$  del mostrado en la figura.
- Para el estado de tensiones resultante de sumar los estados mostrados, determinar el estado de tensiones en un sistema de referencia que se encuentra a  $270^\circ$  del mostrado en la figura.
- Para el estado de tensiones resultante de sumar los estados mostrados, determinar el estado de tensiones en un sistema de referencia que se encuentra a  $45^\circ$  del mostrado en la figura.

7. El tensor de tensiones en el punto  $P$  está definido como

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 1 \\ -4 & 3 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcular el vector de tracción en el punto  $P$  según la normal del plano ABC (ver figura figura 3.31) y descompongalo en su componente normal y tangencial

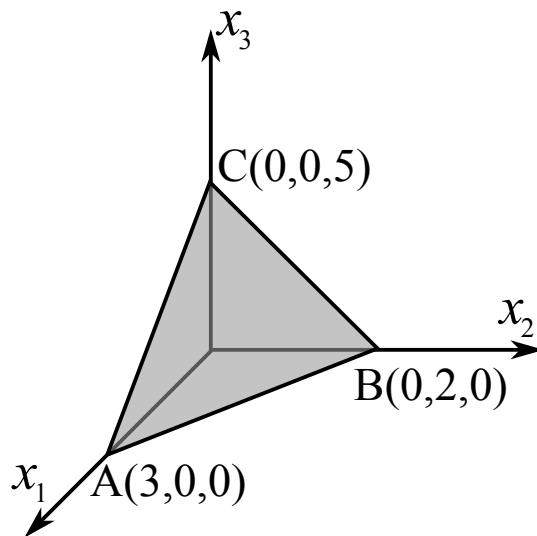


Figura 3.31

8. Escribir el tensor de tensiones y hacer la representación en el círculo de Mohr para los siguientes caso:
- Caso unidimensional, estado de carga de tracción.
  - Caso unidimensional, estado de carga de compresión.
  - Caso bidimensional, estado de carga de tracción.
  - Caso bidimensional, estado de corte puro.
9. Para un prisma rectangular con sección transversal  $A$ , calcular el tensor de esfuerzos de Cauchy en un punto en el interior si se somete a una fuerza  $f$  distribuida uniformemente en la parte superior (ver figura 3.32). Para  $A = 1 \text{ m}^2$  y  $f = 1000 \text{ kgf/m}^2$  calcular el valor y la dirección de los cortantes máximos.

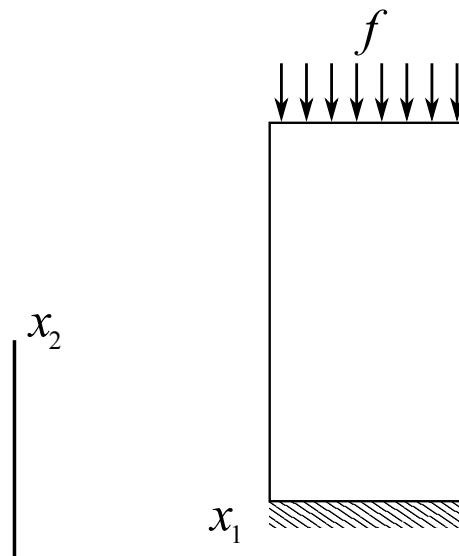


Figura 3.32

10. En la figura 3.33 se dan las tensiones para un mismo punto, estados I y II: <sup>9</sup>

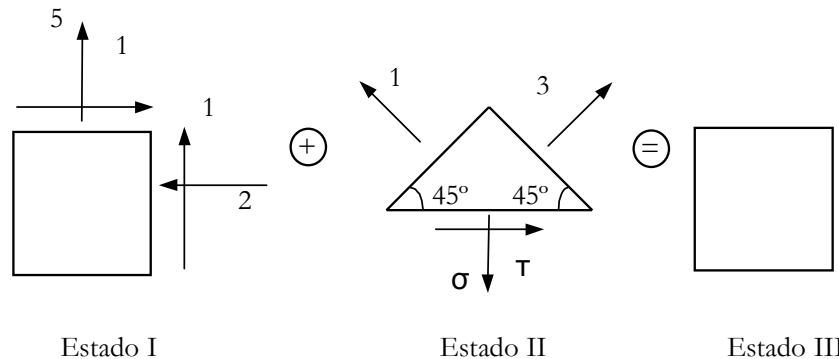


Figura 3.33. Estado de tensiones en un punto.

- a) Hallar el estado de tensiones III si el estado I y II ocurren al mismo tiempo.
11. La figura 3.34a corresponde al montaje de la prueba de laboratorio de compresión simple usada para determinar la resistencia del concreto.

<sup>9</sup>Tomado del ejemplo 4.4 en Olivella, X; Saracíbar, C (2000). Mecánica de Medios Continuos para ingenieros

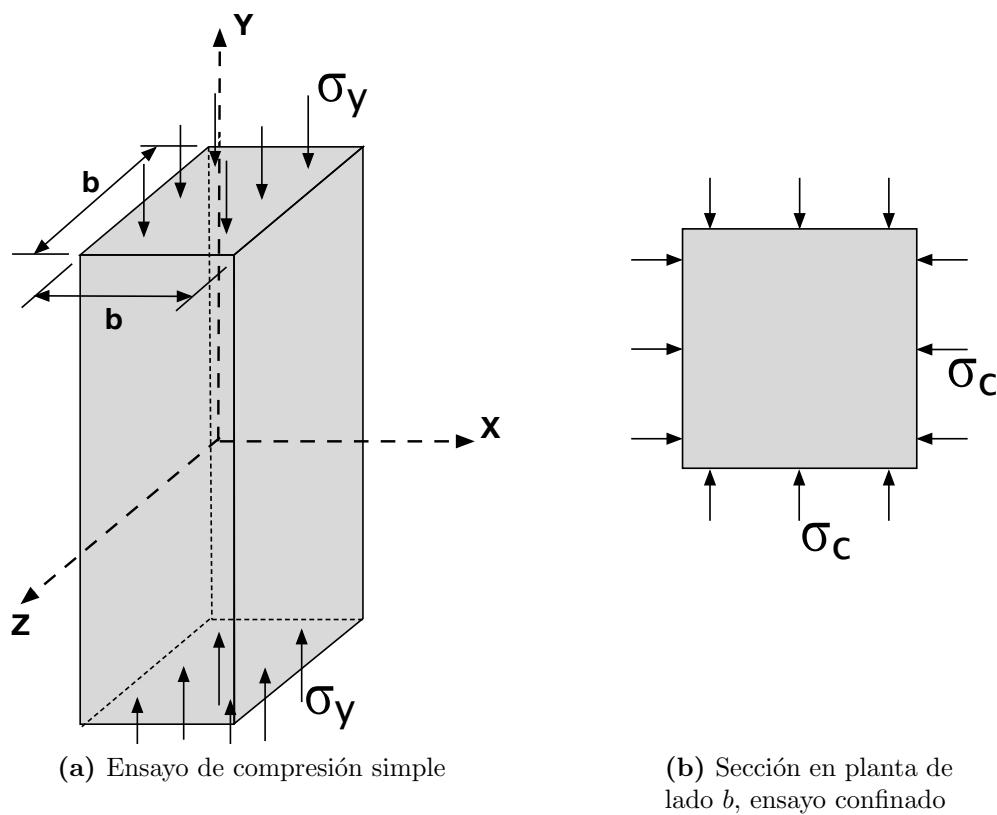
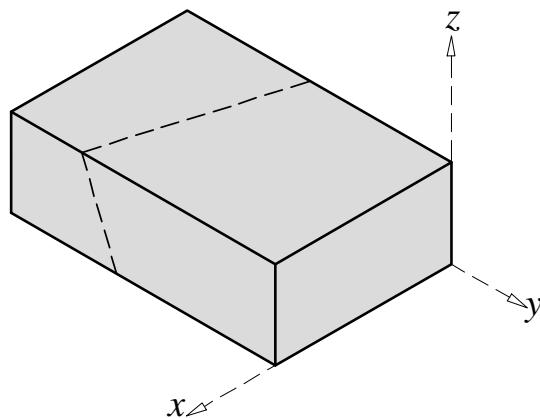
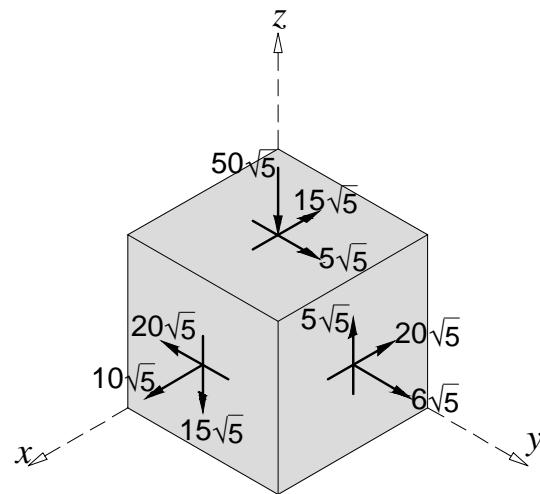


Figura 3.34. Columna en ensayo de compresión

- a) Hallar la tensión normal  $\sigma_y$  mínima que produce la falla a cortante en el modelo presentado en la figura 3.34a, sabiendo que la capacidad máxima del material ante esfuerzos de corte es  $\tau_{max} = A$ .
- b) Chequear el equilibrio diferencial (local) de la probeta del ensayo.
- c) Si ahora se hace el mismo ensayo pero con confinamiento perimetral como el mostrado en la figura 3.34b, determine el valor mínimo del esfuerzo de confinamiento  $\sigma_c$  para obtener un esfuerzo axial máximo  $\sigma_y = 10A$  y un cortante máximo  $\tau_{max} = A$ .
12. En la figura 3.35a se muestra un bloque macizo de arcilla que se extrajo temporalmente de un muro estructural. Por efecto de funcionamiento del muro, todos los puntos al interior del bloque se ven sometidos al estado de esfuerzos presentado en la figura 3.35b.



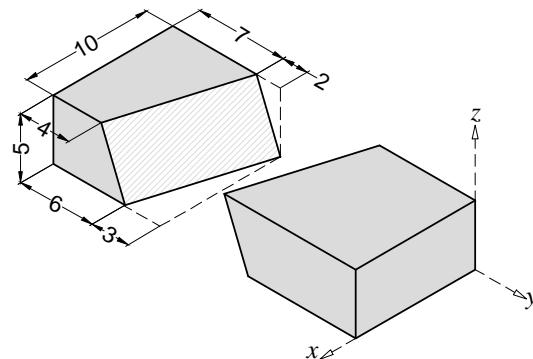
(a) Bloque macizo de arcilla extraído del muro estructural



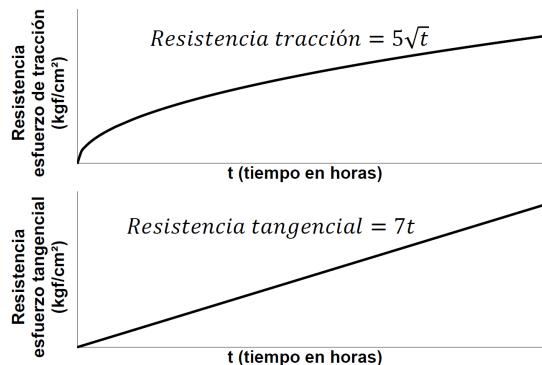
(b) Esfuerzos en cualquier punto del bloque ( $kgf/cm^2$ ).

**Figura 3.35**

Para examinar el bloque, este fue cortado como se muestra en la figura 3.36a, y para colocarlo nuevamente en el muro, las dos piezas en que fue dividido se unirán con un pegamento, que con el tiempo incrementa su resistencia ante esfuerzos tangenciales y esfuerzos de tracción, tal como se muestra en la figura 3.36b



(a) Bloque seccionado.



(b) Resistencia del pegamento.

Figura 3.36

- a) Determine cuál es el tiempo mínimo que se debe esperar tras aplicar el pegamento para poder colocar el bloque nuevamente en el muro sin que falle.
13. La figura 3.37 muestra el estado de tensiones en un punto al interior de un Medio Continuo. Sobre la cara asociada al eje  $y'$  se dan las tensiones  $\sigma_{y'y'}$  y  $\tau_{y'x'}$  y sobre la cara asociada al eje  $x'$  se da el vector de tracciones expresado en el sistema de referencia  $x - y$ .

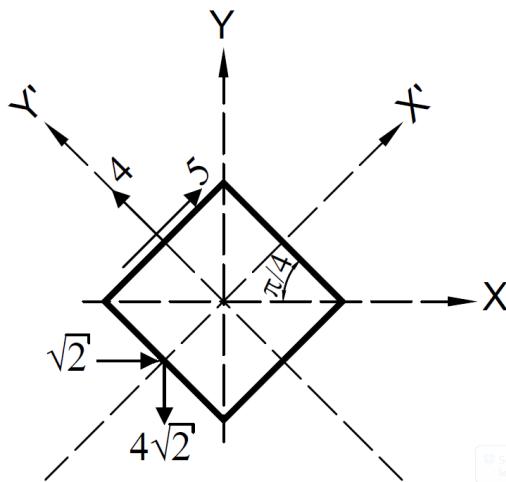


Figura 3.37. Estado de tensiones en un punto al interior de un medio continuo.

- a) Escribir el tensor de tensiones en el sistema de referencia  $x' - y'$ .  
 b) Escribir el tensor de tensiones en el sistema de referencia  $x - y$ .
14. A continuación se presenta el tensor de esfuerzos para un punto de un medio continuo en el sistema de referencia  $x - y - z$ .

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Escriba el tensor de esfuerzos  $\sigma'$  asociado al mismo punto del medio continuo pero en el sistema de referencia cuyos ejes coordenados  $x' - y' - z'$  están descritos por los siguientes vectores unitarios:

$$\hat{e}_{x'} = \cos(\pi)\hat{i} + \cos(\pi/2)\hat{j} + \cos(\pi/2)\hat{k}$$

$$\hat{e}_{y'} = \cos(\pi/2)\hat{i} + \cos(\pi)\hat{j} + \cos(\pi/2)\hat{k}$$

$$\hat{e}_{z'} = \cos(\pi/2)\hat{i} + \cos(\pi/2)\hat{j} + \cos(2\pi)\hat{k}$$

15. La figura 3.38 muestra el estado de tensiones en un punto al interior de un Medio Continuo en el sistema de referencia  $x - y$ . Adicionalmente en ésta figura se muestra el sistema de referencia  $x' - y'$  que se encuentra rotado y desplazado respecto al sistema  $x - y$ . ¿Cuál de las siguientes respuestas representa correctamente el tensor en el sistema de referencia  $x' - y'$ ?

- a)  $[\sigma] = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -c \end{bmatrix}$
- b)  $[\sigma] = \begin{bmatrix} -c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$
- c)  $[\sigma] = \begin{bmatrix} -c - w & -b - (w + z) \\ -b - (w + z) & a - z \end{bmatrix}$
- d)  $[\sigma] = \begin{bmatrix} a - w & b - (w + z) \\ b - (w + z) & -c - z \end{bmatrix}$
- e)  $[\sigma] = \begin{bmatrix} -c & b \\ b & a \end{bmatrix}$

f) Ninguno de los tensores presentados en las opciones de la (a) a la (g).

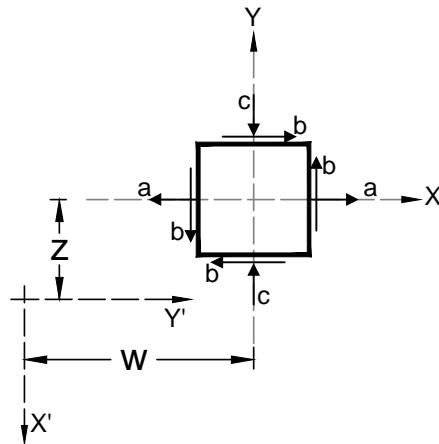
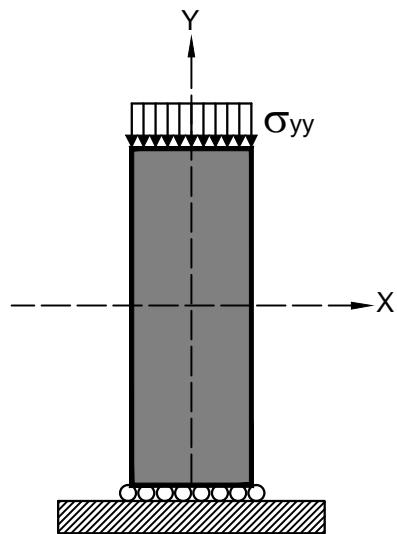
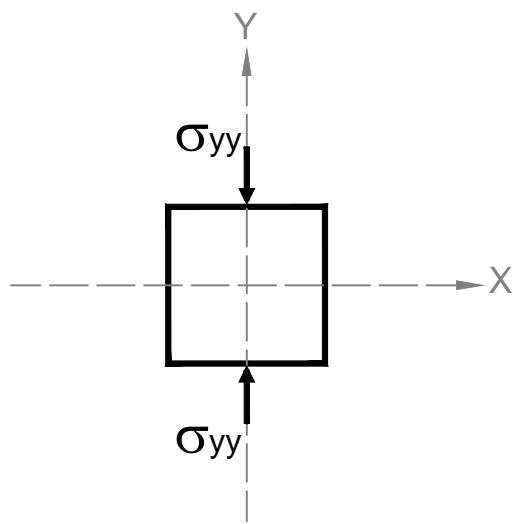


Figura 3.38. Estado de tensiones en un punto al interior de un medio continuo.

16. Se quiere someter una columna a una tensión de compresión uniforme de  $100 \text{ kgf/cm}^2$  en su superficie superior, ver la ??, y se dispone sólo de cinco materiales diferentes cuyas capacidades máximas se relacionan en el cuadro cuadro 3.1:



(a) Columna sometida a una tensión de compresión  $\sigma_{yy}$ .



(b) Tensor de tensiones en cualquier punto al interior de la columna.

**Figura 3.39.** ColComp

	Material 1	Material 2	Material 3	Material 4	Material 5
Capacidad Máxima a Cortante	40	60	40	160	50
Capacidad Máxima a Tracción	100	60	10	20	10
Capacidad Máxima a Compresión	120	60	110	80	80

**Cuadro 3.1.** Esfuerzos máximos soportados por los materiales en  $kgf/cm^2$ .

Seleccione cual o cuales de las siguientes afirmaciones son correctas.

- a) La columna no fallaría si se construye con el Material 1.
  - b) La columna no fallaría si se construye con el Material 2.
  - c) La columna no fallaría si se construye con el Material 3.
  - d) La columna no fallaría si se construye con el Material 4.
  - e) La columna no fallaría si se construye con el Material 5.
  - f) La columna no fallaría si se construye con cualquiera de los materiales.
  - g) La columna fallaría si se construye con cualquiera de los materiales.
  - h) La columna no fallaría si se construye con el Material 1 o con el Material 4.
17. En las figura 3.40a y figura 3.40b se muestra una viga empotrada en su extremo izquierdo y sometida a cargas distribuidas,  $a$ , y  $b$ , respectivamente, sobre las caras indicadas.

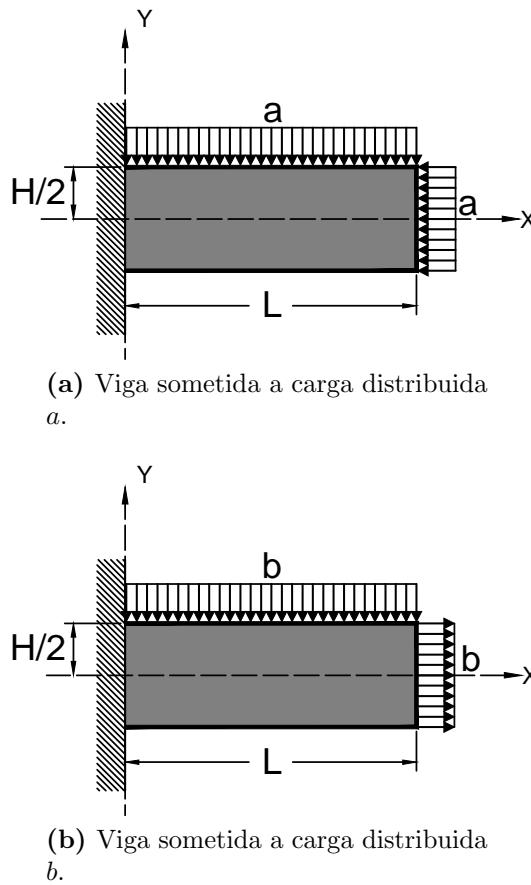


Figura 3.40

Se quiere estudiar los esfuerzos en el punto de coordenadas  $(L, H/2)$ , para lo cual se pide:

- a) Para cada uno de las vigas y sobre los cortes mostrados en la figura 3.41a indicar la dirección y el valor del esfuerzo normal y tangencial sobre las 6 caras presentadas.
- b) Para cada uno de las vigas calcule los vectores de tracciones en el sistema de referencia  $XY$  sobre las 6 caras indicadas, e ilústrelos completamente en la figura 3.41b

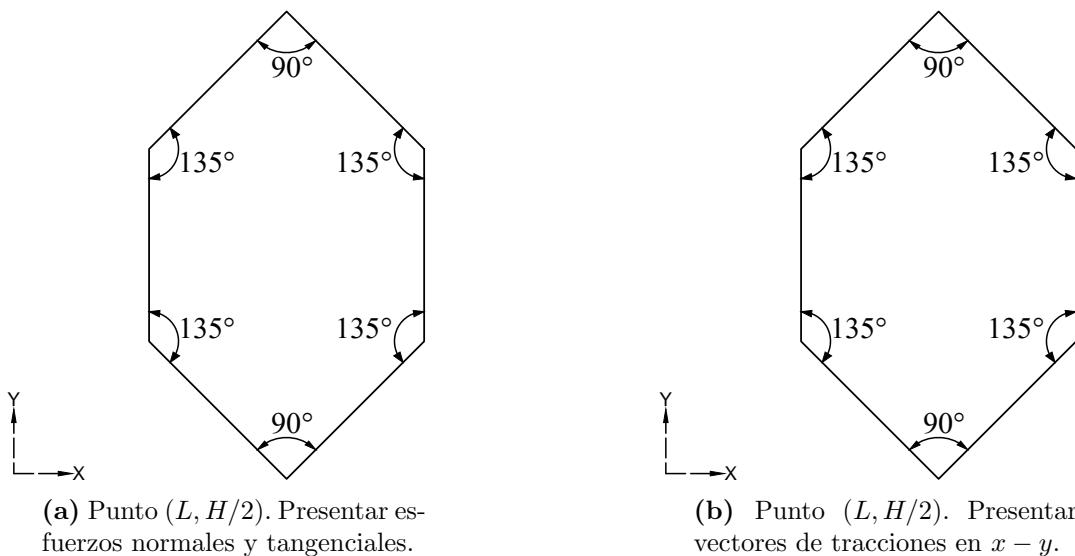


Figura 3.41

18. Si el tensor de esfuerzos en un punto  $P$ , en el sistema de referencia  $X, Y, Z$  está definido por:

$$\sigma_{xx} = 80 \frac{kgf}{cm^2} \quad ; \quad \sigma_{yy} = 50 \frac{kgf}{cm^2} \quad ; \quad \sigma_{zz} = 60 \frac{kgf}{cm^2}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 40 \frac{kgf}{cm^2} \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = 30 \frac{kgf}{cm^2} \quad ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = 10 \frac{kgf}{cm^2}$$

Y las coordenadas de los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  en el sistema de referencia  $X, Y, Z$  son  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$  y  $(0, 0, 3)$  respectivamente. Se pide lo siguiente:

- Calcular el vector de tracciones  $\vec{t}$ , que actúa en la cara del punto  $P$ , que es paralela al plano que contiene los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ .
- Calcular el esfuerzo normal al que está sometida la cara del punto  $P$ , que es paralela al plano que contiene los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ .
- Calcular la magnitud del esfuerzo tangencial al que está sometida la cara del punto  $P$ , que es paralela al plano que contiene los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ .
- Encontrar la matriz de transformación del sistema de referencia  $X - Y - Z$  al sistema de referencia  $X' - Y' - Z'$  para el cual el eje  $X'$  es paralelo al

vector  $\vec{V}_{AB}$  y el eje  $Y'$  es normal al vector normal al plano que contiene los puntos A, B y C.

19. El estado de esfuerzos en un punto de un medio continuo está dado por:

$$\sigma_{xx}(t) = 0.0 \quad ; \quad \sigma_{yy}(t) = K(t) \quad ; \quad \tau_{xy}(t) = \tau_{yx}(t) = -\frac{K(t)}{2.0}$$

Donde,  $K(t)$  es un parámetro que varía en función del tiempo  $t$ , tal como se muestra en la gráfica y tabla presentadas en la figura 3.42.

Tiempo	K
$t_0 = 0.0 \text{ s}$	0.0 tonf/m <sup>2</sup>
$t_1 = 10.0 \text{ s}$	150.0 tonf/m <sup>2</sup>
$t_2 = 20.0 \text{ s}$	-100.0 tonf/m <sup>2</sup>
$t_3 = 30.0 \text{ s}$	0.0 tonf/m <sup>2</sup>
$t_4 = 40.0 \text{ s}$	200.0 tonf/m <sup>2</sup>
$t_5 = 50.0 \text{ s}$	0.0 tonf/m <sup>2</sup>

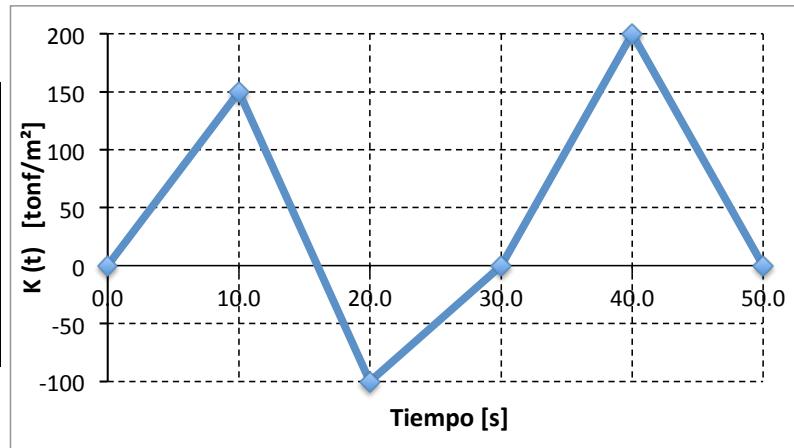


Figura 3.42. Variación del parámetro  $K$

- Si el material es infinitamente resistente ante esfuerzos normales (axiales), pero no soporta esfuerzos cortantes mayores o iguales a  $12 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$  determine el instante en que se presenta la falla en caso de que se presente. Si no hay falla indíquelo claramente.
- Si el material únicamente soporta esfuerzos tangenciales menores a  $15 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$ , esfuerzos de compresión menores a  $3 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$ , y esfuerzos de tracción menores a  $20 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$  determine el instante en que se presenta la falla en caso

de que se presente. Si no hay falla indíquelo claramente.

20. En la figura 3.43a se presentan tres planos asociados a un punto  $P$  de un Medio Continuo.

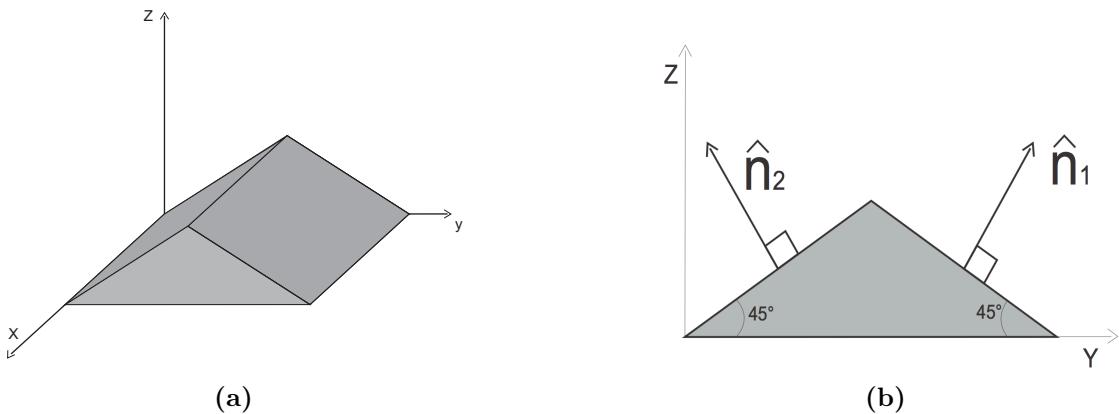


Figura 3.43

Si se tienen conocidos tres vectores de tracciones dados por:

$$a) \vec{t}_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}\hat{i} + 4\sqrt{2}\hat{j} + 5\sqrt{2}\hat{k}$$

$$b) \vec{t}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + 2\sqrt{2}\hat{j} - \sqrt{2}\hat{k}$$

$$c) \vec{t}_3 = 4\hat{i} + 1\hat{j} + 2\hat{k}$$

Se pide hallar el tensor de tensiones  $[\sigma]$ , en el sistema de referencia  $x - y - z$ , que proyectado sobre los planos con vectores normales  $\hat{n}_1$ ,  $\hat{n}_2$  y  $\hat{n}_3$  genera los vectores de tensiones  $\vec{t}_1$ ,  $\vec{t}_2$  y  $\vec{t}_3$ . Los vectores  $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_2$  se encuentran contenidos en el plano  $z - y$ , tal como se muestra en la figura 3.43b y  $\hat{n}_3 = 1\hat{i}$ .

