제 5 장 진동학/전달함수

1. 목 적

진동학에서 다루는 중요한 개념인 Transfer Function, Frequency Response에 대하여 실험한다. 보(beam)의 진동문제를 해석하는데 있어서 system을 modeling하는 법을 알아보고, 실험에서 자기유도(Magnetic-Induction)를 이용한 속도측정방법을 알아본다.

2. 예습부문

(1) Mechanical Measurements(4th Ed.), T. G. Beckwith & R. D. Marangoni, Chapter 5. (pp.123-166)

3. 실험장치

(1) Oscilloscope, FG, DMM, Power Supply, Frequency Counter
(2) Jig (Beam 고정용)
(3) A/D Converter Board(DT2814)
(4) Aluminum Beam Set (M_2 = 12g(자석), Beam = 82g)
(5) Shaker(Speaker, M_1 = 60g), Bread board, Op. Amp., 저항, 콘텐서 등
(6) Accelerometer (Coil)

4. 이 론

4.1 진동문제의 예

로 보 트 : 로보트 팔 등의 운동을 진동학을 관점에서 파악하지 않고서는 정확한 위치제어가 불가능
자 동 차 : Engine Mount, 승차감 등
비 행 기 : 비행기 날개의 진동
공작기계 : 고속회전에 따른 주축의 진동
건 물 : 지진에 대해 방진 설계, 바람에 의한 진동

4.2 해결방법

(1) 해석적인 방법

System Modeling ⇒ Eigenvalue Problem ⇒ Model Parameter ⇒ Further Analysis

(2) 실험적인 방법

Model Testing ⇒ Transfer Function ⇒ Model Parameter

- Natural Frequency
- Damping Ratio
- Mode Shape

(3) 경험적인 방법

4.3 Modeling

이번 실험에서 해석하고자 하는 System은 Fig.5.1 (a)와 같은 상태이다. Beam을 따라서 Mass의 Discontinuity가 있으면 Continuous Beam이 아닌 자유도계로 볼 수 있다. 따라서 해석의 편이를 위하여 Lumped-Parameter System으로 보아 Fig.5.1(b)와 같이 Modelidng 하였다.

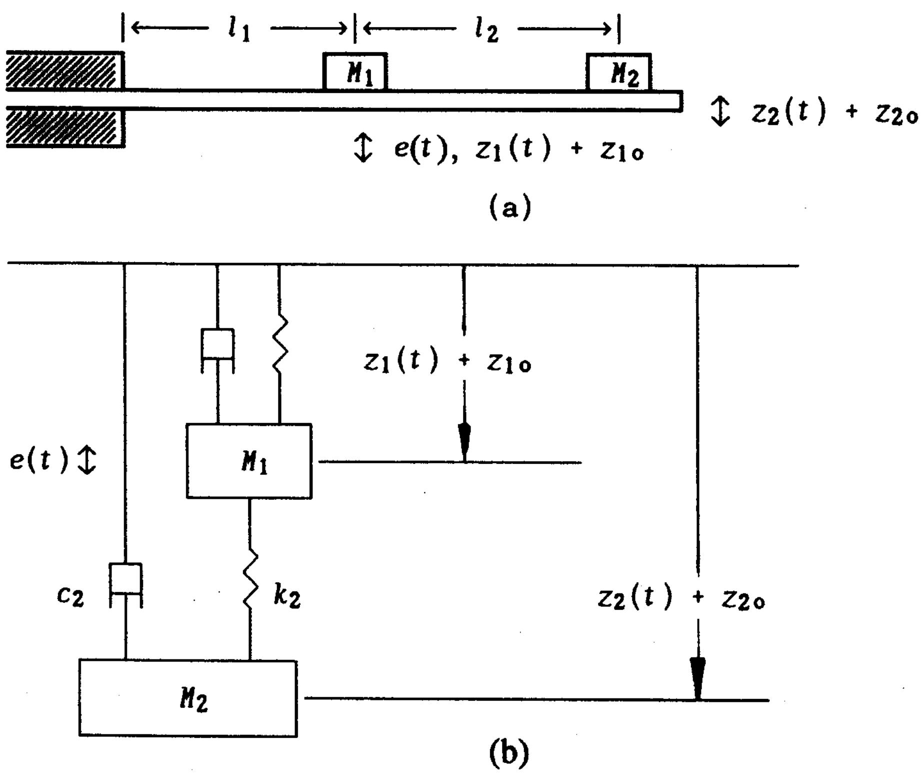


Fig.5.1 (a) The beam system (b) Model of the beam system

4.4 Transfer Function

Input (Excitation) ⟶ [System (Transfer Function)] ⟶ Output (Response)

