08&09 Tests d'hypothèse

mardi 8 novembre 2022

1. Définition d'Hypothèse
   - -1- Hypothèse simple
   - -2- Hypothèse composite
   - -3- Hypothèse nulle H_0
   - -4- Hypothèse alternance H_1
2. Objectif d'un problème de test d'hypothèse
   - -1- Soit H_0 ou soit H_1, où $H_0 \cap H_1 = \emptyset, H_0 \cup H_1 \subset \Theta$
3. Région critique (RC, région de rejet de H_0) : W
   - -1- $\begin{cases} rejet\ de\ H_0 : si\ (x_1, \dots, x_n) \in W \\ non\ rejet\ de\ H_0 : si\ (x_1, \dots, x_n) \in \overline{W} \end{cases}$
4. Erreurs de test
   - -1- Minimiser ces erreurs qui vont être mesurées au travers de probabilités
   - -2- Risque de première espèce (lorsque H0 est vraie)
     - 1- $\alpha_{\theta_0}(W) = P_{\theta_0}(\{(X_1, \dots, X_n) | (X_1, \dots, X_n) \in W\}) = P_{\theta_0}(W)$
     - 2- $\Rightarrow W = \left\{x \gtrless P_{\theta_0}^{-1}(\alpha_{\theta_0})\right\}$
   - -3- Risque de seconde espèce (lorsque H1 est vraie)
     - 1- $\beta_{\theta_1}(W) = P_{\theta_1}(\{(X_1, \dots, X_n) | (X_1, \dots, X_n) \in \overline{W}\}) = P_{\theta_1}(\overline{W})$
   - -4- Puissance du test = 1 - risque de second espèce
     - 1- $\pi_{\theta_1}(W) = 1 - \beta_{\theta_1}(W) = P_{\theta_1}(W)$
     - 2- Test préférable
       - 1> $\beta_{\theta_1}(W) < \beta_{\theta_1}(W') \Leftrightarrow \pi_{\theta_1}(W) > \pi_{\theta_1}(W')$
       - 2> $\forall \theta_1 \in \pi_{\theta_1}(W) \geq \pi_{\theta_1}(\widetilde{W}), \widetilde{W} \in C(\alpha^*)$
         - a) 拒绝H1的概率越小越好
   - -5- Niveau de signification : α^*
     - 1- $\alpha_{\theta_0}(W) \leq \alpha^*$
   - -6- Degré de signification (p-valuess) : $\hat{\alpha}_{\mu_0}$
     - 1- $c_{\alpha^*} = seuil/门槛\ critique\ de\ W_{\alpha^*}$
     - 2- $T(X) = statistique\ de\ test$

3- $\hat{\alpha}_{\mu_0} = P(T(X) > T(x) = c_{\alpha^*}) \Rightarrow \begin{cases} \hat{\alpha}_{\mu_0} > \alpha^* \Rightarrow rejet\ de\ H_0 \\ \hat{\alpha}_{\mu_0} < \alpha^* \Rightarrow non\ rejet\ de\ H_0 \end{cases}$

4- $\begin{cases} très\ significatif: \hat{\alpha} \in (0{,}0.01] \\ significatif: \hat{\alpha} \in (0.01{,}0.05] \\ faiblement\ significatif: \hat{\alpha} \in (0.05{,}1] \end{cases}$

-7- Exemple

1- Ex "Conso. d'alcool en France" (Cont'd...)

- le test est de niveau $\alpha^* = 0.05$ si la constante c satisfait :

$$\mathbb{P}_{35}(\overline{X} < c) = 0.05 \Leftrightarrow \phi(2 \times \frac{c-35}{2}) = 0.05 \Rightarrow c = 35 - u_{0.95} = 33.35$$

$\Rightarrow$ comme $\overline{x} = 34.025 > 33.35$ alors $(x_1, \ldots, x_4) \in \bar{W}$, et on ne rejette pas H_0 au niveau $\alpha = 0.05$.

- le degré de signification $\hat{\alpha}$:

$$\hat{\alpha} = \mathbb{P}_{35}(\overline{X} \leq 34.025) = \phi(\sqrt{4}\frac{34.025-35}{2}) \approx 0.165$$

Donc pour $\alpha^* = 0.05 < \hat{\alpha}$, l'observation conduit à ne pas rejeter H_0.

30/44

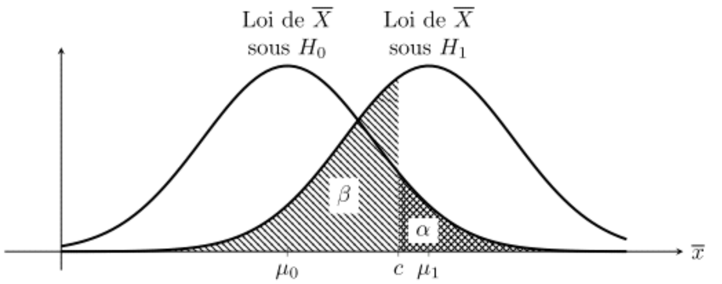
5. Test le plus puissant HS-HS

-1- $C(\alpha^*) = \{W : \alpha_{\theta_0}(W) < \alpha^*\}$

-2- Théorème de Neyman-Pearson (Thm N-P)

1- $test : H_0 = \{\theta_0\}\ contre\ H_1 = \{\theta_1\}\ avec\ \theta_0 \neq \theta_1$

2- $RC\ W(du\ test\ le\ plus\ puissant\ au\ niveau\ \alpha^*) \Rightarrow W = \left\{\frac{L(\theta_1)}{L(\theta_0)} > seuil\ critique\right\}, \alpha_{\theta_0}(W) = \alpha^*$

3- 

6. Test UPP

-1- $C(\alpha^*) = \{W : \alpha_{\theta_0}(W) \leq \alpha^*\}$

-2- $\forall \theta_1 \in \pi_{\theta_1}(W) \geq \pi_{\theta_1}(\widetilde{W}), \widetilde{W} \in C(\alpha^*)$

1- p越小越越拒绝H0

7. Test HS-HC (hypothèse simple/hypothèse composite)

-1- $\begin{cases} si\ W_{\theta_1}\ ne\ dépend\ pas\ de\ la\ valeur\ \theta_1, W_{\theta_1} \text{ est UPP au niveau } \alpha^* \\ si\ W_{\theta_1}\ dépend\ de\ la\ valeur\ \theta_1, \text{il n'esiste pas de test UPP au niveau } \alpha^* \end{cases}$

8. Test du RV (rapport de vraisemblance)

-1- $\Lambda(x_i) = \frac{L(\hat{\theta}_0; x_i)}{L(\hat{\theta}; x_i)}, \begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta = \theta_1 \neq \theta_0 \end{cases}$

-2- $\Rightarrow W = \{\Lambda(x_i) < c\}, tq\ P_\theta(\Lambda(X_i) < c) = \alpha^*$

9. Région critique approché / Test approché

-1- Théorème de Wilks

1> Lorsqu'il n'est pas possible d'obtenir la région critique de manière exacte, comme dans l'exemple précédent, le théorème suivant (théorème de Wilks) permet d'obtenir une région critique approchée.

2> $H_0 : (\theta_1, \ldots, \theta_r) = (\theta_1, \ldots, \theta_p), r \leq p$

3> La statistique $-2\, ln\, \Lambda$ est asymptotiquement pivotale et suit asymptotique, sous H_0, une loi du χ_r^2

1> $W \approx \left\{-2 \ln \Lambda \geq \chi^2_{r,1-\alpha^*}\right\}$