21. El tensor de tensiones en el punto  $P$  está definido como

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} F & G & -H \\ G & 3F & 2G \\ -H & 2G & -F \end{bmatrix}$$

Calcular el vector de tracción en el punto  $P$  según la normal al plano definido por los puntos  $A$ ,  $C$  y el origen del sistema de referencia (ver figura 3.44). Descomponer en componentes tangenciales y normal a dicho plano.

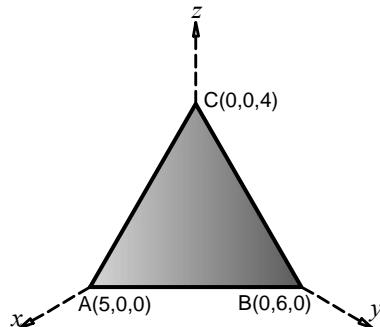
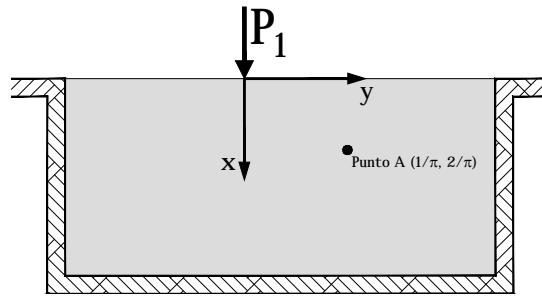
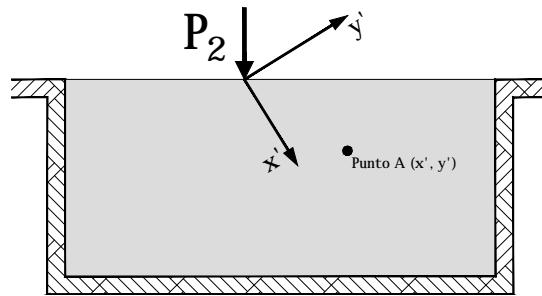


Figura 3.44

22. Para el medio continuo mostrado en la figura 3.45 se sabe que el tensor de esfuerzos asociado a un sistema de referencia  $xy$  y debido a la acción de una carga  $P_1$  (figura 3.45a) está dado por  $[\sigma]$ ; y el tensor de esfuerzos asociado a un sistema de referencia  $x'y'$  y debido a la acción de una carga  $P_2$  (figura 3.45b) está dado por un tensor  $[\sigma']$ . Ambos sistemas de referencia comparten el origen, pero se encuentran rotados uno respecto al otro.

(a) Carga  $P_1$  y punto en el sistema de referencia  $xy$ (b) Carga  $P_2$  y punto en el sistema de referencia  $x'y'$ .**Figura 3.45.** Medio Continuo

Se tiene que  $[\sigma]$ , en el sistema de referencia  $xy$  y debido a la carga  $P_1$ , es igual a

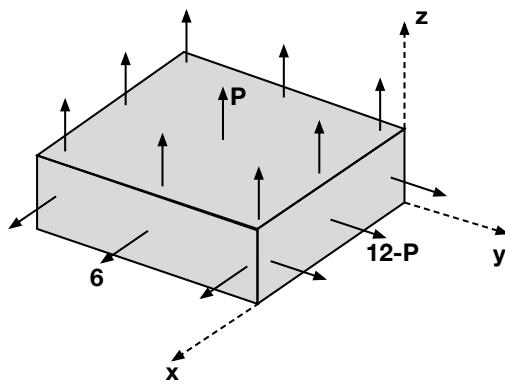
$$[\sigma] = \frac{2P_1}{\pi} \begin{bmatrix} -\frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{yx^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{yx^2}{(x^2 + y^2)^2} & -\frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{bmatrix}$$

Y  $[\sigma']$ , en el sistema de referencia  $x'y'$  y debido a la carga  $P_2$ , es igual a

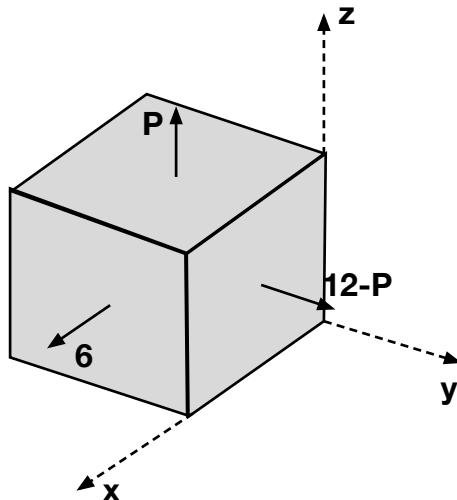
$$[\sigma'] = \begin{bmatrix} 0.5 & 1.5 \\ 1.5 & 4.5 \end{bmatrix}$$

Si se quiere estudiar el punto A y se sabe que el valor de la carga  $P_1$  es  $P_1 = 25.0$ , y las coordenadas en el sistema de referencia  $xy$  del punto a estudiar corresponden a  $x = \frac{1.0}{\pi}$ ,  $y = \frac{2.0}{\pi}$ , entonces:

- a) Encuentre los esfuerzos axiales máximos asociados a  $[\sigma]$  y  $[\sigma']$  de forma independiente
  - b) Determine el ángulo entre el sistema de referencia  $xy$  y el sistema de referencia primado  $x'y'$  (ángulo entre el eje  $x$  y  $x'$ ). Se sabe que el ángulo conformado entre la dirección donde se presenta el esfuerzo máximo a compresión del tensor  $[\sigma]$ , y la dirección asociada al esfuerzo máximo a tracción del tensor  $[\sigma']$  es  $0.0^\circ$ .
  - c) Si se considera que el estado de esfuerzos en un medio continuo está descrito por la superposición de los efectos de las cargas  $P_1$  y  $P_2$ , tensores  $[\sigma]$  y  $[\sigma']$ , determine el esfuerzo tangencial (cortante) máximo al que está sometido el punto.
23. Un medio continuo es sometido al estado de cargas externas mostrado en la figura 6.7. Estas cargas producen un estado de esfuerzos en todos los puntos al interior del cuerpo representado por la figura 3.46b.



(a) Elemento sometido a cargas perimetrales



(b) Tensor de esfuerzos

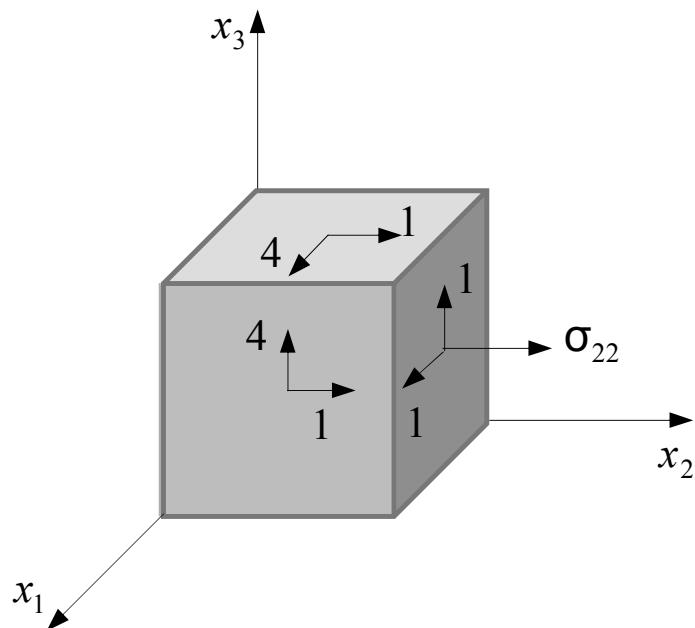
**Figura 3.46.** Medio Continuo

Si el criterio de falla del material está dado por:  $\tau = \sigma + 2.0$  ( $kgf/cm^2$ ) y la carga externa  $P$  es aumentada mediante la relación  $P = Kt + 6.0$ , con  $K > 0$  y  $P$  es dado en ( $kgf/cm^2$ ). Determine:

- El valor máximo de la carga  $P$  que puede ser aplicada antes que se produzca la falla en el elemento.
- El tiempo  $t$  en el que se presenta la falla.

- c) La dirección del plano en que se produce la falla del elemento.
- d) El valor y la dirección del cortante máximo al que está sometido el punto en el momento de la falla.
24. Dado el siguiente tensor de esfuerzos asociado a un punto de un medio continuo:
- $$[\sigma] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
- a) Encuentre las direcciones principales del tensor.
- b) Encontrar el valor cortante máximo.
- c) Encontrar las direcciones en las cuales se presenta el cortante máximo.
- d) ¿Cuál es el valor del cortante mínimo?
- e) Encontrar las direcciones en las cuales se presenta el cortante mínimo.

25. El estado de tensión en un punto  $P$  del Medio Continuo se da en la figura 3.47.<sup>10</sup>



**Figura 3.47.** Estado de tensiones en el punto.

<sup>10</sup>Tomado del ejemplo 3.5 en Olivella, X; Saracíbar, C (2000). Mecánica de Medios Continuos para ingenieros

Se pide:

- a) Determinar el valor de la componente  $\sigma_{22}$  del tensor de tensiones para que exista al menos un plano que pase por  $P$  que esté libre de tensiones.
- b) Determinar el vector normal a dicho plano.
- c) Determinar los esfuerzos axiales máximos correspondientes al estado de tensiones presentado.
- d) Determinar las direcciones principales del tensor de esfuerzo.
- e) Determinar la matriz de transformación entre el sistema de referencia  $x_1 - x_2 - x_3$  y el que es colineal con las direcciones principales.
- f) Determinar el máximo valor del esfuerzo cortante.
26. A continuación se presenta el tensor de esfuerzos para un mismo punto de un medio continuo en los sistemas de referencia  $x - y - z$  y  $x' - y' - z'$ .

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3/2 & 3 & 1/2 \end{bmatrix} \quad [\sigma'] = \begin{bmatrix} A - 2 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- a) Determine el valor de  $A$ .
- b) ¿Cuál es el valor del esfuerzo máximo a compresión que se presenta en el punto?. Determine la dirección con respecto al sistema de referencia x-y-z en donde dicho esfuerzo se presenta.
- c) ¿Cuál es el valor del esfuerzo máximo a tracción que se presenta en el punto?. Determine la dirección con respecto al sistema de referencia x-y-z en donde dicho esfuerzo se presenta.
- d) Determine el vector de tracciones respecto al sistema de referencia x-y-z en la cara en la que se presenta el esfuerzo máximo a compresión.
- e) Determine el vector de tracciones respecto al sistema de referencia x-y-z en la cara en la que se presenta el esfuerzo máximo a tracción.
- f) Escriba el tensor en el sistema de referencia conformado por las direcciones principales.
- g) Cual es la magnitud del máximo esfuerzo cortante que puede experimentar el punto.

# Capítulo 4

## Equilibrio

### 4.1. Introducción

En esta sección se formularán las ecuaciones de equilibrio para un medio continuo, haciendo uso del principio de conservación de momentum y de momento de momentum. Estas darán como resultado un sistema de ecuaciones diferenciales parciales en las componentes del tensor de tensiones y demostrarán la simetría del tensor de tensiones. Una vez planteadas las ecuaciones, la sección concluye con el estudio de algunas soluciones<sup>1</sup> clásicas para el caso de sólidos.

Al final de esta sección el estudiante deberá estar en la capacidad de:

- Identificar el dominio del problema y su frontera (o superficie).
- Reconocer la diferencia entre equilibrio local y global en un medio continuo.
- Identificar condiciones de frontera de tracciones para diferentes problemas particulares.
- Recuperar y/o verificar condiciones de frontera.

---

<sup>1</sup>Por soluciones nos referimos a funciones de las componentes del tensor de esfuerzos que satisfacen las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de frontera.

- Entender los aspectos matemáticos fundamentales del problema de valores en la frontera de la mecánica de los medios continuos en sistemas de referencia cartesianos y cilíndricos.
- Verificar si una función de tensiones es solución a un problema particular de la mecánica de los medios continuos.
- Analizar, desde el punto de vista de tensiones, algunas soluciones clásicas de la mecánica de los medios continuos.

## 4.2. Ecuaciones de Equilibrio diferencial

En las secciones anteriores se describió el modelo del medio continuo en términos de fuerzas. El paso del modelo discreto al modelo continuo, vía la hipótesis fundamental de continuidad, se tradujo en un tratamiento de las fuerzas ya no como vectores sino que estas tuvieron que ser tratadas en términos de funciones tensoriales con significado de densidades de fuerza o fuerzas por unidad de superficie. Es así como ahora en el modelo continuo el tensor de tensiones se convierte en el dispositivo matemático que produce cambios en la cantidad de movimiento en el sistema de infinitas partículas.

Nuestro siguiente objetivo es entonces el de proponer las ecuaciones que gobiernan el flujo de las densidades superficiales de fuerza  $\sigma$ , desde sus valores conocidos en la frontera en términos del vector de tracciones  $\vec{t}^{(n)}$ , hasta cualquier punto del medio continuo. La determinación de estas tensiones no solamente es un problema con su propio valor asociado, sino que también es el camino necesario si se desean conocer los cambios en la cantidad de movimiento del sistema.

Es esperable además, si se sabe que el modelo matemático utilizado para el tratamiento del sistema de muchas (infinitas) partículas ha sido construido a partir de las leyes de la Mecánica Newtoniana, que las ecuaciones resultantes deban estar estrechamente ligadas a estas (¿O son las mismas?). Acá partimos entonces de los principios fundamentales de la mecánica Newtoniana.

Considerese un elemento diferencial arbitrario tomado de un medio continuo y de

dimensiones  $dx \times dy \times dz$  como el que se muestra en la figura 4.1<sup>2</sup>

Denotemos las áreas superficiales de las caras de dicho elemento y su volumen como;

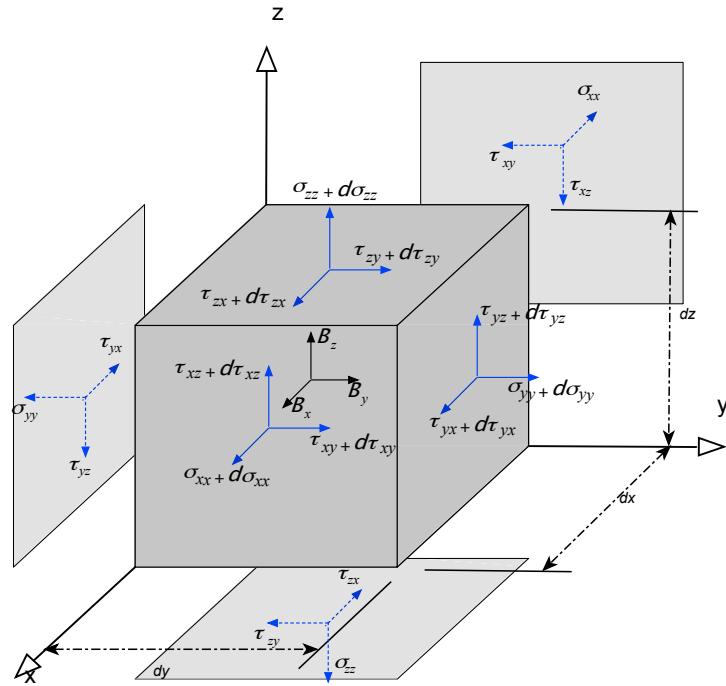
$$\begin{aligned} dS_x &= dydz \\ dS_z &= dx dy \\ dS_y &= dx dz \\ dV &= dx dy dz. \end{aligned}$$

En lo que sigue nos proponemos plantear las condiciones de equilibrio del elemento como si se tratara de un cuerpo rígido. Para esto supondremos además que el elemento se encuentra sometido a la acción de fuerzas de cuerpo  $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$ .

---

<sup>2</sup>Debe notarse que este bloque de tensiones corresponde a un elemento del continuo de tamaño diferencial, mientras que en las secciones anteriores haciamos uso de un elemento similar pero que no tenía ningún tamaño asociado y que solo se convertía en una forma práctica de representar el estado de tensiones en un punto material en un sistema de referencia cartesiano.

Por ejemplo en aquel caso si cortabamos un punto material con un plano con dirección normal  $\hat{n}$  y con vector de tracciones asociado  $\vec{t}(\hat{n})$  teníamos que este vector era igual y opuesto al asociado al corte con un plano con dirección  $-\hat{n}$ . De esta forma se decidió representar el tensor de esfuerzos para un punto del continuo mediante los tres vectores de tracción asociados con 3 direcciones perpendiculares  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  y sus direcciones opuestas  $-\hat{i}$ ,  $-\hat{j}$  y  $-\hat{k}$ .



**Figura 4.1.** Tensiones en un elemento diferencial de tamaño  $dxdydz$ .

Dado que el bloque en cuestión tiene ahora tamaño (así sea diferencial) es esperable que las tensiones sobre una cara y otra ya no permanezcan constantes sino que estas experimenten variaciones también diferenciales. Por ejemplo, si la tensión normal sobre la cara con vector  $-\hat{i}$  y localizada sobre el punto  $O$  es  $\sigma_{xx}$  entonces se tiene que la tensión normal sobre el punto  $x_O + dx$  está dada por  $\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx$  tal y como se muestra en la figura 4.2.

Con esta consideración de por medio planteamos ahora la condición de equilibrio en la dirección  $x$

$$\sum F_x = 0$$

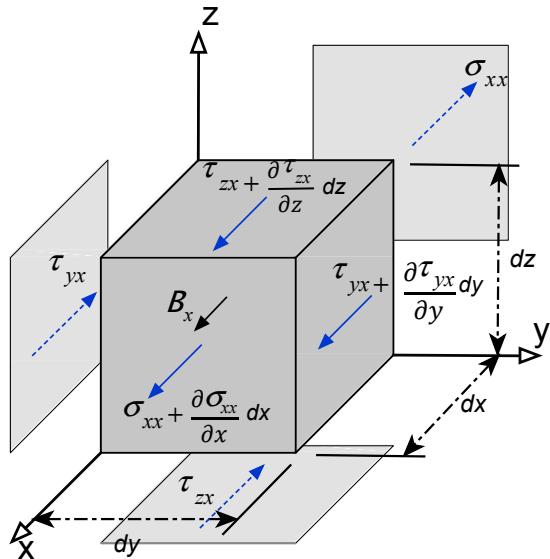
y teniendo cuidado de convertir las tensiones a fuerzas tras considerar el área de

cada cara. Apoyándonos nuevamente en la figura 4.2 en la cual se muestran todas las tensiones en la dirección  $x$  tenemos que;

$$\left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dS_x - \sigma_{xx} dS_x - \tau_{yx} dS_y + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dS_y - \tau_{zx} dS_z + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dS_z + B_x dV = 0$$

cancelando los términos iguales y opuestos y eliminando el diferencial de volumen común a todos los términos se tiene;

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dS_x + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dS_y + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz dS_z + B_x dV = 0.$$



**Figura 4.2.** Variación de las tensiones que producen fuerzas en la dirección  $x$  sobre un elemento diferencial de dimensiones  $dx, dy, dz$ .

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + B_x = 0. \quad (4.1)$$

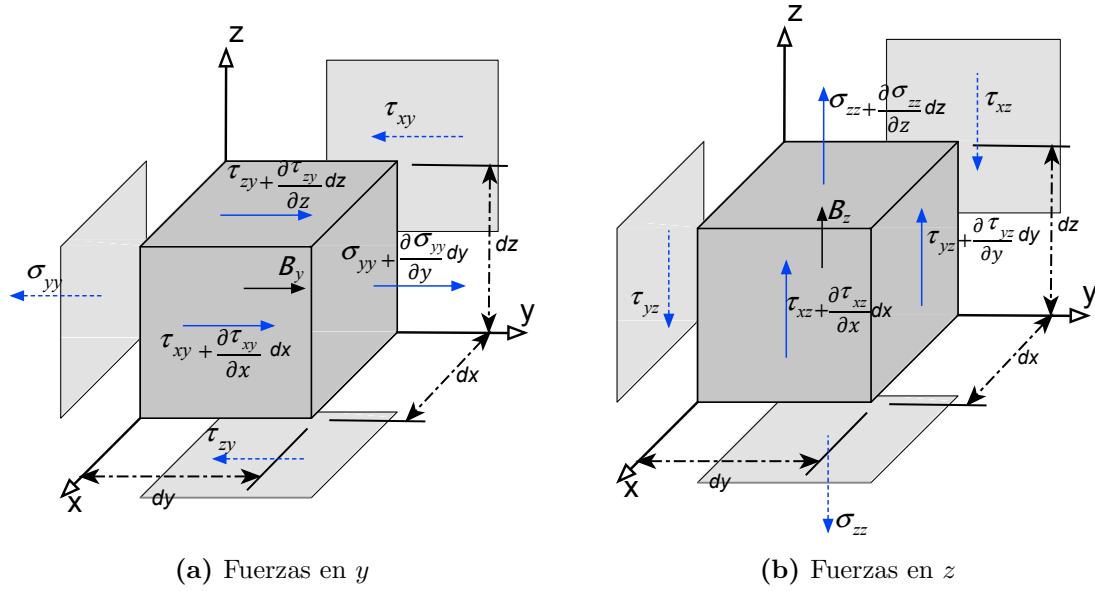
La ecuación (4.1) es una ecuación diferencial parcial que controla la variación de las componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{yx}$  y  $\tau_{zx}$ .

### Tarea

Usando las condiciones de equilibrio en las direcciones  $y$  y  $z$  (dadas por  $\sum F_y = 0$  y  $\sum F_z = 0$ ) para los elementos diferenciales mostrados en las figura 4.3a y figura 4.3b demostrar que estas resultan en;

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + B_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + B_z = 0.$$



**Figura 4.3.** Variación de las tensiones que producen fuerzas en la dirección  $y$  y  $z$  sobre un elemento diferencial de dimensiones  $dx \times dy \times dz$ .

Por otro lado, usando ahora las condiciones de equilibrio rotacional se tiene de la condición  $\sum M_z = 0$ ;

$$\tau_{yx}dS_y \frac{1}{2}dy + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy \right) dS_y \frac{1}{2}dy - \tau_{xy}dS_x \frac{1}{2}dx - \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}dx \right) dS_x \frac{1}{2}dx = 0$$

$$\tau_{yx}dxdzdy + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy^2 \cancel{dxdz} - \tau_{xy}dxdzdy - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dy \cancel{dxdz} dx^2 = 0$$

resultando en la siguiente igualdad entre las tensiones cortantes;

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

De manera similar planteando  $\sum M_x = 0$  y  $\sum M_y = 0$  resulta en;

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Las condiciones de equilibrio translacional y rotacional se resumen en las ecuación (4.2) y ecuación (4.3). Las primeras corresponden a 3 ecuaciones diferenciales parciales y las segundas a la relación de simetría del tensor. Nótese que en total se tienen 6 ecuaciones en 9 incógnitas<sup>3</sup> lo cual significa que desde el punto de vista de tensiones el problema es estáticamente indeterminado.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + B_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + B_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + B_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \end{aligned} \quad (4.3)$$

En matemáticas un problema definido por un conjunto de ecuaciones que gobernan el comportamiento de una función (ecuaciones gobernantes), el dominio de la misma y las condiciones que la función satisface en la superficie o frontera del dominio, se conoce como un problema de valores en la frontera (PVF). En nuestro caso particular el problema esta definido de la siguiente forma:

- La función en cuestión es el tensor de tensiones.
- Las ecuaciones gobernantes son las ecuación (4.2) y ecuación (4.3).

---

<sup>3</sup>Las 9 componentes del tensor de tensiones

- El dominio será por ejemplo el depósito de suelo, la presa, la viga o la cuña autosoportada (ver ejemplo).
- Las condiciones de frontera serán el vector de tracciones especificado o conocido sobre la frontera el cual esta relacionado con el tensor de tensiones mediante la fórmula de Cauchy  $t^n = \sigma \cdot n$ .

Aunque debido a la indeterminación estática no es posible aplicar ningún método formal de solución al PVF del medio continuo si podemos afirmar que para un problema en particular la solución del problema debe satisfacer las ecuación (4.2) y ecuación (4.3) y las condiciones de frontera.

**Se dice que una función es solución de un problema de valores en la frontera cuando esta satisface sus ecuaciones gobernantes y las condiciones de frontera.**

### Tarea

La ecuación;

$$\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) = 0$$

gobierna el desplazamiento axial  $u(x)$  de una barra de sección transversal variable  $A(x)$  y modulo de elasticidad  $E$ . La barra esta sometida a las condiciones de frontera dadas por;

$$EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = 0$$

$$u|_{x=0} = 0$$

Si el área de la sección transversal esta dada por;

$$A(x) = A_0(2 - x/L)$$

demostrar que la siguiente función es solución del problema de valores en la frontera.

$$u = \frac{FL}{EA_0} \ln \left( \frac{2}{2 - x/l} \right)$$

#### 4.2.1. Coordenadas cilíndricas

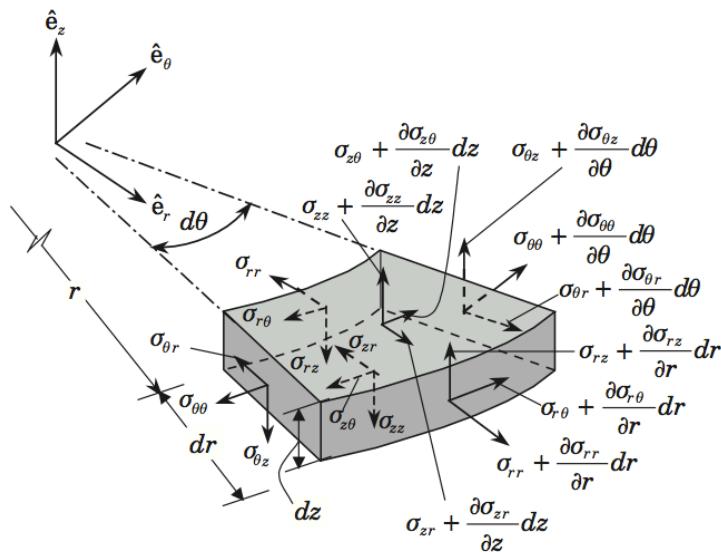


Figura 4.4. Tensiones en un elemento diferencial de tamaño  $drd\theta dz$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + B_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + B_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + B_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

### Ejemplo 1: Cuña autosoportada

Considere la cuña doble de lado  $\ell$  y ángulo interno  $2\phi$  mostrada en la figura 4.5. Se asume que esta se encuentra contenida en el plano  $X - Y$ , con condiciones de carga idealizables mediante un estado plano de tensiones (es decir 2D). La cuña se encuentra cargada por tracciones uniformes de intensidad  $S$  aplicadas sobre sus 4 caras de tal manera que esta se encuentra auto-equilibrada. Determinar la solución al problema de valores en la frontera proponiendo una solución y verificando las condiciones de frontera.

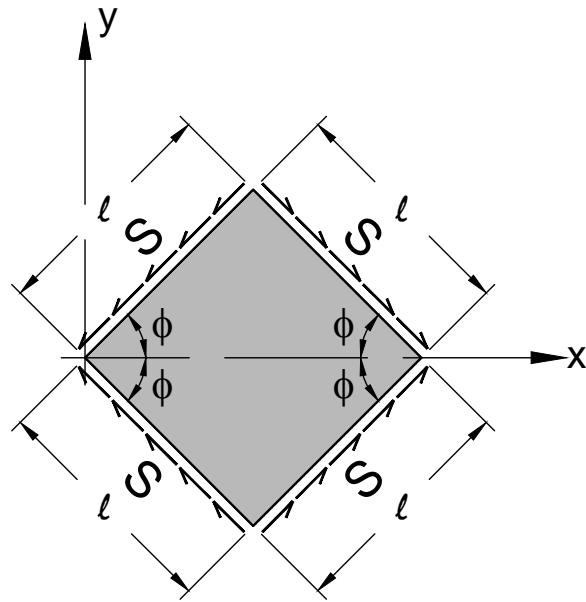


Figura 4.5. 2D Self-equilibrated wedge.

En el caso de estados de tensiones idealizables en 2 dimensiones y contenidos en el plano  $x - y$  nada es función de  $z$  y las ecuaciones de equilibrio ecuación (4.2) y ecuación (4.3) se reducen a;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

mientras que el equilibrio rotacional se reduce a;

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Para proponer una solución planteamos las ecuaciones de equilibrio global de la cuña, lo cual es equivalente a asumir que la solución es constante. Se tiene entonces que;

$$\sum F_x = 0 \longrightarrow -\ell C_\phi S + \sigma_{xx} \ell S_\phi = 0$$

$$\sum F_y = 0 \longrightarrow -\ell S_\phi S - \sigma_{yy} \ell C_\phi = 0$$

de donde resulta la siguiente función para el campo de tensiones;

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= S \operatorname{Cot} \phi \\ \sigma_{yy} &= -S \operatorname{Tan} \phi \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

con la condición  $\tau_{xy} = 0$  debida a la simetría del problema.

Para verificar que esta solución satisface las ecuaciones gobernantes reemplazamos la ecuación (4.6) en ecuación (4.5), notando que en este problema en particular no hay fuerzas de cuerpo ( $\vec{B} = 0$ ) resultando en;

$$\frac{\partial(S \operatorname{Cot} \phi)}{\partial x} = 0$$

y

$$\frac{\partial(-S \operatorname{Tan} \phi)}{\partial y} = 0.$$

Sin embargo es claro que existen infinitas funciones  $\sigma = \sigma(x, y)$  que satisafacen las ecuación (4.5) y para garantizar que la solución **propuesta** es la solución correcta al problema es necesario verificar que esta satisface además las condiciones de frontera del problema.