Transfer Function은 어떤 System의 Input과 Output의 관계를 나타내는 수학적 Model이다. System의 특성을 실험적으로 알아내기 위해서는 그 System에 Pulse, Sine-wave, Step-Function 등의 Input을 가하고 Output을 관찰해야 한다. 이때, 가하는 Input의 종류에 따라 Output의 형태도 여러가지가 될 수 있으나, System이 하나인 이상, 관계식은 반드시 하나인 것이다. 즉, 모든 Input에 대해

$$(\text{Input})\cdot(\text{Transfer Function}) = (\text{Output})$$

가 되는 한개의 Transfer Function이 있을 것이다. 본 실험에서는 다음과 같이 Input, Output을 설정하였다.

Input : Excitation Force $e(t)$, 즉 Shaker에 의해 Mass M_1에 가해지는 가진력

Output : Mass M_2의 수직방향으로의 위치 $z_2(t)$

$e(t)$는 Function Generator에 의해 $e(t) = A(f)\cos(2\pi ft)$로 가하여 지고, $z_2(t)$는 Accelerometer와 적분기에 의해 전압값으로 환산되어 $z_2(t) = B(f)\cos(2\pi ft+\varphi)$로 나타난다. 따라서 System Transfer Function은

$$|H(f)| = \left|\frac{B(f)}{A(f)}\right|$$

가 되어 가진력의 주파수의 함수가 될 것이다. 이것은 다음절에서 유도하는 바와 같이, 우리의 경우 다음과 같은 식이 된다.

$$|H_{\exp}(s=j\omega)| \equiv \frac{|V_z(j\omega)|}{|Ve(j\omega)|} = \left|\frac{G}{(-\omega^2+j2\xi_1\omega_1\omega+\omega_1{}^2)(-\omega^2+j2\xi_2\omega_2\omega+\omega_2{}^2)}\right|$$

여기서 G는 여러가지 상수들이 포함된 Lumped Constant라 할 수 있고, ω는 $2\pi f$이다.

4.5 해석적 방법

Fig.5.1 (b)와 같이 Modeling 된 2자유도 System에 운동방정식을 적용하면, M_1, M_2에 대해 각각

$$M_1\frac{d^2z_1(t)}{dt^2} + c_1\frac{dz_1(t)}{dt} + k_1(\ z_1(t)+z_{1o}\ ) - k_2(\ z_2(t)+z_{2o}-z_1(t)-z_{1o}\ )$$
$$= e(t) + M_1g \tag{1}$$

$$M_2\frac{d^2z_2(t)}{dt^2} + c_2\frac{dz_2(t)}{dt} + k_2(\ z_2(t)+z_{2o}-z_1(t)-z_{1o}\ ) = M_2g \tag{2}$$

가 된다. 여기서 z_{1o}, z_{2o}는 각각 M_1, M_2의 무게에 의한 Static Spring 변위이다. (2)식을 $z_1(t)$에 대해 풀면,

$$z_1(t) = \left(\frac{M_2}{k_2}\right)\frac{d^2z_2(t)}{dt^2} + \left(\frac{c_2}{k_2}\right)\frac{dz_2(t)}{dt} + z_2(t) \tag{3}$$

가 되고 이를 (1)에 대입하여 정리하면 아래와 같이 $z_2(t)$에 대한 4차 상미분 방정식이 된다.

$$\frac{d^4z_2(t)}{dt^4} + \left(\frac{M_1c_2 + M_2c_1}{M_1M_2}\right)\frac{d^3z_2(t)}{dt^3} + \left(\frac{M_1k_2 + M_2(k_1+k_2) + c_1c_2}{M_1M_2}\right)\frac{d^2z_2(t)}{dt^2}$$
$$+ \left(\frac{k_2c_1 + (k_1+k_2)c_2}{M_1M_2}\right)\frac{dz_2(t)}{dt} + \left(\frac{k_1k_2}{M_1M_2}\right)z_2(t) = e(t) \tag{4}$$

