

# Chapitre 3

## Bonnes propriétés et invariants

Robert Valette  
LAAS-CNRS Toulouse,

version juillet 2007

**Pré-requis / Contenu :** Ce chapitre définit ce que l'on appelle les "*bonnes propriétés*" d'un réseau de Petri ( $k$ -borné, vivant et réinitialisable). Il présente également ce que sont les invariants. Les invariants sont associés à des sous réseaux de Petri ayant des propriétés particulières. *Bonnes propriétés* et invariants sont à la base des mécanismes de vérification et de preuve de modèles de systèmes représentés par réseaux de Petri. La vérification et la preuve de propriétés font l'objet du chapitre suivant, en supposant que les propriétés définies ici sont connues.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Réseau de Petri marqué <math>k</math>-borné</b>	<b>6</b>
2.1	Place $k$ -bornée et binaire. . . . .	6
2.2	Réseau de Petri marqué $k$ -borné et binaire. . . . .	7
2.3	Exemples . . . . .	7
2.3.1	Lecteurs et écrivains . . . . .	7
2.3.2	Réseau non borné (1) . . . . .	8
2.3.3	Réseau non borné (2) . . . . .	8
2.3.4	Réseau parenthèse . . . . .	9
2.3.5	La propriété dépend du marquage initial . . . . .	11
2.4	Pourquoi cette propriété ? . . . . .	11

<b>3</b>	<b>Réseau marqué vivant</b>	<b>12</b>
3.1	Transition vivante et quasi-vivante . . . . .	12
3.1.1	Transition quasi-vivante . . . . .	12
3.1.2	Transition vivante . . . . .	12
3.1.3	Exemple . . . . .	13
3.2	Réseau de Petri marqué vivant . . . . .	15
3.2.1	Définition . . . . .	15
3.2.2	Blocage mortel . . . . .	15
3.3	Exemple . . . . .	16
3.3.1	Encore quasi vivant . . . . .	16
3.3.2	Lecteurs et écrivains . . . . .	16
3.3.3	Exemple du “réseau parenthèse” . . . . .	18
3.3.4	Exemple de blocage mortel (1) . . . . .	18
3.3.5	Exemple de blocage mortel (2) . . . . .	18
3.3.6	Influence du marquage initial . . . . .	19
3.4	Retour sur la signification de la propriété “réseau marqué vivant” . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Réseau marqué réinitialisable</b>	<b>21</b>
4.1	Introduction . . . . .	21
4.2	Définition et propriétés . . . . .	21
4.3	Exemples . . . . .	22
4.3.1	Vivant et non réinitialisable . . . . .	22
4.3.2	Réinitialisable et non vivant . . . . .	22
4.3.3	Réinitialisable et vivant . . . . .	24
4.3.4	Réinitialisable et non borné . . . . .	24
4.4	Retour sur la signification de la propriété “réseau marqué réinitialisable” . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Composantes et invariants</b>	<b>24</b>
5.1	Sous réseaux de Petri . . . . .	25
5.2	Introduction informelle des composantes . . . . .	25
5.2.1	Composantes conservatives et invariants de places . . . . .	25
5.2.2	Signification des composantes conservatives et des invariants de places . . . . .	27
5.2.3	Composantes répétitives stationnaires et invariants de transitions . . . . .	28
5.2.4	Signification des composantes répétitives stationnaires et des invariants de transitions . . . . .	29
5.3	Définition formelle des composantes conservatives et des invariants de places . . . . .	29

5.3.1	Définition . . . . .	29
5.3.2	Exemple . . . . .	30
5.3.3	Composante conservative positive . . . . .	32
5.4	Définition formelle des composantes répétitives et des invariants de transitions . .	33
5.4.1	Définition . . . . .	33
5.4.2	Exemple . . . . .	34
5.5	Remarque finale . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>36</b>

## Table des figures

1	Réseau de Petri marqué . . . . .	7
2	Graphe des marquages associé . . . . .	7
3	Réseau de Petri non borné . . . . .	8
4	Autre réseau de Petri non borné . . . . .	9
5	Réseau de Petri “ <i>parenthèse</i> ” . . . . .	9
6	Réseau de Petri $k$ -borné . . . . .	10
7	Réseau de Petri non $k$ -borné . . . . .	10
8	Réseau de Petri quasi vivant . . . . .	13
9	Graphe des marquages accessibles . . . . .	14
10	Réseau de Petri quasi vivant . . . . .	16
11	Graphe des marquages accessibles du réseau 10 . . . . .	17
12	Réseau de Petri avec blocage . . . . .	18
13	Graphe des marquages associé . . . . .	18
14	Réseau de Petri avec blocage . . . . .	19
15	Graphe des marquages associé . . . . .	19
16	Réseau de Petri sans blocage . . . . .	19
17	Graphe des marquages associé . . . . .	19
18	Réseau de Petri avec blocage . . . . .	20
19	Graphe des marquages associé . . . . .	20
20	Réseau de Petri non réinitialisable . . . . .	23
21	Graphe des marquages associé . . . . .	23
22	Réseau de Petri réinitialisable . . . . .	23
23	Graphe des marquages associé . . . . .	23
24	Réseau de Petri . . . . .	26
25	p-sous-réseau 1 . . . . .	26
26	p-sous-réseau 2 . . . . .	26
27	Réseau de Petri . . . . .	27
28	p-sous-réseau 3 . . . . .	27
29	Réseau de Petri . . . . .	28
30	t-sous-réseau 1 . . . . .	28
31	t-sous-réseau 2 . . . . .	28
32	Composante conservative . . . . .	31

## Liste des définitions

1	Place $k$ -bornée . . . . .	6
2	Réseau de Petri marqué $k$ -borné . . . . .	7
3	Réseau de Petri marqué binaire (sauf) . . . . .	7
4	Transition quasi-vivante . . . . .	12
5	Transition vivante . . . . .	12
6	Réseau marqué vivant . . . . .	15
7	Blocage mortel . . . . .	15
8	Réseau marqué réinitialisable (état d'accueil) . . . . .	21
9	Graphe fortement connexe . . . . .	22
10	p-sous-réseau . . . . .	25
11	t-sous-réseau . . . . .	25
12	Support d'un vecteur . . . . .	29
13	Composante conservative . . . . .	30
14	Invariant de places . . . . .	30
15	Composante conservative positive . . . . .	32
16	Couverture de composantes conservatives positives . . . . .	33
17	Composante répétitive stationnaire . . . . .	33
18	Composante répétitive stationnaire positive . . . . .	33
19	Invariant de transitions . . . . .	34

# 1 Introduction

L'intérêt des réseaux de Petri est de pouvoir construire une vision abstraite d'un système complexe (un modèle de type systèmes à événements discrets) afin de pouvoir analyser son comportement de façon prévisionnelle. Cette analyse peut se faire en réalisant des simulations, mais l'apport principal des réseaux de Petri est qu'il est possible de prouver formellement, ou de vérifier formellement, certaines propriétés de son comportement.

Pour pouvoir prouver ou vérifier il faut se baser sur des propriétés que peuvent avoir ou pas un réseau de Petri. De façon classique ces propriétés sont présentées en deux groupes.

Le premier groupe concerne des propriétés qui dépendent non seulement de la structure du réseau de Petri, mais aussi de son marquage initial. Cela veut dire que si l'on considère un réseau de Petri avec un marquage initial qui vérifie l'une de ces propriétés, le fait d'ajouter ou d'enlever un jeton du marquage initial peut très bien faire que la propriété cesse d'être vérifiée. Une autre caractéristique de ce groupe est que ces propriétés sont globales et doivent, en général, être vérifiées pour que le système modélisé par le réseau de Petri puisse être implémenté sans problème. C'est pourquoi on les appelle les “bonnes” propriétés.

Le second groupe concerne la possibilité de décomposer un réseau de Petri en sous-réseaux de Petri particuliers. Ces sous réseaux peuvent ensuite être utilisés pour exprimer des propriétés spécifiques concernant soit les marquages accessibles soit les scénarios de comportement. Il s'agit alors de vérifier ou de prouver des propriétés spécifiques pour le modèle. La décomposition en sous-réseaux de Petri ne dépend que de la structure, par contre le marquage initial est ensuite nécessaire pour exprimer la propriété spécifique.

Nous présenterons ici d'abord les trois *bonnes* propriétés classiques : celle de réseau de Petri *k-borné*, celle de réseau de Petri *vivant*, puis celle de réseau de Petri *ré-initialisable* (on dit aussi *avec un état d'accueil*). Puis nous présenterons les décompositions en sous-réseaux de Petri et les invariants.

## 2 Réseau de Petri marqué *k-borné*

De façon informelle, un réseau de Petri *k-borné* est un réseau de Petri marqué qui est tel que l'on ne peut pas accumuler une infinité de jetons dans une ou plusieurs places. Si le nombre de jetons est borné, comme le nombre de places est fini, le nombre de marquages accessibles est également fini et donc un réseau de Petri *k-borné* pour un marquage initial est équivalent (du point de vue des marquages) à un automate fini.

### 2.1 Place *k-bornée* et binaire.

**Définition 1 (Place *k-bornée*)** Soit un réseau de Petri marqué  $\langle \mathcal{R}, M_0 \rangle$  et soit  $\mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0)$  l'ensemble de ses marquages accessibles. Soit  $k$  un entier strictement positif. Une place  $p$  de ce réseau est *k-bornée* si et seulement si :

$$\forall M \in \mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0) \quad M(p) \leq k \quad (1)$$

Si  $k = 1$  on dit que la place est *binaire* (on dit également *sauf* de l'anglais : “safe”).

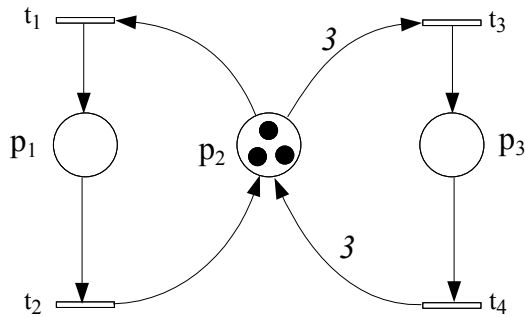


FIG. 1 – Réseau de Petri marqué

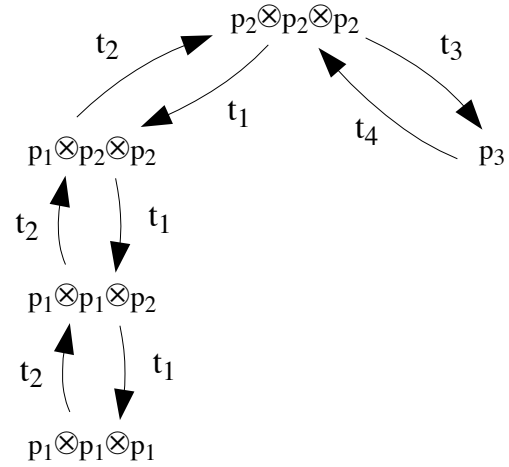


FIG. 2 – Graphe des marquages associé

Si on considère le réseau de Petri de la figure 1 (voir le chapitre précédent et le cas 2 pour la signification de ce réseau) on voit, à partir de la figure 2, que pour le marquage initial  $M_0 = p_2 \otimes p_2 \otimes p_2$ , la place  $p_3$  est binaire alors que les places  $p_1$  et  $p_2$  sont 3-bornées. En effet quel que soit le marquage accessible, la place  $p_3$  est vide ou alors elle contient un seul jeton. Par contre le contenu des places  $p_1$  et  $p_2$  peut être 0, 1, 2 ou 3 jetons.

## 2.2 Réseau de Petri marqué $k$ -borné et binaire.

**Définition 2 (Réseau de Petri marqué  $k$ -borné)** Un réseau de Petri marqué  $\langle \mathcal{R}, M_0 \rangle$  est  $k$ -borné si et seulement si toutes ses places sont  $k$ -bornées.

La valeur à prendre pour  $k$  est la plus grande quand on considère toutes les places de  $P$ .

**Définition 3 (Réseau de Petri marqué binaire (sauf))** Un réseau de Petri marqué  $\langle \mathcal{R}, M_0 \rangle$  est binaire si et seulement si il est 1-borné.