Sean  $\hat{n}^1, \hat{n}^2, \hat{n}^3, \hat{n}^4$  los vectores normales externos a las caras expuestas de la cuña y escritos en el sistema de referencia  $x - y$  como;

$$\begin{aligned}\hat{n}^1 &= -S_\phi \hat{e}_x + C_\phi \hat{e}_y \\ \hat{n}^2 &= -S_\phi \hat{e}_x - C_\phi \hat{e}_y \\ \hat{n}^3 &= +S_\phi \hat{e}_x + C_\phi \hat{e}_y \\ \hat{n}^4 &= +S_\phi \hat{e}_x - C_\phi \hat{e}_y.\end{aligned}$$

Para calcular las componentes del vector de tracciones sobre cada una de las caras usamos la fórmula de Cauchy escrita como;

$$t_i = \sigma_{ij} \hat{n}_j.$$

Luego, sobre la cara con vector normal  $\hat{n}^1$  tenemos;

$$\begin{aligned}t_x &= -SC_\phi \\ t_y &= -SS_\phi\end{aligned}$$

similarmente sobre la cara con vector normal  $\hat{n}^2$

$$\begin{aligned}t_x &= -SC_\phi \\ t_y &= +SS_\phi\end{aligned}$$

sobre la cara con vector normal  $\hat{n}^3$

$$t_x = +SC_\phi$$

$$t_y = -SS_\phi$$

y finalmente, sobre la cara con vector normal  $\hat{n}^4$ ;

$$t_x = +SC_\phi$$

$$t_y = +SS_\phi$$

los cuales coinciden con las tracciones especificadas como condiciones de frontera del problema.

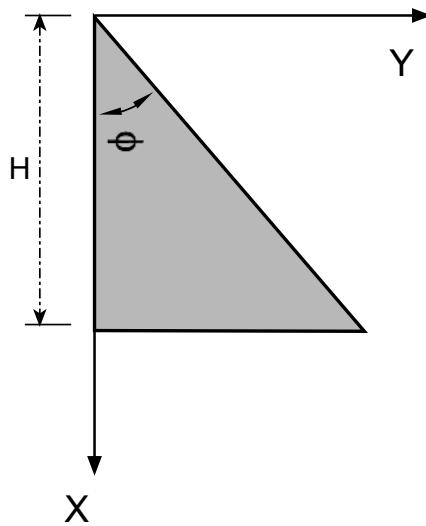
### Ejemplo 2: Empujes sobre presa de concreto

Si se sabe que la función de tensiones dada en la punto 1 es solución al problema de valores en la frontera del medio continuo sobre el dominio mostrado en la figura 4.6, en donde  $\gamma$  es una constante<sup>4</sup>. Se pide:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \gamma x - 2\gamma y \\ \sigma_{yy} &= -\gamma x \\ \tau_{xy} &= -\gamma y\end{aligned}\tag{4.7}$$

---

<sup>4</sup>Un script .py con las funciones de esfuerzo está disponible en: <https://github.com/casierraa/MMC/blob/master/dam.py>



**Figura 4.6.** Dominio de validez de la solución.

- Identificar la frontera del problema.
- Verificar que la función dada en el punto 1 efectivamente satisface las condiciones de equilibrio local.
- Determinar las condiciones de frontera sobre el dominio (graficar).
- Verificar que la solución satisface condiciones de equilibrio global.

### Solución

Sustituyendo la solución dada en punto 1 en las ecuaciones de equilibrio local y considerando que  $B_x = 0$  y  $B_y = 0$  se verifica que la solución satisface equilibrio;

$$\frac{\partial(\gamma x - 2\gamma y)}{\partial x} + \frac{\partial(-\gamma y)}{\partial y} + B_x = 0$$

$$\gamma - \gamma = 0$$

$$\frac{\partial(-\gamma y)}{\partial x} + \frac{\partial(-\gamma x)}{\partial y} + B_y = 0$$

$$0 + 0 = 0.$$

Sean los vectores normales a las caras vertical, horizontal e inclinada  $\hat{n}^1 = -\hat{j}$ ,  $\hat{n}^2 = \hat{i}$  y  $\hat{n}^3 = -S_\phi \hat{i} + C_\phi \hat{j}$  respectivamente. En la superficie con normal  $\hat{n}^1$  ( $y = 0$ ) se tiene que;

$$\sigma_{xx} = \gamma x$$

$$\sigma_{yy} = -\gamma x$$

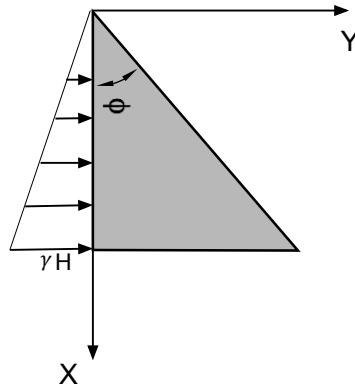
y

$$\tau_{xy} = 0$$

luego;

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma x & 0 \\ 0 & -\gamma x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma x \end{Bmatrix}$$

esta distribución se muestra en la figura 4.8;



**Figura 4.7.** Distribución de tracciones sobre la cara vertical.

Similarmente, sobre la superficie con normal  $\hat{n}^2 = \hat{i}$  ( $x = H$ ) se tiene;

$$\sigma_{xx} = \gamma H - 2\gamma y$$

$$\sigma_{yy} = -\gamma H$$

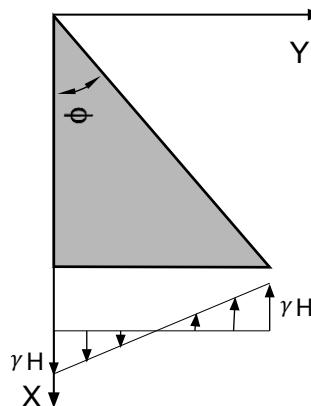
y

$$\tau_{xy} = -\gamma y$$

luego;

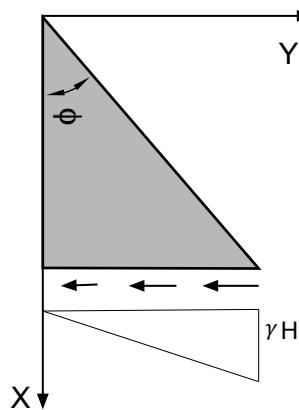
$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma H - 2\gamma y & -\gamma y \\ -\gamma y & -\gamma H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma H - 2\gamma y \\ -\gamma y \end{Bmatrix}.$$

La distribución de la componente  $t_x$  sobre esta cara, corresponde a la tensión normal  $\sigma_{xx}$  tal y como se muestra en la figura 4.7.



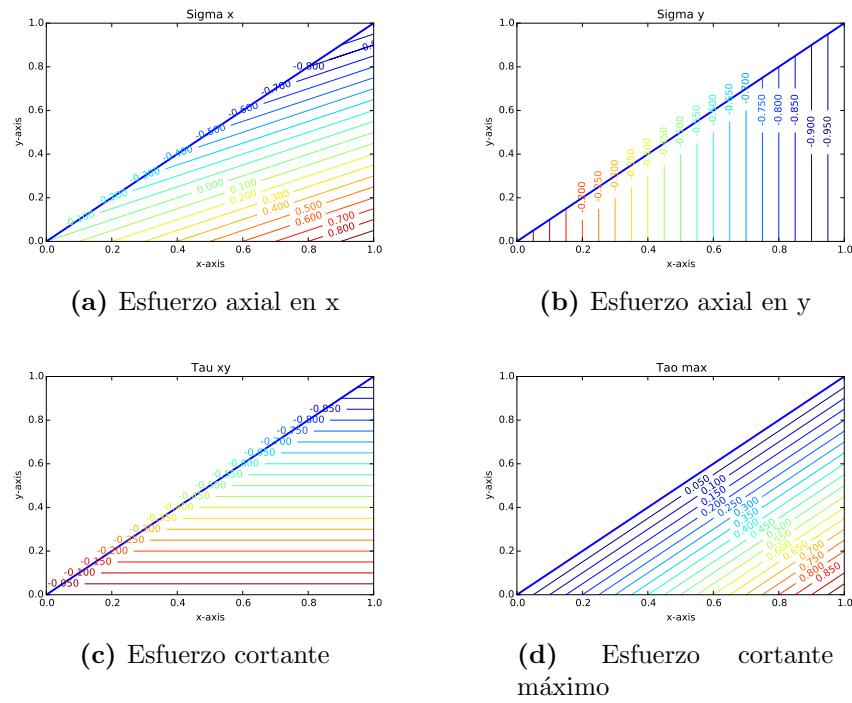
**Figura 4.8.** Distribución de tensiones normales sobre la cara horizontal.

Similarmente, la componente  $t_y$  corresponde a la componente  $\tau_{xy}$ . Sobre esta cara se tiene en  $y = 0$  que  $t_y = 0$ , mientras que en  $y = H$   $t_y = -\gamma H$ . Esta distribución se muestra en la figura 4.9;



**Figura 4.9.** Distribución de tensiones cortantes sobre la cara horizontal.

La solución para la presa se ha implementado en el script de python `dam.py` distribuido en EAFIT interactiva. En la figura 4.10a, figura 4.10b, figura 4.10c y figura 4.10d se presentan la distribución de tensiones sobre toda la presa en forma de contornos o curvas de nivel de isotensiones (igual valor de tensión)



**Figura 4.10.** Variación de las tensiones que producen fuerzas en la dirección  $x$  y  $y$  sobre la presa.

Para verificar el equilibrio global consideremos el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 4.11

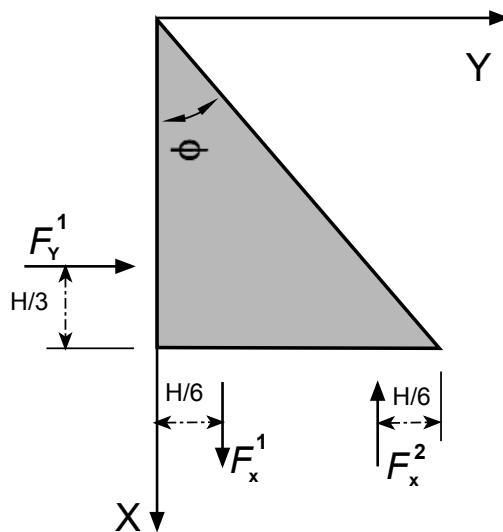


Figura 4.11. Diagrama de cuerpo libre de la presa.

donde;

$$F_x^1 = \frac{\gamma H^2}{4}$$

$$F_x^2 = -\frac{\gamma H^2}{4}$$

luego

$$\sum F_x = 0$$

y

$$F_y^1 = \frac{\gamma H^2}{2}$$

luego

$$\sum F_y = 0$$

similarmente

$$\sum M_A = \frac{4}{24} \gamma H^3 + \frac{1}{24} \gamma H^3 - \frac{5}{24} \gamma H^3 = 0$$

con lo que se verifica que la solución satisface equilibrio global.

## Tarea

Para el problema de la presa;

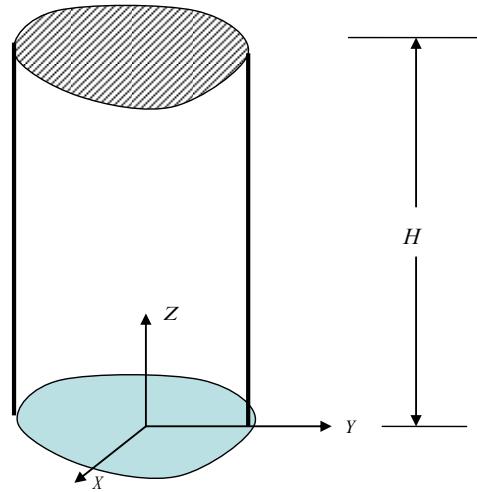
- Demostrar que la solución dada solo es valida para  $\phi = \pi/4$
- Si la presa es de concreto, el cual presenta baja resistencia a la tracción determinar la zona de la presa que se debe reforzar para que esta no flalle. Nota: Identificar la superficie donde las tensiones normales ( $\sigma_{xx}$ ) cambian de compresión a tracción.

## 4.3. Soluciones clásicas para sólidos

En esta sección se presentan algunas soluciones clásicas en términos de tensiones. Se invita al estudiante a realizar el análisis de las mismas usando razonamientos similares a los presentados en los 2 ejemplos anteriores y de acuerdo con los objetivos de aprendizaje declarados al inicio del capítulo.

### 4.3.1. Barra prismática soportada en la superficie superior y sometida a la acción de su propio peso

La barra prismática mostrada en la figura 4.26



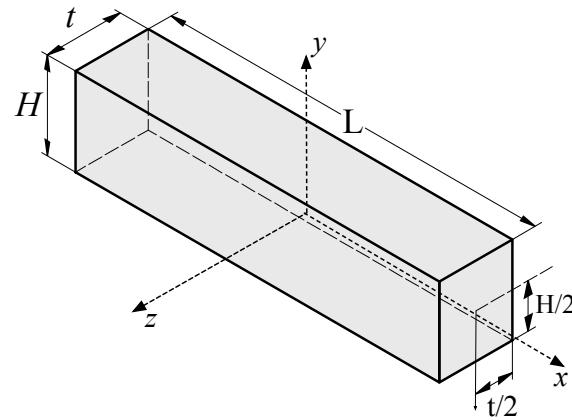
**Figura 4.12.** Barra prismática sometida a la acción de peso propio.

se encuentra atada sobre la superficie superior y esta sometida a la acción de su propio peso. La función dada en la ecuación (4.8) es la solución del problema,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz} &= \gamma z \\
 \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = 0 \\
 \tau_{xy} &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

### 4.3.2. Viga Cantiliver

La figura 4.13 muestra una viga cantiliver sometida a una carga  $P$  en uno de sus extremos:



**Figura 4.13.** Viga cantiliver

El tensor solución se da en la punto 1.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= -\frac{P}{I}(XY) \\
 \sigma_{yy} &= \sigma_{zz} = 0 \\
 \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -\frac{P}{2I}\left(\frac{H^2}{4} - Y^2\right) \\
 \tau_{xz} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

#### 4.3.3. Cilindro sometido a presión interna y externa

Para este problema se requieren las ecuaciones de equilibrio local en coordenadas polares dadas por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + B_r &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + B_\theta &= 0
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

La figura 4.16 muestra un cilindro de radio interno  $a$  y radio externo  $b$  sometido a presiones internas y externas  $p_a$  y  $p_b$  respectivamente.

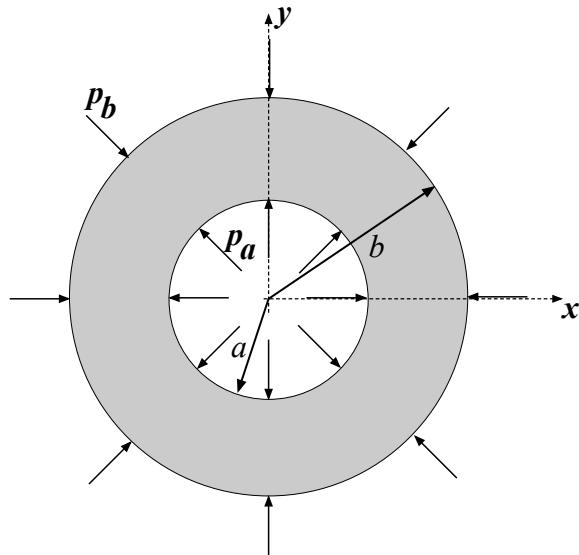


Figura 4.14. Cilindro sometido a presión interna y externa.

El tensor solución se da en la punto 1.

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\frac{\left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} p_a - \frac{\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} p_b \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\left(\frac{b^2}{r^2} + 1\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} p_a - \frac{\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} p_b\end{aligned}\quad (4.11)$$

#### 4.3.4. Flamant

La figura 4.15 muestra un semi-espacio sometido a una carga lineal superficial  $P$ .

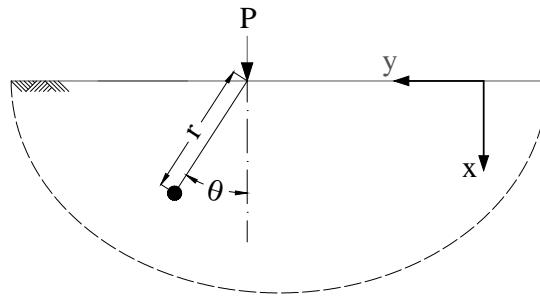


Figura 4.15. Medio continuo sometido a una carga P.

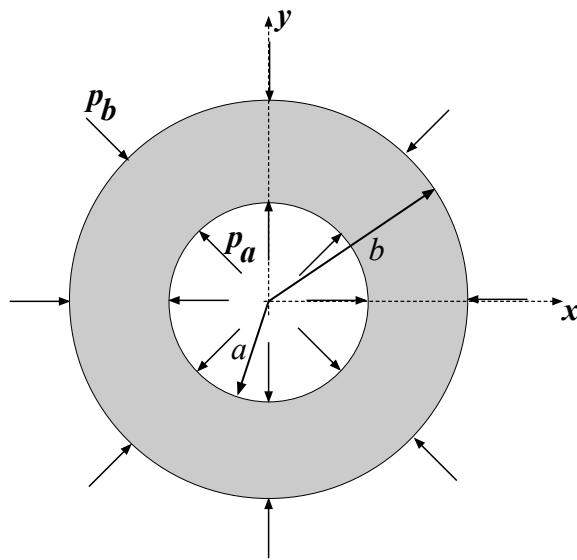
El tensor solución se da en la ecuación (4.12)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= -\frac{2P}{\pi r} \cos\theta \\
 \sigma_{\theta\theta} &= 0 \\
 \tau_{r\theta} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

### Ejemplo 3: aplicación de solución para cilindro sometido a presión interna y externa

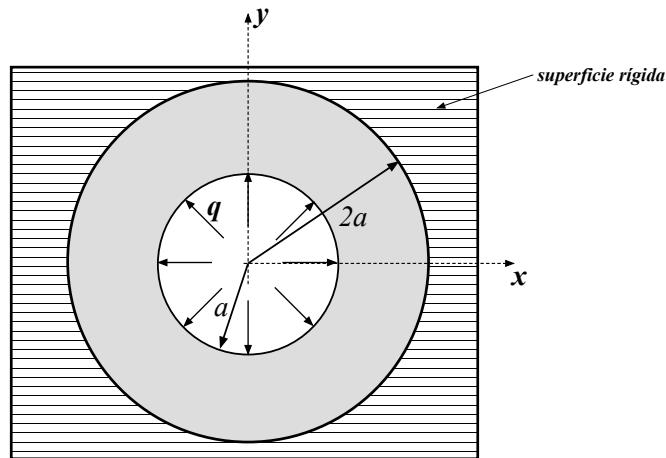
1. La solución para un cilindro de radio interno  $a$  y radio externo  $b$  sometido a presiones internas y externas  $p_a$  y  $p_b$  respectivamente (ver figura 4.16), está dado por:

$$\sigma_{rr} = -\frac{\left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} p_a - \frac{\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} p_b \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\left(\frac{b^2}{r^2} + 1\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} p_a - \frac{\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} p_b \quad \tau_{r\theta} = 0$$



**Figura 4.16.** Cilindro sometido a presión interna  $p_a$  y presión externa  $p_b$

Usando la solución anterior, y sabiendo que el radio interno es  $a$  y radio externo  $2a$  determinar el valor máximo que puede tomar la presión interna  $q$  en el cilindro para que el esfuerzo a cortante en los puntos del cilindro que están en contacto con una superficie rígida en su cara externa, tal y como se muestra en la figura 4.17, no superen un valor  $\tau = S$ .



**Figura 4.17.** Cilindro sometido a presión interna  $q$  con superficie rígida en cara externa

**Solución:**

sabiendo que  $b = 2a$  y haciendo el equilibrio de fuerzas que actuarían en las paredes interior y exterior del anillo (pared en contacto con la superficie rígida), determinemos el valor de  $P_b$ .

$$\begin{aligned}\sum F &= 0 \\ q2\pi a &= p_b 2\pi 2a \\ p_b &= \frac{q}{2}\end{aligned}$$

Haciendo los reemplazos en la solución entregada. Para  $\sigma_{rr}$  se tiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\frac{\left(\frac{4a^2}{r^2} - 1\right)}{\left(\frac{4a^2}{a^2} - 1\right)} q - \frac{\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{4a^2}\right)} \frac{q}{2} \\ \sigma_{rr} &= -\frac{1}{3} \left(\frac{4a^2}{r^2} - 1\right) q - \frac{4}{3} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{q}{2} \\ \sigma_{rr} &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{2a^2}{3r^2}\right) q\end{aligned}$$

De forma similar para  $\sigma_{\theta\theta}$  se tiene:

$$\sigma_{\theta\theta} = \left(-\frac{1}{3} + \frac{2a^2}{3r^2}\right) q$$

Ahora como nos piden la condición de corte para los puntos sobre la cara externa, es decir cuando  $r = 2a$ , el estado de esfuerzos sería.

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\frac{q}{2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \left(-\frac{1}{3} + \frac{2a^2}{12a^2}\right) q = -\frac{q}{6} \\ \tau_{r\theta} &= 0\end{aligned}$$

El esfuerzo cortante máximo asociado al plano  $r\theta$  está dado por:

$$\tau = \frac{1}{2} \left( \frac{q}{2} - \frac{q}{6} \right) = \frac{q}{6}$$

Haciendo  $\tau = S$ , se tiene:

$$q = 6S$$

#### Ejemplo 4: Aplicación de soluciones

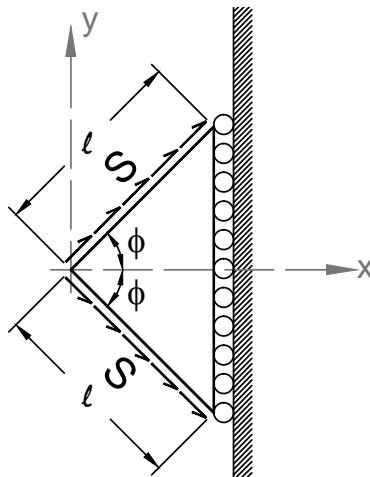
En el enlace

1. [http://nbviewer.ipython.org/github/casierraa/Notebooks\\_MMC/blob/master/Ej5\\_Parcial2015.ipynb](http://nbviewer.ipython.org/github/casierraa/Notebooks_MMC/blob/master/Ej5_Parcial2015.ipynb)

## 4.4. Ejercicios

1. Si el tensor de esfuerzos en cualquier punto de la cuña presentada en la figura 4.18 es:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -Scot\phi & 0 \\ 0 & Stan\phi \end{bmatrix}$$



**Figura 4.18.** Cuña de espesor  $e$  sometida a tensiones tangenciales constantes ( $S$ ) en dos caras.

- a) Verificar el equilibrio global ( $\sum F = 0.0$ ).
  - b) Verificar el equilibrio a nivel diferencial.
  - c) ¿Es posible encontrar esfuerzos cortantes  $\tau_{xy}$  al interior de la cuña mayores a  $S$ ? Responder sí o no y justificar su respuesta.
  - d) Calcule el vector de tensiones en cada cara de la cuña.
2. Encontrar las tensiones normales máximas y las direcciones principales de un estado tensional que está dado por el tensor de tensiones siguiente:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. En la figura 4.19 se muestra un elemento con densidad  $\rho$ , de sección circular, soportado de su extremo superior y está sometido solamente a la acción de su peso propio. Se indica el tensor de esfuerzos en el sistema coordenado  $x - y$  para los puntos a y b mostrados en la figura.

$$\text{Punto a: } [\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma L/3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Punto b: } [\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma L/3 \end{bmatrix}$$

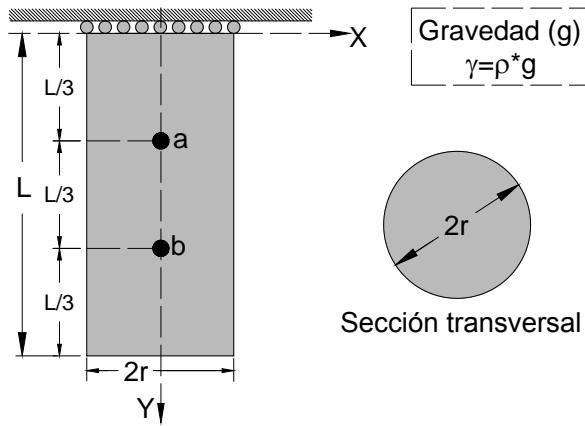


Figura 4.19. Barra colgada

Si el tensor de esfuerzos varía de forma lineal a lo largo del eje  $y$ , se pide:

- El tensor de esfuerzos para cualquier punto al interior del elemento.
- ¿El elemento se encuentra en equilibrio a nivel diferencial?. Justifique su respuesta matemáticamente.
- Si el elemento es infinitamente resistente ante esfuerzos de tracción y de compresión, pero su capacidad máxima ante esfuerzos cortantes está dada por  $\tau_{max}$ . Determine:
  - ¿Cuál es la longitud máxima posible del elemento?.
  - ¿Cuál es la fuerza en el soporte superior cuando se produce la falla por corte?.
  - ¿Cuál es la tensión en la sección transversal inferior del elemento ( $y = L$ ) cuando se produce la falla por corte?.

- d) Si el elemento es infinitamente resistente ante esfuerzos cortantes y de compresión, pero su capacidad máxima ante esfuerzos de tracción está dada por  $\sigma_{trac}$ . Determine:
- 1) ¿Cuál es la longitud máxima posible del elemento?.
  - 2) ¿Cuál es la tensión en la sección transversal inferior del elemento ( $y = L$ ) cuando se produce la falla por tracción?.
  - 3) ¿Cuál es la fuerza en el soporte superior cuando se produce la falla por tracción?.
- e) Si el elemento es infinitamente resistente ante esfuerzos cortantes y de tracción, pero su capacidad máxima ante esfuerzos de compresión está dada por  $\sigma_{comp}$ . Determine:
- 1) ¿Cuál es la longitud máxima posible del elemento?.
  - 2) ¿Cuál es la tensión en la sección transversal inferior del elemento ( $y = L$ ) cuando se produce la falla por compresión?.
  - 3) ¿Cuál es la fuerza en el soporte superior cuando se produce la falla por compresión?.

4. El tensor de tensiones de un medio continuo se describe con la siguiente diádica:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -2x^2yx & 4z^2 + yx & 2z^2yx - xz \\ 4z^2 + yx & yz + 4y^2 & -yz - xyz \\ 2z^2yx - xz & -yz - xyz & 4z^3 \end{bmatrix}$$

- a) Calcular la fuerza de cuerpo necesaria para mantener el medio continuo en equilibrio estático.
5. Si en un medio continuo, el campo de tensiones está dado por el tensor:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} x^2y & (1 - y^2)x & 0 \\ (1 - y^2)x & (y^3 - 3y)/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2z^2 \end{bmatrix}$$

Determinar:

- a) La fuerza de cuerpo necesaria para mantener el medio continuo en equilibrio estático.
- b) Las tensiones principales en el punto  $P(a, 0, 0)$ .
- c) La tensión tangencial (corte) máxima en el punto  $P$ .

6. El campo de tensión de un medio continuo está dado por:<sup>5</sup>

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2x_2 \\ 0 & 1 & 4x_1 \\ 2x_2 & 4x_1 & 1 \end{bmatrix}$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  son coordenadas cartesianas.

- a) Despreciando las fuerzas de cuerpo ¿está el cuerpo en equilibrio?
  - b) Determinar el vector tensión que actúa en un punto  $(1, 2, 3)$  según el plano  $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ ;
  - c) Determinar la proyección del vector tensión según la dirección normal y tangencial al plano  $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ .
7. El campo del tensor de tensiones de Cauchy viene representado por sus componentes como:

$$[\sigma] = k \begin{bmatrix} x_1^2 x_2 & (a^2 - x_2^2) x_1 & 0 \\ (a^2 - x_2^2) x_1 & \frac{1}{3} (x_2^3 - 3a^2 x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 2ax_3^2 \end{bmatrix},$$

donde  $k$  y  $a$  son constantes. Encontrar el campo de fuerzas de cuerpo  $\mathbf{b}$  (por unidad de volumen) necesario para que el sistema esté en equilibrio.

