11 Test d'homogénéité

vendredi 9 décembre 2022

1. Objectif de test d'homogénéité 同质性
   - -1- Valider l'homogénéité des deux échantillons
     1- Espérance, médiane
     2- Variance
     3- Probabilité de succès
     4- Loi
2. Deux type d'échantillons
   - -1- Échantillons indépendants
     1- Homogénéité des espérance
     2- Homogénéité des variances
     3- Homogénéité des proportions
     4- Homogénéité des lois
   - -2- Échantillons appariés 配对 (X_i, Y_i)
3. Échantillons indépendants
   - **-1- Homogénéité des espérance**
     1- Modélisation $X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2), Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2), N = n + m$

     2- $V = \bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_V = \mu_X - \mu_Y, \sigma_V^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}\right)$

     3- Test bilatéral

       1> $H_0 = \{\mu_X = \mu_Y\}\ contre\ H_1 = \{\mu_X \neq \mu_Y\}$

     4- Test unilatéral

       1> $H_0 = \{\mu_X = \mu_Y\}\ contre\ H_1 = \{\mu_X > \mu_Y\}$

         a) Test UPP de RC : W = $\{v > u_{1-\alpha^*}\sigma_V\}$

       2> $H_0 = \{\mu_X = \mu_Y\}\ contre\ H_1 = \{\mu_X < \mu_Y\}$

         a) Test UPP de RC : W = $\{v > u_{1-\alpha^*}\sigma_V\}$

     5- Variances connues

       1> $\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim^L N(0,1)$

     6- Variances égales mais inconnues

       1> $S^{*2} = \frac{1}{N-2}\left(\sum (X_i - \bar{X})^2 + \sum (Y_j - \bar{Y})^2\right)$

       2> $\Rightarrow \frac{(N-2)S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi_{N-2}^2$

       3> $\Rightarrow T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{S^* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim T_{N-2}$

a) RC, W $= \left\{|t| > t_{N-2,1-\frac{\alpha^*}{2}}\right\}, H_1 = \{\mu_X \neq \mu_Y\}$

b) RC, W $= \{t > t_{N-2,1-\alpha^*}\}, H_1 = \{\mu_X > \mu_Y\}$

c) RC, W $= \{t < -t_{N-2,1-\alpha^*}\}, H_1 = \{\mu_X < \mu_Y\}$

7- Variances distinctes inconnues

1> $S_V^{*2} = \frac{S_X^{*2}}{n} + \frac{S_Y^{*2}}{m}$ *estimateur de* $\sigma_V^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}$

2> $v\frac{S_V^{*2}}{\sigma_V^2} = v\frac{\frac{S_X^{*2}}{n} + \frac{S_Y^{*2}}{m}}{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} \sim_{approx} \chi_V^2$, où $v = \frac{\left(\frac{S_X^{*2}}{n} + \frac{S_Y^{*2}}{m}\right)^2}{\frac{1}{n-1}\left(\frac{S_X^2}{n}\right)^2 + \frac{1}{m-1}\left(\frac{S_Y^2}{m}\right)^2}$, $v\ t.q.\ E\left(v\frac{S_V^{*2}}{\sigma_V^2}\right) = v, Var\left(v\frac{S_V^{*2}}{\sigma_V^2}\right) = 2v$

3> $\frac{V}{\sqrt{S_V^{*2}}} \sim_{approx} T_v$

a) RC, W $= \left\{\left|\frac{V}{\sqrt{S_V^{*2}}}\right| > t_{v,1-\frac{\alpha^*}{2}}\right\}, H_1 = \{\mu_X \neq \mu_Y\}$

b) RC, W $= \left\{\frac{V}{\sqrt{S_V^{*2}}} > t_{v,1-\alpha^*}\right\}, H_1 = \{\mu_X > \mu_Y\}$

c) RC, W $= \left\{\frac{V}{\sqrt{S_V^{*2}}} < -t_{v,1-\alpha^*}\right\}, H_1 = \{\mu_X < \mu_Y\}$

-2- Homogénéité des variances

1- Test bilatéral

1> $H_0 = \{\sigma_X = \sigma_Y\}$ *contre* $H_1 = \{\sigma_X \neq \sigma_Y\}$

2- Test unilatéral

1> $H_0 = \{\sigma_X = \sigma_Y\}$ *contre* $H_1 = \{\sigma_X > \sigma_Y\}$

a) ~~Test UPP de RC : W =~~ $\cancel{\{v > u_{1-\alpha^*}\sigma_V\}}$

2> $H_0 = \{\sigma_X = \sigma_Y\}$ *contre* $H_1 = \{\sigma_X < \sigma_Y\}$

a) Test UPP de RC : W = $\{v > u_{1-\alpha^*}\sigma_V\}$

3- $\frac{\frac{Z_1}{v_1}}{\frac{Z_2}{v_2}} \sim F_{v_1,v_2}, Z_1 \sim \chi_{v_1}^2, Z_2 \sim \chi_{v_2}^2$

