# 10 Tests de Conformité

jeudi 1 décembre 2022

1. Contexte des tests de conformité

-1- $\begin{cases} X\sim N(\mu,\sigma^2), avec \begin{cases} \sigma^2\ connu\ (chap08) \\ \sigma\ inconnue\ (section\ 2) \end{cases} \\ X\sim loi\ quelconque\ (section\ 6) \begin{cases} E(X)=\mu, \begin{cases} \sigma^2\ connu \\ \sigma\ inconnue \end{cases} \\ m = médiance\ de\ X \end{cases} \end{cases}$

2. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, *test sur* $\mu$

-1- Test de Student (test sur $\mu$ avec $\sigma^2$ inconnu)

1- Test du rapport de vraisemblance (RV)

1> $\Lambda(x_i) = \dfrac{L(\hat{\mu}_0,\sigma^2;x_i)}{L(\mu,\sigma^2;x_i)}$

2> Numérateur

a) $L(\hat{\mu}_0,\sigma^2;x_i) = L(\hat{\mu}_0,\sigma_0^2;x_i), \hat{\mu}_0 = \mu_0, \hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}\sum(X_i-\mu_0)^2$

3> Dénominateur quand $\bar{X} > \mu_0$

a) $L(\mu,\sigma^2;x_i) = L(\bar{X},s^2;x_i)$

b) $\Lambda(x_i) = \dfrac{L(\hat{\mu}_0,\sigma^2;x_i)}{L(\bar{X},S^2;x_i)}$

4> Dénominateur quand $\bar{X} > \mu_0$

a) $L(\mu,\sigma^2;x_i) = L(\mu_0,\sigma_0^2;x_i)$

b) $\Lambda(x_i) = 1$

2- $\mathrm{W} = \{\Lambda(x_i) < c\} \cap \{\bar{X} < \mu_0\}$

1> $\Lambda(x_i) = \left(\dfrac{1}{1+\frac{T^2}{n-1}}\right)^{\frac{n}{2}}, T = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S^*} \sim T_{n-1}$, décroissante

3. RC du test du Student

-1- Test unilatéral : $H_0 = \{\mu = \mu_0\}\ contre\ H_1 = \{\mu < \mu_0\}$

1- $W = \{t^2 > k^2\} \cap \{\bar{x} < \mu_0\} \Rightarrow W = \{t < -t_{n-1;1-\alpha^*}\}$

-2- Test unilatéral : $H_0 = \{\mu = \mu_0\}\ contre\ H_1 = \{\mu > \mu_0\}$

1- $W = \{t > t_{n-1;1-\alpha^*}\}$

-3- Test bilatéral : $H_0 = \{\mu = \mu_0\}\ contre\ H_1 = \{\mu \neq \mu_0\}$

1- $W = \left\{|t| > t_{n-1;1-\frac{\alpha^*}{2}}\right\}$

4. Puissance du test de Student

-1- La fonction puissance

1- $\pi_\mu(W) = \begin{cases} P_\mu(T < t_{n-1;1-\alpha^*}), H_1 : \mu < \mu_0 \\ P(T > t_{n-1;1-\alpha^*}), H_1 : \mu > \mu_0 \\ 2P\left(T < t_{n-1;1-\frac{\alpha^*}{2}}\right), H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$

1> Paramètre de décentrage égal à $\delta = \frac{\sqrt{n}(\mu-\mu_0)}{\sigma}$

5. Lien entre IC et RC

-1- $H_0 = \{\mu = \mu_0\}\ contre\ H_1 = \{\mu \neq \mu_0\}$

-2- $IC_{1-\alpha^*}(\mu) = \bar{x} \pm \frac{t_{n-1,1-\alpha^*}}{\frac{2S^*}{\sqrt{n}}} \Leftarrow P_\mu\left(\left|\frac{(\bar{X}-\mu)}{\frac{S^*}{\sqrt{n}}}\right| \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha^*}{2}}\right) = 1-\alpha^*$