여기서 $e(t) = E(s)e^{st}$, $z_2(t) = Z_2(s)e^{st}$ 라 놓으면, (4)식은

$$(s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)Z_2(s) = E(s) \tag{5}$$

$$a_3 = \left(\frac{M_1c_2 + M_2c_1}{M_1M_2}\right),$$

$$a_2 = \left(\frac{M_1k_2 + M_2(k_1+k_2) + c_1c_2}{M_1M_2}\right),$$

$$a_1 = \left(\frac{k_2c_1 + (k_1+k_2)c_2}{M_1M_2}\right), \qquad a_0 = \left(\frac{k_1k_2}{M_1M_2}\right)$$

따라서 Transfer Function $H(s) = Z_2(s)/E(s)$는

$$H(s) = \frac{Z_2(s)}{E(s)} = \frac{1}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{6}$$

이다. 실제 실험에서는 전압값으로 나타나므로

$$H_{exp}(s) = \frac{V_z(s)}{V_e(s)} \tag{7}$$

로 쓸 수 있고.

$$H_{exp}(s) = \frac{G}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{8}$$

가 된다. 여기서 G는 여러가지 영향이 포함된 상수이다. (8)식은 다시 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$H_{exp}(s) = \frac{G}{(s^2 + 2\xi_1\omega_1 s + \omega_1{}^2)(s^2 + 2\xi_2\omega_2 s + \omega_2{}^2)} \tag{9}$$

만일 System이 정현파로 가진(Excited)된다면,
$v_e(t) = \mathrm{Re}[V_e(j\omega)e^{j\omega t}]$, $v_z(t) = \mathrm{Re}[V_z(j\omega)e^{j\omega t}]$가 되어, $s = j\omega$ 이므로 마침내 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$H_{exp}(j\omega) = \frac{G}{(-\omega^2 + j2\xi_1\omega_1\omega + \omega_1{}^2)(-\omega^2 + j2\xi_2\omega_2\omega + \omega_2{}^2)} \tag{10}$$

이 (10)식의 의미를 생각하여 보자

(i) Low Frequency Limit

만일 $\omega \rightarrow 0$이면 아래와 같은 상수가 나타난다.

$$\lim_{\omega\to 0} |H_{exp}(\omega)| \equiv |H_{exp}(\omega \rightarrow 0)| = \frac{G}{\omega_1{}^2\omega_2{}^2} \tag{11}$$

$$|H_{exp}(f \rightarrow 0)| = \frac{G}{16\pi^4 f_1{}^2 f_2{}^2} \tag{12}$$

(ii) High Frequency Limit

$f \gg f_1$ 혹은 $f \gg f_2$ 이면

$$\lim_{f \to \infty} |H_{exp}(f)| = \frac{G}{16\pi^4 f^4} \tag{13}$$

즉, f^4에 반비례하여 감소한다.

(iii) 첫번째 공진주파수 (f_1)

$f = f_1$ 그리고 $f_1^2 \ll f_2^2$ 이면

$$|H_{exp}(f_1)| \cong \frac{G}{32\pi^4 \xi_1 f_1^2 f_2^2} \tag{14}$$

(iv) 두번째 공진주파수 (f_2)

$f = f_2$ 그리고 $f_1^2 \ll f_2^2$ 이면

$$|H_{exp}(f_2)| \cong \frac{G}{32\pi^4 \xi_2 f_2^4} \tag{15}$$

ξ_1, ξ_2, f_1, f_2 의 값에 따라 약간의 차이는 있으나, 일반적으로 $f_2 > f_1$ 이므로 $|H_{exp}(f_2)| < |H_{exp}(f_1)|$ 이 성립된다. 또 ξ_2가 작으면 $|H_{exp}(f_2)| > |H_{exp}(f \to 0)|$ 도 성립한다.

