Ch7 Équations Différentielles

lundi 5 décembre 2022

1. Modélisation
   - -1- Équation différentielle
     - 1- $y' = f(t, y)$
   - -2- Condition initiale (selon le **Théorème de Cauchy-Lipschitz**)
     - 1- $y(t_0) = y_0$
   - -3- Problème aux limites
     - 1- Il correspond à des situations physiques complètement différentes et cela se traduit par des méthodes de résolution numérique complètement différentes
   - -4- Problèmes aux conditions initiales d'ordre 2
     - 1- $U(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, U_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$
     - 2- $\Rightarrow U'(t) = F(t, U(t)), U(0) = U_0$
   - -5- Principe des méthodes numériques
     - 1- $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$
     - 2- Développement de Taylor
       - 1> $y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + hy'(t) + \frac{h^2}{2} y''(\xi), \xi \in [t_n, t_{n+1}]$
         $= y(t_n) + hf\left(t_n, y(t_n)\right) + O(h^2)$
     - 3- Schéma d'Euler simple/explicite 显式的
     - 4- $\Rightarrow \begin{cases} z_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n), n = 0, \dots, N-1 \\ z_0 = y_0 \end{cases}$
     - 5- Problème au pas
       - 1> Les schéma à un pas
         - a) il est facile de changer le pas localement en fonction des estimations d'erreur
       - 2> Les schéma multi-pas
         - a) on utilise les valeurs calculées en t_{n-1}, t_n pour la valeur en t_{n+1}
         - b) Il permet un coût de calcul moindre, mais rend les valeurs plus interdépendantes, donc il est plus difficile de changer le pas localement
2. Les schéma à un pas
   - -1- **Schémas d'Euler** à partir de l'intégration numérique

1- $y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int f(t, y(t))dt$

2- $\Rightarrow \begin{cases} z_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n), n = 0, \dots, N-1 \\ z_0 = y_0 \end{cases}$

-2- **Schémas prédicteur-correcteurs d'Euler-Cauchy**

1- on fait d'abord une prédiction ($\hat{z}_{n+1}$) à l'aide du schéma explicite, puis une correction à l'aide du schéma implicite.

1> $\begin{cases} z_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n) \\ \hat{z}_{n+1} = z_n + hf(t_n, \hat{z}_{n+1}) \end{cases}$

2> $\Rightarrow \begin{cases} \tilde{z}_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n) \\ z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, z_n) + f(t_{n+1} + \tilde{z}_{n+1}\right) \end{cases}$

-3- Première étude de la méthode d'Euler

1- $\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t), \lambda > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ $, par\ exemple\ y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$

1> Schéma d'Euler explicite

a) $z_n = (1 - \lambda h)^n y_0$

2> Schéma d'Euler implicite

a) $z_n = \frac{y_0}{(1 + \lambda h)^n}$

3> Conditions

a) $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$

4> Convergence

a) $\lim_{h \to 0, nh = t} (1 - \lambda h)^n y_0 = \lim_{h \to 0, nh = t} (1 + \lambda h)^{-n} y_0 = y_0 e^{-\lambda t}$

-4- Ordre et consistance des schémas à un pas

1- $\begin{cases} z_{n+1} = z_n + h\phi(t_n, z_n, h), n = 0, \dots, N-1 \\ z_0 = y_0 \end{cases}$

2- Erreur locale

1> $\tau_{n+1}(h) = \left(y(t_{n+1}) - y(t_n)\right) - h\phi(t_n, y(t_n), h) = y(t_{n+1}) - \tilde{z}_{n+1}$

2> $\Rightarrow \tau_{n+1}(h) = \frac{h^2}{2} y''(\xi) \leq \frac{M}{2} h^2$

3> **le schéma d'Euler simple est d'ordre 1**

4> **le schéma d'Euler-Cauchy est d'ordre 2**

3- **Ordre p**

1> $\max_{1 \leq n \leq N} \left| \frac{\tau_n(h)}{h} \right| \leq K h^p$

4- **Consistant**

1> $\lim_{h \to 0} \max_{1 \le n \le N} \left| \frac{\tau_n(h)}{h} \right| = 0$

-5- Stabilité et convergence des schémas à un pas

1- La consistance ou l'ordre d'un schéma n'est qu'une indication指标 de l'erreur.

2- Condition de **convergence**

1> $\lim_{h \to 0} \max_{1 \le n \le N} |y(t_n) - z_n| = 0$

2> La consistance d'un schéma soit une condition nécessaire de convergence

3> ***si consistance + stabilité ⇒ convergence***

3- **Stabilité**

1> Il existe une constante M telle que pour tout z_0, pour tout u_0, pour tout $h \le h^*$ et pour tout suite $\{\varepsilon_n\}$, les suites $\{z_n\}$ et $\{u_n\}$ définies par les relations

a) $\begin{cases} z_{n+1} = z_n + h\phi(t_n, z_n, h) \\ u_{n+1} = u_n + h\phi(t_n, u_n, h) + \varepsilon_n \end{cases}$

2> $\forall\, n = 1, \dots, N, |z_n - u_n| \le M \left(|z_0 - u_0| + \sum_{k=0}^{n-1} |\varepsilon_k| \right)$

a) En gros cela signifie qu'un schéma stable n'amplifie ni les erreurs sur la condition initiale, ni les erreurs introduites dans le schéma

3> Proposition

a) Pour qu'un schéma soit stable, il suffit qu'il existe une constante Λ telle que

b) $\forall t \in [t_0, t_0 + h], \forall z, u \in R, \forall h \le h^*, |\phi(t, z, h) - \phi(t, u, h)| \le \Lambda |z - u|$

i) En général on montre que f vérifie cette condition (celui-ci de Lipschitz), donc le schéma d'Euler simple est évidemment stable ($\phi(t, z, h) = f(t, z)$).

-6- Les schémas de Runge-Kutta

3. Les schéma multi-pas