Invariants de transitions

Invariants de transitions

- Une *séquence répétitive* est une séquence de transitions qui permet de revenir à l'état de départ. Elle est dite *minimale* si aucun de ses préfixes stricts n'est une séquence répétitive.
- L'ensemble des transitions qui apparaîssent dans une séquence répétitive forme une *composante répétitive*.
- Le réseau de Petri est dit répétitif s'il existe une séquence répétitive qui contient toutes les transitions du réseau de Petri.

Équation pour le calcul des composantes répétitives

Soit S une séquence de franchissement et $T(S)$ l'ensemble des transitions apparaîssant dans S. $T(S)$ est une composante répétitive *ssi* $C.\overline{S} = 0$.

Preuve. L'équation fondamentale donne $M' = M + C.\overline{v}$.
Si on revient à l'état initial c'est que $C.\overline{v} = 0$ et donc que $\overline{v}$ est solution de $C.\overline{v} = 0$. □

CÔTE D'AZUR
Introduction aux Réseau de Petri
Jean-Paul Comet
Concepts généraux
Représentation Matricielle
Définitions formelles
Représentation de la dynamique
Quelques propriétés
P-invariants

À quoi servent les T-invariants ?

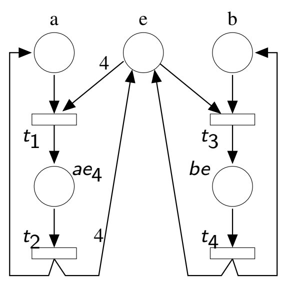
- un invariant : ens de réactions chimiques permettant de maintenir le système dans un état stationnaire.
  Si toutes ces réactions ont lieu, l'état du système n'est pas modifié.
- l'ensemble des invariants : ensemble des activités du réseau métabolique à un état stationnaire.

Exemple 1.

Les réactions :

$$\begin{array}{lll} a+4e & \to & ae_4 \\ ae_4 & \to & a+4e \\ b+e & \to & be \\ be & \to & b+e \end{array}$$

Le réseau de Petri :



La matrice d'incidence :

$$C = \begin{array}{r} a \\ b \\ e \\ ae_4 \\ be \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Les invariants de transitions sont les solutions de $C.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0.$

Ce système s'écrit $\left\{ \begin{array}{l} x = y \\ z = t \\ -4x + 4y - z + t = 0 \end{array} \right.$ qui est équivalent à $\left\{ \begin{array}{l} x = y \\ z = t \end{array} \right.$

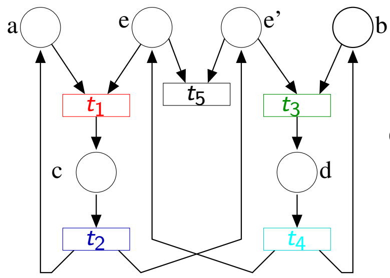
Il y a donc 2 t-invariants : $(1,1,0,0)^t$ $(0,0,1,1)^t$

Invariants de transitions

Exemple 2.

$$\begin{cases} a+e & \rightarrow c \\ c & \rightarrow a+e' \\ e+e' & \rightarrow \emptyset \\ b+e' & \rightarrow d \\ d & \rightarrow b+e \end{cases}$$

Le réseau de Petri :



La matrice d'incidence :

$$C = \begin{array}{c} a \\ e \\ c \\ e' \\ b \\ d \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Recherche des T-invariants : $C.\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} = 0.$

$$\begin{cases} \alpha & = & \beta \\ \varepsilon+\alpha & = & \delta \\ \alpha & = & \beta \\ \beta & = & \gamma+\varepsilon \\ \gamma & = & \delta \end{cases}$$

Si α est nul, tous les autres sont nuls aussi. Ce n'est pas un T-invariant.
Sinon

- $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $\delta = 1$, $\varepsilon = 0$. $\Rightarrow$ 1^{er} invariant trouvé : (t_1, t_2, t_3, t_4)
- $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 1$. Impossible.
- $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\delta = 2$, $\varepsilon = ?$. Impossible.