Half-Power Frequency는 공진주파수에서의 최대값의 $1/\sqrt{2}$ 이 되는 주파수를 말한다. 만약 $\xi_1 \ll 1$, $\xi_2 \ll 1$, $f_1^2 \ll f_2^2$ 이면 각각의 공진주파수를 중심으로 $|H_{exp}(f)|$ 의 모양이 그 부근에서 대칭이 되며, Half-Power Frequency는 f_1근처에서 $f_{1h+} = (1 + \xi_1)f_1$, $f_{1h-} = (1 - \xi_1)f_1$, 또 f_2근처에서는 $f_{2h+} = (1 + \xi_2)f_2$, $f_{2h-} = (1 - \xi_2)f_2$ 가 된다. 따라서 『width』는

$$\Delta f_{1h} \equiv f_{1h+} - f_{1h-} = 2\xi_1 f_1, \tag{16}$$
$$\Delta f_{2h} \equiv f_{2h+} - f_{2h-} = 2\xi_2 f_2,$$

이 되며, 이때의 $|H_{exp}(f)|$ 는 다음과 같다.

$$|H_{exp}(f_{1h-} \text{ or } f_{1h+})| = \frac{1}{\sqrt{2}}|H_{exp}(f_1)|, \tag{17}$$
$$|H_{exp}(f_{2h-} \text{ or } f_{2h+})| = \frac{1}{\sqrt{2}}|H_{exp}(f_2)|,$$

이상의 내용들을 Graph에서 Plot해 보면 Fig.5.2와 같다.