On dit également réseau de Petri *sauf* de l'anglais “safe”.

## 2.3 Exemples

### 2.3.1 Lecteurs et écrivains

Le réseau de Petri de la figure 1 est 3-borné pour le marquage  $M_0 = p_2 \otimes p_2 \otimes p_2$ . En effet, il possède une place 1-bornée ( $p_3$ ) et deux places 3-bornées ( $p_1$  et  $p_2$ ).

On voit d'autre part que l'ensemble des marquages accessibles est effectivement fini (il comporte 5 marquages).

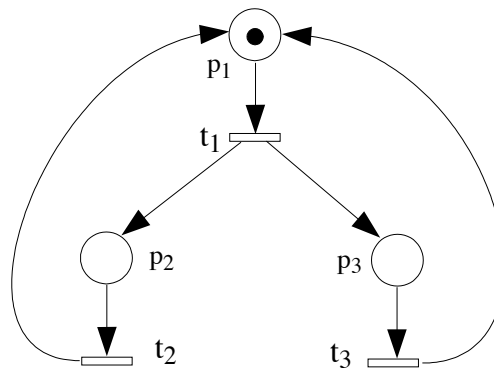


FIG. 3 – Réseau de Petri non borné

### 2.3.2 Réseau non borné (1)

Considérons le réseau de Petri de la figure 3 pour le marquage initial  $M_0 = p_1$  et la séquence de franchissements de transitions  $s = t_1 ; t_2$ . Le franchissement de  $s$  à partir de  $M_0$  produit le marquage  $M_1 = p_1 \otimes p_3$ . Le jeton mis dans la place  $p_3$  par le franchissement de  $t_1$  n'est en effet pas consommé. Le franchissement de la séquence  $s$  de façon répétitive permet donc d'ajouter autant de jetons que l'on veut dans cette place. Elle n'est donc pas  $k$ -bornée, et le réseau de Petri n'est donc pas  $k$ -borné pour ce marquage initial.

Le réseau étant symétrique, on peut faire le même raisonnement pour la séquence  $s' = t_1 ; t_3$  et la place  $p_2$  est également non  $k$ -bornée. Enfin on peut considérer la séquence  $s'' = t_1 ; t_2 ; t_3$ . Elle est franchissable à partir du marquage  $M_0$  et produit le marquage  $M_2 = p_1 \otimes p_1$ . À partir de ce marquage  $s''$  est à nouveau franchissable. Chaque franchissement de  $s''$  ajoute un jeton dans la place  $p_1$  sans en enlever ailleurs. Clairement la place  $p_1$  est elle aussi non  $k$ -bornée.

Le réseau de Petri de la figure 3, pour le marquage initial  $M_0 = p_1$  est donc un exemple de réseau de Petri non  $k$ -borné dont toutes les places sont non  $k$ -bornées.

Cet exemple illustre la situation qui est au cœur d'un réseau de Petri non borné pour un marquage initial donné : l'existence d'une séquence  $s$  de franchissements de transitions, franchissable à partir d'un marquage accessible  $M$  et produisant un marquage  $M'$  *strictement* supérieur à  $M$  (au sens des vecteurs).  $M'$  possède donc au moins une place  $p$  avec au moins un jeton de plus que  $M$ . En effet,  $s$  sera à nouveau franchissable à partir de  $M'$  et on pourra accumuler autant de jetons que l'on veut dans  $p$ .

### 2.3.3 Réseau non borné (2)

Considérons maintenant le réseau de Petri de la figure 4 pour le marquage initial  $M_0 = p_1$ . Le raisonnement fait précédemment à l'aide de la séquence  $s = t_1 ; t_2$  peut se faire de la même façon. Donc il est également non  $k$ -borné car la place  $p_3$  l'est. Par contre le franchissement de la transition  $t_3$  ne produisant pas de jeton dans la place  $p_1$ , il est impossible de franchir une deuxième fois  $t_1$  si  $t_2$  n'a pas été franchie. On a donc une infinité de marquages accessibles, mais ils sont



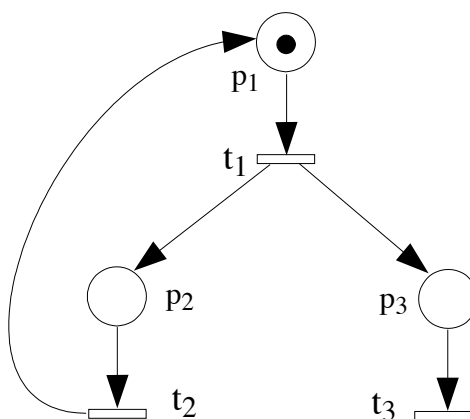


FIG. 4 – Autre réseau de Petri non borné

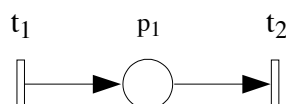


FIG. 5 – Réseau de Petri “parenthèse”

tous de la forme  $M$  ou  $M'$  avec  $n \geq 0$ .

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ n \end{bmatrix} \quad M' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ n \end{bmatrix} \quad (2)$$

Nous avons donc l'exemple d'un réseau de Petri non  $k$ -borné pour son marquage initial car l'une de ses places est non  $k$ -bornée mais possédant toutefois des places  $k$ -bornées (et même binaires dans l'exemple considéré).

### 2.3.4 Réseau parenthèse

Considérons le réseau de Petri de la figure 5. Il est présenté en détail comme *cas 3* sous le nom *réseau parenthèse*. Ce réseau de Petri possédant une transition source<sup>1</sup>, il est non borné de façon évidente. En effet, la transition  $t_1$  est toujours sensibilisée et peut être franchie quel que soit le marquage courant. Il est donc toujours possible d'ajouter un jeton à la place  $p_1$ . La place  $p_1$  n'est donc pas  $k$ -bornée et le réseau non plus.

Un marquage initial quelconque ne fait qu'ajouter initialement un certain nombre de jetons dans la place  $p_1$  et ne change rien au fait que la transition  $t_1$  est une transition source. Le réseau de la figure 5 est donc un exemple de réseau de Petri qui n'est  $k$ -borné pour aucun marquage initial possible.

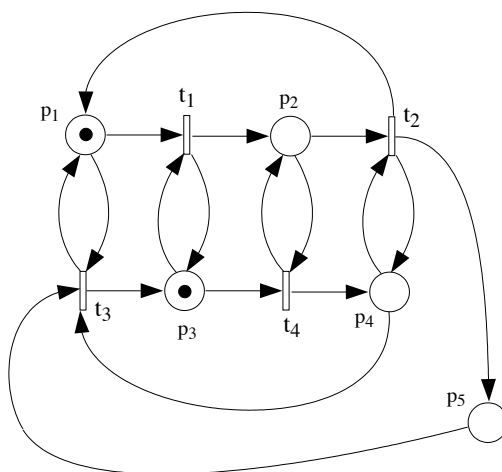


FIG. 6 – Réseau de Petri  $k$ -borné

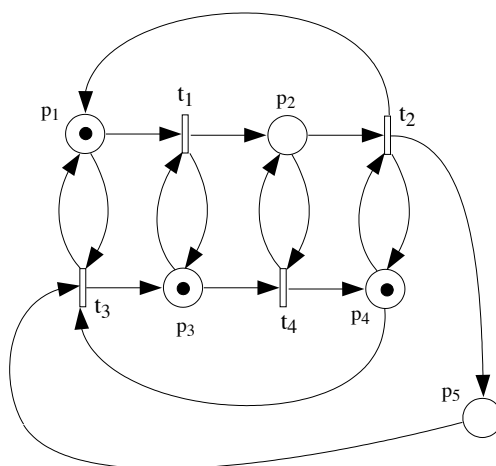


FIG. 7 – Réseau de Petri non  $k$ -borné

### 2.3.5 La propriété dépend du marquage initial

Nous venons de voir le cas d'un réseau de Petri qui est non  $k$ -borné quel que soit son marquage initial. Nous allons maintenant donner le cas d'un réseau de Petri qui est  $k$ -borné pour un marquage initial et pas pour un autre.

Considérons maintenant le réseau de Petri de la figure 6. Son marquage initial est  $M_0 = p_1 \otimes p_3$ . À partir de ce marquage, le seul comportement possible est de franchir, dans l'ordre, les transitions  $t_1$  puis  $t_4$  puis  $t_2$  puis  $t_3$ , ce qui redonne le marquage initial  $M_0$ . Dans chaque place il n'y a jamais eu plus d'un jeton et donc le réseau est 1-borné, c'est-à-dire *binaire* (on dit aussi *sauf*) pour  $M_0$ .

Ajoutons maintenant un jeton au marquage initial pour obtenir le réseau de Petri marqué de la figure 7. Son marquage initial  $M'_0 = p_1 \otimes p_3 \otimes p_4$  est tel que la séquence  $s = t_1 ; t_2$  est franchissable. Cette séquence est telle que :

$$p_1 \otimes p_3 \otimes p_4 \xrightarrow{s} p_1 \otimes p_3 \otimes p_4 \otimes p_5 \quad (3)$$

Le marquage atteint est un marquage strictement supérieur au marquage de départ  $M'_0$  : il y a un jeton en plus dans la place  $p_5$ . On peut donc répéter  $s$  autant de fois que l'on veut, la place  $p_5$  n'est pas  $k$ -bornée et le réseau de Petri n'est pas  $k$ -borné pour le marquage initial.

## 2.4 Pourquoi cette propriété ?

Pourquoi cette propriété est importante ?

Considérons d'abord le cas d'un réseau de Petri marqué *binaire* (c'est-à-dire 1-borné ou *sauf*). Obtenir un tel modèle n'est normalement pas le fruit du hasard. Il résulte du choix du concepteur de raisonner en terme de conditions *logiques*, vraies ou fausses, nécessaires pour exécuter certaines actions. Vérifier, à posteriori que le réseau est bien binaire c'est vérifier que le concepteur a bien été cohérent et que, en particulier, il n'a jamais effectué l'action "*mettre à vrai*" sur une proposition logique déjà *vraie*. En effet, "*mettre à vrai*" consiste dans un réseau de Petri à mettre un jeton dans la place associée à la proposition logique. Si cette propriété est déjà vraie, la place contient déjà un jeton et on aboutirait à un marquage avec deux jetons dans la place. Le réseau ne serait plus 1-binaire.

Typiquement ce genre d'erreur se produit si un cycle de fonctionnement a été incorrectement décrit en oubliant de remettre à *faux* une condition logique qui avait été mise à *vrai*.

Vérifier à posteriori que le réseau de Petri décrivant le système projeté est binaire, c'est donc vérifier l'absence de contradiction dans la démarche du concepteur. Une contradiction dans une spécification est toujours le signe qu'une erreur a été commise. Comme il est rare d'être totalement cohérent lorsque l'on se trompe, vérifier l'absence d'incohérence est un moyen efficace de détecter des erreurs de conception.

Le cas de la propriété "*réseau marqué  $k$ -borné*" est un peu différent. Un réseau de Petri décrit un ensemble de processus communicants. S'il est non borné c'est soit que le nombre de processus peut croître indéfiniment, soit que des communications asynchrones existent et que le nombre des

<sup>1</sup>Une transition source est une transition qui n'a aucune place d'entrée (voir le chapitre précédent)

messages en attente entre deux processus (l'un producteur et l'autre consommateur) peut croître indéfiniment.

Tant que le réseau de Petri décrit un mécanisme abstrait, le fait qu'il soit non  $k$ -borné n'est pas vraiment gênant. Cela veut dire que la spécification est incomplète : le nombre maximal de processus et/ou la taille de certaines boîtes-aux-lettres de stockage de messages n'ont pas été encore spécifiés.

Par contre lorsque l'on passe à l'implémentation, surtout s'il s'agit d'un système critique, il est fortement recommandé de vérifier que le réseau est  $k$ -borné. En effet, s'il s'agit du nombre de processus, un accroissement inconsideré du nombre de ceux-ci va provoquer des problèmes d'allocation de mémoire et va dégrader les performances du système. S'il s'agit de messages, c'est encore plus critique. En effet un grand nombre de messages en attente signifie qu'une partie du système ne rend pas le service attendu et que les contraintes de temps de réponse ne pourront pas être garanties.

