03 Échantillon

mardi 20 septembre 2022

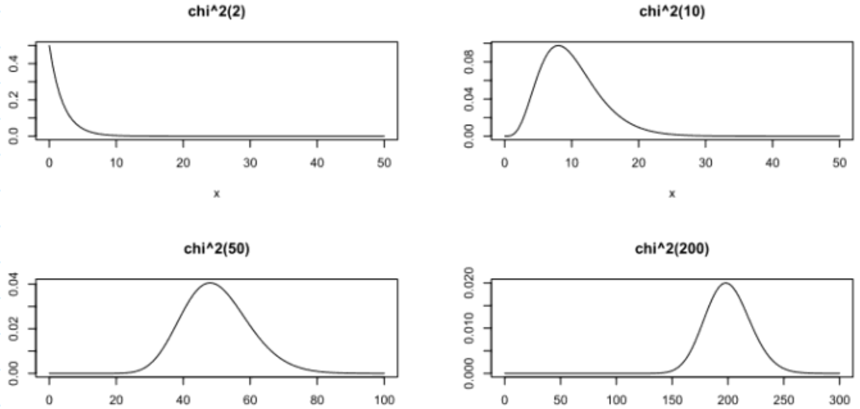
1. Échantillon aléatoire : méthode de sélection aléatoire d'un sous-ensemble de cardinal n de P
   - 1- $(x_1, \dots, x_n)$: *réalisation de* $(X_1, \dots, X_n)$
   - 2- nouvelle procédure d'échantillonnage entraîne nouvelle réalisation
   - 3- iid : indépendant et identiquement distribué
2. Statistique : $T = g(X_1, \dots, X_n)$
   - 1- *T est une variable aléatoire*
   - 2- $t = g(x_1, \dots, x_n)$ *une réalisation de T*
3. Probabilité asymptotique
   - 1- Loi des grands nombres (LGN)
     - 1- $\forall \varepsilon > 0, P(|\bar{X} - \mu| > \varepsilon) \leq \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$
   - 2- Convergence en loi
     - 1- $\forall \varepsilon > 0, \lim\limits_{n \to \infty} P(|\bar{X} - \mu| > \varepsilon) = 0$
     - 2- $Si\ E(X_i) = \mu, lim_{n\to+\infty} Var(X_n) = 0\ ou\ bien\ \lim_{n\to+\infty} E(X_i) = \mu, lim_{n\to+\infty} Var(X_n) = 0\ alors\ X_n \xrightarrow{P} \mu$
     - 3- $X_n \xrightarrow{P} \mu, g: R \to R\ continue\ \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{P} g(\mu)$
     - 4- $\forall x \in R, P(\bar{X} < x) \approx \Phi\left(\dfrac{x - m}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}\right)$
   - 3- Théorème Central Limite (TCL)
     - 1- Centrée réduite : $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{\sigma^2}} \sim \mathcal{N}(0,1)$
   - 4- Théorème de Slutsky
     - 1- $X_n \sim X, g: R^d \to R^d, n \to +\infty \Rightarrow g(X_n) \sim g(X)$
4. Variance empirique
   - 1- $\sigma^2 = \dfrac{n}{n-1} S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$
   - 2- $\begin{cases} E(S^2) = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2 \\ E(S^{*2}) = \sigma^2 \end{cases}$
   - 3- $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{n}(S^2 - \sigma^2)}{\sqrt{\mu_4 - \sigma^4}} \sim \mathcal{N}(0,1), n \to +\infty \\ \dfrac{\sqrt{n}(S^{*2} - \sigma^2)}{\sqrt{\mu_4 - \sigma^4}} \sim \mathcal{N}(0,1), n \to +\infty \end{cases}$

5. Échantillon Gaussien

-1- Théorème de Fisher

1- $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1){S^*}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)\ loi\ du\ Chi-2$

1>



2- $\frac{1}{\sigma^2}\sum (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$

3- $\frac{1}{\sigma^2}\sum (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$

4- $\cancel{X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim T_{n-1}}$