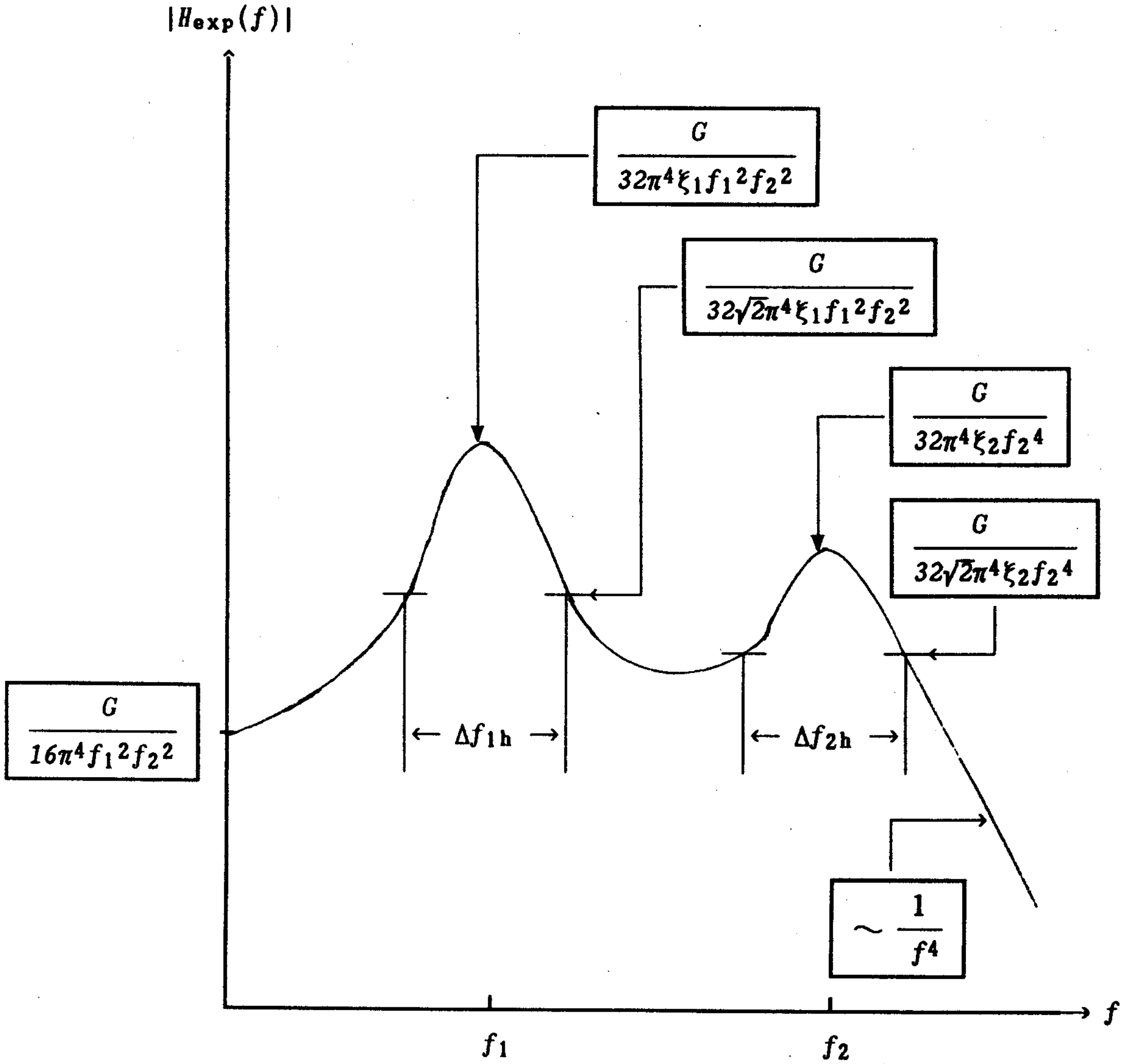


Fig.5.2 General shape of $|H_{exp}(f)|$ vs. f plot (log-log scale).

4.6 Magnetic Induction

영구자석과 코일이 함께 있을 때, 영구자석의 코일에 대한 상대속도에 의해 코일에 유도되는 기전력과의 관계를 구하여 보자.

$$V_m = n\frac{d\phi}{dt}$$

[V_m : 유도 기전력, ϕ : Magnetic Flux (Webers), n : Coil의 감은횟수]