8. En la figura 4.20a se muestra la solución fundamental para semi-espacio sometido a una carga lineal superficial,  $P$ . Los esfuerzos al interior del suelo están dados por:

$$\sigma_{xx} = -\frac{2P}{\pi r} \cos^3 \theta \quad \sigma_{yy} = -\frac{2P}{\pi r} \sin^2 \theta \cos \theta \quad \tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi r} \sin \theta \cos^2 \theta$$

---

<sup>5</sup>Tomado del problema 4.4 en Reddy, J.N (2010). An introduction to continuum mechanics

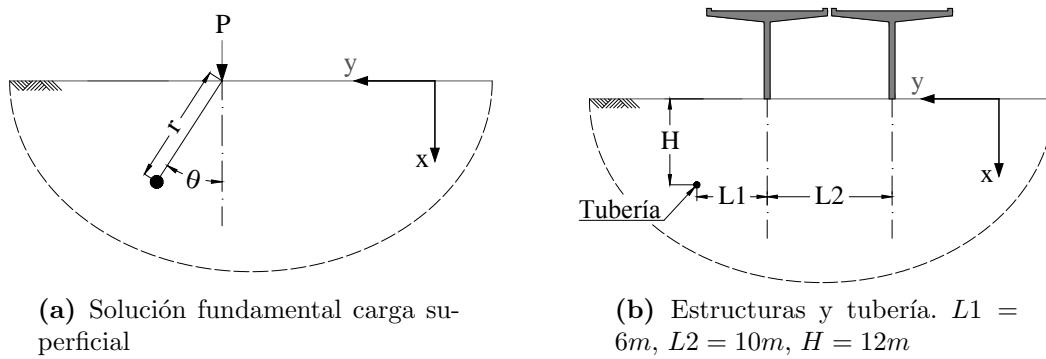


Figura 4.20. Estructuras sobre la superficie

Sí se desea instalar una tubería, perpendicular al plano mostrado ( $XY$ ), de diámetro despreciable en el punto indicado en la figura 4.20b, y se sabe que el suelo está sometido a la acción de dos estructuras que le transmiten de forma independiente una carga lineal superficial,  $P = 100 \text{ Ton}/\text{m}$ . Determine:

- a) ¿Cuál es el esfuerzo mínimo de compresión que debe ser capaz de soportar la tubería para que no se dañe?.
  - b) ¿Cuál es el esfuerzo mínimo de cortante que debe ser capaz de soportar la tubería para que no se dañe?.
9. El campo de tensión de un medio continuo está representado por:
- $$[\sigma] = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix}$$
- donde  $a$  es una constante.
- a) Determinar los valores principales.
  - b) Determinar las direcciones principales.
  - c) Determinar el valor del esfuerzo cortante máximo.
10. En la figura 4.21 se muestra un cuerpo cuyo tensor de esfuerzos  $[\sigma]$  en el sistema de referencia  $xy$  está dado por:

$$\sigma_{xx} = \frac{q}{8c^3}(2x^3y - 4xy^3 + \frac{12}{5}c^2xy) - px \quad \sigma_{yy} = -\frac{q}{8c^3}(4c^3x - 2xy^3 + 6c^2xy)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{q}{8c^3}[3x^2(c^2 - y^2) - (c^4 - y^4) + \frac{6}{5}c^2(c^2 - y^2)]$$

Donde  $q$ ,  $p$  y  $c$  son constantes.

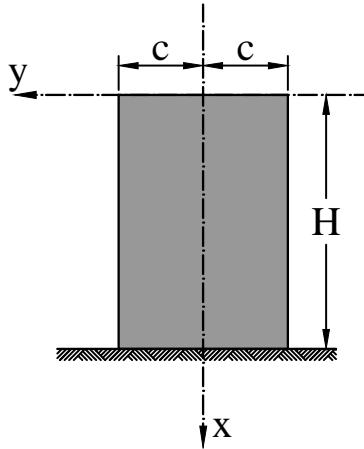


Figura 4.21. Medio continuo

En las siguientes preguntas seleccione la opción correcta y justifique matemáticamente su selección:

- a) El cuerpo se encuentra en equilibrio a nivel diferencial si:
- 1) La fuerza de cuerpo en la dirección  $y$  es  $p$
  - 2) No hay fuerzas de cuerpo
  - 3) La fuerza de cuerpo en la dirección  $x$  es  $q$
  - 4) La fuerza de cuerpo en la dirección  $x$  es  $px$ .
  - 5) La fuerza de cuerpo en la dirección  $x$  es  $p$ .
- b) El vector de tracciones sobre la cara  $y = c$  en el sistema de referencia  $xy$  está dado por:

$$1) [t] = \begin{bmatrix} \frac{q}{8c^3}(2x^3c - 4xc^3 + \frac{12}{5}c^3x) - px \\ -qx \end{bmatrix}$$

2)  $[t] = \begin{bmatrix} -qx \\ 0 \end{bmatrix}$

3)  $[t] = \begin{bmatrix} 0 \\ -qx \end{bmatrix}$

4)  $[t] = \begin{bmatrix} -\frac{q}{8c^3}(2x^3c - 4xc^3 + \frac{12}{5}c^3x) - px \\ qx \end{bmatrix}$

5) Ninguna de las anteriores.

c) La magnitud de la fuerza en dirección  $y$  que actúa en la cara  $y = c$  es:

1)  $F = qH^2$ .

2)  $F = \frac{qH^2}{2}$ .

3)  $F = 2qc$ .

4)  $F = \frac{qH}{2}$ .

5) Ninguna de las anteriores.

d) Si el tensor  $[\sigma]$  se emplea como la solución de esfuerzos para la presa mostrada en la figura 4.22, seleccione cual de las siguientes afirmaciones es correcta.

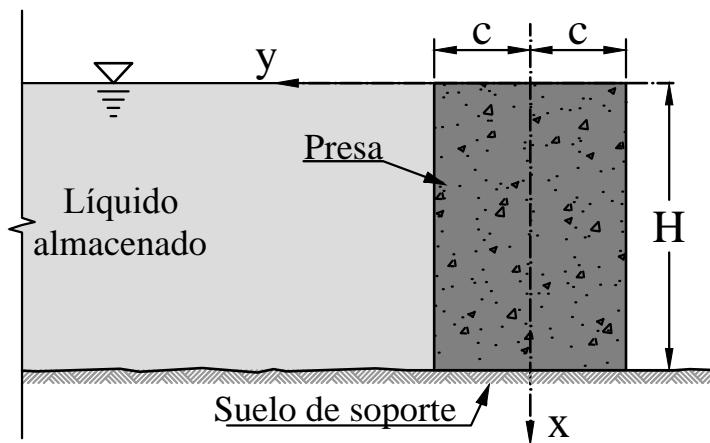


Figura 4.22. Presa

- 1) El tensor satisface plenamente las condiciones de frontera en todas las caras ( $y = c$ ,  $y = -c$ ,  $x = 0$ ,  $x = H$ ).
  - 2) El tensor satisface plenamente las condiciones de frontera en las caras  $y = c$  y  $x = 0$ .
  - 3) El tensor no satisface las condiciones de frontera en la cara  $y = -c$ .
  - 4) El tensor no satisface las condiciones de frontera en la cara  $x = 0$ .
  - 5) Ninguna de las afirmaciones es correcta.
- e) Aceptando como solución el tensor presentado en el numeral [1] y considerando que la presa está construida con suelo compactado cuya resistencia ante esfuerzo cortante es de  $0.5 \frac{kgf}{cm^2}$ ; si  $H = 3.0$  m,  $c = 1.1$  m,  $q = 1000 \frac{kgf}{m^3}$  y  $p = 2000 \frac{kgf}{m^3}$  se puede afirmar:
- 1) La presa fallaría ante esfuerzos de corte en el plano  $xy$  porque el cortante en el punto de coordenadas (3.0 m, 1.1 m) es mayor a  $0.5 \frac{kgf}{cm^3}$ .
  - 2) La presa fallaría ante esfuerzos de corte en el plano  $xy$  porque la magnitud del cortante máximo en el punto de coordenadas (0.0 m, -1.1 m) es mayor a  $0.5 \frac{kgf}{cm^2}$ .
  - 3) La presa no fallaría ante esfuerzos de corte en el plano  $xy$  porque la magnitud del cortante máximo en el punto de coordenadas (3.0 m, 0.0 m) es menor a  $0.5 \frac{kgf}{cm^2}$ .

m) es menor a  $0.5 \frac{kgf}{cm^2}$ .

- 4) La presa fallaría ante esfuerzos de corte en el plano  $xy$  porque la magnitud del cortante máximo en el punto de coordenadas (3.0 m, 1.1 m) es mayor a  $0.5 \frac{kgf}{cm^2}$

11. En la figura 4.23 se muestra un cuerpo de sección rectangular de ancho unitario, altura  $H$ , soportado en un extremo ( $X = 0$ ), y sometido en su otro extremo ( $X = L$ ) a la acción de una fuerza  $P$  en la dirección Y. Si el tensor de esfuerzos en el sistema coordenado  $XYZ$  está dado por:

$$\sigma_{xx} = -\frac{P}{I}(XY) \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{P}{2I}\left(\frac{H^2}{4} - Y^2\right) \quad \tau_{xz} = 0$$

Donde  $I$  es el momento de inercia de la sección respecto a el eje Z y  $P$  es la fuerza.

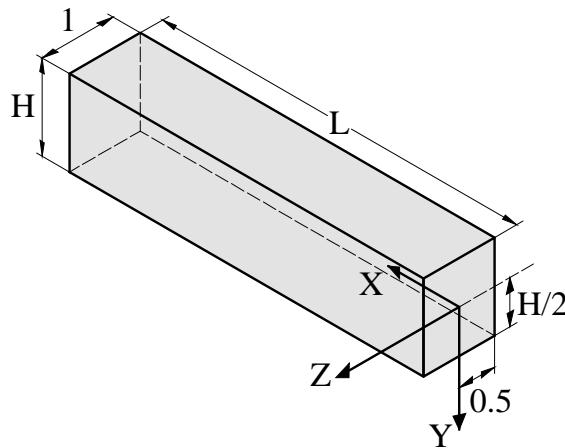


Figura 4.23. Viga en voladizo

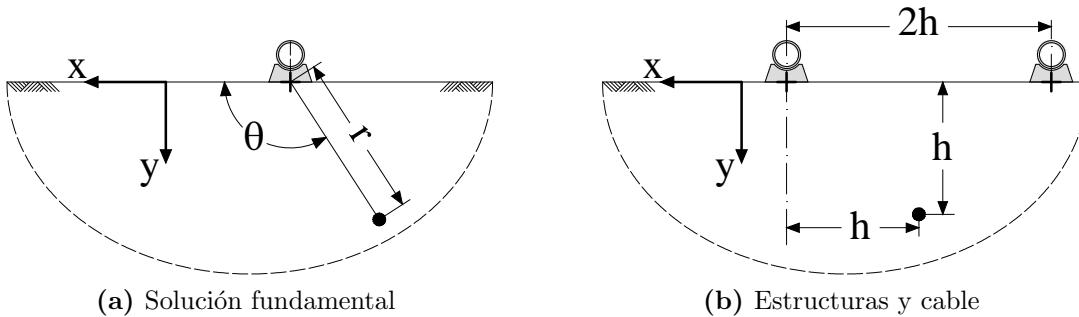
- Verifique equilibrio diferencial.
- Verifique las condiciones de frontera.
- ¿Las condiciones de frontera coinciden con las presentadas en el enunciado del problema?. De ser afirmativa o negativa su respuesta, justifíquela.
- Verifique equilibrio global.

- e) ¿Cuál es el valor del esfuerzo cortante máximo y en donde se presenta?.
- f) ¿Cuál es el valor del esfuerzo normal máximo y en donde se presenta?.
12. En la figura 4.24a se muestra una estructura especial actuando sobre un cuerpo de concreto de gran dimensión. El estado de esfuerzos al interior del cuerpo debidos a la acción de la estructura, en un sistema coordenado cilíndrico  $(r, \theta, z)$ , están dados por:

$$\sigma_{rr} = -\frac{2Q}{\pi r} \cos\theta; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = 0; \quad \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0;$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{Q}{\pi r} \sqrt{3}$$

$Q$  es una constante positiva,  $r$  es la distancia desde la ubicación de la estructura al punto de evaluación y  $\theta$  es el ángulo medido desde la horizontal en sentido antihorario.



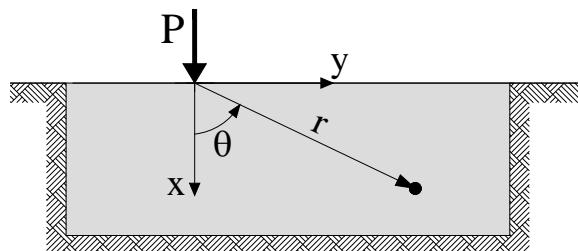
Si se desea instalar un cable (de diámetro despreciable) perpendicular al plano mostrado  $(XY)$  a una profundidad  $h = 4\sqrt{2}$  y se sabe que el cuerpo está sometido a la acción de dos estructuras iguales, tal como se muestra en la figura 4.24b. Determine:

- Si el cable es infinitamente resistente ante esfuerzos normales pero  $\tau_{crit}$  es el máximo esfuerzo de corte que resiste, ¿cuál es el máximo valor de la carga  $Q$  que pueden transmitir las estructuras para que el cable no falle?.
- Si  $\tau_{crit} = 10$ , ¿cuál es el valor de  $Q$ ?.
- Si  $Q = 5$ , ¿cuál es el valor mínimo de  $\tau_{crit}$  para que el cable no falle por corte?.

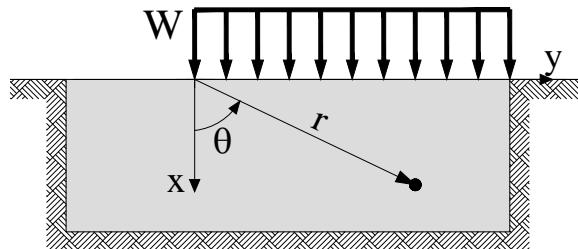
13. En las figura 4.24c y figura 4.24d se muestra las soluciones para una masa de suelo sometido a una carga superficial  $P$  y una carga distribuida uniforme superficial  $w$ . Los esfuerzos al interior del suelo debidos a la carga  $P$  y  $w$ , en un sistema coordenado cilíndrico  $(r, \theta, z)$ , están dados:

$$[\sigma]_P = -\frac{2P}{\pi r} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\sigma]_w = -\frac{w}{\pi} \begin{bmatrix} \pi + 2\theta - \sin(2\theta) & 1 - \cos(2\theta) & 0 \\ 1 - \cos(2\theta) & \pi + 2\theta + \sin(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde  $P$  y  $w$  son las cargas,  $\theta$  es el ángulo medido desde la vertical y positivo en sentido antihorario.



(c) Solución carga vertical  $P$



(d) carga uniforme superficial  $w$

**Figura 4.24.** Soluciones fundamentales

Si a la masa de suelo se transmiten de manera simultánea las cargas  $P = 100 \text{ Ton}/m$  y  $w = (100 + \text{tiempo}) \text{ Ton}/m^2$ , y se quiere instalar un sistema de acueducto conformado por dos tuberías A y B (de diámetro despreciable) perpendicular al plano mostrado ( $XY$ ), en donde la profundidad para la tubería A es  $H_A = 1.0/\pi \text{ m}$  y para la tubería B es  $H_B = 0.75H_A$  tal y como se muestra en la figura 4.25. Determine:

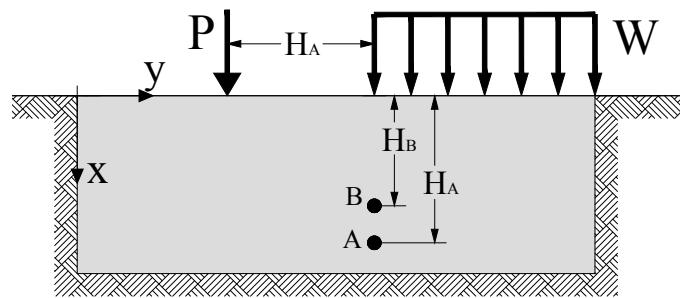


Figura 4.25. Cargas y tuberías

- a) Determine cuál tubería falla primero y en qué tiempo se produce la falla, si se sabe que el material de la tubería A es infinitamente resistente a esfuerzos cortantes pero no soporta esfuerzos axiales mayores o iguales a  $210,5 \frac{\text{Ton}}{\text{m}^2}$  y el material de la tubería B es infinitamente resistente a esfuerzos axiales pero no soporta esfuerzos cortantes mayores o iguales a  $100,25 \frac{\text{Ton}}{\text{m}^2}$ .

14. En la figura 4.26 se presenta una barra de radio  $C$  y longitud  $L$ . El estado de esfuerzos del medio continuo en el sistema cartesiano  $x, y, z$  está dado por el tensor:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 0; & \sigma_{yy} &= 0; & \sigma_{zz} &= 0; \\ \tau_{xy} &= 0; & \tau_{xz} &= \omega y; & \tau_{zy} &= -\omega x\end{aligned}\tag{4.13}$$

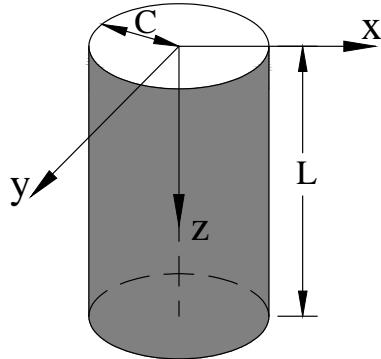


Figura 4.26. Medio Continuo

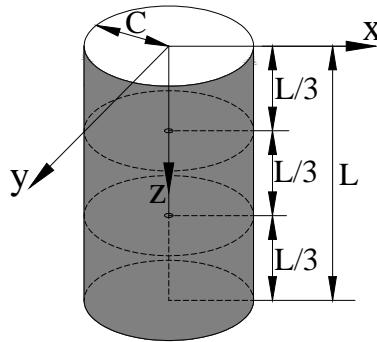
Donde  $\omega$  es una constante.

- a) Determine el valor del máximo esfuerzo de compresión al que está sometido la barra y la ubicación (coordenadas de los puntos) donde se presentan esos valores máximos.
- b) ¿Describe que problema resuelve el estado de esfuerzos en la barra? *Sugerencia: para facilitar el análisis estudie las caras con vector normal en dirección z.*
- c) Si el cuerpo tiene longitud  $L = 50\text{cm}$ ,  $\omega = 5000 \text{ Tonf}/\text{m}^3$ , además es infinitamente resistente ante esfuerzos de tracción y de compresión, pero su capacidad máxima ante esfuerzos tangenciales es  $\tau_{max} = 88 \text{ kgf}/\text{cm}^2$ . Determine el valor máximo del radio  $C$  que podría tener el cuerpo.
15. Si a la barra del punto punto 14 adicionamente le quisieramos considerar el efecto del peso propio  $\gamma$  y sabemos que el tensor de esfuerzos en el sistema coordenado  $x, y, z$  en cualquier punto de los planos  $z = L/3$  y  $z = 2L/3$  (ver

figura 4.27) debido solo a este efecto está dado por:

$$Puntos_{(z=L/3)}: [\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma L/3 \end{bmatrix} \quad Puntos_{(z=2L/3)}: [\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma L/3 \end{bmatrix}$$

$\gamma = \rho g$ ,  $\rho$  es la densidad y  $g$  la gravedad.



**Figura 4.27.** Función peso propio

Además dicho esfuerzo es descrito por una función lineal en  $z$ .

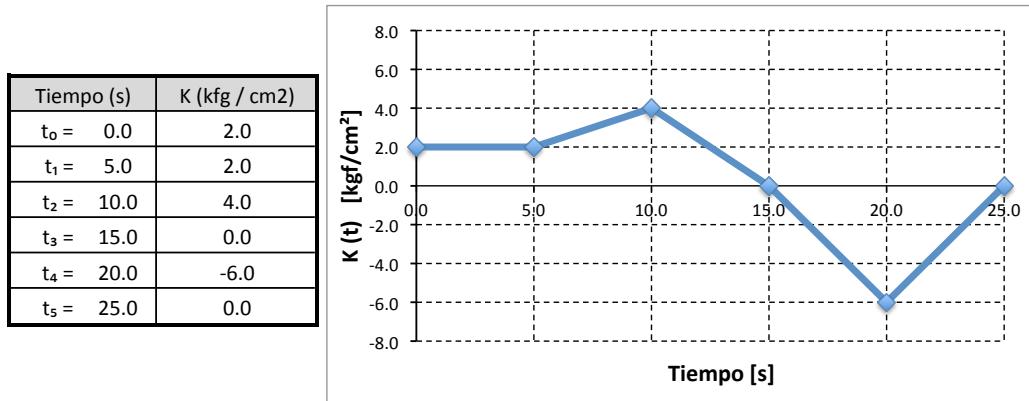
- Si se tiene en cuenta que estado final de esfuerzos es la suma de estados individuales, determine cuál es el tensor de esfuerzos del problema que considera conjuntamente el tensor de esfuerzos del punto 15 y el peso propio.
- Diga si el cuerpo está o no en equilibrio diferencial (local) estático. Sí es del caso, de una propuesta para lograr dicho equilibrio. Justifique su respuesta matemáticamente

16. El estado de esfuerzos en un punto de un medio continuo está dado por:

$$\sigma_{xx}(t) = K(t); \quad \sigma_{yy}(t) = -6K(t); \quad \sigma_{zz}(t) = -K(t);$$

$$\tau_{xy}(t) = 0; \quad \tau_{xz}(t) = 0; \quad \tau_{yz}(t) = 0$$

Donde,  $K(t)$  es un parámetro que varía en función del tiempo  $t$ , tal como se muestra en la gráfica y tabla presentadas en la figura 6.2c.

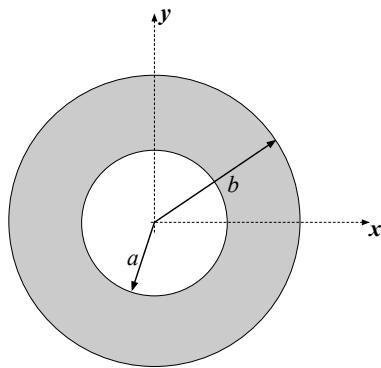


**Figura 4.28.** Variación del parámetro  $K$

- a) Si el material es infinitamente resistente ante esfuerzos normales (axiales), pero no soporta esfuerzos cortantes mayores o iguales a  $13 \frac{kgf}{cm^2}$  determine el instante en que se presenta la falla en caso de que se presente. Si no hay falla indíquelo claramente.
17. En la figura 4.29 se presenta la sección transversal de un cilindro. Los esfuerzos en el dominio están representados por:

$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{(b^2 - a^2)r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} \quad \sigma_\theta = -\frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{(b^2 - a^2)r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2}$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$



**Figura 4.29.** Sección transversal cilindro

- a) Verifique el equilibrio diferencial.
- b) ¿Cuales son las cargas externas a las cuales está sometido el cilindro?. Indíquelas gráficamente.
- c) ¿Cual es el esfuerzo axial máximo y dónde se presenta?.
- d) ¿Cual es el esfuerzo de corte máximo y dónde se presenta?.
18. En la figura 4.30 muestra el estado de tensiones en un punto de coordenadas  $(X, Y) = (55/\sqrt{2}, 55/\sqrt{2})$  al interior de un Medio Continuo. Sobre una de las caras asociadas al eje  $Y'$  se dan las tensiones  $\sigma_{Y'Y'}$  y  $\tau_{Y'X'}$  y sobre una de las caras asociadas al eje  $X'$  se da el vector de tracciones expresado en el sistema de referencia  $XY$ .

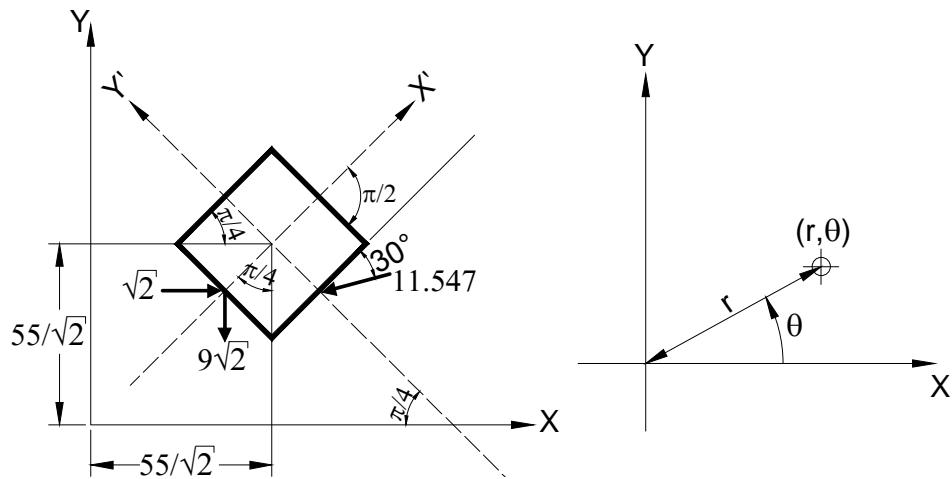


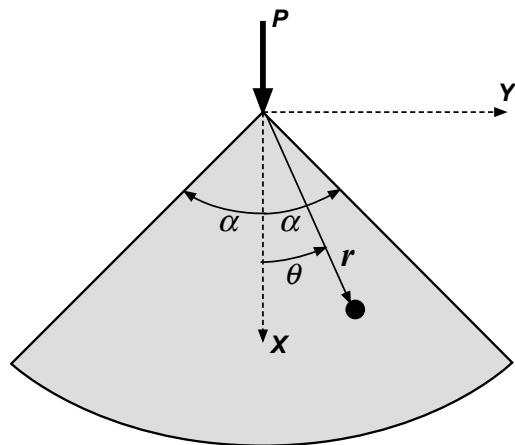
Figura 4.30. Estado de tensiones en un punto al interior de un medio continuo.

a) Escribir el tensor de tensiones en el sistema de referencia polar  $r, \theta$ .

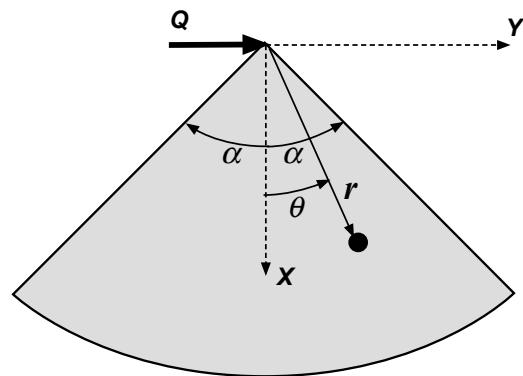
19. Los tensores

$$[\sigma(r, \theta)]_P = \begin{bmatrix} -\frac{2P \cos \theta}{(2\alpha + \sin(2\alpha))r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\sigma(r, \theta)]_Q = \begin{bmatrix} -\frac{2Q \sin \theta}{(2\alpha - \sin(2\alpha))r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

representan el estado de tensiones en un punto de coordenadas  $(r, \theta)$  al interior de las cuñas de semi-ángulo interno  $\alpha$  (medido en radianes) mostradas en las figura 4.31a y figura 4.31b, resultantes de la aplicación de cargas puntuales  $P$  y  $Q$  respectivamente.



(a) Cuña de semi-ángulo interno  $\alpha$  sometida a una carga vertical  $P$ .



(b) Cuña de semi-ángulo interno  $\alpha$  sometida a una carga vertical  $Q$ .

**Figura 4.31.** Cuña de semi-ángulo interno  $\alpha$ .

Usando dichas soluciones se pide determinar el estado de tensiones para un punto  $P$  de coordenadas  $(r, \theta)$  localizado al interior de un depósito de suelo sometido a una carga puntual de magnitud  $F$  como se muestra en la punto 4.

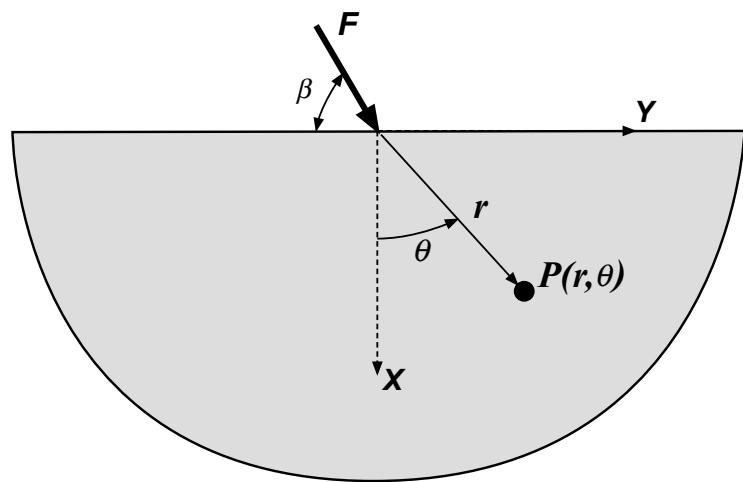


Figura 4.32. Depósito de suelo sometido a una carga puntual  $F$ .

# Capítulo 5

## Análisis de Deformaciones

### 5.1. Introducción

Al final de esta sección el estudiante deberá estar en la capacidad de:

- Reconocer la diferencia entre desplazamientos absolutos y relativos entre los puntos materiales.
- Entender los cambios geométricos impartidos al aplicar una transformación lineal sobre un campo vectorial.
- Identificar los efectos físicos contenidos en el tensor de deformaciones infinitesimales.
- Calcular el tensor de deformaciones infinitesimales a partir del campo de desplazamientos relativos.
- Reconocer la diferencia entre la configuración deformada de un medio continuo y la deformada del punto material

Del análisis de las fuerzas “internas” se concluyó –usando las 3 leyes de Newton sobre un volumen arbitrario de un medio continuo– que estas corresponden a nivel

local a una función (continua) de carácter tensorial y que satisface el problema de valores en la frontera especificado por las ecuaciones de equilibrio (leyes generalizadas de Newton) y la asignación de las tracciones en la superficie del medio (ecuación (5.1), ecuación (5.2)):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + B_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + B_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + B_z &= 0\end{aligned}\tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy}\end{aligned}\tag{5.2}$$

Se dispone de 6 ecuaciones en 9 incógnitas controlando la distribución espacial de las fuerzas internas  $\sigma$  sobre los diferentes puntos materiales del medio continuo. Dichas fuerzas internas son generadas ya sea por las fuerzas de superficie (tracciones)  $\vec{t}^{(\hat{n})}$  y/o por las interacciones a distancia o fuerzas de cuerpo  $\vec{B}$ . Sin embargo, en este punto el problema se hace (matemáticamente) indeterminado ya que se dispone de más incógnitas que ecuaciones.

