06 Réseaux de Petri

jeudi 13 octobre 2022

1. Réseaux de Petri est un graphe biparti des places et transitions
   - 1- L'intérêt et des réseaux de Petri est de pouvoir construire une vision abstraite d'un système complexe (un modèle de type système à événements discrets) afin de pouvoir analyser son comportement de façon prévisionnelle. Cette analyse peut se faire en réalisant des simulations, mais l'apport principal des réseaux de Petri est qu'il est possible de prouver formellement, ou de vérifier formellement, certaines propriétés de son comportement.
2. Définition $(P, T, F, Pre, Post, M_0, W, K)$
   - 1- P des places (cercles)
   - 2- T des transitions (droite horizontale)
     - 1- $M(s_2) \geq v(s_2, t_2)$
   - 3- Pre : incidence avant
     - 1- $Pre[p,t] = \begin{cases} v(p,t), (p,t) \in P \times T \\ 0, sinon \end{cases}$
   - 4- Post : incidence arrière
     - 1- $Post[p,t] = \begin{cases} v(t,p), (t,p) \in P \times T \\ 0, sinon \end{cases}$
     - 2- À chaque application d'incidence est associée une matrice
   - 5- F définit un ou plusieurs arcs (flèches), $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$
     - 1- En cas de Petri ordinaire, les valeurs $v(s_i, t_j)$ des arcs sont égales 1
   - 6- $M_0 = \begin{pmatrix} M(p_1) \\ \vdots \\ M(p_n) \end{pmatrix}$ marquage initial (vecter de jeton), $M(p)$ le marquage de la place P
   - 7- $W : F \rightarrow \mathbb{N}^+$ appelé ensemble d'arcs primaires
   - 8- $\mathrm{K} : \mathrm{S} \rightarrow \mathbb{N}^+$appelé limite de capacité
3. Matrice d'incidence avant
   - 1- Pré matrix
     - 1-

	T1	T2
P1	*	*
P2	*	*

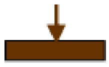
4. Matrice d'incidence arrière
   - 1- Post
5. Matrice d'incidence
   - 1- Complète : $\mathrm{W} = \mathrm{W}^+_{\mathrm{output}} - \mathrm{W}^-_{\mathrm{input}}$

-2- $M_j = M_i + W \cdot S, M\colon marquage, S : transition$

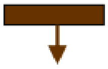
M2= M0 + W*S

1- $$M2 = \begin{array}{c} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{array}{c|cccc} & T1 & T2 & T3 & T4 \\ \hline P1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ P2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ P3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ P4 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ P5 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} * \begin{array}{c} T1 \\ T2 \\ T3 \\ T4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

-3- Une transition-puit

1- 

-4- Une transition-source

1- 

6. Composantes conservatives : si et seulement si il existe un vecteur de pondération平衡 q tel que $P(q) = B\ et\ q^{*}W = 0$

-1- $q^T W s = 0$

-2- Place bornée

1- $\exists i \in N, M(P_i) \leq k$

-3- RdP bornée

1- $\forall i \in N, M(P_i) \leq k$

-4- RdP sauf/binaire

1- $\forall i \in N, M(P_i) \leq k = 1$

7. Vivacité

8. Précondition et postcondition d'un événement

-1-

événements	préconditions	postconditions
a_1	état 11 actif	état 12 actif
a_2	état 21 actif	état 22 actif
b_1	état 12 ET état 31 actifs	état 13 ET état 32 actifs
b_2	état 22 ET état 31 actifs	état 23 ET état 32 actifs
d_1	état 13 ET état 32 actifs	état 11 ET état 31 actifs
d_2	état 23 ET état 32 actifs	état 21 ET état 31 actifs

-2-

événements	préconditions	postconditions
a_1	$n_1 < N_1$	$n_1 = n_1 + 1$ ET F1 : nbe. places libres - 1
a_2	$n_2 < N_2$	$n_2 = n_2 + 1$ ET F2 : nbe. places libres - 1
d_1	(S est L)ET($n_1 \geq 1$)	($n_1 = n_1 - 1$)ET(S est O)
d_2	(S est L)ET($n_2 \geq 1$)	($n_2 = n_2 - 1$)ET(S est O)
f	S est O	S est L

9. Séquence de franchissement répétitive

-1- Répétitive stationnaire不动的

-2- Répétitive croissante

10. Propriétés dépendant non seulement de la structure du réseau de Petri

-1- Modélisation

1- Soit un réseau de Petri marqué $< R, M_0 >$ et soit $A(R; M_0)$ l'ensemble de ses marquages accessibles. Soit k un entier strictement positif.