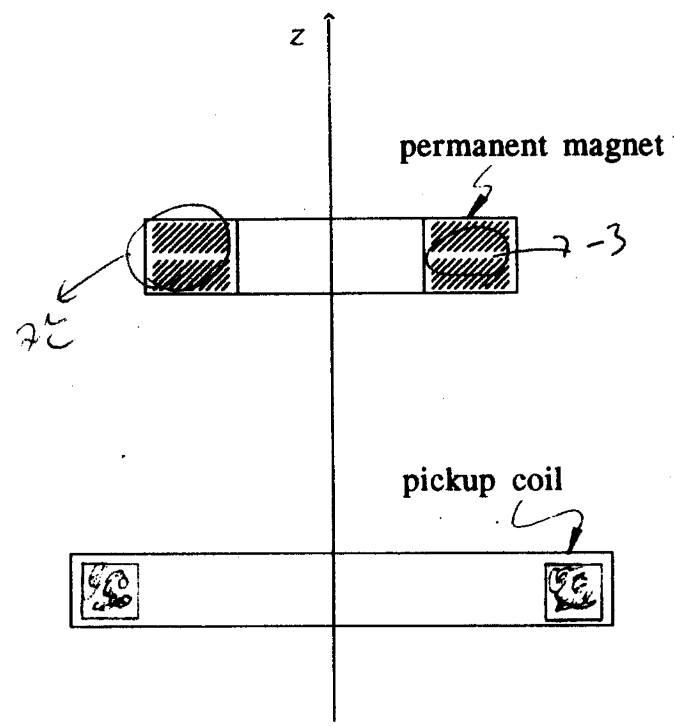


Fig.5.3 A permanent magnet/pickup coil arrangement

Fig.5.3의 상태에서

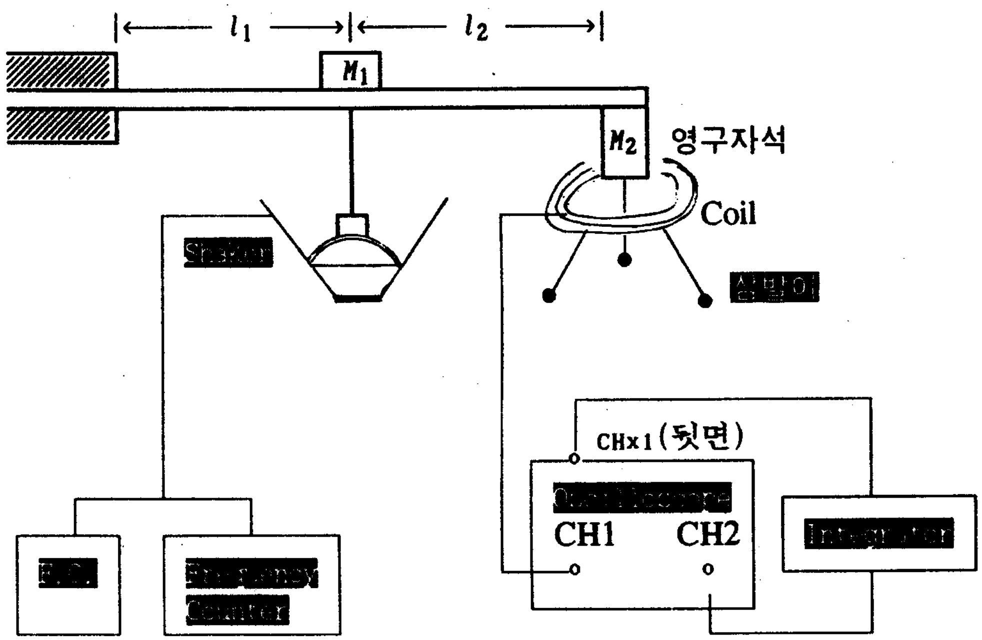
$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_o = \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_o \left(\frac{dz}{dt}\right)$$

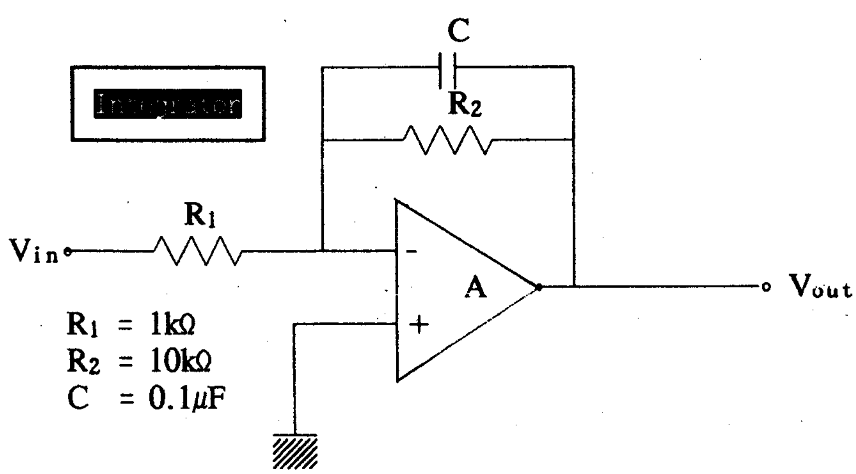
여기서 (dz/dt)는 영구자석의 속도이다. 따라서 유도 기전력은 영구자석의 속도에 비례할 것이며, 변위를 구하려면 유도 기전력을 적분하여야 한다. 또 z_o에 비해 변위가 작을수록 출력이 변위에 대해 선형적으로 될 것이다.

실 험 5 : 전달함수

1. Experimental Set up

(1) 다음과 같이 장치를 꾸민다.





* Integrator는 실험2를 참조한다.

(i) shaker의 위치는 대략 Beam의 중앙에 잡는다.

(ii) shaker의 높이를 조절한후, Bolt를 죄어 shaker를 고정시킨다.
(iii) 영구자석 밑에 Coil이 설치된 삼발이의 높이를 조정한다.
(iv) l_1, l_2과 알루미늄 Beam의 dimension(길이, 폭, 나비)를 기록한다.

(2) Integrator를 연결함에 있어서 주의할 점은 scope CH1에 입력시키면 scope 뒷면의 CH1 output에서는 입력×10의 증폭이 되어 나오므로 Coil에서 나온 signal을 scope CH1에 연결후, CH1 output(scope 뒤에 있음)을 Integrator circuit의 V_{in}에 연결한 다음 V_{out}은 scope CH2에 연결한다.

(3) 실험장치가 꾸며졌으면 FG는 sine signal, Hi(20 p-p Volt)에 연결후, switch On 시킨다.