La indeterminación desde el punto de vista de fuerzas no debe ser para nada sorpresiva, ya que si éstas se consideran como las “funciones causa.<sup>es</sup>” es claro que aún falta por involucrar los efectos o “funciones respuesta”. Estas funciones corresponden precisamente a los cambios (cinemáticos) o de configuración, experimentados por las infinitas partículas una vez son sometidas a interacciones externas.

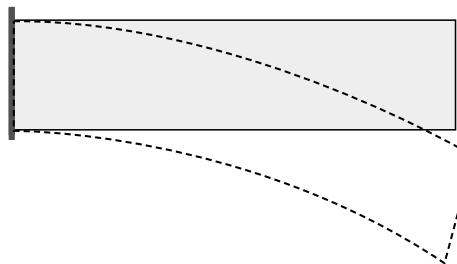
Claramente se identifica la primera necesidad de estudiar los cambios de configuración como la de tratar de establecer una conexión entre estos cambios y las fuerzas internas  $\sigma$  y que permita a la postre eliminar la indeterminación matemática del problema de valores en la frontera (PVF) (especificado por las ecuación (5.1) y ecuación (5.2)).

Aunque es claro que las nuevas configuraciones aparecen debidas a los desplazamientos a los que son sometidas las diferentes partículas, a la hora de establecer la conexión entre éstas y las fuerzas internas  $\sigma$  es importante considerar que son en realidad los desplazamientos relativos quienes generan estas fuerzas internas. La aparición de desplazamientos relativos necesariamente se reflejará en términos de cambios de forma del medio continuo.

### 5.1.1. Concepto intuitivo de deformación

La figura 5.1 muestra, en sombreado gris, una viga en voladizo en su configuración original (antes de aplicar las cargas externas) y en línea punteada su configuración final (o deformada)<sup>1</sup> resultante tras aplicar alguna distribución de cargas externas en forma de tracciones.

Como resultado de la aplicación de las cargas externas los puntos materiales que conforman la viga experimentan desplazamientos. En lo que sigue denominaremos campo de desplazamientos a la variación espacial de estos, y lo denotaremos como  $\vec{u}(\vec{x})$ . Tal y como se aprecia de manera intuitiva, los desplazamientos varían para los diferentes puntos de la viga generándose **desplazamientos relativos**.



**Figura 5.1.** Configuración original y deformada de una viga en voladizo.

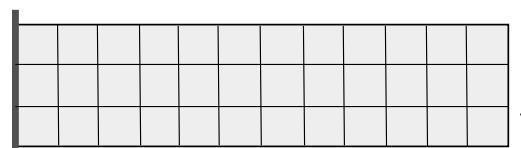
Por ejemplo, es evidente que los desplazamientos sobre el empotramiento son "nulos" mientras que los puntos cercanos al extremo derecho de la viga experimentan los

---

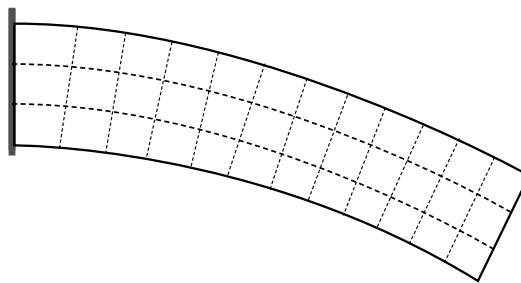
<sup>1</sup>En la configuración deformada los puntos materiales o elementos constitutivos de la viga estarán sometidos a un estado de tensiones que satisface las ecuaciones de equilibrio local ( a nivel diferencial) y global.

máximos desplazamientos. Sin embargo, sabemos que las fuerzas internas (o tensiones) están ligadas al desplazamiento relativo entre los puntos materiales. El propósito de esta sección es hacer una descripción local (o diferencial) de los desplazamientos relativos entre puntos materiales y que pueda ser conectada posteriormente con el tensor de tensiones a través de propiedades de los materiales. Con esto, no solo se conseguirá completar las ecuaciones para el problema de valores en la frontera del medio continuo, sino que además será posible describir la nueva configuración del medio, resultante de la aplicación de interacciones externas tanto a nivel local (diferencial) como global.

Para aclarar, nuevamente de manera intuitiva, el carácter local de los cambios relativos la figura 5.2 muestra la configuración original (figura 5.2a) y deformada (figura 5.2b) de la viga en voladizo. Como elemento auxiliar de análisis esta vez se ha dibujado una rejilla de elementos perfectamente cuadrados sobre la configuración no-deformada. Si suponemos que estos elementos son de lado  $h$  es claro que en el modelo del continuo el punto material corresponde a uno de estos en el estado límite cuando  $h \rightarrow 0$ . Es evidente de la figura 5.2b como los diferentes elementos cambian su forma una vez la viga pasa de la configuración descargada a la cargada. Mas aún es evidente de la misma figura como estos cambios varían de elemento a elemento.



(a) Configuración original con elementos diferenciales no deformados

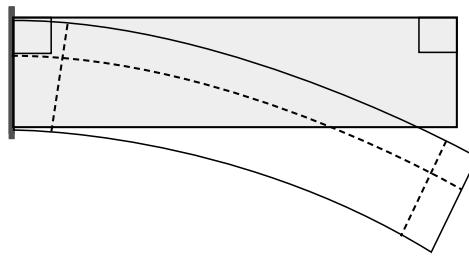


(b) Configuración final con elementos diferenciales deformados

**Figura 5.2.** Comparación entre configuración original y deformada con elementos diferenciales.

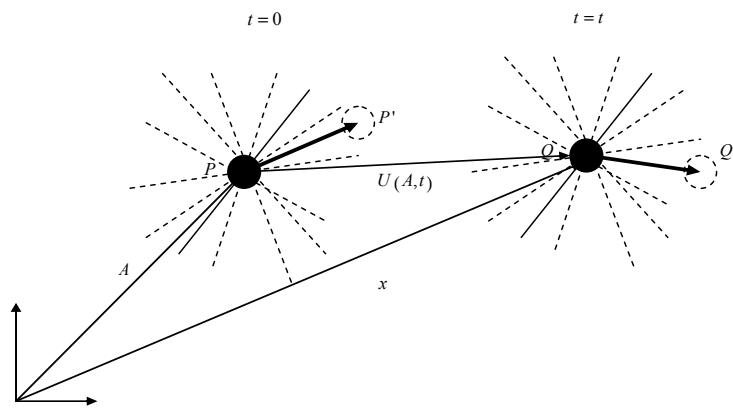
La figura 5.3 muestra nuevamente ambas configuraciones y sobre estas se han seleccionado para efectos ilustrativos dos elementos localizados sobre el empotramiento y sobre el extremo libre del voladizo. En la configuración original ambos elementos son identicos y corresponden a cuadrados de lado  $h$ . En la configuración deformada, mostrada con líneas punteadas, se resaltan nuevamente estos 2 elementos de donde se pueden hacer las siguientes observaciones:

El elemento sobre la parte superior del empotramiento experimenta cambios de tamaño y de forma a través de alargamientos en la dirección longitudinal, mientras que el elemento sobre la parte inferior experimenta acortamientos igualmente en la dirección longitudinal. Estos cambios suceden a pesar de que dichos elementos se encuentran sobre el empotramiento donde los desplazamientos como tal son nulos. De otro lado, el elemento sobre el extremo libre de la viga experimenta pequeños cambios de forma (no apreciables en el dibujo) y experimentan las mayores rotaciones como si fuera un cuerpo rígido. Los pequeños cambios de forma son equivalentes a pequeños desplazamientos relativos aunque estos puntos experimentan los mayores desplazamientos absolutos.



**Figura 5.3.** Elementos con máxima deformación y máxima rotación.

En resumen, el propósito de esta sección es hacer una descripción local (o diferencial) de los desplazamientos relativos entre los puntos materiales de un medio continuo cuando este es sometido a la acción de fuerzas externas. En general, como se verá mas adelante, estos cambios se describirán en términos de cambios de tamaño (o magnitud) y de orientación de las "fibras materiales" que emanan de la partícula en las diferentes direcciones tal y como se esquematiza en la figura 5.4. Esta muestra un punto material de un medio continuo conjuntamente con su vecindad matemática representada por fibras imaginarias de material, mostradas en líneas punteadas. En la figura el punto material en estudio se muestra con relleno de color negro y se denomina  $P$ . Adicionalmente se muestra un punto material arbitrario (sin relleno) y denominado  $P'$ . En el lado izquierdo se muestra la localización de ambos puntos materiales en un instante de tiempo  $t = 0$ , correspondiente a la configuración original o descargada. Tras la aplicación de las cargas ambos puntos materiales se desplazan a las posiciones señaladas como  $Q$  y  $Q'$  respectivamente y mostradas en lado derecho de la figura correspondiente a un instante de tiempo  $t = t$ . Como resultado de los desplazamientos experimentados por los puntos materiales la fibra material que une los mismos experimenta cambios de tamaño y de orientación.



**Figura 5.4.** Fibras materiales en la configuración original y deformada.

En lo que sigue estudiaremos la relación entre 2 fibras arbitrarias como las mostradas en la figura desde 2 puntos de vista. Inicialmente se estudiarán los cambios de magnitud y orientación experimentados por un vector posición tras operarlo con una matriz conservando la propiedad de línealidad. Posteriormente estudiaremos el problema a nivel infinitesimal tras analizar un par de puntos, unidos por una fibra material de tamaño diferencial. Dicho análisis permitirá encontrar el tensor graiente de desplazamientos como medida local (o diferencial) de la deformación<sup>2</sup>.

## 5.2. Transformaciones lineales

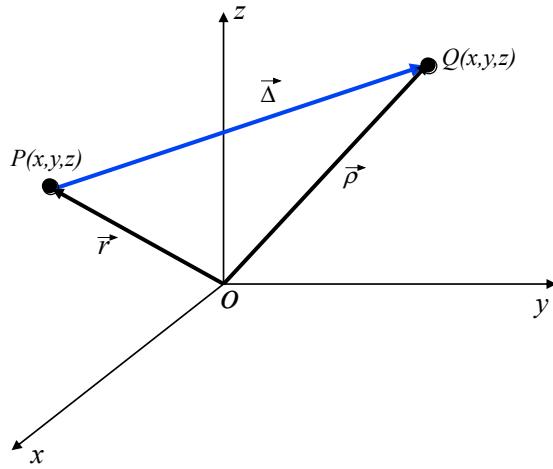
Con el propósito de conceptualizar el proceso deformación o cambios de configuración a nivel local o diferencial es conveniente apoyarnos como herramienta de análisis en las transformaciones lineales<sup>3</sup>. En términos simples estas corresponden a la transformación de un vector en otro conservando la propiedad de línealidad. Esta

<sup>2</sup>Aunque hasta el momento el tratamiento del medio continuo no ha especificado ninguna diferencia entre medios sólidos, líquidos o gases el tratamiento cinemático que se presenta si esta restringido al caso de pequeñas deformaciones

<sup>3</sup>Esta sección esta basada en los textos: Principles of Solid Mechanics. Rowland Richards Jr. CRC Press, 2001 y Introduction to the Mechanics of Continuous Medium. Lawrence E Malvern. Prentice Hall, 1969.

idea se ilustra en la ecuación (5.3) en la que  $\vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j}$  representa el vector posición de un punto  $P$ . Como resultado de alguna acción externa, representada por un tensor  $A$  este punto material experimenta un desplazamiento  $\vec{\Delta} = \Delta_x \hat{i} + \Delta_y \hat{j}$  con lo que el vector  $\vec{r}$  se transforma en el vector  $\vec{\rho} = \rho_x \hat{i} + \rho_y \hat{j}$ . Esta relación puede escribirse como:

$$\vec{\rho} = A \cdot \vec{r} \quad (5.3)$$



**Figura 5.5.** Transformación del vector  $\vec{r}$  en el vector  $\vec{\rho}$ .

El vector  $\vec{r}$  al transformarse en el vector  $\vec{\rho}$  experimenta 2 tipos de cambios:

- i Cambios de magnitud (o de tamaño).
- ii Cambios de orientación (dirección).

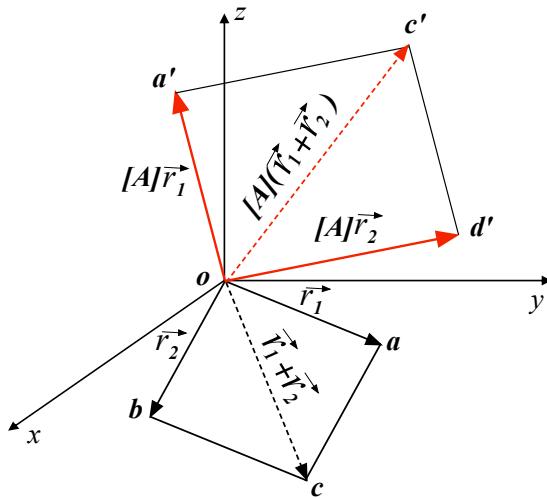
La relación ecuación (5.3) entre  $\vec{r}$  y  $\vec{\rho}$  puede escribirse en forma explícita como:

$$\begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

La ecuación (5.4) indica que la matriz  $A$  transforma el vector  $\vec{r}$  en el vector  $\vec{\rho}$  y por ende ésta contiene toda la información referente a los cambios de magnitud y dirección que experimentan las infinitas direcciones que emanan del punto  $O$ . Una transformación como la descrita en la ecuación (5.4) se denomina lineal si satisface la condición dada por:

$$A \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = A \cdot \vec{r}_1 + A \cdot \vec{r}_2 \quad (5.5)$$

la cual implica que lineas rectas y paralelas antes de la transformación permanecen rectas y paralelas después de la transformación o en otras palabras que conservan la ley del paralelogramo. Esto se ilustra en la figura 5.6:



**Figura 5.6.** Definición de línealidad.

Alternativamente, es posible escribir la transformación en términos del vector de desplazamientos  $\vec{\Delta}$  que experimenta la cabeza del vector  $\vec{r}$  como sigue;

$$\vec{\Delta} = \vec{\rho} - \vec{r}$$

$$\vec{\Delta} = A \cdot \vec{r} - \vec{r}$$

$$\vec{\rho} = [A - I] \cdot \vec{r}$$

$$\vec{\Delta} = D \cdot \vec{r}$$

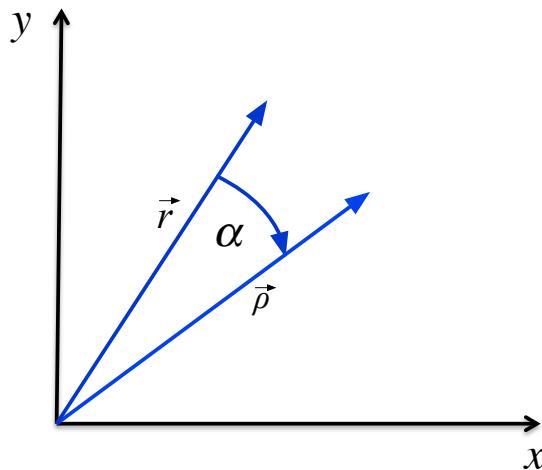
y de manera explícita escribimos;

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta_x \\ \Delta_y \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} d_{xx} & d_{xy} \\ d_{yx} & d_{yy} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} r_x \\ r_y \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

La matriz  $D$  se denomina la matriz de transformación de desplazamientos. En lo que sigue estudiaremos transformaciones como las dadas en la ecuación (5.6) identificando los efectos que dicha matriz impone sobre las diferentes direcciones que emanan de un punto material.

### 5.2.1. Componente rotacional

A continuación nos disponemos a estudiar el efecto de los diferentes términos en la matriz de transformación de desplazamientos  $D$ . Abordemos inicialmente los cambios de orientación impartidos por  $D$  en los diferentes vectores. Considerando la figura 5.7, en esta el vector original  $\vec{r}$  se transforma en el vector  $\rho$  tras realizar una rotación  $\alpha$ .



**Figura 5.7.** Rotación a través de un angulo  $\alpha$  del vector  $\vec{r}$  en el vector  $\vec{\rho}$ .

Relacionando las componentes rectangulares de ambos vectores se tiene que:

$$\rho_x = r_x + \alpha r_y$$

y

$$\rho_y = r_y - \alpha r_x.$$

De manera explicita, pero en términos de los desplazamientos de la cabeza del vector posición  $\vec{r}$  lo anterior resulta en:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

De la ecuación (5.7) se concluye que la componente rotacional del tensor de transformación de desplazamientos  $D$  es una matriz con 0s en la diagonal y términos iguales pero con signo opuesto a uno y otro lado de la diagonal. En el lenguaje del análisis tensorial, extendido en este caso a matrices, a estos tensores se les conoce como tensores anti-simétricos. En conclusión **la componente rotacional de la transformación lineal corresponde a un tensor anti-simétrico**.

### 5.2.2. Componente simétrica

Como ya ha sido identificado en los planteamientos anteriores, la matriz de transformación de desplazamientos  $D$  imparte en las diferentes direcciones cambios de dirección y de magnitud. El haber identificado el efecto rotacional como la componente anti-simétrica de  $D$  permite concluir que el término restante, y simétrico por demás, contendrá los efectos asociados a los cambios de tamaño o magnitud de los diferentes vectores. De dicha conclusión resulta natural resolver el tensor  $D$  precisamente en una componente simétrica y en una componente anti-simétrica como:

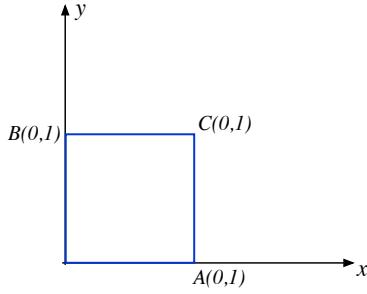
$$\begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} \\ d_{yx} & d_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{xx} & \frac{d_{xy}+d_{yx}}{2} \\ \frac{d_{yx}+d_{xy}}{2} & d_{yy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{d_{xy}-d_{yx}}{2} \\ \frac{d_{yx}-d_{xy}}{2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

En esta partición es evidente que el segundo término del lado derecho corresponde efectivamente a la componente rotacional del tensor (componente anti-simétrica), mientras que el primer término necesariamente contendrá la información relativa a los cambios de tamaño. Nótese además que este primer término es simétrico con respecto a la diagonal. De forma general escribimos esta partición de la matriz de transformación de desplazamientos  $D$  como:

$$D = \varepsilon + \omega \quad (5.9)$$

donde  $\varepsilon$  contiene los efectos de cambio de tamaño y  $\omega$  contiene los efectos de cambio de orientación.

Para estudiar los efectos de las diferentes componentes del tensor de transformación de desplazamientos  $D$  usaremos el cuadrado unitario de la figura 5.8.



**Figura 5.8.** Cuadrado unitario a ser transformado por el tensor  $D$ .

Como método de análisis aplicaremos las diferentes componentes del tensor  $D$  sobre los vectores posición de los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  dados por:

$$\begin{aligned}\vec{r}_A &= 1.0\hat{i} \\ \vec{r}_B &= 1.0\hat{j} \\ \vec{r}_C &= 1.0\hat{i} + 1.0\hat{j}\end{aligned}$$

y asumiremos que los puntos  $O$ ,  $A$ ,  $B$  y  $C$  permanecen unidos por líneas rectas de acuerdo con la propiedad de linealidad. Posteriormente compararemos la configuración original y deformada del elemento.

Consideraremos inicialmente la componente simétrica de la ecuación (5.9). Por razones que se harán evidentes más adelante denotemos los elementos de esta componente como:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \bar{\gamma} \\ \bar{\gamma} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}$$

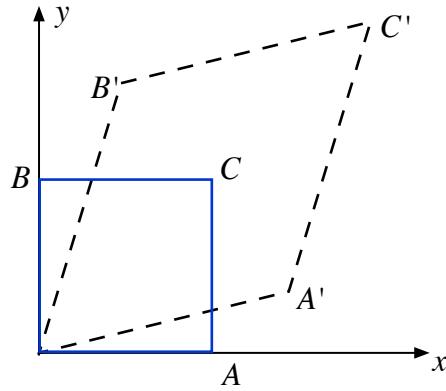
Para determinar la configuración deformada aplicamos la expresión:

$$\begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \bar{\gamma} \\ \bar{\gamma} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \end{Bmatrix}$$

a los vectores posición  $\vec{r}_A$ ,  $\vec{r}_B$  y  $\vec{r}_C$ . Esto da como resultado los vectores de desplazamiento:

$$\begin{aligned}\vec{\Delta}_A &= \varepsilon_{xx}\hat{i} + \bar{\gamma}\hat{j} \\ \vec{\Delta}_B &= \bar{\gamma}\hat{i} + \varepsilon_{yy}\hat{j} \\ \vec{\Delta}_C &= (\varepsilon_{xx} + \bar{\gamma})\hat{i} + (\varepsilon_{yy} + \bar{\gamma})\hat{j}\end{aligned}$$

y la configuración deformada mostrada en línea punteada en la figura 5.9.



**Figura 5.9.** Configuraciones original y deformada de un cuadrado unitario debido a la componente simétrica  $\varepsilon$  del tensor de transformación de desplazamientos  $D$ .

### 5.2.3. Componentes escalar y distorsional

La componente simétrica del tensor de transformación de desplazamientos es análoga al tensor de tensiones estudiado en secciones anteriores. De hecho, dado su carácter simétrico este puede ser estudiado en términos del círculo de Mohr. Identificando esta conexión es posible resolver esta componente en términos adicionales que permiten ahondar en el entendimiento físico del análisis de deformaciones. En particular considere la siguiente descomposición:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \bar{\gamma} \\ \bar{\gamma} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \bar{\gamma} \\ \bar{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

en la cual se ha separado la componente simétrica en un término escalar (correspondiente al centro del círculo de Mohr) y en 2 términos con información distorsional controlando el radio del círculo. Escribamos la descomposición de  $\varepsilon$  como:

$$\varepsilon = pI + S + C$$

donde se reconoce  $p = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2}$  con lo que el primer término se escribe como:

$$pI = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \end{bmatrix}.$$

Similarmente, haciendo  $s = \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}$  escribimos:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}}{2} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & -s \end{bmatrix}$$

y finalmente

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\gamma} \\ \bar{\gamma} & 0 \end{bmatrix}.$$

Para entender el efecto físico de cada uno de estos términos aplicaremos nuevamente la transformación al cuadrado unitario previamente definido.

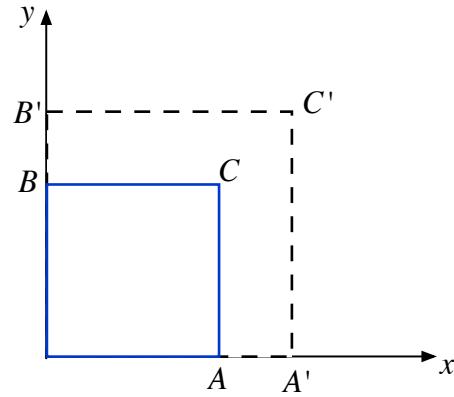
La componente escalar  $pI$  genera los siguientes vectores de desplazamientos tras aplicar la ecuación (5.6):

$$\vec{\Delta}_A = \hat{p}\hat{i}$$

$$\vec{\Delta}_B = p\hat{j}$$

$$\vec{\Delta}_C = p\hat{i} + p\hat{j}$$

resultando en el cambio de forma mostrado en la ??



**Figura 5.10.** Configuraciones original y deformada de un cuadrado unitario debido a la componente escalar de la componente simétrica del tensor de transformación de desplazamientos.

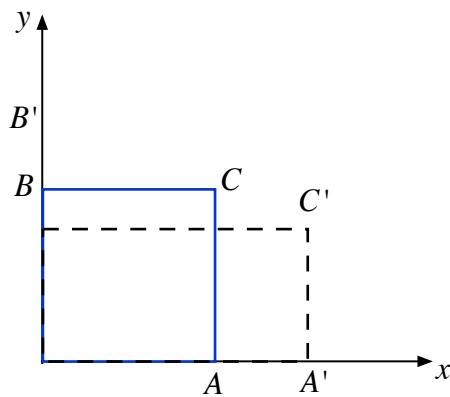
De manera similar, la primera componente distorsional  $S$  genera los siguientes vectores de desplazamientos:

$$\vec{\Delta}_A = s\hat{i}$$

$$\vec{\Delta}_B = -s\hat{j}$$

$$\vec{\Delta}_C = s\hat{i} - s\hat{j}$$

resultando en el cambio de forma mostrado en la figura 5.11.



**Figura 5.11.** Configuraciones original y deformada de un cuadrado unitario debido a la primera componente distorsional de la componente simétrica del tensor de transformación de desplazamientos.

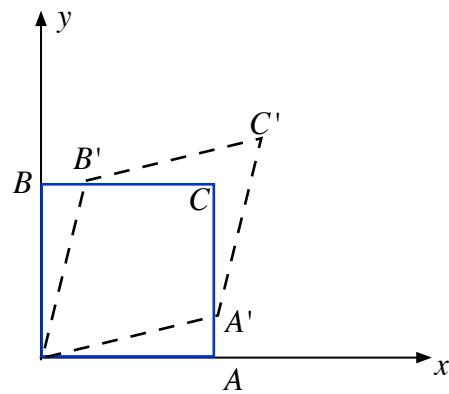
Luego, aplicando la segunda componente distorsional  $C$  da como resultado los siguientes vectores de desplazamientos:

$$\vec{\Delta}_A = \gamma \hat{j}$$

$$\vec{\Delta}_B = \gamma \hat{i}$$

$$\vec{\Delta}_C = \gamma \hat{i} + \gamma \hat{j}$$

y en los cambios de configuración mostrados en la figura 5.12



**Figura 5.12.** Configuraciones original y deformada de un cuadrado unitario debido a la segunda componente distorsional de la componente simétrica del tensor de transformación de desplazamientos.

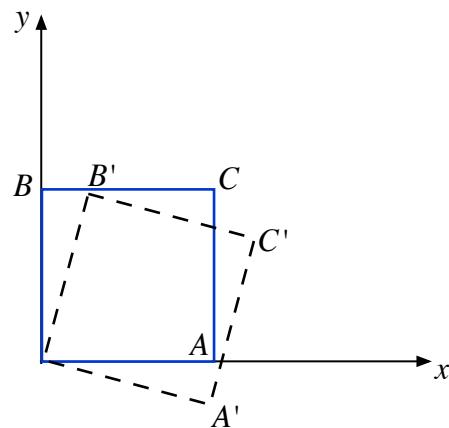
Finalmente, y en aras de la consistencia apliquemos la componente rotacional  $\omega$  (ver ecuación (5.9)) al cuadrado unitario obteniendo como resultado los siguientes vectores de desplazamientos:

$$\vec{\Delta}_A = -\alpha \hat{j}$$

$$\vec{\Delta}_B = \alpha \hat{i}$$

$$\vec{\Delta}_C = \alpha \hat{i} - \alpha \hat{j}$$

y el cambio de configuración mostrado en la figura 5.13



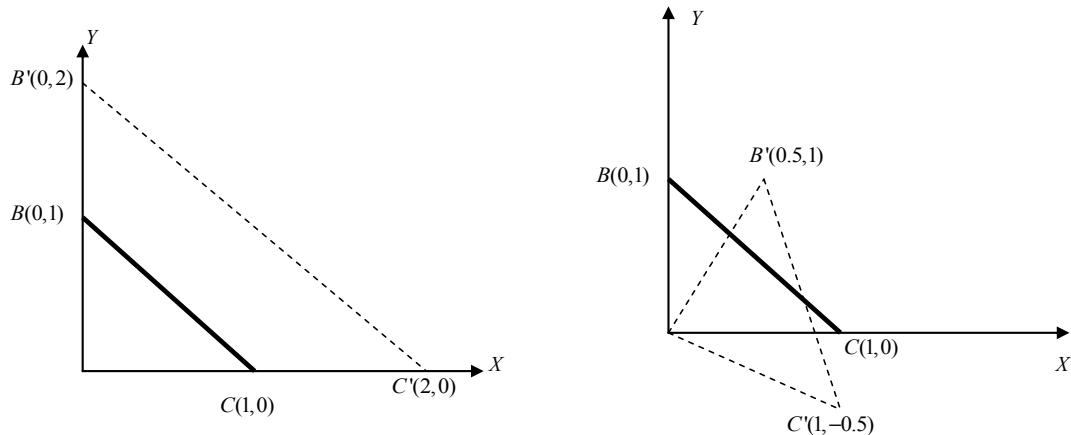
**Figura 5.13.** Configuraciones original y deformada de un cuadrado unitario debido a la componente anti-simétrica del tensor de transformación de desplazamientos.

### Ejemplo

Un tensor dado  $D$  permite calcular los desplazamientos  $\Delta$  de los puntos en un espacio (en 2-dimensiones) y cuya posición original se encuentra dada por el vector posición  $\vec{r}$  de acuerdo con;

$$\vec{\Delta} = D \cdot \vec{r}$$

El este tensor resulta de superponer (o sumar) los 2 efectos mostrados en la figura 5.14a y figura 5.14b en la cual las líneas continuas representan la configuración original y las líneas punteadas la configuración final.



(a) Cambios debidos a la componente simétrica

(b) Cambios debidos a la componente anti-simétrica

Figura 5.14. Transformación lídeal de elemento triangular.

Se pide:

- (i) Determinar el tensor  $D$ .
- (ii) Determinar las componentes simétrica  $\varepsilon$  y anti-simétrica  $\omega$  del tensor  $D$ .
- (iii) Determinar las direcciones y valores principales de la componente simétrica  $\varepsilon$ .