-2-

1- Ne contient pas de boucles

-3- k-**borné** (**conservatif**保守的, place bornée et RdP bornée)

1- Une place p de ce réseau est k-bornée si et seulement si :

1> $\forall M \in A(R; M_0), max\left(M(p)\right) = k$

2> Si k=1, la place est binaire (**réseau de Petri sauf**)

2-

1> $\forall M_0, \forall M \in A(R; M_0), max\left(M(p)\right) = k$

-4-

1- **Conforme = vivant + sauf**

-5- **Quasi-vivant**

-6- **Ré-initialisable** (avec un état d'accueil)

1- Chaque marquage accessible on peut revenir au marquage initial

2- "Ré-initialisablé" et "borné" sont indépendantes

-7-

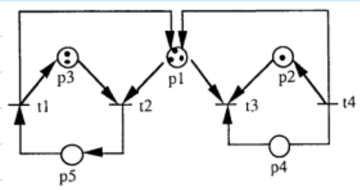
-8-

1- Un conflit effectif est l'existence d'un conflit structurel K, et d'un marquage M, tel que le nombre de jetons dans Pi est inférieur au nombre de transitions de sortie de Pi qui sont validées par M.

-9-

1- Pour tous les marquage M_i accessible de M_0, si et T_j est T_k validées par le marquage M_i, alors T_jT_k est une séquence de franchissement à partir de M_i

2- 对于给定的marquage，任何一个传输的结果都不会改变另一个传的可传输性。

1> 

2> 如果$M(p_1) = 1$，则t_2, t_3不能同时进行

11. Possibilité de décomposer un réseau de Petri

-1- Décomposition

-2-

1- $$\sum_{p_i \in \{P|P^T M=0\}} M(p_i) = c$$

12. Graphe de couverture

-1- Cette procédure fournit soit, une représentation de tous les marquages accessibles d'un RdP borné, soit une représentation de la "couverture" des marquages accessibles d'un RdP non borné, sous la forme d'une arborescence.

13. Méthodes de recherche des propriétés

-1- Algèbre linéaire

-2- Graph des marquages

-3- Réductions

1- Substitution avec un arc

1> 3 conditions

a) Les transitions de sortie de Pi n'ont pas d'autres places d'entrée

b) Il n'existe pas de Tj qui soit à la fois

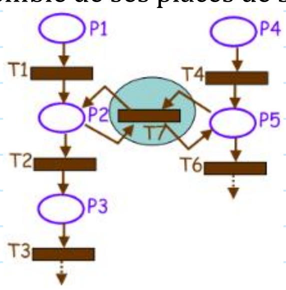
c) Au moins une transition de sortie de Pi n'est pas une transition puits

2- Place implicite

1> La supprimer

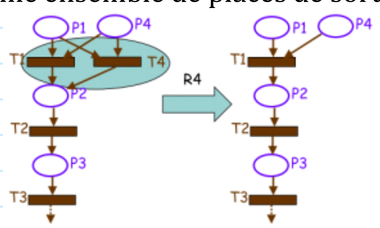
3- Transition neutre

1> Si et seulement si l'ensemble de ses places d'entrées est identique à l'ensemble de ses places de sorties.

a) 

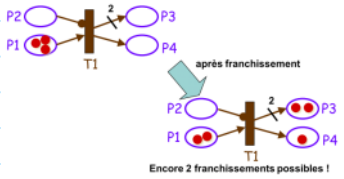
4- Transition identique

1> Si deux transitions T_j et T_k ont le même ensemble de places d'entrées et le même ensemble de places de sorties.

a) 

14. Arcs inhibiteurs

-1- Impossibilité du "test à zéro"

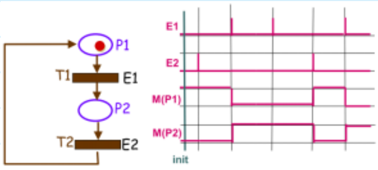
1- 

-2- Priorité

1- Si un RdP à arcs inhibiteurs est borné il peut être transformé en un RdP ordinaire

15. RdP non autonomes

-1- Synchronisés à un événement

1- 

2- **Marquage instable** 不稳定的，可能变化的

1> Si et seulement si la partie ETV(M/e) est vide

a) $ETV\left(\frac{M}{e}\right) = 0 \Leftrightarrow M\ stable$

2> Instable : il existe plusieurs transitions possibles qui peuvent être déclenchées/validées en même temps, mais où aucune d'entre elles n'est prioritaire.

