Final

jeudi 12 janvier 2023 13:41

1. Final 2022

On considère à présent le test bilatéral suivant :

$$\begin{cases} H_0 : & \theta = 0, \\ H_1 : & \theta \neq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Question 2 Existe-t-il une région critique uniformément plus puissante ? Justifier.

-1-

Corrigé

Le problème est de la forme hypothèse simple contre hypothèse composite. Pour rechercher un test UPP, on choisit une hypothèse simple $h_1 = \{\theta = \theta_1\} \subset H_1$, on se retrouve avec le test précédent dont la région critique optimale ne dépend pas de θ_1.
Il existe donc un test UPP dont la région est la même que le test précédent.

Question 2 On pose $Y = \frac{X}{1-X}$. En calculant la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X puis en dérivant, montrer que Y suit une loi exponentielle de paramètre θ et donner l'expression de θ en fonction de λ.

-2-

Corrigé

La support de X étant $[0; 1[$, celui de Y est $\mathbb{R}_+$. On a donc $F_Y(y) = 0$ et donc $f_Y(y) = 0$ pour $y \leq 0$. Soit maintenant $y \geq 0$, on a $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}\left(\frac{X}{1-X} \leq y\right) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{y}{y+1}\right) = F_X\left(\frac{y}{y+1}\right)$ d'où, en dérivant

$$f_Y(y) = \frac{1}{(y+1)^2} f_X\left(\frac{y}{y+1}\right).$$

Comme $y \geq 0$, $y/(y+1) \in [0; 1[$ et donc

$$f_Y(y) = \frac{1}{\lambda} \exp(-x/\lambda).$$

La variable aléatoire Y suit donc une loi exponentielle de paramètre $\theta = \frac{1}{\lambda}$.

Question 4 En étudiant la nature des hypothèses, montrer qu'une bonne statistique de test peut s'écrire

$$\Lambda = (4U(1-U))^n \qquad \text{avec} \qquad U = \frac{\overline{X}}{\overline{X} + \overline{Y}}.$$

-3-

Corrigé

Les deux hypothèses sont composites, on va donc réaliser un test du rapport de vraisemblance. La vraisemblance s'écrit

$$L(a, b; x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_n) = a^n b^n \exp(-na\overline{x}) \exp(-nb\overline{y}).$$

Lorsque $a = b$, on a affaire avec un échantillon exponentiel de taille $2n$ et de paramètre $a = b$ et le maximum de vraisemblance est atteint pour $a = b = \frac{2}{\overline{X}+\overline{Y}}$. Lorsque les paramètres sont libres, on a deux maximum de vraisemblance de lois exponentielles qui sont atteint pour $a = \frac{1}{\overline{X}}$ et $b = \frac{1}{\overline{Y}}$. On a donc

$$\Lambda = \frac{\left(\frac{2}{\overline{X}+\overline{Y}}\right)^{2n} \exp(-2n)}{\frac{1}{\overline{X}^n} \exp(-n) \frac{1}{\overline{Y}^n} \exp(-n)} = \left(4 \frac{\overline{X}\overline{Y}}{\left(\overline{X}+\overline{Y}\right)^2}\right)^n = (4U(1-U))^n.$$

1- $\Lambda(x_i) = \frac{L(\hat{\theta}_0; x_i)}{L(\hat{\theta}; x_i)}, \begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \neq \theta_0 \end{cases}$

Question 5 En déduire une région critique approchée en fonction de α^*.

Corrigé

La région critique s'écrit

-4-

Question 5 En déduire une région critique approchée en fonction de α^*.

Corrigé

La région critique s'écrit

$$W = \{\Lambda_{\text{obs}} \leq c\}.$$

D'après le théorème de Wilks, on a $-2 \log \Lambda \xrightarrow{H_0, L} \chi^2_k$ avec k le nombre de degrés de liberté des paramètres dans H_0 qui vaut 1 car $a = b$.
On trouve donc la région critique approchée suivante

$$W \simeq \left\{-2 \log \Lambda_{\text{obs}} \geq \chi^2_{1,1-\alpha^*}\right\}.$$