4- $H_0, F = \frac{S_X^{*2}}{S_Y^{*2}} \sim F_{n-1,m-1}$

1> RC, W $= \left\{F < f_{n-1,m-1,\frac{\alpha^*}{2}}\right\} \cup \left\{F > f_{n-1,m-1,1-\frac{\alpha^*}{2}}\right\}, H_1 = \{\sigma_X \neq \sigma_Y\}$

2> RC, W $= \left\{\left\{F > f_{n-1,m-1,1-\alpha^*} = \frac{1}{f_{n-1,m-1,\alpha^*}}\right\}\right\}, H_1 = \{\sigma_X > \sigma_Y\}$

3> RC, W $= \left\{\left\{F < f_{n-1,m-1,\alpha^*}\right\}\right\}, H_1 = \{\sigma_X < \sigma_Y\}$

-3- Homogénéité des proportions

1- $X \sim B(n, p_1), Y \sim B(m, p_2)$

2- Test bilatéral

1> $H_0 = \{p_X = p_Y\}$ *contre* $H_1 = \{p_X \neq p_Y\}$

3- Test unilatéral

1> $H_0 = \{p_X = p_Y\}$ $contre$ $H_1 = \{p_X > p_Y\}$

a） ~~Test UPP de RC : W = $\{v > u_{1-\alpha^*}\sigma_V\}$~~

2> $H_0 = \{p_X = p_Y\}$ $contre$ $H_1 = \{p_X < p_Y\}$

a） ~~Test UPP de RC : W = $\{v > u_{1-\alpha^*}\sigma_V\}$~~

4- $H_0 : p = p_1 = p_2, p\ inconnue$

1> $\dfrac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}} \sim^L N(0,1)$

a） RC, W = $\left\{\left|\dfrac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}\right| > u_{1-\frac{\alpha^*}{2}}\right\}, H_1 = \{p_X \neq p_Y\}$

b） RC, W = $\left\{\dfrac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}} > u_{1-\alpha^*}\right\}, H_1 = \{p_X > p_Y\}$

c） RC, W = $\left\{\dfrac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}} < -u_{1-\alpha^*}\right\}, H_1 = \{p_X < p_Y\}$

-4- Homogénéité des lois

1- $X_i \sim F_X$ $loi\ continue, y_j \sim F_Y$ $loi\ continue$

1> Définition : X est stochastiquement supérieur à Y si

a） $F_X(z) \leq F_Y(z), \forall z \in R$

2- Test bilatéral

1> $H_0 = \{F_X = F_Y\}$ $contre$ $H_1 = \{F_X \neq F_Y\}$

3- Test unilatéral

1> $H_0 = \{F_X = F_Y\}$ $contre$ $H_1 = \{F_X > F_Y\}$

a） ~~Test UPP de RC : W = $\{v > u_{1-\alpha^*}\sigma_V\}$~~

2> $H_0 = \{F_X = F_Y\}$ $contre$ $H_1 = \{F_X < F_Y\}$

a） ~~Test UPP de RC : W = $\{v > u_{1-\alpha^*}\sigma_V\}$~~

4- Test de Wilcoxon

1> Somme des rangs des X_i après avoir ordonné la série des $N = m + n$ observations

2> $\{W_X \leq c_1\} \cup \{W_X \geq c_2\}, H_1 = \{F_X \neq F_Y\}$

3> $\{W_X \geq c\}, H_1 = \{F_X > F_Y\}$

4> $\{W_X \leq \tilde{c}\}, H_1 = \{F_X < F_Y\}$

5> $\begin{cases} E_{H_0}(W_X) = \dfrac{n(n+m+1)}{2} \\ Var_{H_0}(W_X) = \dfrac{nm(n+m+1)}{12} \end{cases}$

4. Échantillons appariés 配对 (X_i, Y_i)

-1- Modélisation gaussienne de la différence

1- $D = X_i - Y_i \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_D^2)$

2- $\sqrt{\mathrm{n}}\frac{\overline{\mathrm{D}}}{\sqrt{{S_D^*}^2}} \sim T_{n-1}, {S_D^*}^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(D_i - \overline{D}\right)$

1> $\mathrm{W} = \left\{\left|\sqrt{\mathrm{n}}\frac{\overline{\mathrm{D}}}{\sqrt{{S_D^*}^2}}\right| > t_{n-1,1-\frac{\alpha^*}{2}}\right\}, H_1: \mu_D \neq 0$

2> $\mathrm{W} = \left\{\sqrt{\mathrm{n}}\frac{\overline{\mathrm{D}}}{\sqrt{{S_D^*}^2}} > t_{n-1,1-\alpha^*}\right\}, H_1: \mu_D > 0$

3> $\mathrm{W} = \left\{\sqrt{\mathrm{n}}\frac{\overline{\mathrm{D}}}{\sqrt{{S_D^*}^2}} < -t_{n-1,1-\alpha^*}\right\}, H_1: \mu_D < 0$

-2- Loi quelconque mais continue de la différence $\mathrm{X} - \mathrm{Y}$

1- $D = X_i - Y_i$

-3- Homogénéité des espérance

-4- Homogénéité des variances

-5- Homogénéité des proportions

-6- Homogénéité des lois