En la primera transformación se tienen los siguientes vectores de posición originales;

$$\vec{r}_B = 1.0\hat{j}$$

$$\vec{r}_C = 1.0\hat{i}$$

y los siguientes vectores de desplazamientos para los puntos  $B$  y  $C$  respectivamente;

$$\begin{aligned}\vec{\Delta}_B &= 1.0\hat{j} \\ \vec{\Delta}_C &= 1.0\hat{i}\end{aligned}$$

planteando para cada punto la ecuación:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \bar{\gamma} \\ \bar{\gamma} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \end{Bmatrix}$$

permite determinar;

$$\varepsilon \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \bar{\gamma} \\ \bar{\gamma} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Procediendo de manera análoga en el caso de la segunda transformación se tiene que;

$$\omega \equiv \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.5 \\ -0.5 & 0.0 \end{bmatrix}$$

por lo que el tensor resultante corresponde a:

$$\varepsilon + \omega \equiv \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0 & 0.5 \\ -0.5 & 0.0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 \\ -0.5 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

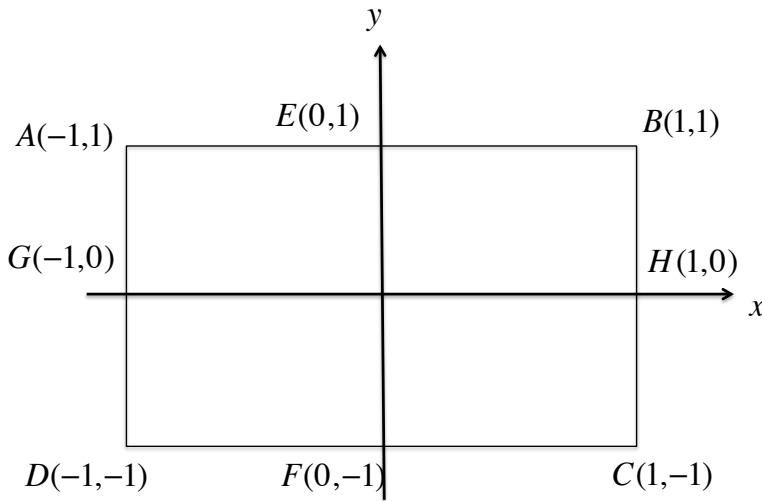
## Problema propuesto

La figura 5.15 corresponde a la configuración original de un medio continuo. Si sobre este se aplica el tensor de transformación de desplazamientos:

$$D = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} \\ d_{yx} & d_{yy} \end{bmatrix}$$

determinar la configuración deformada del medio indicando claramente el efecto de cada una de las componentes definidas de acuerdo con:

$$D = \varepsilon + \omega \equiv pI + S + C + \omega$$



**Figura 5.15.** Transformación al espacio completo.

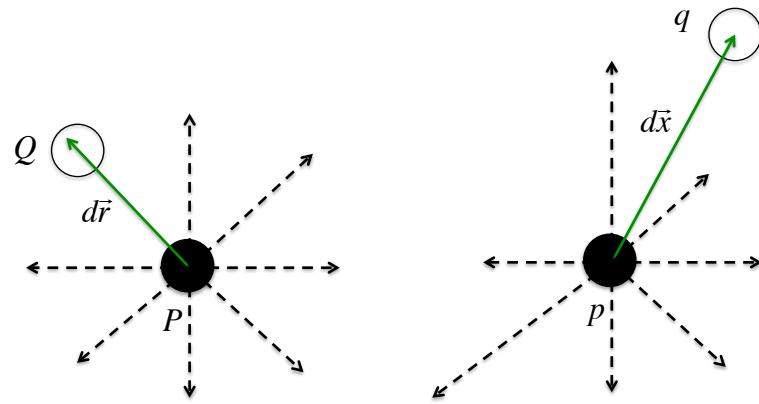
### 5.3. Tensor de deformaciones unitarias

Procedamos ahora a comparar lo que sucede con una fibra materiales infinitesimal tras haber sido sometida al proceso de deformación. Ésta se muestra en la figura 5.16 conectando los puntos materiales que ocupan las posiciones  $P$  y  $Q$  antes de la deformación y las posiciones  $p$  y  $q$  en la configuración deformada. En la configuración original la fibra  $PQ$  esta dada por el vector  $d\vec{r}$  expresado en términos de magnitud y dirección como:

$$d\vec{r} = \hat{n}dS$$

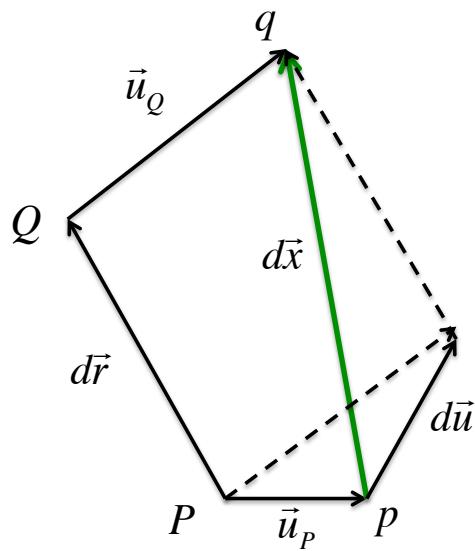
donde

$$\hat{n} = \frac{dx}{dS} \hat{i} + \frac{dy}{dS} \hat{j}.$$



**Figura 5.16.** Fibras materiales emanando de un punto material  $P$  en las configuraciones original y deformada.

En la configuración deformada la fibra  $PQ$  se convierte en la fibra  $pq$  dada por el vector  $d\vec{x}$ . Ambas se comparan en la figura 5.17 en la que también se identifica el desplazamiento  $\vec{u}_P$  del punto material  $P$  y el desplazamiento  $\vec{u}_Q$  del punto material  $Q$ .



**Figura 5.17.** Desplazamiento relativo entre 2 puntos materiales infinitesimalmente cercanos.

Escribiendo el desplazamiento relativo  $d\vec{u}$  en términos de los vectores fibra original y deformado  $d\vec{r}$  y  $d\vec{x}$  se tiene:

$$d\vec{u} = d\vec{x} - d\vec{r}$$

o usando una relación como:

$$d\vec{x} = A \cdot d\vec{r}$$

donde  $A$  transforma  $d\vec{r}$  en  $d\vec{x}$  se tiene:

$$d\vec{u} = [A - I] \cdot d\vec{r}$$

o finalmente:

$$d\vec{u} = J \cdot d\vec{r}. \quad (5.11)$$

En la expresión ecuación (5.11) el tensor  $J$ <sup>4</sup> permite obtener el desplazamiento relativo  $d\vec{u}$  del punto material  $Q$  con respecto a  $P$ . Escribiendo  $d\vec{u}$  en términos de sus componentes rectangulares como;

$$d\vec{u} = du\hat{i} + dv\hat{j}$$

permite escribir la ecuación (5.11) en forma explícita de acuerdo con:

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix}.$$

Reconociendo los términos del tensor  $J$  como las variaciones de las componentes rectangulares  $du$  y  $dv$  a lo largo de distancias diferenciales  $dx$  y  $dy$  permite escribir:

$$du = J_{xx}dx + J_{xy}dy \equiv \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$dv = J_{yx}dx + J_{yy}dy \equiv \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$$

o en forma explícita:

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix}$$

y en donde el tensor  $J$  corresponde al gradiente de desplazamientos. Normalizando el vector de desplazamientos relativos por la magnitud original  $dS$  de la fibra, permite obtener el desplazamiento relativo unitario como una transformación

---

<sup>4</sup>El tensor  $J$  es el análogo al tensor  $D$  visto en la sección de transformaciones lineales

$$\begin{Bmatrix} \frac{du}{dS} \\ \frac{dv}{dS} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{dx}{dS} \\ \frac{dy}{dS} \end{Bmatrix}$$

o

$$\begin{Bmatrix} d\vec{u} \\ dS \end{Bmatrix} = J \cdot \hat{n}. \quad (5.12)$$

Para identificar los diferentes efectos contenidos en el gradiente de desplazamientos este se descompone en términos de sus componentes simétrica y anti-simétrica como:

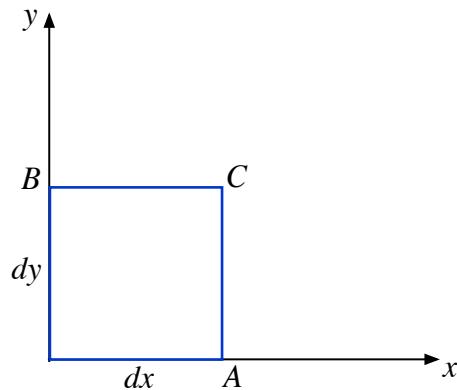
$$J = \varepsilon + \omega$$

o en forma explícita:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

Los efectos físicos de las diferentes componentes del tensor  $J$  serán estudiados analizando los cambios impuestos por este sobre el elemento diferencial mostrado en la figura 5.18. En particular, se calcularán los desplazamientos de los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  con vectores posición:

$$\begin{aligned} \vec{r}_A &= dx\hat{i} \\ \vec{r}_B &= dy\hat{j} \\ \vec{r}_C &= dy\hat{i} + dx\hat{j}. \end{aligned}$$



**Figura 5.18.** Elemento diferencial de tamaño  $dx \times dy$ .

### 5.3.1. Rotación de cuerpo rígido

Estudiando inicialmente la componente anti-simétrica  $\omega$  del tensor  $J$  aplicando la transformación sobre el elemento diferencial se tiene respectivamente para los desplazamientos relativos de los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ :

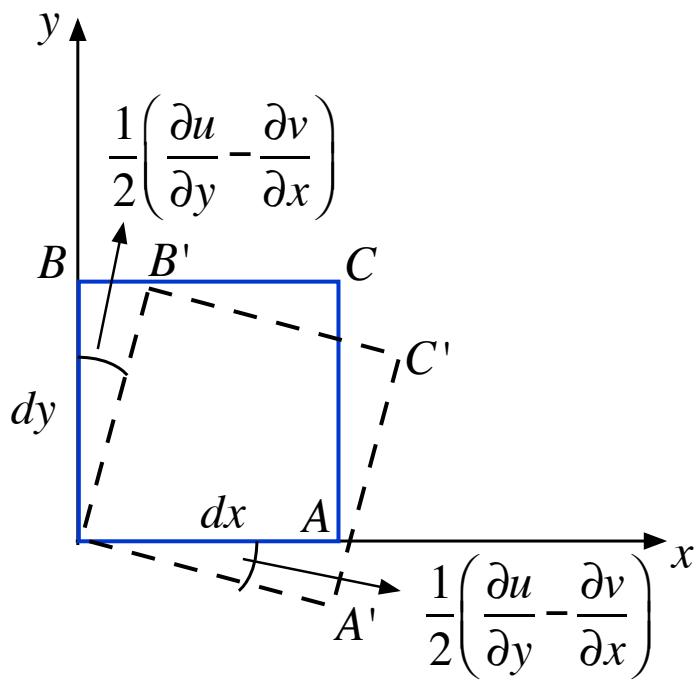
$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ 0 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \end{Bmatrix}$$

dando como resultado la configuración deformada de la figura 5.19. Rigurosamente, el elemento experimenta un pequeño cambio de volumen (área) considerado como de segundo orden. Claramente esta componente no involucra fuerzas internas o tensiones. De otro lado se debe identificar que la rotación del elemento esta dada por:

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$



**Figura 5.19.** Rotación de cuerpo rígido de un elemento diferencial.

### 5.3.2. Componente simétrica $\varepsilon$

Para el punto A

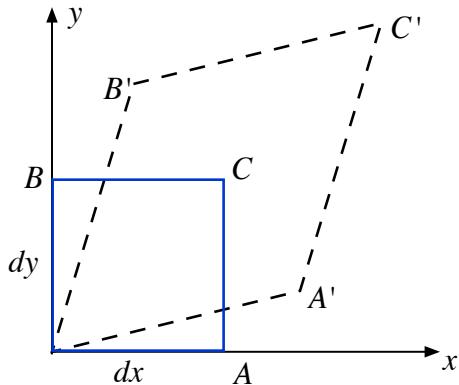
$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix}_A = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ 0 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy \end{Bmatrix}$$

Similarmente para los puntos B y C;

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy \\ \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{Bmatrix}$$

resultando en la configuración mostrada en la figura 5.20.



**Figura 5.20.** Cambio de forma en el elemento diferencial debido a la componente simétrica del gradiente de desplazamientos.

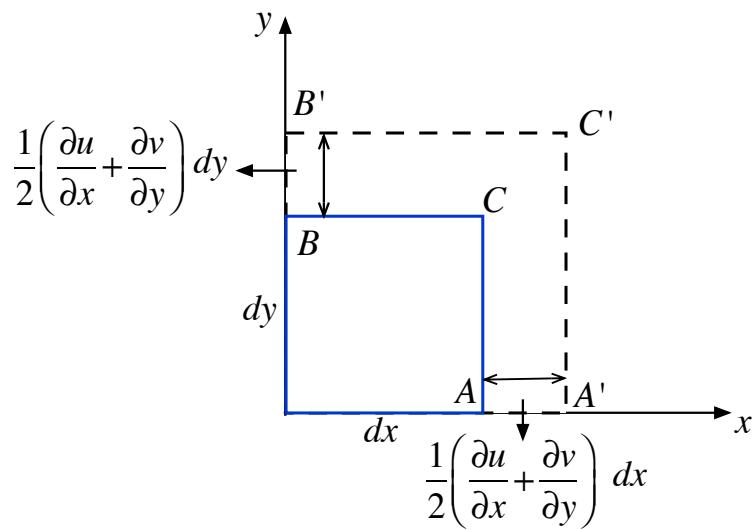
Ahora estudiemos de manera individual los efectos de los distintos componentes del tensor simétrico  $\varepsilon$ .

### 5.3.3. Componente escalar, volumétrica o isotrópica

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix}_A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ 0 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \end{Bmatrix}$$



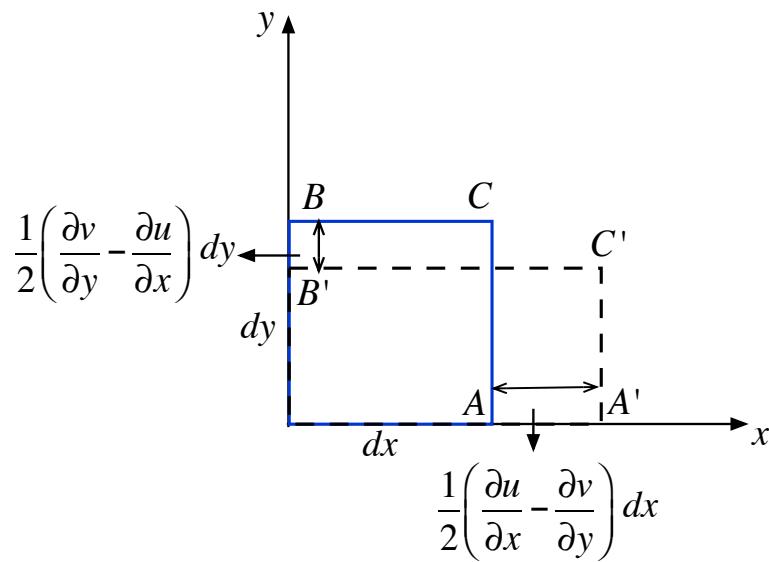
**Figura 5.21.** Cambio de forma en el elemento diferencial debido a la componente escalar del gradiente de desplazamientos.

### 5.3.4. Componente distorsional

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix}_A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ 0 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \end{Bmatrix}$$

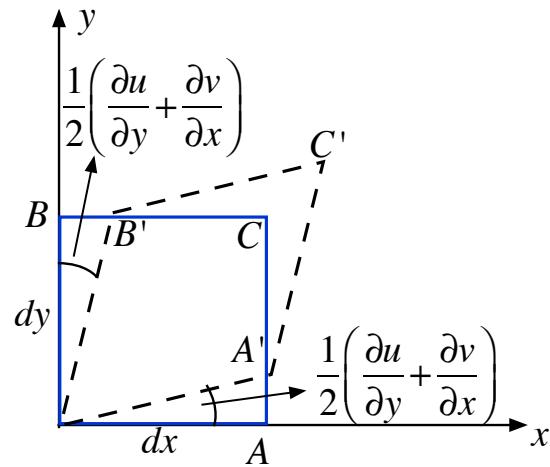


**Figura 5.22.** Cambio de forma en el elemento diferencial debido a la primera componente distorsional del tensor de deformaciones unitarias.

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ 0 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \end{Bmatrix}$$



**Figura 5.23.** Cambio de forma en el elemento diferencial debido a la segunda componente distorsional del tensor de deformaciones unitarias.

Ahora, en el argot ingenieril es común a cada término de la componente simétrica del tensor gradiente de desplazamientos asignarle una nomenclatura particular. Para generalizar la definición consideremos el tensor  $\varepsilon$  expresado en coordenadas cartesianas.

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

o escrito de otra forma:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

En donde  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  y  $\varepsilon_{zz}$  son conocidas como deformaciones axiales o normales y  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  como deformaciones angulares o deformaciones por cortante.

Por otro lado, la componente rotacional podría escribirse

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ -\omega_{xy} & 0 & \omega_{yz} \\ -\omega_{xz} & -\omega_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

en donde  $\omega_{xy}$ ,  $\omega_{xz}$  y  $\omega_{yz}$  representan la rotación de cuerpo rígido respecto a los ejes  $z$ ,  $y$  y  $x$  respectivamente.

Para terminar, el tensor  $\varepsilon$  en coordenadas cilíndricas está definido como:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \frac{1}{2}\gamma_{r\theta} & \frac{1}{2}\gamma_{rz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & \frac{1}{2}\gamma_{\theta z} \\ \frac{1}{2}\gamma_{rz} & \frac{1}{2}\gamma_{\theta z} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

## Ejemplo

El campo de desplazamientos para la cuña auto-soportada mostrada en la figura 5.24 esta dado por:

$$u = \frac{S}{E} K_1(\nu, \phi) (x - \ell C_\phi) \quad v = -\frac{S}{E} K_2(\nu, \phi) y$$

donde  $u$  y  $v$  corresponden a los desplazamientos en las direcciones horizontal y vertical respectivamente y  $K_1(\nu, \phi)$  y  $K_2(\nu, \phi)$  son constantes que dependen del semi-ángulo de la cuña y del material.  $E$  es una constante que depende del material.

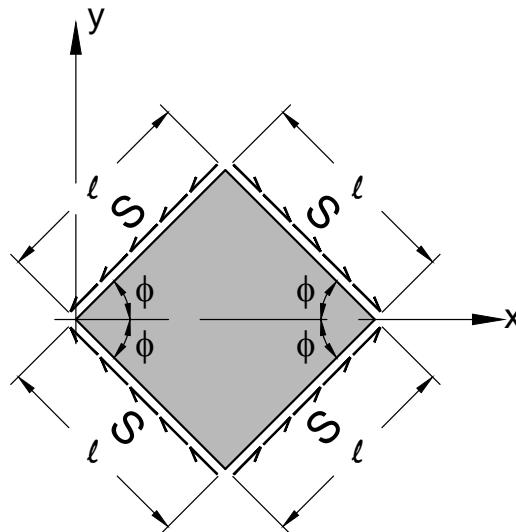
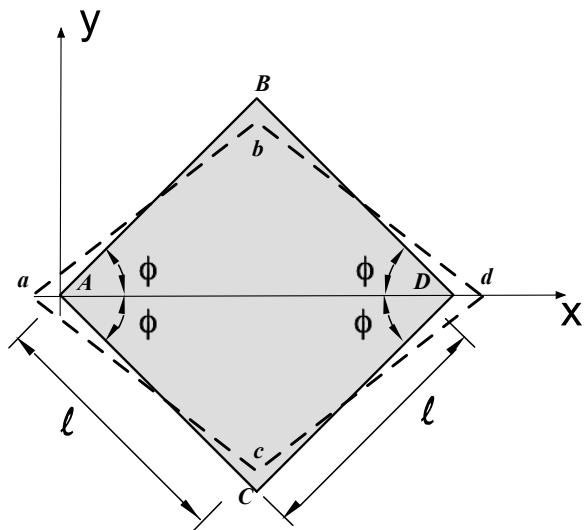


Figura 5.24. Cuña auto-soportada.

- Esbozar la configuración deformada (final) de la cuña

- Los tensores gradiente de desplazamientos  $J$ , deformaciones unitarias  $\epsilon$  y rotaciones  $\omega$ .
- Determinar las direcciones de máximo cambio de tamaño y máxima rotación.

Para esbozar la configuración deformada de la cuña es preciso evaluar el campo de desplazamientos en puntos de la misma. Por la linealidad de las funciones del campo de desplazamientos  $u$  y  $v$  y por la simetría del problema, en este caso reviremos lo que pasa en cada una de las esquinas <sup>5</sup>. Es decir, evaluamos los desplazamientos en los puntos  $A = (0, 0)$ ,  $B = (l\cos\phi, l\sin\phi)$ ,  $C = (l\cos\phi, -l\sin\phi)$  y  $D = (2l\cos\phi, 0)$ . En la figura 5.25 se muestra esquemáticamente en linea punteada la configuración deformada de la cuña. Nótese como los puntos ubicados en el eje de simetría  $A - D$  solo tienen desplazamiento en  $x$ ,  $u$ , mientras que los puntos en el eje de simetría  $B - C$  solo en  $y$ ,  $v$ . El punto central del medio continuo no se desplaza.



**Figura 5.25.** Configuración final Cuña auto-soportada.

Por otro lado, el tensor gradiente de desplazamientos está dado por:

---

<sup>5</sup>para funciones de desplazamiento más complejas puede ser preciso usar métodos más elaborados para la evaluación de dichas funciones

$$J = \frac{S}{E} \begin{bmatrix} K_1(\nu, \phi) & 0 \\ 0 & -K_2(\nu, \phi) \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon \equiv J$$

En este caso las rotaciones de cuerpo rígido son nulas

$$\omega = 0$$

Nótese que el tensor  $\varepsilon$  ya está escrito en sus valores principales, lo que quiere decir que las deformaciones axiales máximas están dadas por:  $\frac{S}{E}K_1(\nu, \phi)$  como el estiramiento máximo. y  $\frac{S}{E}K_2(\nu, \phi)$  como el acortamiento máximo.

### 5.3.5. Ejemplo: Barra apoyada sometida a su peso propio

En la figura 5.26 se muestra un elemento de sección circular de radio  $R$ , altura  $H$ , apoyado en su extremo inferior y que está sometido solamente a la acción de su peso propio. Se indica el campo de desplazamientos en el sistema coordenado  $xyz$ .

$$u = \nu \frac{\gamma}{E} zx \quad v = \nu \frac{\gamma}{E} zy \quad w = -\frac{\gamma}{2E} z^2 - \frac{\gamma\nu}{2E} (x^2 + y^2) + \frac{\gamma}{2E} H^2$$

Donde  $u, v, w$  son los desplazamientos asociados a los ejes  $x, y, z$  respectivamente.  $E$ ,  $\gamma$  y  $\nu$  son constantes del material.

- Esboce la configuración deformada de la barra.

#### Solución:

Para esbozar una configuración deformada lo hacemos a partir del campo de desplazamientos  $u, v, w$ . Para realizarla hagamos un corte transversal (plano

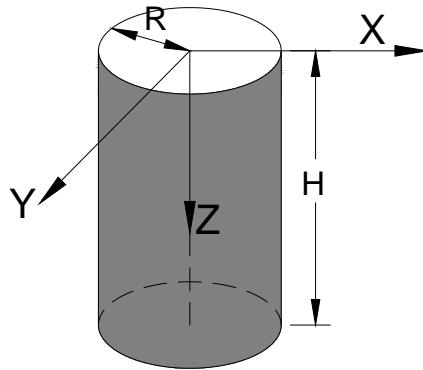


Figura 5.26. Barra apoyada

$xy$ ) y un corte longitudinal (plano  $xz$ ) y evaluemos que pasa con los desplazamientos en algunos puntos de la frontera.

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0. \quad \Rightarrow \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = \frac{\gamma}{2E}H$$

$$x = \pm R, \quad y = 0, \quad z = 0. \quad \Rightarrow \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = -\frac{\gamma\nu}{2E}R^2 + \frac{\gamma}{2E}H^2$$

$$x = 0, \quad y = \pm R, \quad z = 0. \quad \Rightarrow \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = -\frac{\gamma\nu}{2E}R^2 + \frac{\gamma}{2E}H^2$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = H. \quad \Rightarrow \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

$$x = \pm R, \quad y = 0, \quad z = H. \quad \Rightarrow \quad u = \pm\nu\frac{\gamma}{E}HR, \quad v = 0, \quad w = -\frac{\gamma\nu}{2E}R^2$$

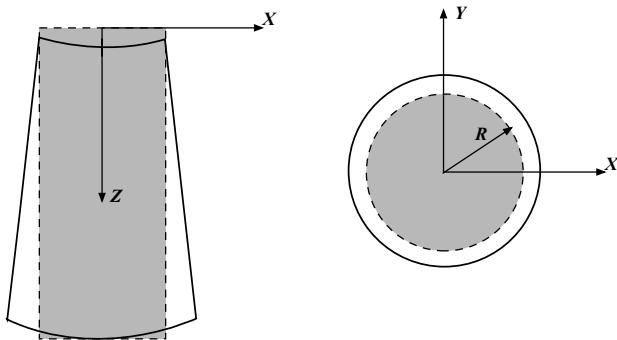
$$x = 0, \quad y = \pm R, \quad z = H. \quad \Rightarrow \quad u = 0, \quad v = \pm\nu\frac{\gamma}{E}HR, \quad w = -\frac{\gamma\nu}{2E}R^2$$

En la figura figura 5.27 aparecen la configuración inicial (línea punteada) y final del elemento.

- Calcule el tensor de deformaciones y descompóngalo en  $[\varepsilon]$  (simétrico) y  $[\omega]$  (asimétrico).

**Solución:**

El tensor gradiente de desplazamientos está dado por:



**Figura 5.27.** Cortes con configuración final

$$[D] = \frac{\gamma}{E} \begin{bmatrix} \nu z & 0 & \nu x \\ 0 & \nu z & \nu y \\ -\nu x & -\nu y & -z \end{bmatrix}$$

El tensor  $\varepsilon$  y  $\omega$  está dado por:

$$[\varepsilon] = \frac{\gamma}{E} \begin{bmatrix} \nu z & 0 & 0 \\ 0 & \nu z & 0 \\ 0 & 0 & -z \end{bmatrix} \quad [\omega] = \frac{\gamma}{E} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \nu x \\ 0 & 0 & \nu y \\ -\nu x & -\nu y & 0 \end{bmatrix}$$

- ¿Cuáles son los valores máximos y mínimos de las deformaciones axiales y en que puntos se presentan?

**Solución:**

$$\varepsilon_{xx} = \nu \frac{\gamma}{E} z \implies \varepsilon_{min} = 0 \quad (z = 0), \quad \varepsilon_{max} = \nu \frac{\gamma}{E} H \quad (z = H)$$

$$\varepsilon_{yy} = \nu \frac{\gamma}{E} z \implies \varepsilon_{min} = 0 \quad (z = 0), \quad \varepsilon_{max} = \nu \frac{\gamma}{E} H \quad (z = H)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\gamma}{E} z \implies \varepsilon_{min} = 0 \quad (z = 0), \quad \varepsilon_{max} = -\frac{\gamma}{E} H \quad (z = H)$$

- ¿Cuáles son los valores máximos y mínimos de los desplazamientos  $u$ ,  $v$  y  $w$  y en que puntos se presentan?

$$u = \nu \frac{\gamma}{E} zx \implies u_{min} = 0 \quad (x = 0), \quad u_{max} = \left| \nu \frac{\gamma}{E} H R \right| \quad (z = H, x = |R|)$$

$$v = \nu \frac{\gamma}{E} zy \implies v_{min} = 0 \quad (y = 0), \quad v_{max} = \left| \nu \frac{\gamma}{E} H R \right| \quad (z = H, y = |R|)$$

Para el caso del desplazamiento en  $z$  los máximos dependen de la relación entre  $H^2$  y  $R^2 = x^2 + y^2$ . Supongamos  $H > R$ .

$$w_{min} = 0 \quad (x = y = 0, z = H), \quad w_{max} = \frac{\gamma}{2E} H^2 \quad (x = y = z = 0)$$

- ¿Existen puntos exentos de rotación de cuerpo rígido?, responda sí o no y justifique su respuesta.

**Solución:**

Sí, si existen puntos exentos de rotación. La línea longitudinal cuando  $x = y = 0$  no experimenta rotación de cuerpo rígido.

- ¿Es posible encontrar puntos sometidos a deformación angular?, responda sí o no y justifique su respuesta.

**Solución:**

Sí es posible. Como puede verse en el tensor  $\varepsilon$  los valores principales son diferentes, por lo es posible encontrar alguna dirección sometida a deformación angular.

**Tarea**

Describa la configuración deformada de las partículas.

## 5.4. Ejercicios

1. En la figura 5.28 se muestra la configuración inicial y final en donde las coordenadas puntos son A, B, C y D son A(1,1), B(-1,-1), C( $-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2$ ), D( $\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2$ ). Sabiendo que  $\vec{r}$  es el vector de posición original,  $\vec{r}'$  es el vector de posición final y  $\vec{\Delta}$  es vector de desplazamiento

- a) Determinar la matriz de desplazamientos lineales  $[D]$  tal que  $\vec{\Delta} = D \cdot \vec{r}$ .
- b) Determinar la matriz de transformación lineal  $[A]$  tal que  $\vec{r} = A \cdot \vec{r}$
- c) Descomponer  $[D]$  en componente simétrica y componente asimétrica. Mostrar graficamente los efectos.
- d) Usando el círculo de Mohr, determinar las direcciones principales y los valores propios de la matriz de transformación lineal simétrica.