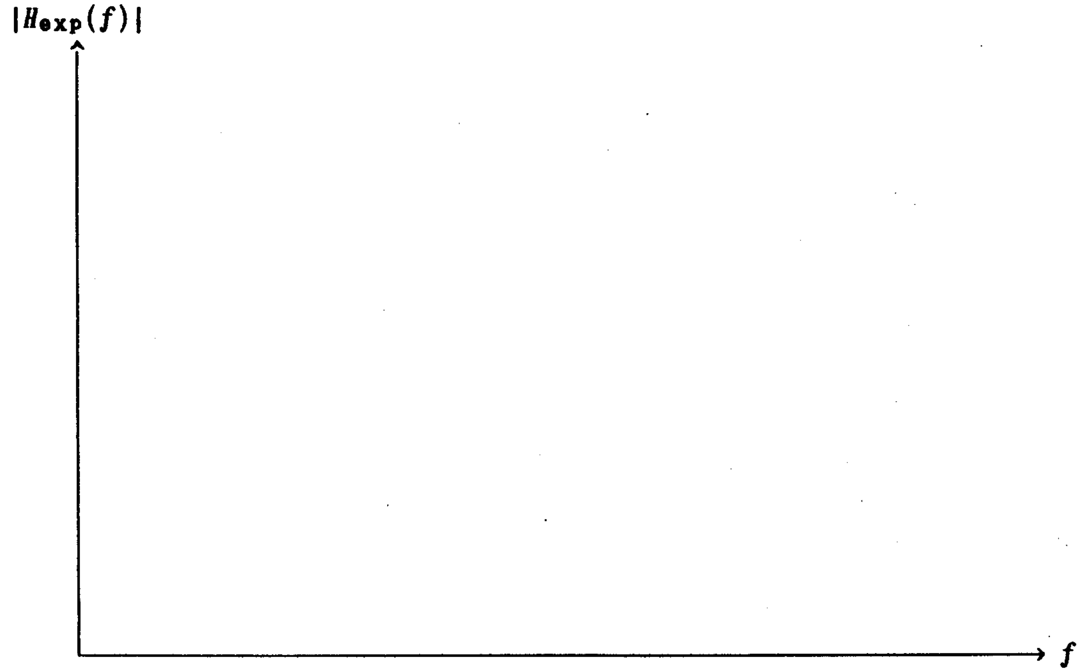
2. 실험및 결과정리

(1) Funtion Generator의 Frequency를 0Hz ~ 100Hz 정도까지 증가시키면서 각 frequency에 해당되는 V_{out}(Integrator의 Output)을 기록한다. Scope를 보면 Resonance가 일어날때는 Voltage가 증가하므로 Scope를 보면서 Resonance를 찾으면 쉽다. 단 Resonance 부근에서는 세밀히 측정, 기록한다.

(2) 『$|H_{exp}(f)| = |V_z/V_e|$』를 구함에 있어 V_e는 FG에서 나온 V(peak-to-peak), 20V를 사용하고 V_z는 Integrator에서 나온 output을 DMM으로 측정한 값이다. V_z를 측정할때 Scope에 나온 CH2의 파형을 보면서 측정한다. 즉, Resonance가 일어날때는 그 Frequency에서 파형이 갑자기 커지므로 최대로 커질때 Integrator의 Output을 DMM(AC로 놓고 측정)으로 측정한뒤 그값에 $\sqrt{2}$를 곱해야 된다. 왜냐하면 DMM의 값은 V_{rms}(실험치)값이므로 V_{max}를 얻으려면 $V_{rms}\times\sqrt{2}$이어야 한다.

(3) 실험에서 얻은 $V_e(t)$, $V_{out}(t)$를 사용하여 $|H_{exp}(f)|$ 對 f를 log-log scale로 plot한다.

Frequency(Hz)	$log(f)$	V_{out}(mV)	$log(\sqrt{2}\ V_{out}/V_{in})$



(4) Transfer Funtion $|H_{exp}(f)|$로부터 f_1, f_2 , ξ_1, ξ_2, G를 구한다.
(5) M_1, M_2, 그리고 Beam의 dimension을 알 수 있다면 f_1, f_2를 이론적으로 결정하고 discussion한다.
(6) 우리 주변의 진동문제를 구체적으로 기술하고 해결책을 나름대로 적어본다.