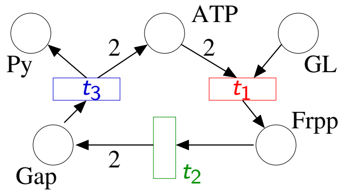
Invariants de transitions

Exemple 3. Recherche des P-invariants et des T-invariants

Équations chimiques :

$$\begin{cases} 2\ ATP + Gl \rightarrow Frpp \\ Frpp \rightarrow 2.GAP \\ GAP \rightarrow Py + 2.ATP \end{cases}$$

Le réseau de Petri :



La matrice d'incidence :

$$C = \begin{array}{c} ATP \\ Gl \\ Frpp \\ Gap \\ Py \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Recherche des T-invariants : $C \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \gamma & = & \alpha \\ \alpha & = & 0 \\ \alpha & = & \beta \\ \gamma & = & 2\times\beta \\ \gamma & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Pas d'invariants}$$

Absence de T-invariant évidente :
- consommation de Gl
- synthèse de Py

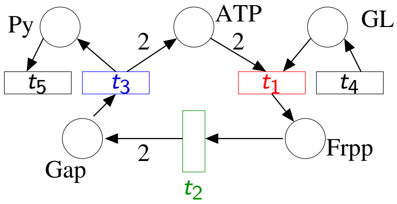
Existe-t-il un fonctionnement stationnaire de la voie métabolique si on ne compte ni la consommation de Gl ni la production de Py. Pour cela on rajoute deux réactions.

Exemple 3. Recherche des P-invariants et des T-invariants

Équations chimiques :

$$\begin{cases} \emptyset \to Gl \\ Py \to \emptyset \\ 2\ ATP + Gl \to Frpp \\ Frpp \to 2.GAP \\ GAP \to Py + 2.ATP \end{cases}$$

Le réseau de Petri :



La matrice d'incidence C :

$$\begin{array}{c} ATP \\ Gl \\ Frpp \\ Gap \\ Py \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Recherche des T-invariants. $C \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \alpha = \delta \\ \alpha = \beta \\ \gamma = 2 \times \beta \\ \gamma = \varepsilon \end{cases}$

Pas d'invariants car

$$\begin{cases} \text{si} \quad \alpha = 0, & \text{tous les autres sont nuls, et} \\ \text{si} \quad \alpha \neq 0, & \text{on arrive à une incohérence.} \end{cases}$$

CÔTE D'AZUR
Invariants de transitions

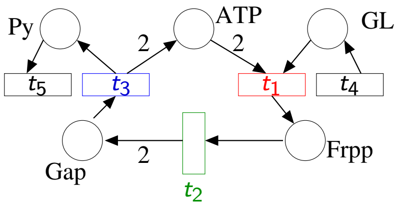
Introduction aux Réseau de Petri
Jean-Paul Comet
Concepts généraux
Représentation Matricielle
Définitions formelles
Représentation de la dynamique
Quelques propriétés
P-invariants

Exemple 3. Recherche des P-invariants et des T-invariants

Équations chimiques :

$$\begin{cases} \emptyset \to Gl \\ Py \to \emptyset \\ 2\ ATP + Gl \to Frpp \\ Frpp \to 2.GAP \\ GAP \to Py + 2.ATP \end{cases}$$

Le réseau de Petri :