-3- $W_{\mu_0,\alpha^*} = \left\{(x_i) \mid \left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S^*}{\sqrt{n}}}\right| > t_{n-1,1-\frac{\alpha^*}{2}}\right\} \Leftarrow P_\mu\left(\left|\frac{(\bar{X}-\mu_0)}{\frac{S^*}{\sqrt{n}}}\right| > t_{n-1,1-\frac{\alpha^*}{2}}\right) = \alpha^*$

-4- $\mu_0 \in IC(\mu) \Leftrightarrow (x_i) \notin W_{\mu_0,\alpha^*}$

-5- Test de Student dans le modèle de régression linéaire Gaussien

1- Modélisation

1> $Y = a + bx + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$

6. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, *test sur* $\sigma^2$

-1- $\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

-2- $IC_{1-\alpha^*} = \left[\frac{(n-1)S^{*2}}{\chi_{n-1;1-\frac{\alpha^*}{2}}}, \frac{(n-1)S^{*2}}{\chi_{n-1;\frac{\alpha^*}{2}}}\right]$

-3- $H_0 = \{\sigma^2 = \sigma_0^2\}\ contre\ H_1 = \{\sigma^2 \neq \sigma_0^2\}$

1- $W = \left\{\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1;\frac{\alpha^*}{2}}\right\} \cup \left\{\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha^*}{2}}\right\}$

-4- $H_0 = \{\sigma^2 = \sigma_0^2\}\ contre\ H_1 = \{\sigma^2 > \sigma_0^2\}$

1- $W = \left\{\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1;1-\alpha^*}\right\}$

-5- $H_0 = \{\sigma^2 = \sigma_0^2\}\ contre\ H_1 = \{\sigma^2 < \sigma_0^2\}$

1- $W = \left\{\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1;\alpha^*}\right\}$

7. $Y \sim B(n,p)$, *test sur p*

-1- $Loi : \begin{cases} exacte, Y \sim B(n,p_0) \\ approchée, Y \sim_{app} N\left(np_0, np_0(1-p_0)\right), tq\ np_0 > 5, n(1-p_0) > 5 \end{cases}$

-2- $H_0 = \{p = p_0\}, contre\ H_1 = \{p > p_0\}$

1- $W = \{y > c\}, \begin{cases} exacte, P_{p_0}(Y > c) = \alpha^* \\ approché, c \approx np_0 - 0.5 + u_{1-\alpha^*}\sqrt{np_0(1-p_0)} \end{cases}$

2- $\text{degré de signification } \hat{\alpha} = \begin{cases} \text{exacte}, P_{p_0}(Y \geq y) \\ \text{approché}, \approx 1 - \phi\left(\frac{y - np_0 - 0.5}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) \end{cases}$

-3- $H_0 = \{p = p_0\}, \text{contre } H_1 = \{p > p_0\}$

1- $W = \{|y - np_0| > c\}, \begin{cases} \text{exacte}, P_{p_0}(Y > np_0 - c) = P_{p_0}(Y > np_0 - c) = \frac{\alpha^*}{2} \\ \text{approché}, c \approx np_0 - 0.5 + u_{1-\alpha^*}\sqrt{np_0(1-p_0)} \end{cases}$

2- $\text{degré de signification } \hat{\alpha} = \begin{cases} \text{exacte}, P_{p_0}(|Y - np_0| \geq |y - np_0|) \\ \text{approché}, \approx 2\phi\left(\frac{-|y - np_0| + 0.5}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) \end{cases}$

8. Non Gaussien, test sur 1 tendance centrale

-1- Test sur l'espérance

1- $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0,1)$

-2- Test du signe

1- $X_i \sim^{iid} X \text{ de loi } F_X \text{ inconnue}, X_i \text{ continue}$

2- La médiane m de la loi de X, tq $F_X(m) = \frac{1}{2}$

3- On pose Z = $\sum 1_{X_i < m_0} \Rightarrow Z \sim B(n,p), p = P(X \leq m_0)$

4- $H_0 = \{m = m_0\} \text{ contre } H_1 = \{m < m_0\} \Leftrightarrow H_0 = \left\{p = \frac{1}{2}\right\} \text{ contre } H_1 = \left\{p > \frac{1}{2}\right\}$