02 Eléments de probabilité

mardi 13 septembre 2022

1. Expérience aléatoire

-1- Expérience aléatoire ε

1- Ensemble fondamental/univers Ω

2- $\mathcal{A} \subseteq \{V \subseteq \Omega\}$ Tribu sur Ω, si $\begin{cases} \emptyset \in \mathcal{A} \\ A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A} \\ \exists i \in I \text{ ensemble dénombrale}, A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A} \end{cases}$

3- Espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}), \mathcal{A} \subseteq \{V \subseteq \Omega\}$

4- Distribution/loi de probabilité P: $\begin{cases} \mathcal{A} \to [0,1] \\ A \to P(A) \end{cases}$

5- Événement $A \in \mathcal{A}$

6- Espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$: $\forall A \in \mathcal{A}, P(A) \in [0,1]$

1> α-additivité : $P\left(\cup_{i \in I} A_i\right) = \sum_i P\left(A_i\right)$

7- Fréquence statistique d'un événement A

1> Nombre de réalisation de A : n_A

-2- Probabilité d'une distribution P de X V.A.R.

2. Variable aléatoire réelle (V.A.R.)

-1- Variable aléatoire réelle (V.A.R.)

1- X est discrète : V_X: $X(\Omega)$ fini ou dénombrable

2- X est continue : V_X infini non dénombrable

3- Lettre Majuscule X réservée aux variables aléatoires

4- Lettre Minuscule X réservée à la réalisation de la variable aléatoire (résulta observé ou spécifique)

-2- Différentes caractérisations de P_X associée à X

1- Fonction de répartition de X : $F_X(x) = P(X \leq x)$

1> $P_X([a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$

2- Fonction de masse (X discrète) : p_X : $\begin{cases} P_X(\{x\}) = P(X = x), x \in V_x \\ 0, x \notin V_x \end{cases}$

3- Fonction de densité (X continue) : f_x

1> $\forall B, P_X(B) = \int_B f_X(t)dt = F_X(constant)$

3. Lois usuelles

-1- Lois discrètes usuelles

1- Loi discrète uniforme

2- Loi de Binomial $B(n,p)$

1> $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

2> $E(K) = np, Var(K) = np(1-p)$

3> Bernoulli : $p(k) = B(1,p)$

3- Loi de Poisson $P(\lambda)$

1> $p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \forall k \in V_X$

2> $E = \lambda, Var = \lambda$

3> Cette loi apparait comme la limite d'une loi Binomiale $B(n,p_n)$ avec $np_n \xrightarrow{n\to+\infty} \lambda$

-2- Lois continues usuelles

1- Loi discrète uniforme

2- loi normale/loi Gaussienne/loi de Laplace-Gauss (Loi normale standard/loi normale centrée réduite)

1> $f_{Normal(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

2> $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

3> Si $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ alors $Y = \frac{(X-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$

4> Loi normale centrée réduite tabulée (pour un grand nombre de x ≥ 0, $\varphi(x)$ est tabulée)

3- Loi exponentielle

1> $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

2> $E(x) = \frac{1}{\lambda}, Var(x) = \frac{1}{\lambda^2}$

4. Indicateurs num. associés à X

-1- Indicateurs de la loi de distribution de X : quantités qui fournissent des informations partielles sur la loi de X (si deux V.A.R. ont même valeur pour un indicateur donné, cela ne signifie pas qu'elles ont la même loi.)

-2- Moment d'ordre 1

1- $E(X) = \begin{cases} \sum_{x \in V_X} x p_X(x) \\ \int_R x f_X(x) dx \end{cases}$

2- $E(\varphi(X)) = \begin{cases} \sum_{x \in V_X} \varphi(X) p_X(x) \\ \int_R \varphi(X) f_X(x) dx \end{cases}$

-3- Variance/Moment centré d'ordre 2 : indicateur de dispersion

1- $\mathrm{Var}(X) = E\left(X - E(X)\right)^2 = E(X^2) - E^2(X)$

2- Écart-type $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

3- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : si Var(X) existe,

1> $\forall \gamma > 0, P(|X - E(X)| > \gamma) \leq \dfrac{Var(X)}{\gamma^2}$

-4- Moment d'ordre k

1- $E(X^k) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in V_X} x^k p_X(x) \\ \displaystyle\int_{V_X} x^k f_X(x)dx \end{cases}$

2- Moment centré d'ordre k

1> $E(X^k) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in V_X} \left(x - E(X)\right)^k p_X(x) \\ \displaystyle\int_{V_X} \left(x - E(X)\right)^k f_X(x)dx \end{cases}$

-5- Fractile théorique

1- Fractile/quantile d'ordre α, α ∈ [0,1]

1> $f_\alpha = F_X^{-1}(\alpha) \in V_X$

2- Si $X \sim N(0,1)$, alors $u_{1-\alpha} = -u_\alpha$

3- Si $X \sim N(m, \sigma^2)$, alors $f_\alpha = \mu + u_\alpha \sigma$

5. Vector aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d), X: \begin{cases} \Omega \to V_X \subseteq R^d \\ \omega \to (X_1(\omega), \dots, X_d(\omega)) \end{cases}, t.q. \forall B \in \mathcal{B}(R^d), X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

-1- Loi de probabilité de X ou loi jointe, noté P_X définie sur l'espace probabilisable comme l'application :

1- $P_X: \begin{cases} \mathcal{B}(R^d) \to [0,1] \\ B \to P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B\}) \end{cases}$

-2- Fonction de répartition de X : F_X

-3- Fonction de masse de X vecteur aléatoire discret : p_X

-4- Fonction de densité ... continue : f_X

-5- Caractérisations de la loi du vecteur aléatoire X

1- Connaître la loi jointe connaître chaque loi marginale

2- Connaître chaque loi marginale connaître la loi jointe

-6- Covariance : lien linéaire entre les variables

1- $Cox(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2)$

2- $\rho_{X_1,X_2} = \dfrac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{Var(X_2)}} \in [-1,1]$

6. Indépendance (stochastique, vecteur Gaussien随机向量)

-1- Cov(X, Y) = 0

-2- $Var\left(\sum X_i\right) = \sum Var(X_i)$ *indépendantes*

-3- *Si* $X_1, \dots, X_n$ *sont des V.A.R. Gaussiennes Indépendantes telle que* $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, *alors*

1- $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$

-4- Liens entre indépendance et probabilité conditionnelle

1- $p_{(X_1|X_2)}(x_1|x_2) = \dfrac{p_X(x_1,x_2)}{p_{X_2}(x_2)}$

2- $f_{(X_1|X_2)}(x_1|x_2) = \dfrac{f_X(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$

3- Si indépendante $\Leftrightarrow \begin{cases} p_{(X_1|X_2)}(x_1|x_2) = p_{X_1} \\ f_{(X_1|X_2)}(x_1|x_2) = f_{X_1} \end{cases}$