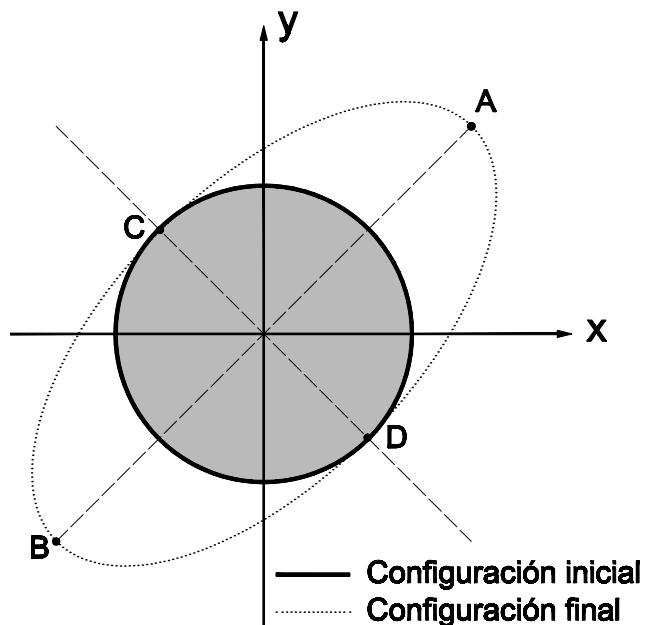
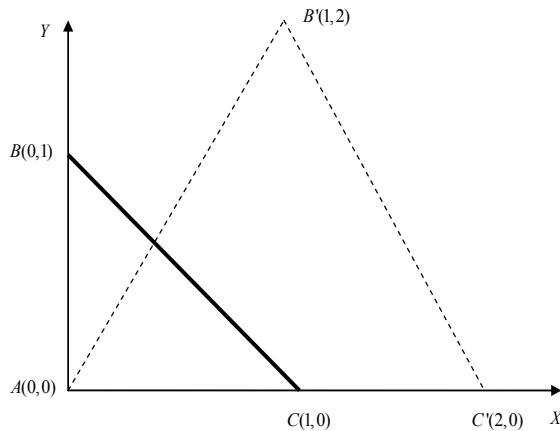


Figura 5.28. Transformación lineal

2. En la figura figura 5.29 se muestra la configuración inicial y final (línea punteada) del un triángulo de lado unitario formado por los puntos A, B, C. Para pasar de la configuración inicial a la final se aplica una transformación lineal de desplazamientos  $[D]$ , tal que  $\{\Delta\} = [D] \cdot \{r\}$ , donde  $\Delta$  es el vector desplazamiento, y  $r$  es el vector posición inicial.



**Figura 5.29.** Configuraciones inicial y deformada

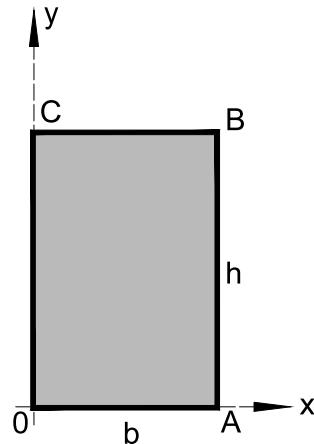
- Determinar la transformación lineal  $[D]$ , y descomponerla en sus componente simétrica  $[\varepsilon]$  y asimétrica  $[\omega]$ .
- Determinar las direcciones principales de la transformación  $[D]$ . Es posible usar círculo de Morh.
- Mostrar matemática y gráficamente el efecto independiente de las diferentes componentes del tensor lineal de desplazamientos. Las componentes a considerar son la isotrópica, las distorsionales y la rotación de cuerpo rígido, tal que  $[D] = p[I] + [S] + [C] + [\omega]$
- Escribir en sus direcciones principales la componente simétrica  $[\varepsilon]$  de la transformación  $[D]$ .

3. La figura figura 5.30 muestra un rectángulo infinitesimal de lado  $b$  y altura  $h$  en la configuración sin deformar el cual es deformado por alguna acción externa y dicha deformación se describe como la superposición lineal de varias deformaciones individuales, las cuales se dan a continuación:

$$a) \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$b) \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}$$

$$c) \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & f \\ f & 0 \end{pmatrix}$$



**Figura 5.30.** Rectángulo en la configuración no deformada

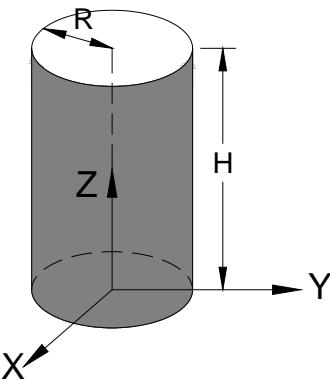
Se pide determinar lo siguiente:

- Calcular los desplazamientos de los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  para cada uno de los estados de deformación y dibujar las configuraciones deformadas.
- Si se sabe que las dimensiones del rectángulo  $b = 1.00$  y  $h = 1.00$  y los valores de las transformaciones son  $d = 0.01$ ,  $e = 0.005$  y  $f = 0.0025$ . Calcular las direcciones principales y los valores propios para la superposición lineal de las deformaciones.

4. En la figura figura 5.31 se muestra una barra de sección circular de radio  $R$ , altura  $H$ , soportada de su extremo superior y que está sometido solamente a la acción de su peso propio. El campo de desplazamientos  $u, v, w$  en el sistema coordenado  $xyz$  de para la barra está dado por:

$$u = -\nu \frac{\gamma}{E} zx \quad v = -\nu \frac{\gamma}{E} zy \quad w = \frac{\gamma}{2E} z^2 + \frac{\gamma\nu}{2E} (x^2 + y^2) - \frac{\gamma}{2E} H^2$$

donde  $E$ ,  $\gamma$  y  $\nu$  son constantes del material (positivas).



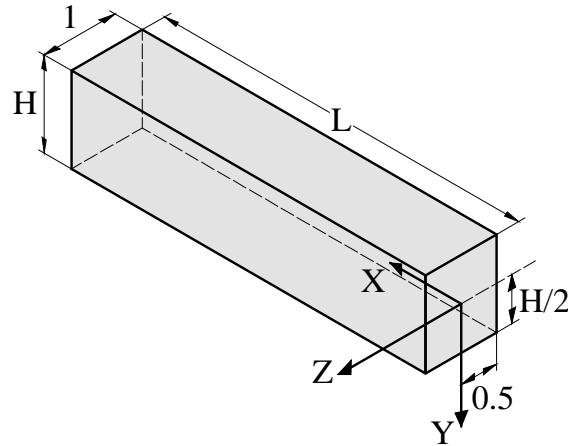
**Figura 5.31.** Barra colgada

- Esboce la configuración deformada de la barra.
- Calcule el tensor de deformaciones y descompóngalo en su componente simétrica:  $[\varepsilon]$  y asimétrica  $[\omega]$
- Cuáles son los valores máximos y mínimos de las deformaciones axiales,  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ , y en que puntos se presentan.
- Cuáles son los valores máximos y mínimos de los desplazamientos:  $u$ ,  $v$ ,  $w$  y en que puntos se presentan.
- ¿ Existen puntos exentos de rotación de cuerpo rígido?, responda sí o no y justifique su respuesta.
- ¿ Es posible encontrar puntos sometidos a distorsión angular?, responda sí o no y justifique su respuesta.

5. En la figura figura 5.32 se muestra un medio continuo de sección rectangular de ancho unitario, altura  $H$ , soportado en un extremo ( $X = 0$ ), y sometido en su otro extremo ( $X = L$ ) a la acción de un momento flector  $M$  alrededor del eje  $Z$ . Si el campo de desplazamientos en el sistema coordenado  $XYZ$  está dado por:

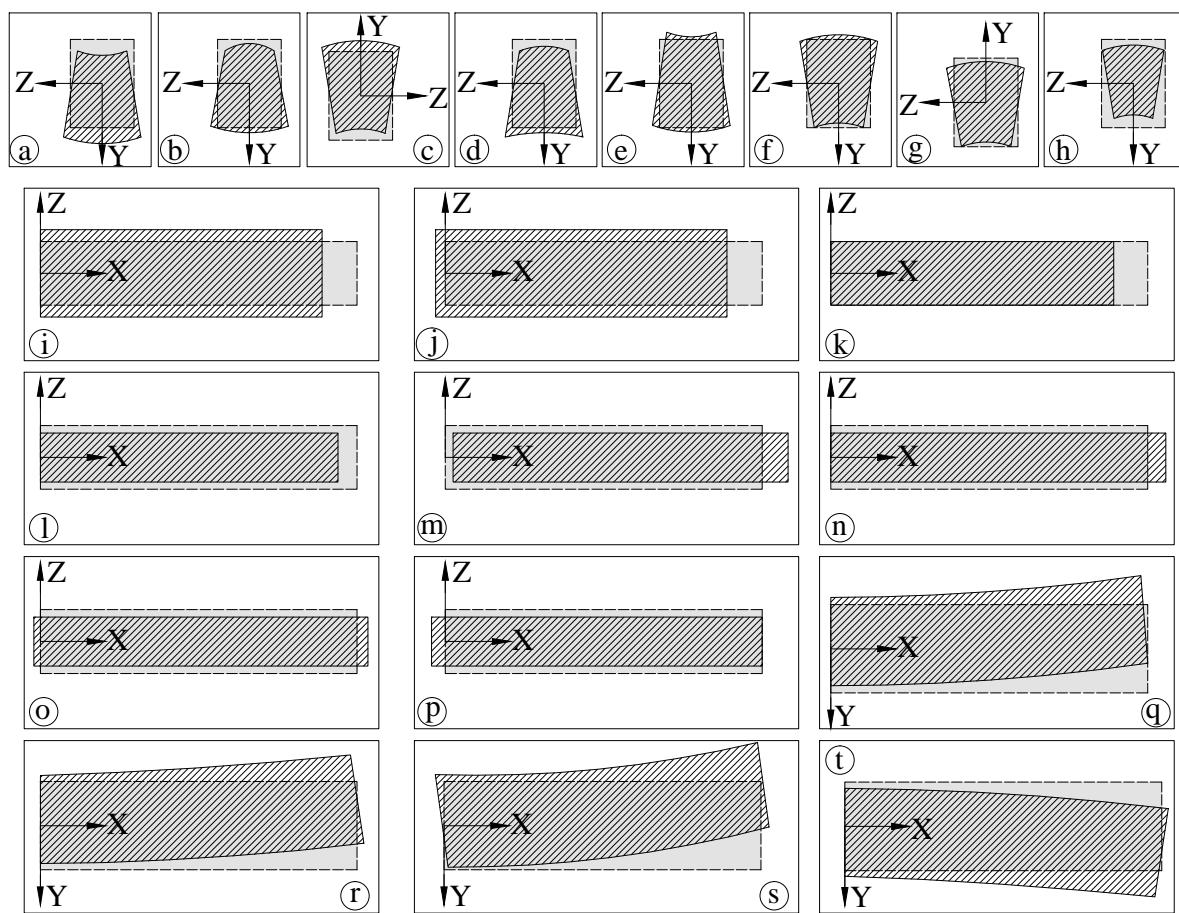
$$u = -\frac{M}{EI}XY \quad v = \frac{M}{2EI}(X^2 + \nu(Y^2 - Z^2)) \quad w = \frac{\nu M}{EI}YZ$$

Donde  $u, v, w$  son los desplazamientos asociados a los ejes  $X, Y, Z$  respectivamente.  $E$  y  $\nu$  son constantes (positivas) del material e  $I$  es el momento de inercia alrededor del eje  $Z$  de la sección transversal.



**Figura 5.32.** Viga sometida a momento flector

- a) En la figura figura 5.33 se muestran esbozos de posibles configuraciones deformadas (sección achurada) de la viga mostrada en la figura . Determine en cada caso cual es la configuración correcta.
- Para la sección transversal en  $X = L$ .
  - Para una sección longitudinal cuando  $Y > 0$ .
  - Para una sección longitudinal asociada al plano ( $Y = -H/2$ )
  - Para una sección longitudinal asociada al plano ( $Z = 0$ )



**Figura 5.33.** Posibles configuraciones deformadas de sección transversal

- b) Calcule el tensor de deformaciones  $[\varepsilon]$  y el de rotación  $[\omega]$
- c) Si el valor de la distorsión angular máxima es  $\gamma = \gamma_{max}$  determine cual es el momento máximo posible,  $M_{max}$  que podría ser aplicado.
- d) ¿Cuáles son las coordenadas  $x, y, z$  de los puntos que experimentan mayores rotaciones de cuerpo rígido?
- e) ¿Cuáles son los puntos que experimentan la menor rotación de cuerpo rígido?
- f) Cuales son los valores máximos y mínimos de las deformaciones axiales,  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yx}, \varepsilon_{zz}$  y en que puntos se presentan.
- g) Cuáles son los valores máximos y mínimos de los desplazamientos,  $u, v$ ,  $w$ , y en que puntos se presentan.

- h)* ¿Existen puntos exentos de rotación de cuerpo rígido?, responda sí o no y justifique su respuesta.
- i)* ¿Es posible encontrar puntos sometidos a distorsión angular?, responda sí o no y justifique su respuesta.

6. En la figura figura 5.34 se muestra la solución de un semi-espacio sometido a una carga lineal superficial  $P$ . Los desplazamientos al interior del suelo debidos a la carga  $P$  están dados por:

$$u_r(r, \theta) = -\frac{2P}{\pi E} \ln r \cos \theta - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \sin \theta + B \cos \theta$$

$$u_\theta(r, \theta) = \frac{2\nu P}{\pi E} \sin \theta + \frac{2P}{\pi E} \ln r \sin \theta - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \cos \theta + \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \sin \theta - B \sin \theta$$

$$w(r, \theta) = 0$$

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad,  $\nu$  es la relación de Poisson del material y  $B$  es una constante positiva.

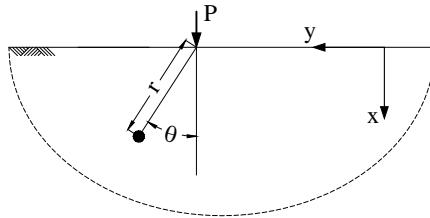


Figura 5.34. Solución carga vertical

Si en un suelo sometido a la acción de dos estructuras que le transmiten una carga lineal superficial,  $P$  y  $3P$ , respectivamente tal como se muestra en la figura figura 5.35 se desea instalar una tubería, perpendicular al plano mostrado ( $XY$ ), de diámetro despreciable, en el punto indicado en la figura figura 5.35.

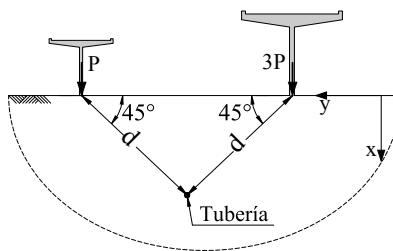


Figura 5.35. Estructuras y tubería.

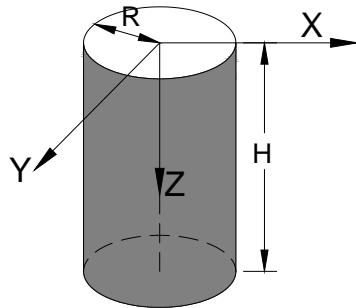
- a) Determine cuál es el valor de la deformación axial máxima.

- b) Si la máxima deformación angular a la que puede ser sometida la tubería sin fallar, es igual a:  $\gamma_{max}$ . ¿Cuál es el máximo valor de la carga distribuida  $P$  que pueden transmitir las estructuras para que la tubería no falle?.
- c) Esboce la configuración deformada de la partícula correspondiente al punto donde se ubica la tubería. Solo considere el plano  $xy$ .

7. En la figura figura 5.36 se muestra una barra de radio  $R$  y longitud  $L$ . El campo de desplazamientos en el sistema coordenado  $xyz$ , está dado por:

$$u = -\theta yz, \quad v = \theta xz, \quad w = 0$$

Donde  $u, v, w$  son los desplazamientos asociados a los ejes  $x, y, z$  respectivamente.  $\theta$  es una constante positiva.



**Figura 5.36.** Medio Continuo

- Dibuje la configuración deformada de la barra.
- Calcule el tensor de deformaciones,  $[D]$ , y determine: tensor de deformación  $[\varepsilon]$  (simétrico) y tensor de rotación  $[\omega]$  (asimétrico).
- Ilustre la deformación de la partícula en el punto de coordenadas  $y = R$  y  $x = 0$ . Para la ilustración use cuadrados de tamaño diferencial contenidos en los planos  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$  de forma independiente. En la ilustración debe incluirse los efectos de cuerpo rígido.
- ¿Cuáles son los puntos que experimentan mayores rotaciones de cuerpo rígido?
- Cuáles son los valores máximos y mínimos de los desplazamientos,  $u, v, w$  y en qué puntos se presentan:
- ¿Es posible encontrar puntos sometidos a distorsión angular?, responda sí o no y justifique su respuesta.

8. En la figura figura 5.37 se presenta una cuña de espesor  $t$  sometida a la acción de una carga (en el plano  $XY$ ) distribuida sobre su perímetro.

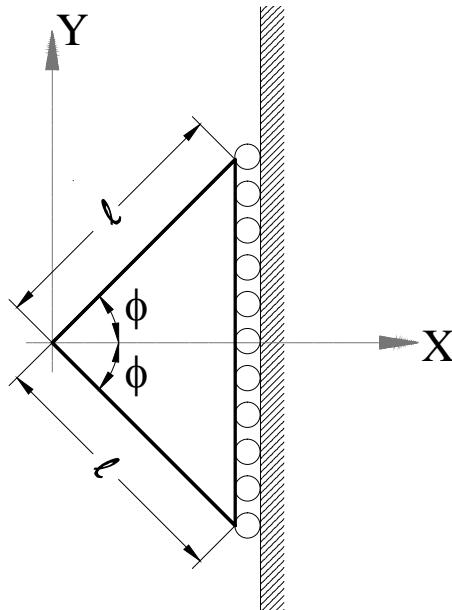


Figura 5.37. Cuña de espesor  $t$

El campo de desplazamientos de la cuña esta dado por:

$$u(x, y) = \frac{2B}{E}(\cot \phi + \nu \tan \phi)(x - l \cos \phi) \quad v(x, y) = -\frac{2B}{E}(\tan \phi + \nu \cot \phi)y$$

Donde  $B$ ,  $E$  y  $\nu$  son constantes positivas.

Además, se sabe que:

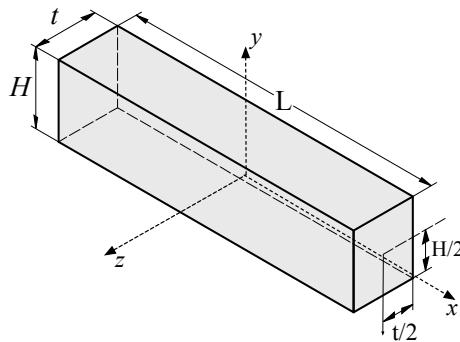
$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1 - \nu^2)}(\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{(1 - \nu^2)}(\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)}\gamma_{xy}$$

- Dibuje la configuración deformada de la cuña.
- Ilustre la deformación de la partícula en el punto de coordenadas  $X = 0$  y  $Y = 0$ . En la ilustración deben incluirse los efectos de cuerpo rígido.

- c) Si  $\nu = 0.25$  y  $\phi = 53.13^\circ$ , determine la reacciones (Fuerzas) en el soporte

9. Si el campo de desplazamientos para la barra mostrada en la 5.38 está dado por:

$$u(x) = -\frac{1-\nu^2}{E}\sigma_0 x, \quad v = 0, \quad w(z) = \nu \frac{1+\nu}{E}\sigma_0 z$$



**Figura 5.38.** Viga de Longitud =  $L$ , Altura =  $H$  y Espesor =  $t$ . El origen del sistema coordenado coincidiendo con el centroide de la barra.

- Explique a que acciones externas está sometida la barra
  - Dibuje la configuración deformada de la barra
  - ¿Hay partículas sometidas a rotaciones de cuerpo rígido? (responda sí o no y justifique su respuesta).
  - ¿Hay partículas que **NO** experimenten distorsiones angulares? (responda si o no y justifique su respuesta).
  - En que coordenadas está la partícula que sufre mayor deformación axial y cuál es el valor de esta deformación.
  - En que coordenadas está la partícula que sufre mayor distorsión angular y cuál es el valor de esta deformación.
  - Encuentre los desplazamientos y deformaciones del punto de coordenadas  $(0, 0, 0)$ .
10. Para un campo de desplazamientos dado por:

$$\mathbf{u} = a(x^2 - 5y^2)\hat{\mathbf{i}} + (2axy)\hat{\mathbf{j}}$$

- Determinar el tensor de deformación;
- Obtener las deformaciones principales;

11. En la figura figura 5.39 se presenta una barra sobre la cual se aplica una fuerza en dirección  $x$   $F_x$ , que genera un esfuerzo constante  $\sigma_x$  sobre la sección transversal donde está aplicada. La barra inicialmente está separada de una lámina delgada de acero una distancia  $d$  tal y como se muestra en figura 5.39b. El campo de desplazamientos para la barra mostrada está dado por:

$$u(x) = \frac{1}{E_1}x\sigma_x, \quad v = 0, \quad w(z) = -\frac{1}{E_2}z(H^2 - y^2)\sigma_x$$

Donde  $E_1 = 200000 \text{ kgf/cm}^2$ , y  $E_2 = 1000000 \text{ kgf/cm}^4$ ,  $L = 1000 \text{ cm}$ ,  $H = 10 \text{ cm}$ .  $\sigma_x$  es el esfuerzo en dirección  $x$  el cual tiene una variación en el tiempo de acuerdo a como lo muestra la figura 5.39c.

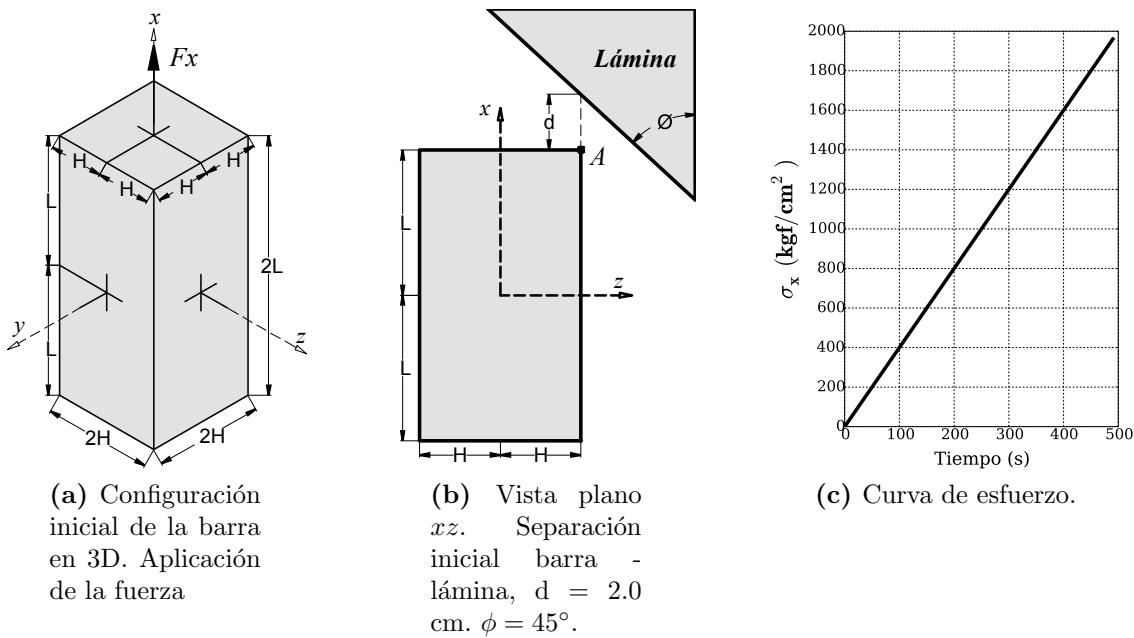


Figura 5.39. Barra sometida a fuerza axial  $F_x$

- Para el punto A de la barra con coordenadas  $(x, y, z) = (L, 0, B)$  grafique los desplazamientos  $u$  y  $w$  en función de tiempo.
- Dibuje la configuración deformada de la partícula para el punto de coordenadas  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$
- Si el valor de  $\sigma_x = 50 \text{ kgf/cm}^2$  y se estudian solo los puntos de la cara

$z = 1.0\text{cm}$  determinar el valor de la distorsión angular máxima y las coordenadas  $x, y, z$  de los puntos en que se presenta.

- d) Si el esfuerzo  $\sigma_x$  se incrementa hasta que el punto  $A$  con coordenadas  $(x, y, z) = (L, 0, B)$  toque la lámina, determine el tiempo  $t$  en el que la barra toca la lámina. ¿Cuáles serían las coordenadas finales  $x, z$  del punto  $A$  en ese instante?
12. En un ensayo de un elemento de concreto se mide la deformación en un mismo punto mediante tres galgas de deformación. Las galgas de deformación se disponen en un arreglo tal y como se muestra en la figura 5.40,

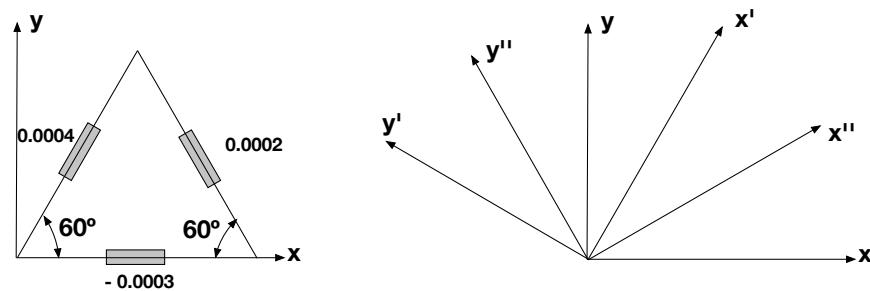


Figura 5.40. Galgas de deformación

Si las galgas solo registran la deformación axial y las mediciones de laboratorio reportaron:  $\varepsilon_{xx} = -0.0003$ ;  $\varepsilon_{x'x'} = 0.0004$ ;  $\varepsilon_{y''y''} = 0.0002$ . Se solicita

- Tensor de deformaciones en el sistema  $xy$ ,  $x'y'$  y  $x''y''$ .
- Distorsión angular máxima.
- Deformación axial máxima
- Configuración deformada de la partícula

# Capítulo 6

## Elasticidad

### 6.1. Introducción

Al final de esta sección el estudiante deberá estar en la capacidad de

- Entender las hipótesis básicas de la elasticidad lineal.
- Reconocer la relación de tensión-deformación para materiales elásticos lineales.
- Identificar los efectos físicos relacionados con las constantes de material como el módulo de Young y el coeficiente de Poisson.
- Identificar las consideraciones implicadas en las idealizaciones de esfuerzo plano y deformación plana.
- Operar en problemas de elasticidad simples.

Como se discutió en el capítulo 5 las condiciones de equilibrio en términos de tensiones se reducen a 3 ecuaciones diferenciales parciales en las 9 componentes del tensor de tensiones y a 3 relaciones de simetría resultantes del equilibrio rotacional del punto material: en total estas correspondían a 6 ecuaciones en 9 incógnitas. Al introducir los cambios cinemáticos en términos del tensor de deformaciones unitarias

se involucran en el problema las siguientes 6 ecuaciones adicionales y 9 incógnitas más

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right),\end{aligned}$$

con lo que se tienen en total 12 ecuaciones en 18 incógnitas.

Aunque todos los problemas abordados hasta el momento han estado relacionados con sólidos, también es cierto que en ningún momento hemos hecho distinción alguna de un material a otro. Es decir las soluciones en términos de tensiones para problemas como el de la cuña autosostenida son igualmente válidas independientemente del material del que este fabricada la cuña. En esta sección se presentan relaciones entre las tensiones y las deformaciones las cuales cambiarán necesariamente de un material a otro. Por ejemplo, refiriéndonos al problema de la cuña, es natural esperar que si 2 cuñas con iguales geometrías y sometidas a los mismos cortantes de magnitud  $S$ , pero fabricadas de 2 materiales diferentes, por ejemplo acero y madera, éstas se deformen en magnitudes diferentes. De forma general podemos escribir estas relaciones de la forma;

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{array} \right\}. \quad (6.1)$$

Con la ecuación (6.1) se tienen ahora 18 ecuaciones en 18 incógnitas con lo cual la solubilidad o no del problema depende ahora solo de las condiciones especificadas en la frontera.

## 6.2. Hipótesis básicas

En esta sección se particularizará la ecuación (6.1) para el más simple de los materiales correspondiente a un sólido elástico, lineal, homogéneo e isotrópico y para el cual las 36 constantes que aparecen en ecuación (6.1) se reducen a solo 2 constantes independientes. Se estudiarán problemas en los cuales deformaciones son pequeñas, por lo que se podrá considerar que las ecuaciones de equilibrio son válidas en la configuración inicial. Igualmente se considerará que hay procesos de disipación de energía.