### 3 Réseau marqué vivant

La propriété précédente concernait les places et leurs contenus en jetons pour les marquages accessibles. Cette propriété concerne les transitions et la possibilité de les franchir à partir des marquages accessibles. Il s'agit donc d'un point de vue dual par rapport au précédent.

#### 3.1 Transition vivante et quasi-vivante

##### 3.1.1 Transition quasi-vivante

**Définition 4 (Transition quasi-vivante)** Soit un réseau de Petri marqué  $\langle \mathcal{R}, M_0 \rangle$  et soit  $\mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0)$  l'ensemble de ses marquages accessibles. Une transition  $t$  de ce réseau est quasi-vivante si et seulement si

$$\exists M \in \mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0), M \xrightarrow{t} \quad (4)$$

Cela veut dire qu'il existe un marquage  $M$ , accessible à partir du marquage initial  $M_0$ , qui sensibilise la transition  $t$ . On peut exprimer cela sous une autre forme ; il existe une séquence de franchissement  $s$ , franchissable à partir du marquage initial  $M_0$  et qui peut se prolonger par le franchissement de  $t$  :

$$\exists s, M_0 \xrightarrow{s} M \text{ et } M \xrightarrow{t} \quad (5)$$

ou encore

$$\exists s, M_0 \xrightarrow{s;t} \quad (6)$$

Cette définition n'a pour but que de faire bien comprendre la définition suivante.

##### 3.1.2 Transition vivante

**Définition 5 (Transition vivante)** Soit un réseau de Petri marqué  $\langle \mathcal{R}, M_0 \rangle$  et soit  $\mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0)$  l'ensemble de ses marquages accessibles. Une transition  $t$  de ce réseau est vivante si et seulement

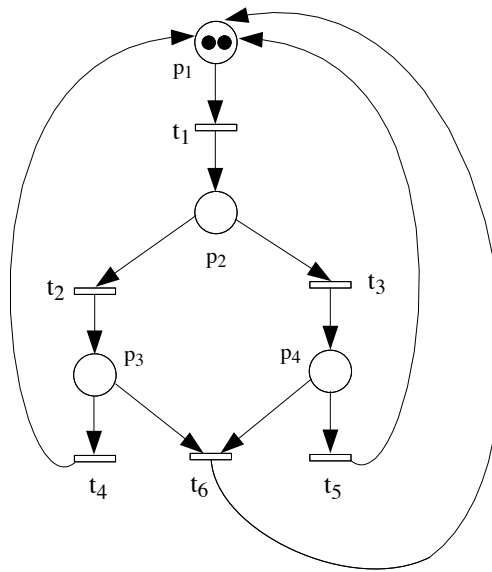


FIG. 8 – Réseau de Petri quasi vivant

si

$$\forall M \in \mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0), \exists s, M \xrightarrow{s; t} \quad (7)$$

Pour tout marquage  $M$  accessible à partir du marquage initial  $M_0$ , il faut montrer que  $t$  est quasi-vivante pour le réseau de Petri marqué  $\langle \mathcal{R}, M \rangle$ .

Au lieu de devoir simplement montrer que la transition  $t$  peut être franchie une fois à partir du marquage initial, il faut montrer que quelle que soit l'évolution du réseau de Petri il est encore possible de trouver une séquence qui amène au franchissement de  $t$ . La transition  $t$  est donc infiniment franchissable (bien sûr à condition de franchir certaines transitions, entre deux franchissements de  $t$ ).

### 3.1.3 Exemple

Considérons le réseau de Petri marqué de la figure 8. Son graphe des marquages accessibles est donné par la figure 9.

À partir du marquage initial  $M_0 = p_1 \otimes p_1$ , la séquence  $s = t_1; t_1; t_2; t_3$  est franchissable. Elle mène au marquage  $M = p_3 \otimes p_4$  qui sensibilise la transition  $t_6$ . Donc cette transition est quasi vivante (la séquence  $s$ , franchissable à partir de  $M_0$  peut se prolonger par  $t_6$ ).

Par contre cette même transition n'est pas vivante. En effet, considérons le marquage  $M_1 = p_1$ . C'est un marquage accessible (il est un élément de  $\mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0)$ )<sup>2</sup>. On voit sur le graphe des marquages accessibles de la figure 9 qu'aucun chemin ne permet de revenir au marquage  $M$  sensibilisant  $t_6$  en partant de  $M_1$ . Le franchissement de  $t_6$  consomme deux jetons et n'en produit qu'un et aucune transition ne permet de revenir à ce nombre global de deux jetons. On reste en quelque sorte prisonnier d'un sous ensemble de 4 marquages et aucun de ces marquages ne sensibilise  $t_6$ . Donc la transition  $t_6$  n'est pas vivante.

<sup>2</sup>On l'atteint, à partir de  $M_0$  par le franchissement de  $s; t_6$

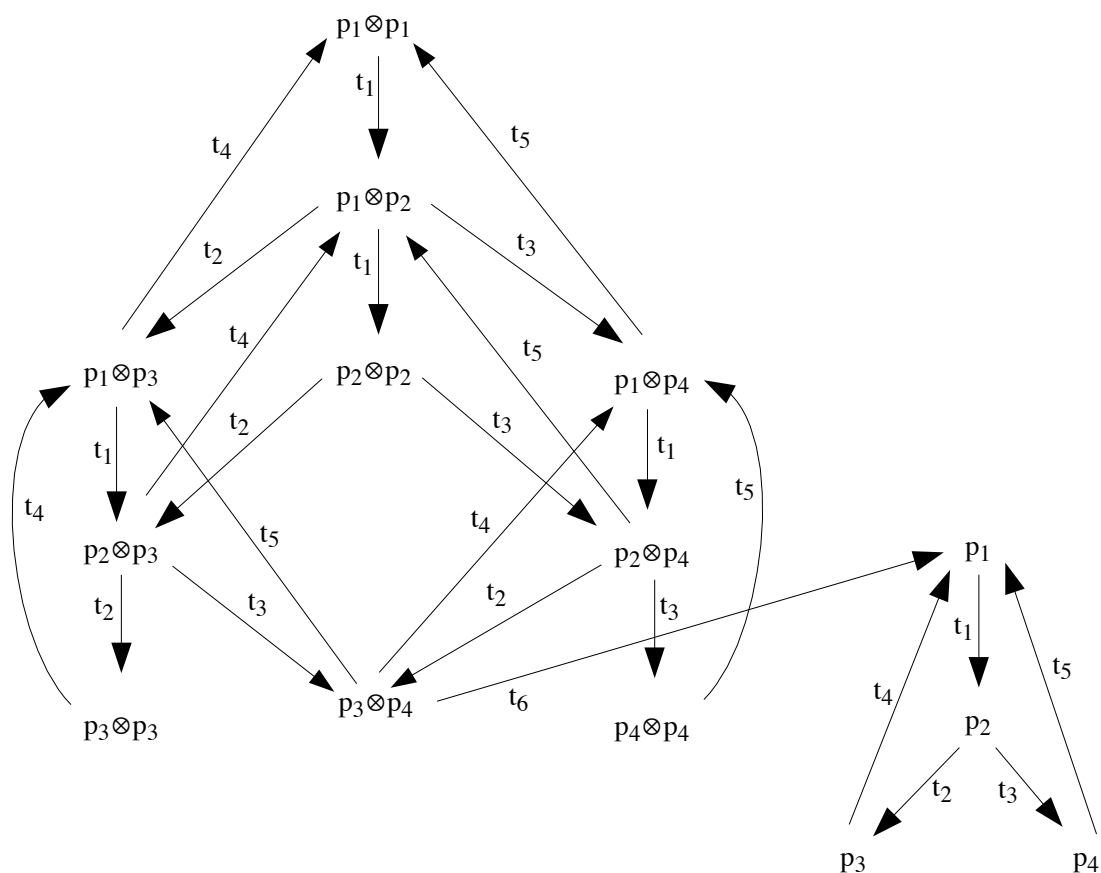


FIG. 9 – Graphe des marquages accessibles

On peut remarquer que, par contre, les transitions  $t_1, t_2, t_3, t_4$  et  $t_5$  sont vivantes car elles sont sensibilisées par l'un des marquages du groupe mentionné ci-dessus.

## 3.2 Réseau de Petri marqué vivant

### 3.2.1 Définition

**Définition 6 (Réseau marqué vivant)** Soit un réseau de Petri marqué  $\langle \mathcal{R}, M_0 \rangle$ . Ce réseau est vivant si et seulement si toutes ses transitions sont vivantes.

Le réseau de Petri marqué de la figure 8 est donc un exemple de réseau marqué non vivant puisque la transition  $t_6$  n'est que quasi-vivante.

Un réseau de Petri marqué non vivant est un réseau qui peut subir une dégradation dans son fonctionnement. Comme on le voit sur le graphe des marquages de la figure 9, le franchissement d'une transition (ici la transition  $t_6$ ) amène une dégradation irréversible du fonctionnement qui empêche un certain nombre de transitions d'être franchies. Un système de commande d'un procédé industriel ou un système embarqué ne doivent pas pouvoir subir de dégradation irréversible. C'est pourquoi on vérifie en général qu'un réseau de Petri modélisant un tel système est effectivement vivant.

### 3.2.2 Blocage mortel

La dégradation la plus brutale est ce que l'on appelle un blocage mortel. Il s'agit d'un marquage ne sensibilisant aucune transition et donc à partir duquel il est impossible d'évoluer.

**Définition 7 (Blocage mortel)** Soit un réseau de Petri marqué  $\langle \mathcal{R}, M_0 \rangle$ . Ce réseau possède un blocage mortel si et seulement si  $\exists M \in \mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0)$  tel qu'aucune transition n'est sensibilisée par  $M$

Le marquage  $M$  est appelé *blocage mortel*.

Si aucune transition n'est sensibilisée, cela veut dire que pour tout  $t$  appartenant à  $T$ , on a soit  $Pre(\cdot, t) > M$ , soit  $Pre(\cdot, t)$  et  $M$  sont non comparables.

**Propriété 1** Un réseau de Petri marqué possédant un blocage mortel n'est pas vivant.

En effet, de façon évidente, si l'on part du marquage  $M$ , quelle que soit la transition  $t$  considérée, il n'est pas possible de trouver une séquence de franchissements  $s$  qui puisse se prolonger par  $t$ . En effet aucune transition n'est franchissable<sup>3</sup>.

Un réseau de Petri marqué non vivant ne possède pas nécessairement un blocage mortel. Le réseau marqué de la figure 8 est un exemple.

Voyons maintenant d'autres exemples.

<sup>3</sup>Rappelons que seules les transitions sensibilisées peuvent être franchies

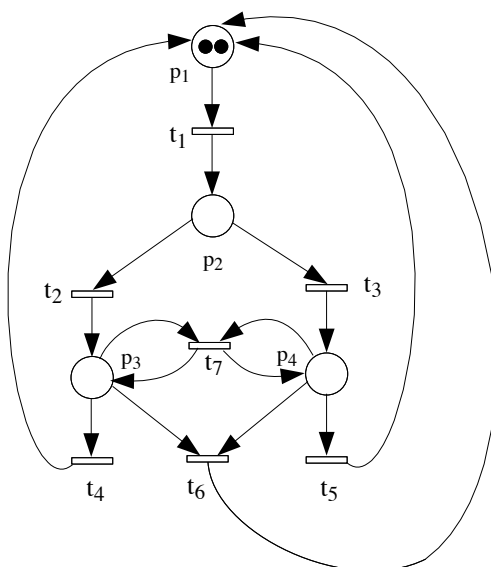


FIG. 10 – Réseau de Petri quasi vivant

### 3.3 Exemple

#### 3.3.1 Encore quasi vivant

Le réseau de la figure 8 est un cas particulier car ce n'est que la transition provoquant la dégradation qui n'est pas vivante et que de plus elle n'est franchissable qu'une fois. Le réseau de la figure 10 montre le cas d'une transition ( $t_7$ ) qui est franchissable une infinité de fois (voir le graphe des marquages accessibles de la figure 11) et qui cesse d'être franchissable à cause du franchissement d'une autre transition ( $t_6$ ).