La matrice d'incidence C :

$$\begin{array}{c} ATP \\ Gl \\ Frpp \\ Gap \\ Py \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Recherche des P-invariants : $(a, b, c, d, e) \times C = 0$

$$\begin{array}{c} ATP \\ Gl \\ Frpp \\ Gap \\ Py \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} ATP \\ Gl \\ Frpp + Gl \\ Gap + 2Frpp + 2Gl \\ Py + Gap + 2Frpp + 2Gl \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a un autre P-invariant :
la ligne correspondant à (Gap + 2 Frpp) est le vecteur $(2, 0, -1)$
on peut remplacer ATP par (ATP + (Gap+2Frpp) + (Gap+2Frpp+2Gl))
Le système devient :

$$\begin{array}{r} Gl \\ Frpp + Gl \\ Gap + 2Frpp + 2Gl \\ Py + Gap + 2Frpp + 2Gl \\ ATP + (Gap + 2Frpp) + (Gap + 2Frpp + 2Gl) \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

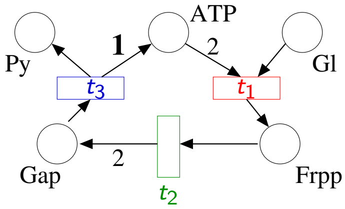
Invariants de transitions

Exemple 4 : recherche des P-invariants et des T-invariants :

Équations chimiques :

$$\begin{cases} 2.ATP + Gl \to Frpp \\ Frpp \to 2.GAP \\ GAP \to Py + ATP \end{cases}$$

Le réseau de Petri :



$$C = \begin{array}{r} ATP \\ Gl \\ Frpp \\ GAP \\ Py \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Recherche des T-invariants : $C \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -2\alpha & & +\gamma & = & 0 \\ -\alpha & & & = & 0 \\ \alpha & -\beta & & = & 0 \\ & 2\beta & -\gamma & = & 0 \\ & & \gamma & = & 0 \end{cases} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Il n'existe pas de vecteur y non nul tel que $C.y = 0$. Il n'y a donc pas d'invariant de transitions.

CÔTE D'AZUR

Introduction aux Réseau de Petri

Jean-Paul Comet

Concepts généraux

Représentation Matricielle

Définitions formelles

Représentation de la dynamique

Quelques propriétés

P-invariants

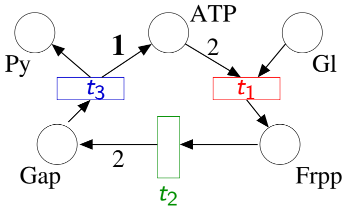
Invariants de transitions

Exemple 4 : recherche des P-invariants et des T-invariants :

Équations chimiques :

$$\begin{cases} 2.ATP + Gl \to Frpp \\ Frpp \to 2.GAP \\ GAP \to Py + ATP \end{cases}$$

Le réseau de Petri :



$$C = \begin{array}{r} ATP \\ Gl \\ Frpp \\ GAP \\ Py \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Recherche des P-invariants : $(a, b, c, d, e)C = 0$

$$\begin{array}{r} \\ ATP \\ Gl \\ Frpp \\ Gap \\ PG \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ ATP + Frpp \\ Gl + (ATP + Frpp) \\ 2 \times (Frpp + Gl) + Gap \\ Gap + 2 \times (Frpp) + ATP \\ PG \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\implies \begin{array}{r} \\ ATP + Frpp \\ Gl + (ATP + Frpp) \\ 2 \times (Frpp + Gl) + Gap \\ Gap + 2 \times (Frpp) + ATP \\ PG + (2 \times (Frpp + Gl) + Gap) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Il y a donc 2 P-invariants.

Exploitation des T-invariants

Chaque T-invariant peut être vu comme un module qui permet lorsqu'il fonctionne "à la bonne vitesse", de maintenir l'état du système.

- Les T-invariants triviaux (réactions réversibles) permettent de maintenir le système dans un état stationnaire mais ne contribuent pas à la voie métabolique ; ils ne sont pas très intéressants.
- Par contre les autres T-invariants contribuent à la voie métabolique. On va donc se focaliser surtout sur les autres.

Les transitions qui ne sont impliquées dans aucun T-invariant *non-trivial* sont des candidats pour une réduction du réseau.