3> En cas d'un marquage instable

a) Lorsque le marquage considéré est instable, seules les transitions validées et qui ne sont associées à aucun événement externe sont déclarées franchissables ! Les transitions validées et associées à des événements externes ne sont pas considérées !

b) Comportement déterministe : il existe une seule transition qui peut être déclenchée

-2- Temporisés

1- P-temporisés

1> **Vitesse maximale**

2> **Vitesse propre**

a) Un RdP P-temporisé fonctionne en vitesse propre si toute marque ne reste dans une place que pendant sa durée d'indisponibilité.

3> Régime stationnaire

a) le fonctionnement à vitesse maximale conduit à un régime périodique (stationnaire) au bout d’un temps fini, pour tout marquage initial tel que le réseau soit borné.

$b)\ M(\tau) = M_0 + Ws(\tau)$

$c)\ \Rightarrow \dfrac{M(\tau) - M_0}{\tau} = \dfrac{\Delta M(\tau)}{\tau} = W\dfrac{s(\tau)}{\tau} = WF(\tau)$

$d)\ WF = 0 \Leftrightarrow W\dfrac{s(\tau)}{\tau} = WF(\tau)$

$e)\ \overline{m}_i \geq d_i W^+(P_i,*)F \Rightarrow \overline{M} \geq DW^+F, D = diag\{d_1, \dots, d_n\}$

$i)$ =, si il fonctionne à vitesse propre

$f)$ Soit q^T un invariant linéaire de base

$i)\ q^T DW^+F \leq q^T M_0$

4> $(M_k, \tau_k) = M^R(\tau_k) + M^{NR}(\tau_k)$ — —*réservé et non réservé*

5>

$a)\ F = \dfrac{N}{T}$

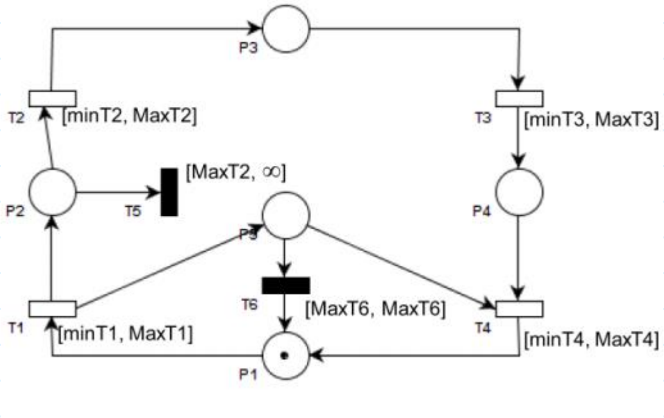
2- T-temporisés

16. Séquence de simulation complète

17. RdP temporels

-1- Pour présenter une fenêtre temporelle

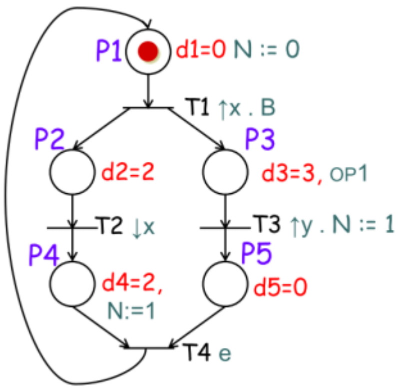
1-



MaxT6 > MaxT2 + MaxT3 + MaxT4

18. Réseaux de Petri Interprétés 被解释型

-1-



19. Réseaux de Petri colorés = RdP + jetons différenciés + sémantique

-1- Fonctions de base

1- Identité

1> $id(c_i) = c_i$

2- Décoloration

1> $\mathrm{dec}(c_i) = \blacksquare$

3- Successeur

1> $succ(c_i) = c_{i+1}$

2> $succ(c_i, c_j) = c_i, c_{j+1}$

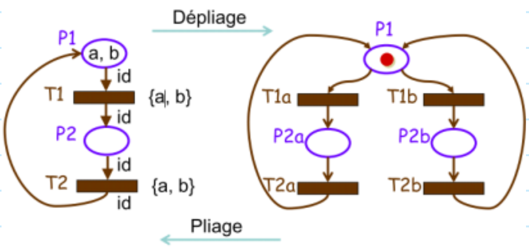
4- Prédécesseur

1> $pre(c_i) = c_{i-1}$

5- Projection (suppression d'une composante)

1> $proj(c_i, c_j) = c_j$

-2- Dépliage/Pliage de RdP colorés

1- 

2- Partager une ressource cycliquement

1> $$W = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -Id & Id \\ Id & -Id \\ -Id & succ \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} Pl \\ Po \\ R \end{array}$$

2>