#### 3.3.2 Lecteurs et écrivains

Revenons sur l'exemple de la figure 1 avec le graphe des marquages accessibles associé (figure 2). Pour montrer qu'il est vivant, il faut montrer que toute transition peut être franchie à partir de tout marquage accessible, après le franchissement éventuel d'autres transitions. Une solution est de mettre en évidence, pour chaque marquage accessible, une séquence de franchissements de transitions comprenant toutes les transitions du réseau de Petri. Le tableau ci-dessous les énumère.

Marquage accessible	Séquence franchissable
$M_0 = p_2 \otimes p_2 \otimes p_2$	$t_1 ; t_2 ; t_3 ; t_4$
$M_1 = p_3$	$t_4 ; t_1 ; t_2 ; t_3$
$M_2 = p_1 \otimes p_2 \otimes p_2$	$t_2 ; t_3 ; t_4 ; t_1$
$M_3 = p_1 \otimes p_1 \otimes p_2$	$t_2 ; t_2 ; t_3 ; t_4 ; t_1$
$M_4 = p_1 \otimes p_1 \otimes p_1$	$t_2 ; t_2 ; t_2 ; t_3 ; t_4 ; t_1$

Cela montre que le réseau de Petri marqué de la figure 1 est vivant car toutes ses transitions sont vivantes.



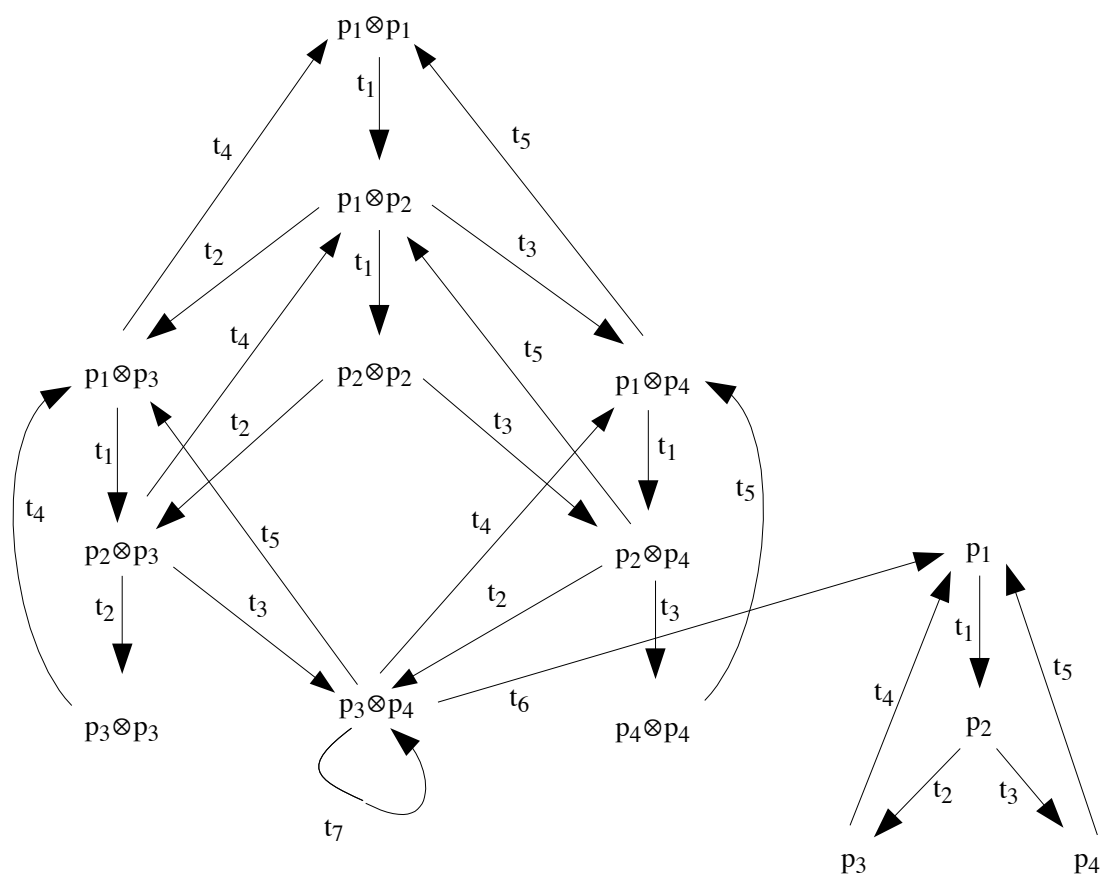


FIG. 11 – Graphe des marquages accessibles du réseau 10

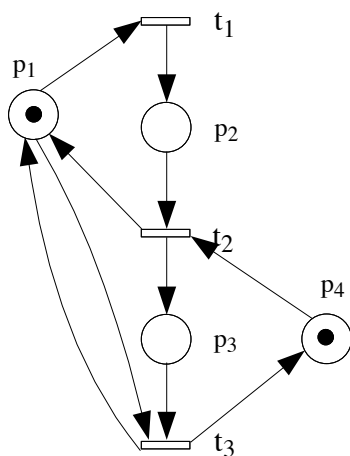


FIG. 12 – Réseau de Petri avec blocage

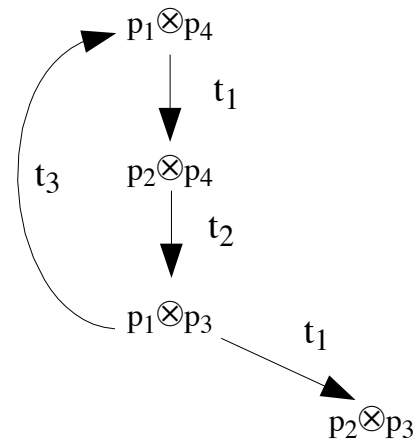


FIG. 13 – Graphe des marquages associé

### 3.3.3 Exemple du “réseau parenthèse”

Considérons le réseau de la figure 5. Les marquages accessibles sont de la forme  $M = [k]^4$ , avec  $k \geq 0$ . À partir de  $M_0$ , il suffit de franchir  $t_1$   $k$  fois pour atteindre  $M$ . Pour ces marquages, la transitions  $t_1$  est toujours franchissable et  $t_2$  l’est si  $k \geq 1$ . Pour  $k = 0$   $M = M_0$ , il suffit de franchir  $t_1$  une fois pour pouvoir franchir  $t_2$ . Le réseau marqué de la figure 5 est donc vivant.

### 3.3.4 Exemple de blocage mortel (1)

Considérons le réseau de Petri marqué de la figure 12 avec le graphe des marquages accessibles correspondant de la figure 13. Il présente un blocage mortel : le marquage  $(p_2 \otimes p_3)$ . En effet ce marquage ne sensibilise aucune transition. Il manque un jeton dans  $p_4$  pour que  $t_2$  soit sensibilisée et il manque un jeton dans  $p_1$  pour que  $t_3$  le soit.

Ce réseau marqué n’est donc pas vivant.

On peut remarquer que malgré la présence du blocage mortel, toutes les transitions du réseau de Petri peuvent être franchies une infinité de fois à partir du marquage initial en franchissant en boucle la séquence :  $(t_1 ; t_2 ; t_3)$ . Toutes les transitions sont donc quasi-vivantes. C’est le franchissement de  $t_1$  avant  $t_3$  qui amène au blocage.

### 3.3.5 Exemple de blocage mortel (2)

Un réseau de Petri peut présenter de multiples blocages. C’est le cas du réseau de Petri marqué de la figure 14. Le graphe des marquages accessibles correspondant est donné dans la figure 15. Il présente 4 blocages mortels, les marquages  $(p_2 \otimes p_2)$ ,  $(p_3 \otimes p_3)$ ,  $(p_2)$  et  $(p_3)$ .

<sup>4</sup>Vecteur d’une ligne et d’une colonne et  $M(p_1) = k$

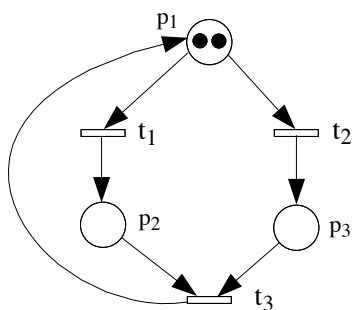


FIG. 14 – Réseau de Petri avec blocage

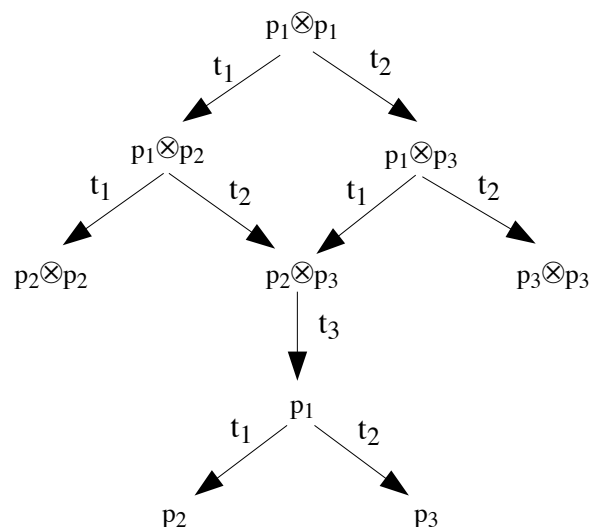


FIG. 15 – Graphe des marquages associé

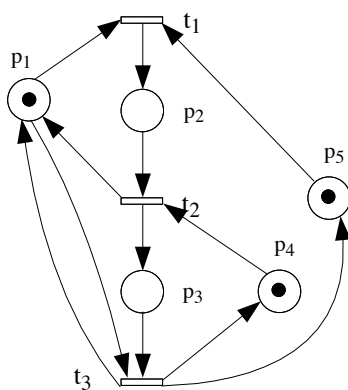


FIG. 16 – Réseau de Petri sans blocage

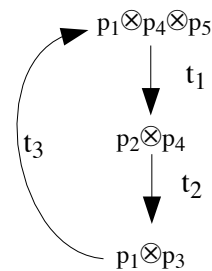


FIG. 17 – Graphe des marquages associé

### 3.3.6 Influence du marquage initial

Il paraît naturel que si l'on considère un réseau de Petri marqué vivant on peut éventuellement le rendre non vivant en enlevant certains jetons de son marquage initial <sup>5</sup>. Par exemple si l'on considère le réseau de Petri de la figure 1, il suffit d'enlever l'un des 3 jetons de la place  $p_2$  pour empêcher le franchissement des transitions  $t_3$  et  $t_4$  et donc le rendre non vivant.

Par contre passer d'un réseau de Petri vivant à un réseau de Petri non vivant en ajoutant un jeton à son marquage initial va contre l'intuition. C'est pourtant possible, et le réseau de Petri marqué de la figure 16 est un exemple. Son graphe des marquages accessibles est donné par la figure 17. On voit sur le graphe des marquages que ce réseau marqué est vivant.

Si on ajoute un jeton dans la place  $p_5$  on obtient le réseau marqué de la figure 18 avec le graphe des marquages accessibles de la figure 19. On voit qu'il y a un blocage mortel et donc le réseau marqué n'est pas vivant.

<sup>5</sup>Le réseau de Petri *parenthèse* est un exemple de réseau de Petri que l'on ne peut pas rendre non vivant en enlevant des jetons. Il est vivant alors qu'initialement il n'a aucun jeton

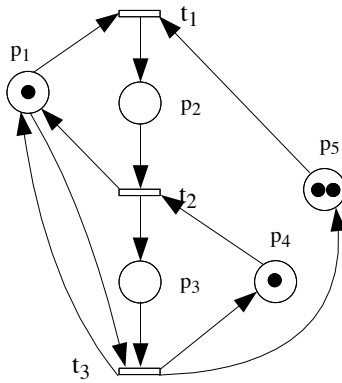


FIG. 18 – Réseau de Petri avec blocage

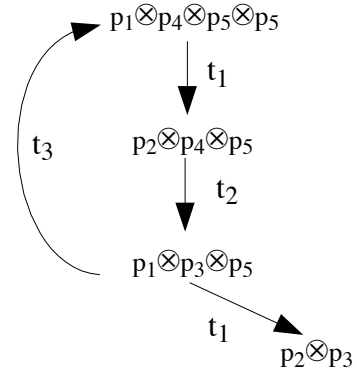


FIG. 19 – Graphe des marquages associé

Donnons d’abord une réponse intuitive à cette situation. Un réseau de Petri peut décrire un ensemble d’entités qui utilisent et relâchent des ressources. Les entités consommatrices de ressources sont représentées par des jetons tout comme les ressources. Si on ajoute une entité consommatrice alors on peut introduire un blocage s’il n’y a pas assez de ressources.