Pour être plus précis, la suppression de ces transitions ne change pas les fonctionnements stationnaires, puisque ces transitions n'apparaissent pas dans les T-invariants non triviaux.
Ainsi étudier les comportements stationnaires du système réduit (après suppression de ces transitions) revient au même qu'étudier le comportement du système initial.

Exercice : Supprimez les transitions correspondant à ces candidats dans le RdP de la synthèse de l'amidon dans la pomme de terre et recalculer les T-invariants.

ADT sets : abstract dependent transition sets

ADT sets

- Deux transitions dépendent l'une de l'autre si elles apparaissent toujours ensemble dans l'ensemble des T-invariants (non triviaux). Autrement dit, à un état stationnaire l'une des transitions ne peut fonctionner sans l'autre.
- C'est une relation d'équivalence (reflexive, symétrique et transitive).
  $\Rightarrow$ partition de l'ensemble des transitions en classes d'équivalence.
  Une classe d'équivalence $\equiv$ un *ADT set* ou ens des transitions dépendantes.

$\forall$ classe d'équivalence C_i, $\forall$ le T-invariant considéré T_j :

soit $C_i \subset support(T_j)$ soit $C_i \cap support(T_j) = \emptyset$

Les ADT sets

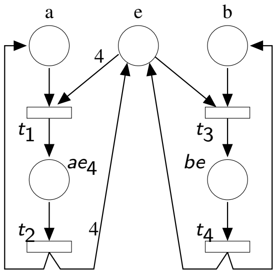
- sont disjoints par définition (classes d'équivalence).
- définissent des sous-réseaux qui se chevauchent sur certaines places.

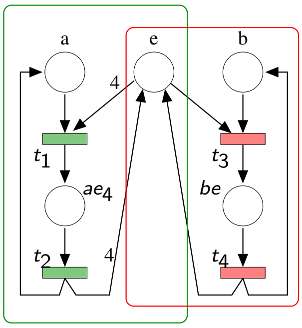
Les places ($\in$ 2+ sous-réseaux) définissent l'*interface* entre ces sous-réseaux.
$\Rightarrow$ construction d'une abstraction du réseau de départ en associant une transition *abstraite à chacun de ces sous-réseaux*

Algorithme de construction d'un RdP abstrait

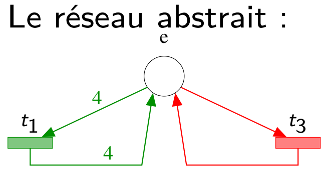
1. calculer les ensembles de transitions dépendantes (ADT sets),
2. à chaque ensemble de transitions dépendantes, associer une transition
3. à chaque interface, on associe une place

Exemple 1.





L'interface entre les deux ss-réseaux induits par les T-invariants$=e$. Le réseau abstrait :



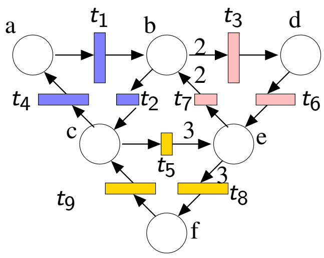
Exemple 2.

0. Équations chimiques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & \longrightarrow & b \\ b & \longrightarrow & c \\ 2.b & \longrightarrow & d \\ c & \longrightarrow & a \\ c & \longrightarrow & 3.e \\ d & \longrightarrow & e \\ e & \longrightarrow & 2.b \\ 3.e & \longrightarrow & f \\ f & \longrightarrow & c \end{array}\right.$$

Peut-on décomposer ce système ?

1. Le RdP associé



2. Les T- invariants :
(t_1, t_2, t_4),
(t_3, t_6, t_7),
(t_5, t_8, t_9)

3. Les classes d'équivalence :
$C_1 = \{t_1, t_2, t_4\}$,
$C_2 = \{t_3, t_6, t_7\}$,
$C_3 = \{t_5, t_8, t_9\}$

4. Le RdP du réseau :