## 6.3. Relación tensión-deformación

Considerando las hipótesis planteadas en el párrafo anterior las relaciones de la ecuación (6.1) se reducen a las relaciones tensión - deformación dadas en la ecuación (6.2):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{xx} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \\
 \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{yy} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \\
 \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{zz} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \\
 \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\
 \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\
 \tau_{zy} &= G\gamma_{yz}
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

y las relaciones deformación - tensión dadas en la ecuación (6.3):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\
 \gamma_{zy} &= \frac{\tau_{zy}}{G}
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

En la ecuación (6.2) y en la ecuación (6.3), conocidas comúnmente como la Ley de Hooke, las constantes  $E$  (módulo elástico o de módulo de Young) ,  $G$  (módulo elástico de cortante) y  $\nu$  (relación de Poisson) son propias de cada material. El valor de dichas constantes se puede determinar mediante ensayos de laboratorio de tensión simple para el módulo elástico  $E$  y relación de Poisson  $\nu$  y de torsión pura para el módulo de cortante  $G$ . Por otro lado es posible hallar la siguiente relación entre constantes.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

## 6.4. Idealizaciones en 2D

En general, es difícil resolver problemas en 3D. Por esta razón, existen varias idealizaciones que consideran el medio continuo como si este fuera plano. Estas simplificaciones consideran que:

- el medio está acotado por dos superficies planas paralelas al plano  $xy$ ;
- la sección transversal del medio es uniforme en la dirección  $z$ ;
- la carga se distribuye uniformemente en la dirección  $z$ ; y
- no hay tracciones tangenciales en las superficies planas que acotan el medio.

La segunda restricción implica que no podríamos tener deflexión y la tercera restricción implica que no habrá torsión. Estas restricciones no implican, sin embargo, que el medio continuo debe ser delgado.

#### 6.4.1. Tensión plana

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\delta_{ij}$$

#### 6.4.2. Deformación plana

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})]$$

$$0 = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$$

de donde

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

Eliminando  $\sigma_{zz}$  se tiene que:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1 - \nu^2}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu(1 + \nu)}{E} \sigma_{yy} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1 - \nu^2}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu(1 + \nu)}{E} \sigma_{xx} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}\end{aligned}\tag{6.5}$$

Introduciendo los siguientes módulos efectivos:

$$\bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

y

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

es posible re-escribir la ecuación (6.5) como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \bar{\nu}}{\bar{E}} \sigma_{ij} - \frac{\bar{\nu}}{\bar{E}} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \delta_{ij}.$$

### Ejemplo 1: Cuña autosoportada

Regresando al ejemplo de la cuña auto-soportada (figura 6.1)

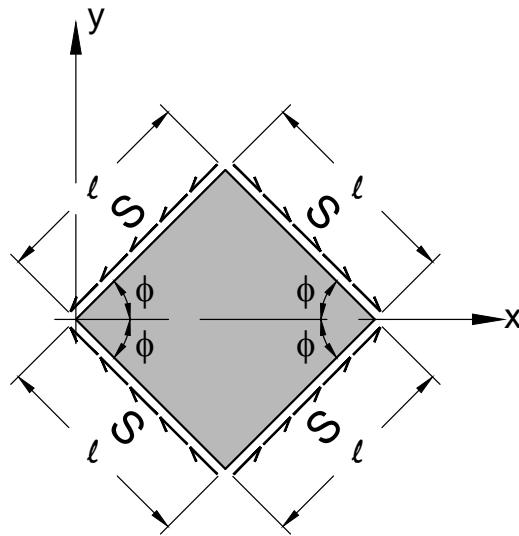


Figura 6.1. Cuna auto-soportada.

Usando argumentos de equilibrio determinamos que el campo de tensiones solución del problema estaba dado por:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= S \cot \phi \\ \sigma_{yy} &= -S \tan \phi \\ \tau_{xy} &= 0\end{aligned}\tag{6.6}$$

Usando las relaciones tensión-deformación para tensión plana (o deformación plana con módulos efectivos) se tiene que:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [S \cot \phi + \nu S \tan \phi] \\ \varepsilon_{yy} &= -\frac{1}{E} [S \tan \phi + \nu S \cot \phi]\end{aligned}$$

Recordando las relaciones:

$$\{d\vec{u}\} = [\varepsilon] \cdot \{d\vec{x}\} + [\omega] \cdot \{d\vec{x}\}$$

las cuales para el caso plano se simplifican a

$$\begin{aligned} du &= \varepsilon_{xx}dx + \frac{\gamma_{xy}}{2}dy - \frac{\omega_{xy}}{2}dy \\ dv &= \varepsilon_{yy}dy + \frac{\gamma_{xy}}{2}dx + \frac{\omega_{xy}}{2}dx \end{aligned}$$

y reconociendo que por la simetría del problema las componentes rotacionales son nulas se tiene que

$$u = \int \frac{1}{E} [S \cot \phi + \nu S \tan \phi] dx \equiv \frac{1}{E} [S \cot \phi + \nu S \tan \phi] x + A$$

y

$$v = - \int \frac{1}{E} [S \tan \phi + \nu \cot \phi] dy \equiv - \frac{1}{E} [S \tan \phi + \nu S \cot \phi] y + B$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes de integración.

## Ejemplo 2: Barra sometida a carga axial

En la figura 6.2a se muestra una barra de sección rectangular con  $a = 40$  cm,  $b = 50$  cm y longitud inicial  $L_c = 500$  cm, que es sometida a un ensayo de compresión confinada (está contenida en un recipiente indeformable), mientras que en la figura 6.2b se muestra una barra de sección circular con diámetro  $d = 50$  cm y longitud inicial  $L_t = 497$  cm sobre la cual se realiza un ensayo de tracción simple. Las constantes del material, tanto para la barra rectangular como para la barra circular, son  $E = 150000$  kgf/cm<sup>2</sup> y  $\nu = 0.20$ .

Ambos ensayos se realizan con su extremo fijo en el plano  $z = 0$  y están cargados con un sistema que no transmite esfuerzos cortantes y que hace que el esfuerzo axial se distribuya uniformemente sobre la superficie transversal de las barras. Los esfuerzos que se inducen a las barras varían con el tiempo conforme a lo mostrado en la figura 6.2c

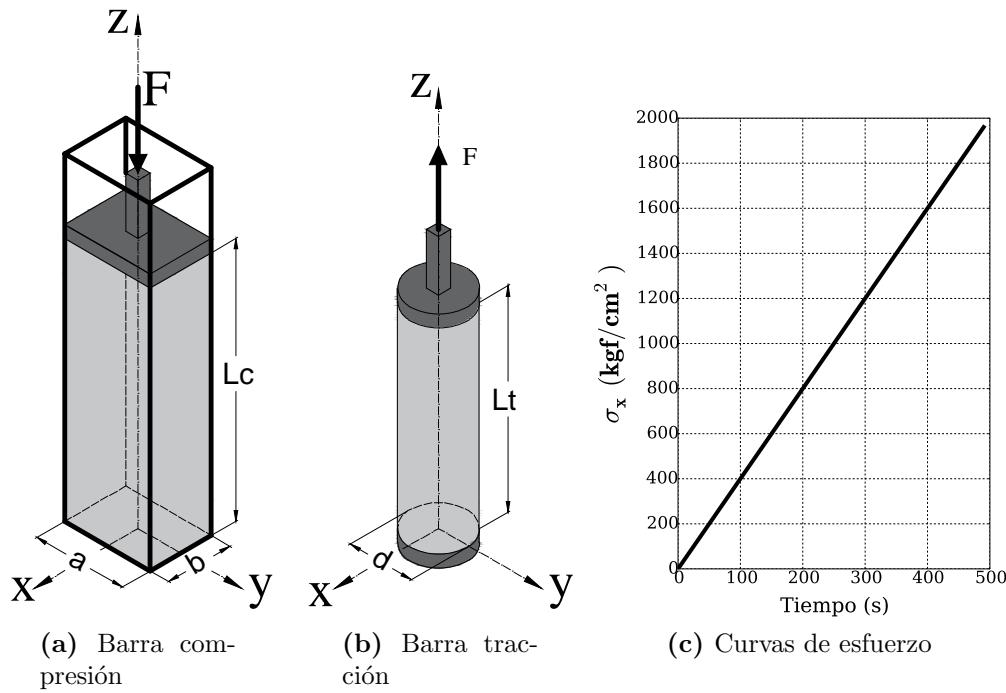


Figura 6.2. Esquema ensayos y curvas de aplicación carga

Determine:

- ¿Cuál es el tiempo  $t$  en el cual las dos barras tienen la misma longitud?

**Solución:**

La barra circular está solamente sometida a esfuerzo axial  $\sigma_{zz}$ , por lo que la deformación es

$$\varepsilon_{zzt} = \frac{\sigma_{zzt}}{E}$$

y la longitud final sería:

$$\begin{aligned} L_{f_{cir}} &= L_{ini_{cir}}(1 + \varepsilon_{zzt}) \\ L_{f_{cir}} &= L_{ini_{cir}} \left(1 + \frac{\sigma_{zzt}}{E}\right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Por otro lado, la barra cuadrada está sometida a esfuerzo axial  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{zz}$ , pero solo se deforma en el eje  $z$  que es la deformación de interés. Para este caso

entonces,

$$\varepsilon_{zzc} = \frac{\sigma_{zzc}}{(2\mu + \lambda)}$$

$$\text{donde } \mu = \left( \frac{E}{2(1 + \nu)} \right) \text{ y } \lambda = \left( \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \right).$$

Llamando  $A = (2\mu + \lambda)$  se tiene que la longitud final para la barra cuadrada sería:

$$\begin{aligned} L_{f_{cua}} &= L_{ini_{cua}}(1 + \varepsilon_{zzc}) \\ L_{f_{cua}} &= L_{ini_{cua}} \left( 1 + \frac{\sigma_{zzc}}{A} \right) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Resta, entonces, igualar las longitudes y despejar el tiempo. Para hacer esto, es preciso tener en cuenta barra circular es cargada solo hasta que el esfuerzo es  $\sigma = 350 \text{ kgf/cm}^2$  por lo que habrá que considerar ambas condiciones. Por simplicidad inicialmente determinemos que pasaría si  $t > 350 \text{ s}$ , es decir en donde  $\sigma_{zzt} = 350 \text{ kgf/cm}^2$ . Reemplazando el valor de los esfuerzos en función del tiempo en la ecuación (6.7) y la ecuación (6.8)

$$L_{f_{cir}} = 497 \left( 1 + \frac{350}{E} \right) \quad (6.9)$$

$$L_{f_{cua}} = 500 \left( 1 - \frac{t}{A} \right) \quad (6.10)$$

donde  $A \simeq 1.1111E$ .

Igualando la ecuación (6.9) y la ecuación (6.10) y despejando  $t$  se obtiene

$$t = 613.4 \text{ s}.$$

- En la barra circular, ¿cuáles son los desplazamientos y las deformaciones en el punto de coordenadas  $(x, y, z) = (20, 15, 450) \text{ cm}$  para el tiempo  $t = 300 \text{ s}$ ?

Las deformaciones asociadas a la barra son:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xxt} &= -\nu \frac{\sigma_{zzt}}{E} \\ \varepsilon_{yyt} &= -\nu \frac{\sigma_{zzt}}{E} \\ \varepsilon_{zzt} &= \frac{\sigma_{zzt}}{E} \end{aligned} \quad (6.11)$$

reemplazando  $\sigma_{zz_t}$  por 300

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx_t} &= -0.0004 \\ \varepsilon_{yy_t} &= -0.0004 \\ \varepsilon_{zz_t} &= 0.002\end{aligned}\tag{6.12}$$

Por otro lado para determinar los desplazamientos integramos la deformación. Por ser deformación constante la integración se obtiene multiplicando la deformación por las distancias hasta el punto de evaluación.

$$\begin{aligned}u &= -0.0004(20 \text{ cm}) = -0.008 \text{ cm} \\ v &= -0.0004(15 \text{ cm}) = -0.006 \text{ cm} \\ w &= 0.002(450 \text{ cm}) = 0.9 \text{ cm}.\end{aligned}\tag{6.13}$$

- ¿Cuál es el valor del máximo esfuerzo cortante en un punto al interior de la barra rectangular durante el ensayo?

Los esfuerzos para la barra cuadrada están dados por

$$\begin{aligned}\sigma_{xx_c} &= \lambda\varepsilon_{zz_c} \\ \sigma_{yy_c} &= \lambda\varepsilon_{zz_c} \\ \sigma_{zz_c} &= (2\mu + \lambda)\varepsilon_{zz_c}\end{aligned}\tag{6.14}$$

El corte máximo se da entonces

$$\tau_{max} = \varepsilon_{zz_c} \left( \frac{2\mu + \lambda - \lambda}{2} \right)$$

llamando de nuevo  $A = (2\mu + \lambda)$ ,

$$\tau_{max} = \sigma_{zz_c} \left( \frac{\mu}{A} \right)$$

para  $\sigma_{zz_c} = 1000 \text{ kgf/cm}^2$ ,

$$\tau_{max} = 1000 \left( \frac{\mu}{A} \right) \text{ kgf/cm}^2.$$

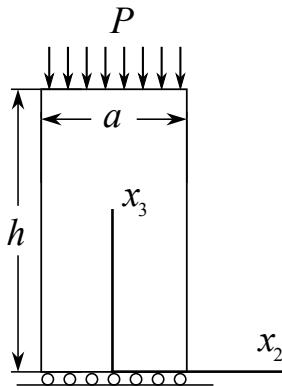
## 6.5. Ejercicios

1. Para un campo de desplazamientos dado por:

$$\mathbf{u} = a(x^2 - 5y^2)\hat{i} + (2axy)\hat{j}$$

- a) Determinar el tensor de deformación
- b) Obtener las deformaciones principales
- c) Obtener los esfuerzos principales

2. En la figura 6.3 se muestra una columna prismática, de sección cuadrada (lado  $a$ ), con una tracción axial igual a  $P$ . Si el material del que está hecha la pieza tiene propiedades  $\nu$  y  $E$ , encontrar los campos de esfuerzos y deformaciones.

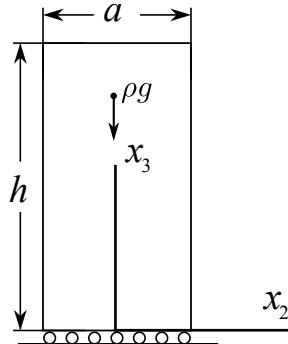


**Figura 6.3.** Columna con carga axial.

3. En la figura 6.4 se muestra la misma columna del ejercicio anterior, pero en este caso se quiere estudiar la deformación causada por su propio peso. Si las componentes del tensor de esfuerzos son:

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= \rho g(h - x_3) , \\ \sigma_{11} &= \sigma_{22} = 0 , \\ \sigma_{12} &= \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 .\end{aligned}$$

- a) Calcular los campos de deformaciones si las propiedades del material son  $\nu$  y  $E$ .



**Figura 6.4.** Columna bajo la acción de su propio peso.

4. En la figura 6.5 se muestra una viga en voladizo de sección unitaria con una carga distribuida en su extremo de forma parabólica.

$$\mathbf{t} = \frac{Pc^2}{2I} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \hat{\mathbf{j}}$$

.La solución para esfuerzos es de la forma

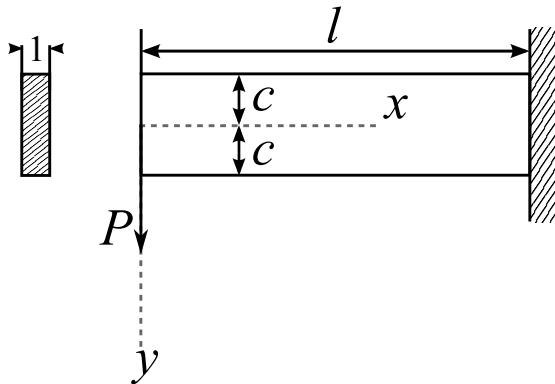
$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{P}{I}xy \quad , \\ \sigma_{yy} &= 0 \quad , \\ \sigma_{xy} &= -\frac{P}{2I}(c^2 - y^2) \quad .\end{aligned}$$

Y para el campo de desplazamientos es:

$$\begin{aligned}u_x &= \left(\frac{1}{G} - \frac{\nu}{E}\right) \frac{Py^3}{6I} + \left(\frac{l^2}{E} - \frac{x^2}{E} - \frac{c^2}{G}\right) \frac{Py}{2I} \quad , \\ u_y &= \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} \quad ,\end{aligned}$$

en donde  $G = E/(2+2\nu)$  es el módulo de cortante e  $I$  es el momento de inercia.

- Determinar las condiciones de frontera del problema.
- Verificar que las soluciones de esfuerzos y desplazamientos satisfacen las condiciones de frontera.
- Encontrar la región de la viga que está a compresión y la región tensión, y por tanto el eje neutro. Y determinar la ecuación de desplazamientos para este eje neutro. Comparar con la teoría clásica de vigas.



**Figura 6.5.** Viga en voladizo con una carga distribuida en su extremo.

5. En la figura 6.6 se muestra un paralelepípedo de dimensiones  $a, b, c$ , constituido por un material homogéneo elástico y lineal se aloja en una cavidad de la misma forma y dimensiones, cuyas paredes son de un material lo suficientemente rígido para poderlo suponer indeformable. Sobre la abertura de la cavidad de dimensiones  $a \times b$  y a través de una placa rígida de peso y rozamiento despreciables se aplica, perpendicularmente a ella, una fuerza  $F$  que comprime al bloque elástico. <sup>1</sup>

Calcular:

- Las fuerzas laterales ejercidas por las paredes de la cavidad sobre el paralelepípedo;
  - La variación de altura experimentada por el mismo.
6. En un punto de un suelo que podemos considerar como un sólido elástico lineal se conoce la deformación volumétrica  $\epsilon_V = -2 \times 10^{-3}$ , la deformación tangencial  $\epsilon_{xy} = -3 \times 10^{-3}$  y la deformación  $\epsilon_{xx} = 0$ . El suelo está sometido a un estado de deformación plana en el plano  $xy$ . Se pide:
- Componentes cartesianas del tensor de deformación.
  - Suponiendo que las constantes elásticas son  $E = 50 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 1/4$ , obtener las componentes del tensor de tensiones y sus valores principales. Obtener asimismo las direcciones en las que las tensiones normales y tangenciales son máximas o mínimas y sus valores.

<sup>1</sup>Tomado del ejemplo 3.5 en [7].

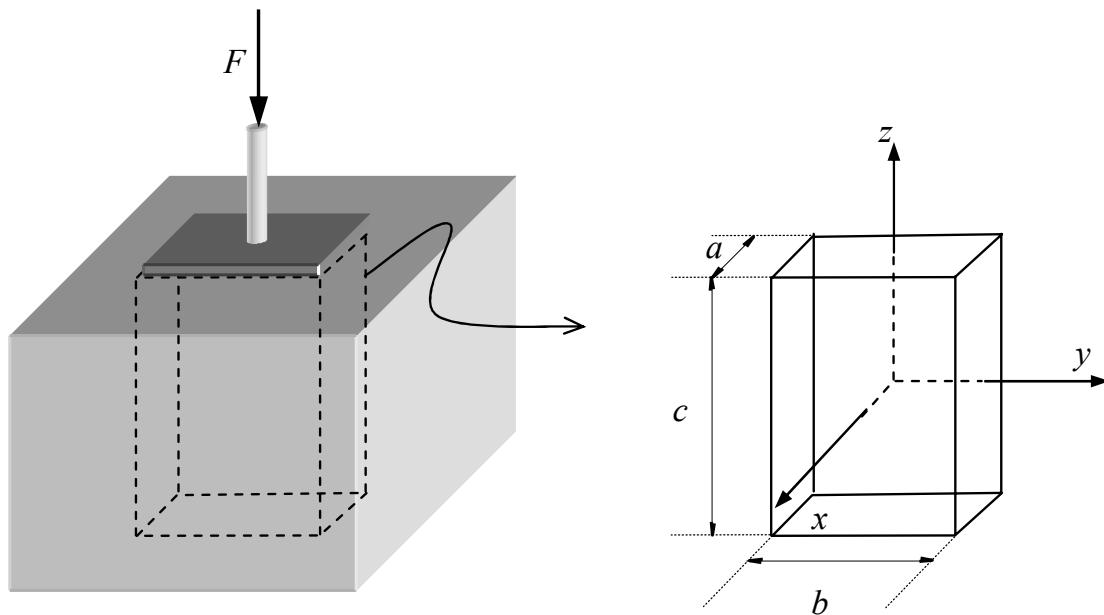


Figura 6.6. Paralelepípedo

7. Un sólido se halla sometido a deformación plana, siendo las componentes del tensor de deformación en un punto:

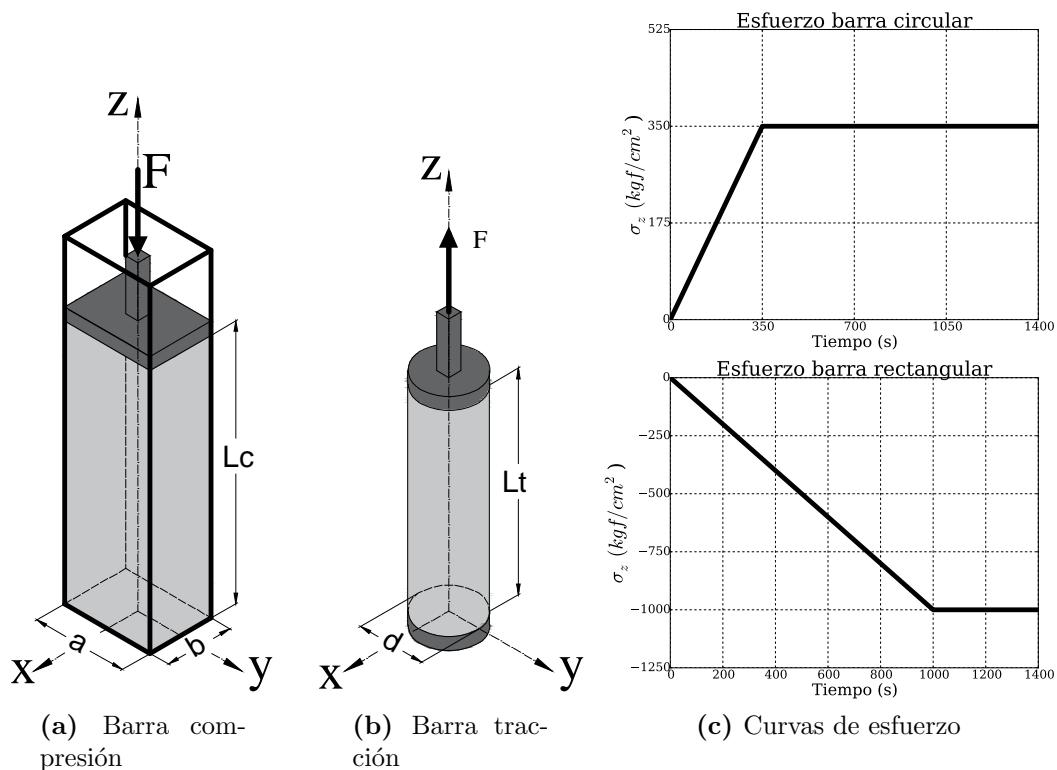
$$\overset{\rightarrow}{\epsilon}^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Considere que el sólido tiene un comportamiento elástico lineal e isótropo, definido por módulo elástico de Young  $E = 10 \text{ MPa}$  y coeficiente de Poisson  $\nu = 0.25$ . Se pide:

- a) Obtener las deformaciones principales y las direcciones en que se producen;
  - b) Obtener las componentes del tensor de tensiones de Cauchy;
  - c) Obtener las máximas y mínimas tensiones normales;
  - d) Se sabe que el material rompe cuando en algún plano se alcanza una tensión tangencial que supere 40 kPa. Verificar si se produce la rotura.
8. En la figura 6.7a se muestra una barra, de sección rectangular,  $a = 40 \text{ cm}$ ,  $b = 50 \text{ cm}$  y longitud inicial  $L_c = 500 \text{ cm}$ , que es sometida a un ensayo de compresión confinada (está contenida en un recipiente indeformable). En la

figura 6.7b se muestra una barra, de sección circular, de diámetro  $d = 50\text{ cm}$  y longitud inicial  $L_t = 497\text{ cm}$  sobre la cual se realiza un ensayo de tracción simple. Las constantes del material, tanto para la barra rectangular como para la barra circular, son  $E = 150000\text{ kgf/cm}^2$  y  $\nu = 0.20$ .

Ambos ensayos se realizan con su extremo fijo en el plano  $z = 0$  y están cargados con un sistema que no transmite esfuerzos cortantes y que hace que el esfuerzo axial se distribuya uniformemente sobre la superficie transversal de las barras. Los esfuerzos que se inducen a las barras varían con el tiempo, conforme a lo mostrado en la figura 6.7c



**Figura 6.7.** Esquema ensayos y curvas de aplicación carga

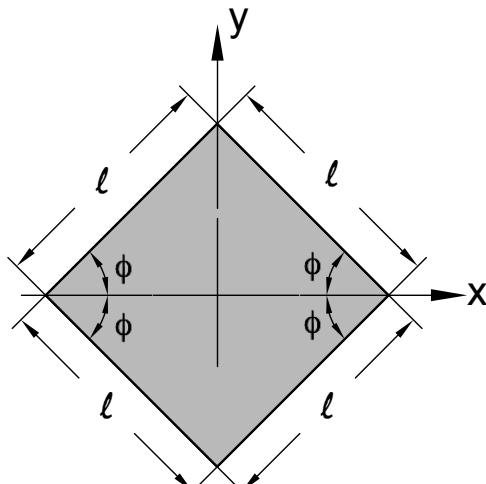
- ¿Cuál es el tiempo  $t$  en el cual las dos barras tienen la misma longitud?
- En la barra circular, ¿cuáles son los desplazamientos  $u$ ,  $v$  y  $w$  y las deformaciones  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  y  $\varepsilon_{zz}$  en el punto de coordenadas  $(x, y, z) = (20, 15, 450)$  cm para el tiempo  $t = 300\text{ s}$ ?

- c) ¿Cuál es el valor del máximo esfuerzo cortante en un punto al interior de la barra rectangular durante el ensayo?
- d) ¿Cuál es el área mínima que alcanza la sección transversal de la barra circular durante el ensayo?
- e) ¿En la barra rectangular, en el tiempo  $t = 1000\text{ s}$  cuál son las fuerzas  $F_x$  y  $F_y$  que le transmite la barra a las paredes del recipiente?

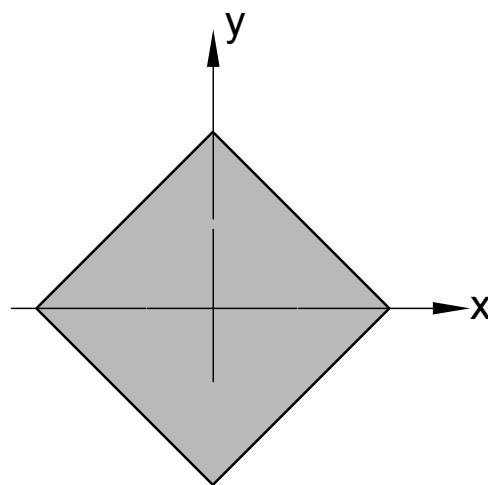
9. En la figura 6.8a se presenta una placa en forma de rombo sometida a la acción de una carga, en el plano  $XY$ , que se encuentra distribuida sobre su perímetro y cuyo campo de desplazamientos está dado por:

$A$  es una constante positiva,  $E$  es el módulo de elasticidad del material y  $\nu$  la relación de Poisson.

$$u(x, y, z) = \frac{A}{E} (1 - \nu) x \quad v(x, y, z) = \frac{A}{E} (1 - \nu) y \quad w(z) = -\frac{2A\nu}{E} z$$



(a) Placa



(b) Esquema para dibujar las cargas axiales y tangenciales

- Determine la deformación unitaria axial máxima  $\varepsilon$  y la deformación angular máxima  $\gamma$  que se presentan en la placa. ¿En qué puntos se presentan?.
- Dibujar la configuración deformada de la placa en el plano  $xy$ . ¿Cuáles son los puntos que experimentan los mínimos desplazamientos?.
- Ilustre la deformación de la partícula con coordenadas  $\left(\frac{l}{4}, 0, 0\right)$  en el plano  $xy$ . Utilice cuadrados de tamaño diferencial.
- Determine y represente gráficamente, sobre la figura (b), la tensión normal y tangencial a la cara de la placa, contenida en el cuadrante I del plano  $XY$ .

# Bibliografía

- [1] Bonda, NR y IC Noyan: *Effect of the specimen size in predicting the mechanical properties of PbSn solder alloys*. IEEE Transactions on Components, Packaging, and Manufacturing Technology: Part A, 19(2):208–212, 1996.
- [2] Bonda, NR y IC Noyan: *Deformation inhomogeneity and representative volume in Pb/Sn solder alloys*. Metallurgical Transactions A, 23(2):479–484, 1992.
- [3] Timoshenko, Stephen y J.N. Goodier: *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, 3<sup>a</sup> edición, 1970.
- [4] Reddy, Junuthula Narasimha: *An introduction to continuum mechanics*. Cambridge university press, 2013.
- [5] Mase, G Thomas, Ronald E Smelser y George E Mase: *Continuum mechanics for engineers*. CRC press, 2009.
- [6] Olivella, Xavier Oliver y Carlos Agelet de Saracíbar Bosch: *Mecánica de medios continuos para ingenieros*, volumen 92. Universidad Politécnica de Catalunya, 2002.
- [7] Chaves, Eduardo: *Problemas resueltos de Mecánica del Medio Continuo*. CIMNE, 2014.
- [8] Spiegel, Murray R Murray R y cols.: *Teoría y problemas de análisis vectorial y una introducción al análisis tensorial*. Mc Gray Hill, 1969.