Examinons maintenant ces exemples d’un point de vue plus technique. Le réseau de Petri de la figure 16 est en fait celui de la figure 12 avec une place en plus, la place  $p_5$ . Ce réseau marqué (figure 12) pouvait avoir un fonctionnement cyclique permettant de franchir toutes les transitions en séquence. Le blocage mortel apparaît quand on franchit la transition  $t_1$  avant la transition  $t_3$ . Dans le réseau de la figure 16, la place  $p_5$  ne contenant qu’un seul jeton, elle oblige bien à attendre le franchissement de  $t_3$  (produisant à nouveau un jeton dans  $p_5$ ) avant de franchir  $t_1$  à nouveau.

Dans le réseau marqué de la figure 18, la place  $p_5$  existe bien, mais comme elle contient initialement deux jetons, on peut franchir  $t_1$  dès que la place  $p_1$  contient un jeton et le blocage mortel redevient accessible.

Dans le réseau de Petri de la figure 16, la place  $p_5$  avec un seul jeton initialement joue le rôle d’un *superviseur* interdisant l’évolution vers le blocage mortel et corrigeant en quelque sorte le comportement du système.

### 3.4 Retour sur la signification de la propriété “réseau marqué vivant”

L’exemple du réseau de Petri de la figure 12 est une illustration de la nécessité de vérifier que le modèle d’un système critique donné sous la forme d’un réseau de Petri est bien un réseau marqué vivant. En effet, des systèmes à événements discrets peuvent très bien avoir un fonctionnement semblant correct, comme la boucle correspondant à la séquence  $(t_1 ; t_2 ; t_3)$  tout en présentant des risques de fonctionnement catastrophique. La survenue d’un événement inattendu dans un certain état (ici le franchissement de  $t_1$  à partir du marquage  $(p_1 \otimes p_3)$ ) peut, en effet, le mener dans un état de blocage mortel. Un blocage mortel correspond à une perte totale sur le contrôle du système qui ne réagit plus à rien.

La propriété “réseau marqué vivant” est absolument essentielle pour les systèmes à événements discrets critiques (contrôles de procédés, systèmes embarqués dans les avions ou les voitures *etc*). Le point le plus essentiel est bien sûr l’absence de blocage mortel, mais toute dégradation est

dangereuse.

## 4 Réseau marqué réinitialisable

### 4.1 Introduction

Nous venons de voir deux bonnes propriétés : réseaux marqués *k-bornés* et réseaux marqués *vivants*. La première concerne les marquages, c'est-à-dire les états. La seconde concerne la “*franchissabilité*” des transitions, c'est-à-dire les événements. La première permet de montrer que le nombre d'états est fini, la seconde que le comportement est, d'une certaine façon, répétitif puisque chaque transition peut être toujours infiniment franchissable.

En fait, il ne s'agit pas d'un fonctionnement réellement répétitif car une transition donnée peut être franchie à partir de marquages différents et avec des conséquences différentes. C'est par exemple le cas de la transition  $t_1$  du réseau de Petri de la figure 12 qui ne mène à un blocage mortel que si elle est franchie à partir du marquage  $(p_1 \otimes p_3)$  alors que le comportement est sans problème si elle est franchie à partir du marquage  $(p_1 \otimes p_4)$ .

La propriété que nous allons présenter maintenant concerne le fait que le comportement du réseau de Petri marqué le fait passer de façon répétitive par les mêmes marquages. Pour cela il suffit de montrer que l'on peut toujours revenir au marquage initial. Cette propriété est différente de la propriété “*réseau marqué vivant*” car un réseau marqué, comme nous le verrons dans des exemples, peut être vivant sans être réinitialisable et réinitialisable sans être vivant. C'est pourquoi, bien évidemment, lors du processus de vérification il faudra à la fois montrer que le réseau marqué est vivant et qu'il est réinitialisable.

### 4.2 Définition et propriétés

**Définition 8 (Réseau marqué réinitialisable (état d'accueil))** Soit un réseau de Petri marqué  $\langle \mathcal{R}, M_0 \rangle$  et soit  $\mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0)$  l'ensemble de ses marquages accessibles. Ce réseau marqué est réinitialisable si et seulement si :

$$\forall M \in \mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0), M \neq M_0, \exists s \text{ tel que } M \xrightarrow{s} M_0 \quad (8)$$

On dit également que  $M_0$  est un *état d'accueil* (en anglais “*home state*”) pour le réseau de Petri marqué.

Si on considère que la séquence vide  $\lambda$  est toujours franchissable, on peut enlever la condition  $M \neq M_0$  dans la définition (on considère  $M_0 \xrightarrow{\lambda} M_0$ ).

On a la propriété suivante.

**Propriété 2** Soit un réseau de Petri marqué  $\langle \mathcal{R}, M_0 \rangle$  et soit  $\mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0)$  l'ensemble de ses marquages accessibles. Supposons que cet ensemble soit fini et soit  $\mathcal{GA}(\mathcal{R}; M_0)$  son graphe des marquages accessibles. Le réseau de Petri marqué est réinitialisable si et seulement si  $\mathcal{GA}(\mathcal{R}; M_0)$  est fortement connexe.

Rappelons ce qu'est un graphe fortement connexe.

**Définition 9 (Graphe fortement connexe)** Soit un graphe orienté dont  $X$  est l'ensemble des sommets. Ce graphe est fortement connexe si et seulement si pour tout couple de sommets  $x_i$  et  $x_j$  de  $X$ , il existe un chemin orienté de  $x_i$  vers  $x_j$ .

Le couple étant quelconque on peut interchanger  $x_i$  et  $x_j$  et cela veut dire qu'il existe un chemin orienté de  $x_i$  vers  $x_j$  et un chemin orienté de  $x_j$  vers  $x_i$ .

La preuve de la propriété 2 est alors simple. Prenons deux marquages quelconques  $M_1$  et  $M_2$  de  $\mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0)$ . Si le réseau marqué est réinitialisable, cela veut dire qu'il existe une séquence de franchissements (et donc un chemin orienté dans  $\mathcal{GA}(\mathcal{R}; M_0)$ ) de  $M_1$  vers  $M_0$ .

Comme  $M_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0)$  cela veut dire qu'il existe une séquence de franchissements (et donc un chemin) de  $M_0$  à  $M_2$ . En concaténant les deux chemins, on obtient un chemin de  $M_1$  à  $M_2$ .

Pour la réciproque, si  $\mathcal{GA}(\mathcal{R}; M_0)$  est fortement connexe, alors quel que soit le marquage accessible  $M$ , il existe un chemin et donc une séquence de franchissements de  $M$  vers  $M_0$ .

Donnons enfin une dernière propriété.

**Propriété 3** Soit un réseau de Petri marqué  $\langle \mathcal{R}, M_0 \rangle$ , s'il est réinitialisable et que toutes ses transitions sont quasi-vivantes ou vivantes, alors il est vivant.

En effet, si  $t$  est une transition quasi-vivante d'un réseau marqué  $\langle \mathcal{R}, M_0 \rangle$ , cela veut dire qu'il existe au moins une séquence de franchissements  $s$  franchissable à partir de  $M_0$  qui peut être prolongée par  $t$ . Si le réseau est réinitialisable, cela veut dire que pour tout  $M$  de  $\mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0)$ , il existe une séquence  $s'$  franchissable à partir de  $M$  et aboutissant à  $M_0$ . Donc à partir de  $M$  la séquence  $(s; s')$  est franchissable et peut être prolongée par  $t$ . Donc  $t$  est vivante.

Toutes les transitions quasi-vivantes d'un réseau marqué réinitialisable étant vivantes, la propriété est démontrée.

## 4.3 Exemples

### 4.3.1 Vivant et non réinitialisable

Considérons le réseau de Petri marqué de la figure 20 et le graphe des marquages accessibles correspondant de la figure 21. Il est clair qu'il est impossible de revenir au marquage initial  $(p_1 \otimes p_4)$  à partir des trois marquages accessibles  $(p_2 \otimes p_4)$ ,  $(p_1 \otimes p_3)$  et  $(p_2 \otimes p_3)$ .

Par contre, ces trois marquages appartiennent à une boucle qui correspond aux franchissements des 3 transitions  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ . Donc ce réseau marqué est vivant. On peut également remarquer qu'il est 1-borné. Ceci illustre bien le fait que les propriétés "réseau marqué vivant" et "réseau marqué réinitialisable" sont différentes.

### 4.3.2 Réinitialisable et non vivant

Considérons le réseau de Petri de la figure 22 et son graphe des marquages accessibles de la figure 23. Il est réinitialisable de façon évidente. Il est, de façon tout aussi évidente, non vivant car la transition  $t_3$  n'est jamais franchie.

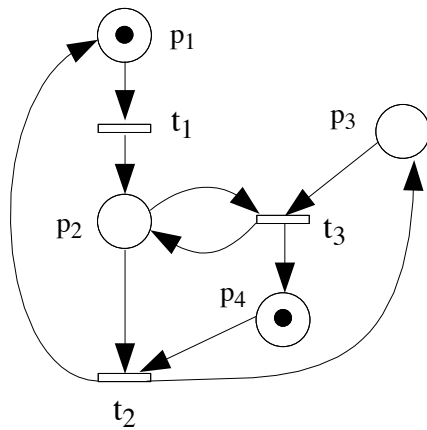


FIG. 20 – Réseau de Petri non réinitialisable

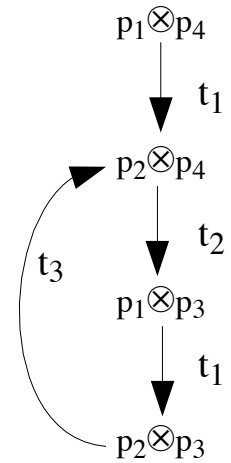


FIG. 21 – Graphe des marquages associé

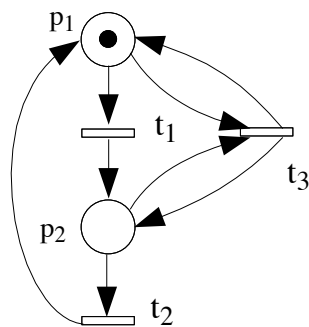


FIG. 22 – Réseau de Petri réinitialisable

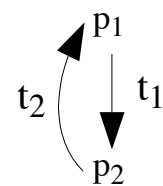


FIG. 23 – Graphe des marquages associé

On peut remarquer que si on ajoute initialement un second jeton dans la place  $p_1$ , il devient vivant et réinitialisable.

### 4.3.3 Réinitialisable et vivant

Considérons à nouveau le réseau de Petri marqué de la figure 1. Nous avons déjà montré qu'il était vivant. Il est réinitialisable car de chaque marquage accessible on peut revenir au marquage initial  $M_0$  (le graphe des marquages accessibles est fortement connexe).

$$\boxed{M_1 \xrightarrow{t_4} M_0 \quad M_2 \xrightarrow{t_2} M_0 \quad M_3 \xrightarrow{t_2; t_2} M_0 \quad M_3 \xrightarrow{t_2; t_2; t_2} M_0}$$

### 4.3.4 Réinitialisable et non borné

Les propriétés “réseau marqué réinitialisable” et “réseau marqué borné” sont également indépendantes. Le réseau “parenthèse” (figure 5) est un exemple. En effet, à partir de tout marquage accessible (ils sont de la forme  $M = [k]$ ) il suffit de franchir  $k$  fois la transition  $t_2$  pour revenir au marquage initial.

## 4.4 Retour sur la signification de la propriété “réseau marqué réinitialisable”

Nous avons vu qu'elle garantit un fonctionnement cyclique du système représenté par le réseau de Petri. On peut remarquer que tout comme la propriété “réseau marqué vivant”, elle garantit l'absence de blocage mortel puisque de façon évidente, d'un marquage correspondant à un blocage mortel il est impossible de trouver une séquence permettant de revenir au marquage initial. Bien que ne recouvrant pas, les deux propriétés “réseau marqué vivant” et “réseau marqué réinitialisable” sont fortement liées.

Elles sont complémentaires car si le réseau marqué est réinitialisable en plus d'être vivant, cela veut dire que les transitions seront toujours franchies à partir des mêmes marquages, cycliquement.

Si le réseau de Petri marqué est vivant sans être réinitialisable (comme dans le cas de la figure 20, cela veut dire que bien que chaque transition soient infiniment franchissables à partir de tout marquage accessible, ce n'est plus le cas si on considère des *séquences* de franchissements. En effet, la séquence  $t_1 ; t_2 ; t_1$ , initialement franchissable, ne l'est plus par la suite. Nous voyons que bien que le réseau marqué soit vivant, son fonctionnement présente bien une dégradation.

## 5 Composantes et invariants

Nous avons vu les trois *bonnes* propriétés classiques, maintenant nous allons voir comment on peut décomposer un réseau de Petri en sous-réseaux et ce que cela signifie. Pour cela nous allons d'abord définir ce qu'est un sous réseau de Petri d'un réseau de Petri.



## 5.1 Sous réseaux de Petri

À partir d'un graphe  $\mathcal{G} = \langle X, A \rangle$  on peut définir un sous graphe  $\mathcal{G}_s = \langle X_s, A_s \rangle$  en ne considérant qu'un sous ensemble  $X_s$  des sommets de  $\mathcal{G}$  et les arcs existant entre eux. On a alors :

- les sommets de  $\mathcal{G}_s$  sont  $X_s \subset X$
- ses arcs sont définis de la façon suivante :  $(x_i, x_j)$  est un élément de  $A_s$  si et seulement si  $x_i$  et  $x_j$  sont des éléments de  $X_s$  et  $(x_i, x_j) \in A$  (donc  $A_s \subset A$ ).

Dans le cas des réseaux de Petri il y a deux possibilités de définir un sous-réseau car il y a deux types de nœuds : les places et les transitions. Il est donc possible de définir des p-sous-réseaux et des t-sous-réseaux. Dans le premier cas c'est un sous ensemble de places qui définit le sous réseau, dans le second cas c'est un sous-ensemble de transitions.

**Définition 10 (p-sous-réseau)** Soit un réseau de Petri  $\mathcal{R} = \langle P, T, Pre, Post \rangle$  et soit  $P_s$  un sous ensemble de  $P$ . Le p-sous-réseau de Petri engendré par  $P_s$  est le réseau

$\mathcal{R}_s = \langle P_s, T_s, Pre_s, Post_s \rangle$  défini de la façon suivante :

- une transition  $t$  appartient à  $T_s$  s'il existe une place  $p$  de  $P_s$  telle que  $t \in {}^\bullet p$  ou  $t \in p^\bullet$
- $Pre_s(p, t) = Pre(p, t)$  pour  $p \in P_s$  et  $t \in T_s$ ,
- $Post_s(p, t) = Post(p, t)$  pour  $p \in P_s$  et  $t \in T_s$ .

Cela veut dire qu'aux places de  $P_s$  on ajoute leurs transitions d'entrée et de sortie avec les arcs les liant à ces places.

**Définition 11 (t-sous-réseau)** Soit un réseau de Petri  $\mathcal{R} = \langle P, T, Pre, Post \rangle$  et soit  $T_s$  un sous ensemble de  $T$ . Le t-sous-réseau de Petri engendré par  $T_s$  est le réseau

$\mathcal{R}_s = \langle P_s, T_s, Pre_s, Post_s \rangle$  défini de la façon suivante :

- une place  $p$  appartient à  $P_s$  s'il existe une transition  $t$  de  $T_s$  telle que  $p \in {}^\bullet t$  ou  $p \in t^\bullet$
- $Pre_s(p, t) = Pre(p, t)$  pour  $p \in P_s$  et  $t \in T_s$ ,
- $Post_s(p, t) = Post(p, t)$  pour  $p \in P_s$  et  $t \in T_s$ .

Nous allons voir des exemples dans la section suivante.

## 5.2 Introduction informelle des composantes

### 5.2.1 Composantes conservatives et invariants de places

Considérons le réseau de Petri de la figure 24. Deux sous ensembles de places ont été repérés :

- en rouge les places  $p_1, p_2$  et  $p_3$ ,
- en bleu les places  $p_4, p_5$  et  $p_6$ .

Les p-sous-réseaux engendrés par ces sous-ensembles de places sont représentés sur les figures 25 et 26.

Ces p-sous-réseaux ne sont pas quelconques. Nous pouvons remarquer que chacune de leurs transitions n'ont qu'un arc en entrée et un arc en sortie et que de plus tous ces arcs sont de poids 1.

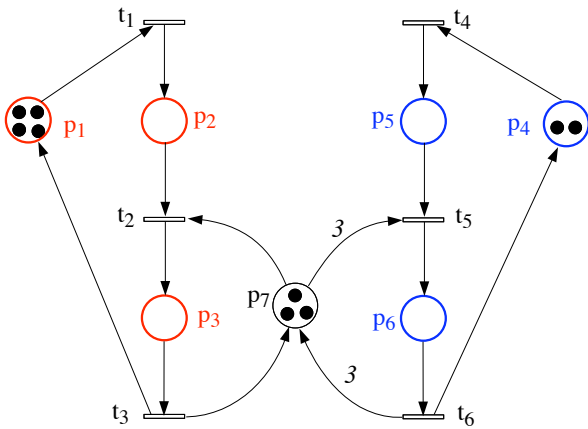


FIG. 24 – Réseau de Petri

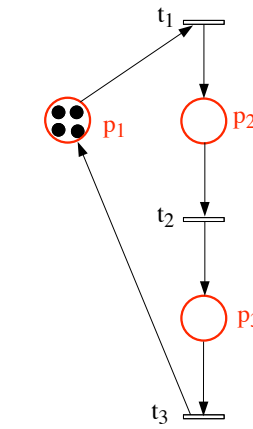


FIG. 25 – p-sous-réseau 1

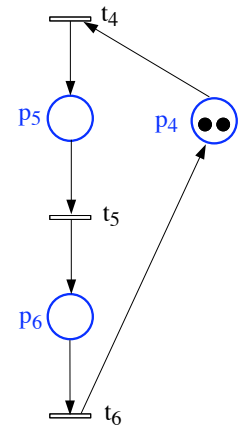


FIG. 26 – p-sous-réseau 2

Considérons le p-sous-réseau 1 (figure 25). Si l'on franchit, dans le réseau global (figure 24), une transition n'appartenant pas à ce sous-réseau ( $t_5$  par exemple). Comme elle n'est connectée à aucune place du p-sous-réseau, le contenu total en jeton du sous réseau n'est pas modifié. Si l'on franchit une transition appartenant au p-sous-réseau ( $t_2$  par exemple), le contenu global en jeton du réseau global peut être modifié ( $t_2$  consomme un jeton dans  $p_2$  et un jeton dans  $p_7$  mais n'en produit qu'un dans  $p_3$ ). Mais par contre le contenu global en jetons du p-sous-réseau n'est, lui, pas modifié puisque la transition n'a qu'une place d'entrée de poids 1 et une place de sortie de poids 1 appartenant à ce sous-réseau ( $p_2$  et  $p_3$ ).

Toutes ces considérations sont valables pour l'autre p-sous-réseau. En conclusion nous voyons que le contenu global en jeton de ces p-sous-réseaux est constant et nous avons ici pour tout  $M \in \mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0)$  ( $\mathcal{R}$  est le réseau global de la figure 24) :

$$M(p_1) + M(p_2) + M(p_3) = M_0(p_1) + M_0(p_2) + M_0(p_3) = 4 \quad (9)$$

$$M(p_4) + M(p_5) + M(p_6) = M_0(p_4) + M_0(p_5) + M_0(p_6) = 2 \quad (10)$$

Les expressions 9 et 10 sont appelées des *invariants de place*. Les p-sous-réseaux correspondants sont appelés des *composantes conservatives*.

Donc l'intérêt de décomposer un réseau de Petri en p-sous-réseaux est que si l'on considère la restriction du marquage du réseau global aux places de ce p-sous-réseau au cours de l'évolution du système, on obtient un marquage formé d'un nombre invariant de jetons qui se déplacent dans les places du sous-réseau.

Nous allons généraliser et voir que l'on peut obtenir des sous-ensembles de places où c'est une somme pondérée de jetons qui est conservée.

Considérons cette fois le sous ensemble des places  $p_3$ ,  $p_6$  et  $p_7$  comme représenté sur la figure 27. Cela donne le p-sous-réseau de la figure 28. Dans ce p-sous-réseau, la transition  $t_2$  a  $p_7$  en entrée avec un poids 1 et  $p_3$  en sortie avec un poids 1. Donc il y a conservation du nombre global de jetons dans le sous-réseau lors de son franchissement. Il en est de même pour  $t_3$ . Par contre  $t_5$  possède  $p_7$  en entrée avec un poids 3 et  $p_6$  en sortie avec un poids 1. Pour avoir un nombre invariant, il faut donc multiplier le nombre de jetons contenus dans  $p_6$  par 3 et celui contenu dans

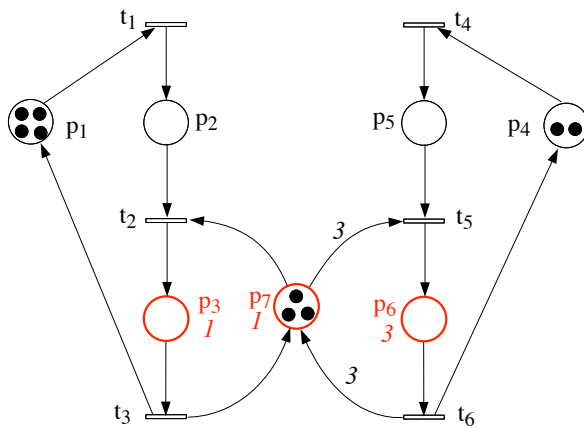


FIG. 27 – Réseau de Petri

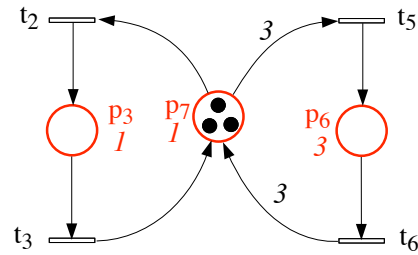


FIG. 28 – p-sous-réseau 3

$p_7$  par 1.

On associe donc des poids  $X_p$  aux places. Dans l'exemple que nous considérons, nous avons :  $X_p(p_3) = 1$ ,  $X_p(p_7) = 1$  et  $X_p(p_6) = 3$  (ils sont indiqués sous le nom des places). Les poids des places n'appartenant pas au p-sous-réseau sont égaux à 0. Nous obtenons alors un nouvel invariant de place vérifié pour tout  $M \in \mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0)$  :

$$\begin{aligned} X_p(p_3) \cdot M(p_3) + X_p(p_6) \cdot M(p_6) + X_p(p_7) \cdot M(p_7) &= 1 \cdot M(p_3) + 3 \cdot M(p_6) + 1 \cdot M(p_7) \\ &= 1 \cdot M_0(p_3) + 3 \cdot M_0(p_6) + 1 \cdot M_0(p_7) \\ &= 3 \end{aligned} \quad (11)$$

### 5.2.2 Signification des composantes conservatives et des invariants de places

Si nous revenons à la spécification du problème des lecteurs et des écrivains (voir le *Cas 1*), nous remarquons que les 3 composantes conservatives que nous venons de mettre en évidence sont en fait les trois réseaux de Petri décrivant les trois entités du système :

- les 4 tâches lecteurs,
- les 2 tâches écrivains,
- le mécanisme d'allocation par droits d'accès.

Les tâches lecteurs (respectivement écrivains) peuvent être dans l'un des trois états : *suspendue*, *en attente* ou *en exécution* représentés par les places  $p_1$ ,  $p_2$  ou  $p_3$  (respectivement  $p_4$ ,  $p_5$  ou  $p_6$ ). Par exemple  $M(p_1)$  représente le nombre de tâches lecteurs suspendues dans la situation courante décrite par le marquage  $M$ .

Les invariants 9 et 10 prouvent donc formellement qu'il y a 4 tâches lecteurs (respectivement 2 tâches écrivains) et qu'elles se répartissent entre les 3 états *suspendue*, *en attente* ou *en exécution* (ne pas oublier que les  $M(p_i)$  sont des entiers positifs ou nuls).

L'invariant 11 relie le nombre des tâches lecteurs ( $M(p_3)$ ) et écrivains ( $M(p_6)$ ) en exécution, c'est-à-dire utilisant la ressource. Écrit sous la forme :

$$M(p_3) + 3 \cdot M(p_6) \leq 3 \quad (12)$$

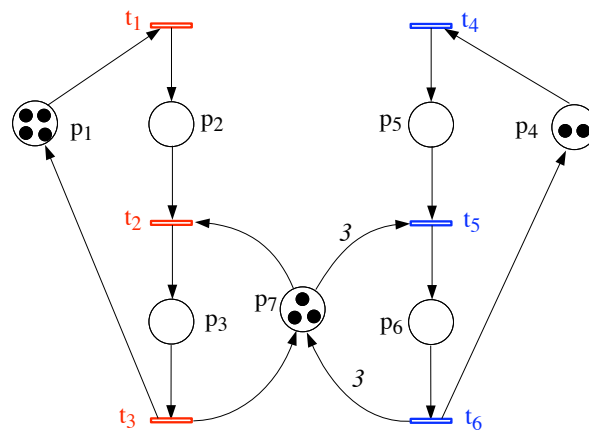


FIG. 29 – Réseau de Petri

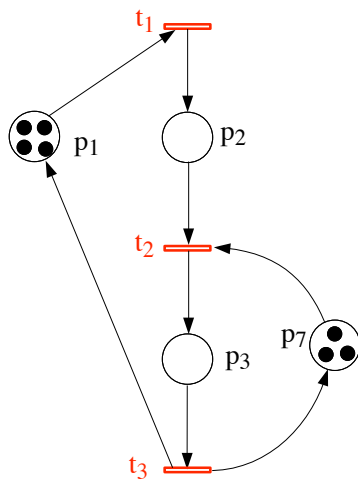


FIG. 30 – t-sous-réseau 1

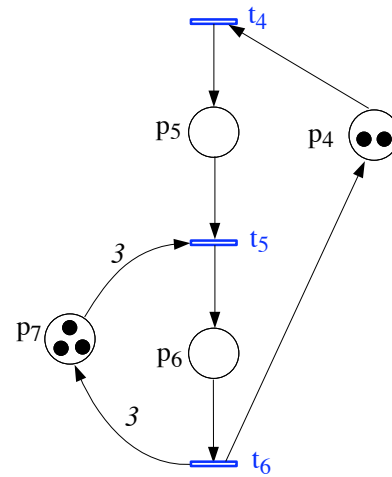


FIG. 31 – t-sous-réseau 2

on voit <sup>6</sup> que le nombre de lecteurs accédant simultanément à la ressource ( $M(p_3)$ ) est limité à 3, le nombre d'écrivains accédant simultanément à la ressource ( $M(p_6)$ ) est limité à 1, et il ne peut pas y avoir simultanément un lecteur et un écrivain accédant à la ressource. En effet si  $M(p_1)$  et  $M(p_6)$  sont simultanément égaux à 1  $M(p_1) + M(p_6)$  vaut 4. On vérifie ainsi que les contraintes du problème sont bien vérifiées.

### 5.2.3 Composantes répétitives stationnaires et invariants de transitions

Considérons le réseau de Petri de la figure 29. Deux sous ensembles de transitions ont été repérés :

- en rouge les transitions  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ ,
- en bleu les transitions  $t_4$ ,  $t_5$  et  $t_6$ .

<sup>6</sup>Encore une fois ne pas oublier que les contenus en jetons des places sont des entiers positifs ou nuls

Les t-sous-réseaux engendrés par ces sous-ensembles de places sont représentés sur les figures 30 et 31.

Ces t-sous-réseaux ne sont pas quelconques. Nous pouvons remarquer que chacune de leurs places n'ont qu'un arc en entrée et un arc en sortie. Si on franchit une fois la transition d'entrée d'une place, son marquage est incrémenté de 1. Si on franchit une fois sa transition de sortie, son marquage est décrémenté de 1. Cela veut dire que si on trouve une séquence de franchissements de transitions qui franchit exactement une fois chacune des transitions, le marquage final sera identique au marquage initial.

C'est pourquoi les t-sous-réseaux de cette forme sont appelés des *composantes répétitives stationnaires* et les séquences cycliques effectivement franchissables sont appelées des *invariants de transitions*.

#### 5.2.4 Signification des composantes répétitives stationnaires et des invariants de transitions

Dans un t-sous-réseau, toutes les places d'entrée et de sortie (dans le réseau) d'une transition appartiennent au sous réseau <sup>7</sup>. Si on considère la restriction aux places d'un t-sous-réseau d'un marquage accessible, on peut vérifier si une séquence du sous réseau est franchissable ou non en ne raisonnant que dans le t-sous-réseau.

Dans l'exemple qui nous intéresse, on peut franchir les transitions des t-sous-réseaux 30 et 31 depuis le marquage initial. Dans le premier cas on obtient la séquence  $(t_1 ; t_2 ; t_3)$ . Dans le second cas on obtient la séquence  $(t_4 ; t_5 ; t_6)$ .

Ces séquences correspondent aux comportements des deux objets principaux impliqués : les lecteurs et les écrivains. Tout comportement cyclique du système sera en fait une composition (par entrelacement ou concaténation) de ces deux comportements de base.

### 5.3 Définition formelle des composantes conservatives et des invariants de places

#### 5.3.1 Définition

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que certains p-sous-réseaux et t-sous-réseaux étaient très intéressants pour analyser et vérifier le comportement de systèmes à événements discrets modélisés par un réseau de Petri. La question qui se pose est de savoir comment on va trouver les sous-ensembles de places définissant les *bons* p-sous-réseaux et les sous-ensembles de transitions définissant les *bons* t-sous-réseaux. La matrice d'incidence  $C$  <sup>8</sup> et l'algèbre linéaire nous apportent la réponse.

**Définition 12 (Support d'un vecteur)** Soit  $X$  un vecteur d'entiers positifs, négatifs ou nuls dont les composantes sont associées aux éléments  $e_i$  d'un ensemble  $E$ . Le support de  $X$  est le sous-ensemble  $E_X$  de  $E$  tel que  $e_i$  appartient à  $E_X$  si et seulement si  $X(e_i) \neq 0$

<sup>7</sup>Ce n'est pas le cas pour les p-sous-réseaux, voir par exemple la transition  $t_2$  dans le p-sous-réseau de la figure 25.

<sup>8</sup>Rappelons que  $C = Pre - Post$

**Notation :** Notons  $X^T$  le vecteur ligne transposé d'un vecteur  $X$ .

**Définition 13 (Composante conservative)** Soit un réseau de Petri  $\mathcal{R} = \langle P, T, Pre, Post \rangle$  et soit  $C = (Pre - Post)$  la matrice d'incidence. Soit  $X_p$  un vecteur solution de l'équation  $X_p^T \cdot C = 0$  et dont les composantes sont des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls<sup>9</sup>. Le  $p$ -sous-réseau de Petri généré par le support de  $X_p$  est une composante conservative.

On peut remarquer que dans cette définition, seule la structure du réseau de Petri est impliquée. Le marquage initial n'intervient pas.

**Définition 14 (Invariant de places)** Soit un réseau de Petri  $\mathcal{R} = \langle P, T, Pre, Post \rangle$  et soit  $C = (Pre - Post)$  la matrice d'incidence. Soit  $X_p$  un vecteur solution de l'équation  $X_p^T \cdot C = 0$  et dont les composantes sont des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls. Soit  $\mathcal{R}_M = \langle \mathcal{R}, M_0 \rangle$  un réseau marqué obtenu à partir de  $\mathcal{R}$ . L'équation suivante est appelée invariant de places de  $\mathcal{R}_M$  :

$$X_p^T \cdot M = X_p^T \cdot M_0 \quad (13)$$

Tout d'abord, pourquoi cette équation est-elle vérifiée ? Cela découle directement de l'équation fondamentale. Rappelons que cette équation a la forme :

$$M = M_0 + C \cdot \bar{s} \quad (14)$$

où  $M$  est un marquage accessible quelconque et  $\bar{s}$  le vecteur caractéristique d'une séquence menant du marquage initial  $M_0$  à  $M$ . Si on multiplie à gauche par le vecteur ligne  $X_p^T$ , on obtient :

$$X_p^T \cdot M = X_p^T \cdot M_0 + X_p^T \cdot C \cdot \bar{s} \quad (15)$$

et si  $X_p^T$  est un vecteur d'entiers solutions de  $X_p^T \cdot C = 0$ , on trouve bien l'équation 13.

### 5.3.2 Exemple

Considérons le réseau de Petri de la figure 24. Le produit  $X_p^T \cdot C$  a la forme :

$$\begin{bmatrix} X_p(p_1) & X_p(p_2) & X_p(p_3) & X_p(p_4) & X_p(p_5) & X_p(p_6) & X_p(p_7) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Cela donne le système d'équations  $X_p^T \cdot C = 0$  suivant :

$$\begin{cases} -X_p(p_1) + X_p(p_2) = 0 \\ -X_p(p_2) + X_p(p_3) - X_p(p_7) = 0 \\ X_p(p_1) - X_p(p_3) + X_p(p_7) = 0 \\ -X_p(p_4) + X_p(p_5) = 0 \\ -X_p(p_5) + X_p(p_6) - 3 \cdot X_p(p_7) = 0 \\ X_p(p_4) - X_p(p_6) + 3 \cdot X_p(p_7) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

<sup>9</sup>Le vecteur  $X_p$  est nécessairement de dimension  $n_p$  le nombre des places

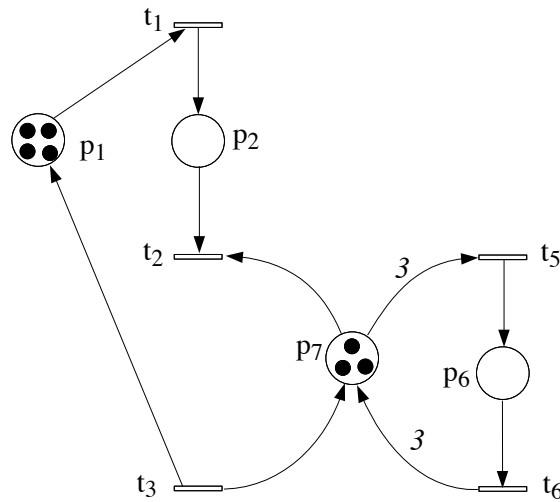


FIG. 32 – Composante conservative

Parmi les solutions, nous avons, par exemple, les vecteurs suivants :

$$X_p^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X_p^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Le support du vecteur  $X_p^1$  est formé du sous-ensemble des places  $\{p_1, p_2, p_3\}$ . La composante conservative (le p-sous-réseau correspondant) est celle de la figure 25. L'invariant de places associé (pour le marquage initial de la figure) est donné par l'équation 9.

Le support du vecteur  $X_p^2$  est formé du sous-ensemble des places  $\{p_1, p_2, p_6, p_7\}$ . La composante conservative est le sous-réseau de la figure 32. L'invariant de places associé est donné par l'équation suivante :

$$-M(p_1) - M(p_2) + 3.M(p_6) + M(p_7) = -1 \quad (18)$$

La composante conservative de la figure 32 ne correspond pas à l'une des classes d'objets que l'on a utilisé pour définir le système. La transition  $t_2$  a deux arcs entrant et la transition  $t_3$  deux arcs sortants. Il n'y a pas conservation globale du nombre des jetons, si les 3 lecteurs sont en train de s'exécuter ( $M(p_3) = 3$ ), on aura, dans cette composante, un seul jeton qui sera localisé soit dans  $p_1$  soit dans  $p_2$ . Tout cela provient du fait que le vecteur  $X_p^2$  a des composantes négatives. Nous verrons par la suite que certaines composantes conservatives avec certains poids négatifs peuvent avoir une signification intéressante, mais souvent les concepteurs ne sont intéressés que par les solutions positives.

### 5.3.3 Composante conservative positive

**Définition 15 (Composante conservative positive)** Soit un réseau de Petri

$\mathcal{R} = \langle P, T, Pre, Post \rangle$  de matrice d'incidence  $C$ . Soit  $X_p$  un vecteur d'entiers positifs ou nuls solution de l'équation  $X_p^T \cdot C = 0$ . Le  $p$ -sous-réseau de Petri généré par le support de  $X_p$  est une composante conservative positive.

Le vecteur  $X_p^1$  de l'équation 17 correspond bien à une composante conservative positive, mais pas le vecteur  $X_p^2$ .

**Propriété 4** Soit un réseau de Petri  $\mathcal{R} = \langle P, T, Pre, Post \rangle$ . Soit une composante conservative positive définie par un vecteur  $X_p$ . Toutes les places du  $p$ -sous-réseau correspondant à cette composante sont  $k$ -bornées quel que soit le marquage initial de  $\mathcal{R}$ .

Le nombre de places est  $n_p$ . Soit un marquage initial quelconque  $M_0$ . L'invariant de places associé à cette composante s'écrit <sup>10</sup> :

$$\sum_{i=1, n_p} X_p(p_i) \cdot M(p_i) = \sum_{i=1, n_p} X_p(p_i) \cdot M_0(p_i) \quad (19)$$

Soit  $p_j$  une place quelconque de la composante (c'est-à-dire du support de  $X_p$ ), cela veut dire que  $X_p(p_j)$  est non nul. L'équation 19 s'écrit

$$M(p_j) + \frac{\sum_{i=1, n_p; i \neq j} X_p(p_i) \cdot M(p_i)}{X_p(p_j)} = \frac{\sum_{i=1, n_p} X_p(p_i) \cdot M_0(p_i)}{X_p(p_j)} \quad (20)$$

Comme les composantes de  $M$  et de  $X_p$  sont des nombres positifs ou nuls, nous avons :

$$\frac{\sum_{i=1, n_p; i \neq j} X_p(p_i) \cdot M(p_i)}{X_p(p_j)} \geq 0 \quad (21)$$

et donc

$$M(p_j) \leq \frac{\sum_{i=1, n_p} X_p(p_i) \cdot M_0(p_i)}{X_p(p_j)} \quad (22)$$

En conséquence le contenu en jetons de  $M(p_j)$  ne peut pas croître indéfiniment et la place  $p_j$  est  $k$ -bornée en prenant pour  $k$  le plus grand entier inférieur ou égal à

$$\frac{\sum_{i=1, n_p} X_p(p_i) \cdot M_0(p_i)}{X_p(p_j)} \quad (23)$$

Si l'on considère le vecteur  $X_p^1$  (equation 17), il permet de déduire que les places  $p_1, p_2$  et  $p_3$  sont  $k$ -bornées quel que soit le marquage initial. Pour le marquage représenté sur la figure 24, nous avons :

$$M(p_1) \leq 4 \quad M(p_2) \leq 4 \quad M(p_3) \leq 4 \quad (24)$$

**Remarque :** Soulignons le fait que l'existence de la borne ne dépend pas du marquage initial, seule la valeur de la borne en dépend.

<sup>10</sup>Le produit  $X_p^T \cdot M$  est un produit scalaire



**Définition 16 (Couverture de composantes conservatives positives)** Soit un réseau de Petri  $\mathcal{R}$ . Soit  $\mathcal{X}_p$  un ensemble de composantes conservatives positives tel que pour toute place  $p$  il existe au moins une composante  $X_p$  de  $\mathcal{X}_p$  telle que  $p$  appartienne au support de  $X_p$ . L'ensemble  $\mathcal{X}_p$  est appelé une couverture de composantes conservatives positives.

Pour le réseau de Petri de la figure 24, les composantes conservatives positives des figures 25, 26 et 28 forment une couverture de composantes conservatives positives.

**Propriété 5** Soit un réseau de Petri  $\mathcal{R}$  possédant une couverture de composante conservatives positives. Ce réseau est  $k$ -borné pour tout marquage initial.

En effet toutes ses places sont  $k$ -bornées quel que soit le marquage initial. Seul la valeur de la borne change lorsque l'on change de marquage initial. Le réseau est donc *structurellement*  $k$ -borné.

Le réseau de Petri de la figure 24 est donc  $k$ -borné quel que soit son marquage initial.

## 5.4 Définition formelle des composantes répétitives et des invariants de transitions

### 5.4.1 Définition

Nous venons de voir la définition formelle des composantes conservatives qui sont les *bons* p-sous-réseaux, c'est-à-dire ceux permettant de raisonner sur les réseaux de Petri pour montrer des propriétés spécifiques. Nous allons maintenant aborder les t-sous-réseaux et les composantes répétitives stationnaires.

**Définition 17 (Composante répétitive stationnaire)** Soit un réseau de Petri  $\mathcal{R} = \langle P, T, Pre, Post \rangle$  et soit  $C = (Pre - Post)$  la matrice d'incidence. Soit  $X_t$  un vecteur solution de l'équation  $C.X_t = 0$  et dont les composantes sont des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls<sup>11</sup>. Le t-sous-réseau de Petri généré par le support de  $X_t$  est une composante répétitive stationnaire.

Comme dans le cas des composantes conservatives, les composantes répétitives stationnaires les plus remarquables sont celles qui correspondent à des vecteurs  $X_t$  dont les composantes sont positives ou nulles (pas de valeurs négatives).

**Définition 18 (Composante répétitive stationnaire positive)** Soit un réseau de Petri  $\mathcal{R} = \langle P, T, Pre, Post \rangle$  de matrice d'incidence  $C$ . Soit  $X_t$  un vecteur d'entiers positifs ou nuls solution de l'équation  $C.X_t = 0$ . Le t-sous-réseau de Petri généré par le support de  $X_t$  est une composante conservative positive.

Les vecteurs  $X_t$  définissant des composantes répétitives stationnaires *positives* peuvent être interprétés comme des vecteurs caractéristiques puisque leurs dimensions sont  $n_t$ , le nombre de

<sup>11</sup>La dimension de  $X_t$  est nécessairement  $n_t$  le nombre de transitions.

transitions et qu'il s'agit de vecteurs d'entiers positifs ou nuls. Si l'on considère l'équation fondamentale entre deux marquages  $M_1$  et  $M_2$  quelconques, elle a la forme :

$$M_1 = M_2 + C.\bar{s} \quad (25)$$

Si l'on trouve une séquence  $s$  franchissable à partir du marquage  $M_1$  et dont le vecteur caractéristique est  $\bar{s} = X_t$ , alors comme  $C.X_t = 0$ , nous avons  $M_2 = M_1$ . Cela veut dire que le marquage atteint après le franchissement de  $s$  est égal au marquage de départ et donc que la séquence  $s$  peut être répétée indéfiniment. Il s'agit donc d'un *mode de fonctionnement de base* du système.

**Définition 19 (Invariant de transitions)** Soit un réseau de Petri marqué  $\langle \mathcal{R}, M_0 \rangle$ . Soit  $X_t$  un vecteur solution de l'équation  $C.X_t = 0$  et dont les composantes sont des nombres entiers positifs, ou nuls. Soit  $s$  une séquence de franchissements de transitions franchissable à partir d'un marquage  $M$  de l'ensemble des marquages accessibles  $\mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0)$  avec  $\bar{s} = X_t$ . La séquence  $s$  est appelée *invariant de transitions*.

On voit que ces invariants sont plus difficiles à trouver que les invariants de places. En effet, alors que l'existence d'un invariant de place ne dépend pas du marquage initial (seule la valeur de la constante change), dans le cas des invariants de transitions, non seulement il faut une solution positive, mais en plus il faut, pour un marquage initial donné, choisir un marquage accessible et trouver une séquence effectivement franchissable. L'algèbre linéaire ne donne qu'un vecteur caractéristique, elle ne donne ni le marquage de départ, ni l'ordre des franchissements.

### 5.4.2 Exemple

Considérons le réseau de Petri de la figure 24. Le produit  $C.X_t$  a la forme :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t(t_1) \\ X_t(t_2) \\ X_t(t_3) \\ X_t(t_4) \\ X_t(t_5) \\ X_t(t_6) \end{bmatrix}$$

Cela donne le système d'équations  $C.X_t = 0$  suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -X_t(t_1) + X_t(t_3) & = & 0 \\ X_t(t_1) - X_t(t_2) & = & 0 \\ X_t(t_2) - X_t(t_3) & = & 0 \\ -X_t(t_4) + X_t(t_6) & = & 0 \\ X_t(t_4) - X_t(t_5) & = & 0 \\ X_t(t_5) - X_t(t_6) & = & 0 \\ -X_t(t_2) + X_t(t_3) - 3.X_t(t_5) + 3.X_t(t_7) & = & 0 \end{array} \right. \quad (26)$$

On peut d'abord remarquer que les systèmes d'équations 16 et 26 sont bien différents. De façon évidente les vecteurs suivants sont solutions de 26.

$$X_t^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X_t^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Les vecteurs  $X_t^1$  et  $X_t^2$  définissent les deux composantes répétitives stationnaires des figures 30 et 31. Il s'agit de composantes répétitives stationnaires *positives*. À partir du marquage initial (qui est un marquage accessible particulier) on peut franchir les deux séquences  $s_1 = (t_1; t_2; t_3)$  et  $s_2 = (t_4; t_5; t_6)$  et comme  $\bar{s}_1 = X_t^1$  et  $\bar{s}_2 = X_t^2$ ,  $s_1$  et  $s_2$  sont deux invariants de transitions pour le réseau marqué de la figure 24.

## 5.5 Remarque finale

Les composantes sont associées aux vecteurs gauches (composantes conservatives) et droits (composantes répétitives stationnaires) permettant d'annuler la matrice d'incidence  $C$ . La symétrie n'est toutefois pas complète et il est plus facile d'obtenir les invariants de places que les invariants de transitions.

Alors que si l'on arrive à recouvrir le réseau de Petri par des composantes conservatives positives on peut en déduire un résultat fort : le réseau est  $k$ -borné pour tout marquage initial, recouvrir un réseau de Petri par des invariants de transitions ne prouve ni qu'il est vivant, ni qu'il est réinitialisable.

Le réseau de Petri de la figure 12 est un exemple de réseau de Petri recouvert par un invariant de transitions : la séquence  $(t_1; t_2; t_3)$  franchissable à partir du marquage initial. Et pourtant il n'est pas vivant et présente un blocage mortel.

Le réseau de Petri de la figure 20 est un exemple de réseau de Petri recouvert par un invariant de transitions : la séquence  $(t_2; t_1; t_3)$  franchissable à partir du marquage accessible  $(p_2 \otimes p_4)$  et pourtant il n'est pas réinitialisable.

La seule chose que l'on peut affirmer est que si le réseau de Petri est  $k$ -borné et vivant alors comme le nombre de marquages accessibles est fini, il possède nécessairement un invariant de transition passant par toutes les transitions.

## 6 Conclusion

Nous avons introduit, dans ce chapitre les trois “bonnes” propriétés classiques :

- réseau marqué  $k$ -borné,
- réseau marqué vivant,
- réseau marqué réinitialisable.

Elles doivent être vérifiées par tout réseau de Petri représentant un système critique implémentable.

Puis nous avons introduit les composantes conservatives et les invariants de places ainsi que les composantes répétitives stationnaires et les invariants de transitions. Ces invariants servent à montrer des propriétés spécifiques, mais de plus les invariants de places peuvent permettre de montrer qu’un réseau de Petri est  $k$ -borné.

Nous pouvons également remarquer que dans la théorie des réseaux de Petri il y a toujours un double aspect : les états et les événements. Dans le premier aspect on trouve les propriétés impliquant les places et les marquages. C’est le cas de la propriété *réseau marqué  $k$ -borné* ou des invariants de places. Dans le deuxième aspect on trouve la propriété *réseau marqué vivant* et les invariants de transitions. Toutefois les relations entre ces deux aspects ne sont pas simples et il est plus simple de travailler avec les invariants de places qu’avec les invariants de transitions.

Le chapitre suivant va maintenant montrer comment on peut exploiter ces propriétés pour vérifier des systèmes critiques et prouver des propriétés.