MT09-TP6

1. On rappelle que, étant donnés les n réels ordonnés $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ et les n réels $z_1, z_2, \ldots, z_n$, l'équation de la ligne brisée qui passe par les points $((t_j, z_j), j = 1, \ldots, n)$ est donnée par :

$$\text{si } t \in [t_j, t_{j+1}],\ f_z(t) = z_{j+1}\frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} + z_j\frac{t - t_{j+1}}{t_j - t_{j+1}}.$$

   On suppose que m et n sont deux entiers tels que $m \geq n$.

   On se donne :

   - n réels ordonnés $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$,
   - m réels $\tau_1, \ldots, \tau_m$ appartenant à $[t_1, t_n]$,
   - m réels $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

   On cherche à déterminer parmi les lignes brisées précédentes celle qui passe au plus près des points $((\tau_i, y_i), i = 1, \ldots, m)$, c'est-à-dire qu'on cherche $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ qui minimise $\sum_{i=1}^{m}(f_z(\tau_i) - y_i)^2$.

   Montrer que ce problème se ramène à trouver le minimum pour $z \in \mathbb{R}^n$ de $\|Az - y\|_2^2$ où A est une matrice de taille $m \times n$.

   (a) Comment calcule-t-on $f_z(\tau_i)$? En déduire que tous les éléments la $i$ème ligne de A sont nuls sauf au plus deux d'entre eux, lesquels ? Quelle est leur valeur ?

   (b) Écrire une fonction Scilab :

$$[\mathtt{A}] = \mathtt{construct}(\mathtt{t}, \tau)$$

   qui, étant donnés le vecteur t de taille n, le vecteur τ de taille m, construit la matrice A.

   (c) Application 1 : On choisit

$$t = (0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5.5,\ 6),\ \tau = t,$$

   que vaut la matrice A (notée A_1) ? Expliquer le résultat.

   (d) Application 2 : On choisit

$$t = (0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5.5,\ 6),\ \tau = (0.5,\ 2,\ 2.5,\ 3.5,\ 4.5,\ 5.75).$$

   Que vaut A ? On notera A_2 cette matrice. Est-ce que l'allure de A_2 vous semble correcte ?

   (e) Application 3 : On choisit

$$t = (0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5.5,\ 6),\ \tau_i = 0.3(i - 1), 1 \leq i \leq 21.$$

   Que vaut A_3 dans ce cas ?

2. On résout le problème de minimisation en utilisant les équations normales.

   (a) Écrire une fonction Scilab :

$$\mathtt{z} = \mathtt{mcnorm}(\mathtt{A}, \mathtt{y})$$

   qui, étant donnés la matrice A de taille $m \times n$ et le vecteur y de taille m, calcule le vecteur z de taille n qui minimise $\|Az - y\|_2^2$ en résolvant les équations normales. Pour résoudre ces équations, on utilisera la fonction `resolchol` (voir un TP précédent).

   (b) Application 2 : On choisit

$$t = (0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5.5,\ 6),\ \tau = (0.5,\ 2,\ 2.5,\ 3.5,\ 4.5,\ 5.75),\ y = (1,\ 1.5,\ 1.25,\ 0,\ 0,\ 1.5).$$

   i. Déterminer la solution des équations normales. En déduire $(f_z(\tau_i), i = 1, \ldots, 6)$. Le résultat vous semble-t-il correct ? Pourquoi ?

   ii. Tracer sur la même figure la ligne brisée obtenue ainsi que les points de coordonnées $((\tau_i, y_i), 1 \leq i \leq m)$.

(c) Application 3 : On choisit

$$t = (0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5.5,\ 6),\ \tau_i = 0.3(i-1), 1 \le i \le 21,$$

$$y = (0,\ 0.6,\ 1.4,\ 1.7,\ 2.1,\ 1.9,\ 1.6,\ 1.4,\ 1.4,\ 1,\ 0.5,\ 0.4,\ -0.2,\ -0.8,\ -0.5,\ 0,\ 0.4,\ 1,\ 1.6,\ 1.7,\ 1.2).$$

i. Tracer sur une même figure la ligne brisée obtenue ainsi que les points de coordonnées $((\tau_i, y_i), 1 \le i \le m)$.

ii. Utiliser la fonction Scilab `cond` pour calculer le conditionnement de la matrice M du système à résoudre.

iii. *Question facultative :* la matrice M est tri-diagonale, comprenez-vous pourquoi ?

3. *(Question optionnelle, en particulier pour les premières séances de TP.)*

On veut maintenant résoudre le problème de minimisation à l'aide de la méthode QR. On écrit $A = QR$ où Q est une matrice orthogonale de taille $m \times m$ et R est une matrice taille $m \times n$ qui peut se décomposer en blocs : $R = \begin{pmatrix} \widetilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ où $\widetilde{R}$ est une matrice de taille $n \times n$ triangulaire supérieure.

(a) Quel système doit-on résoudre pour obtenir z ?

(b) Écrire une fonction Scilab

$$\mathtt{z = mcQR(A, y)}$$

qui, étant donnés la matrice A de taille $m \times n$ et le vecteur y de taille m, calcule le vecteur z de taille n qui minimise $\|Az - y\|_2^2$ en utilisant la méthode QR. Pour obtenir la factorisation $A = QR$, on utilisera la fonction Scilab `qr`. Pour résoudre le sytème triangulaire supérieur on utilisera la fonction `solsup` écrite dans le TP2.

(c) On reprend les données de l'application 3. Comparer avec la solution obtenue dans la question 3.

(d) Calculer le conditionnement de $\widetilde{R}$ et comparer avec le conditionnement de la matrice M, le résultat vous semble-t-il correct ? Pourquoi ?

4. On reprend les TP3 et TP5.

(a) Tracez sur la même figure les courbes d'équation $z = P(\theta)$ (polynôme interpolant les points (τ_i, y_i), voir TP5) et $z = f_z(\theta)$ (approximations par moindres carrés), ainsi que les points de coordonnées (τ_i, y_i) dans les cas suivants :

- Application 2 : $\tau = (0.5,\ 2,\ 2.5,\ 3.5,\ 4.5,\ 5.75),\ y = (1,\ 1.5,\ 1.25,\ 0,\ 0,\ 1.5)$.
- Application 3 (voir ci-dessus).

(b) On note g l'expression de la spline cubique qui interpole les points (τ_i, y_i). Calculez les coefficients de la spline, voir TP3). Ajoutez sur la figure précédente la courbe $z = g(\theta)$, pour les deux cas.

Rappel du TP3 :

On définit la fonction g par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} g(\theta) & = & cc_{i1} + cc_{i2}(\theta - \tau_i) + cc_{i3}(\theta - \tau_i)^2 + cc_{i4}(\theta - \tau_i)^2(\theta - \tau_{i+1}), \ \ \text{pour } \tau_i \le \theta < \tau_{i+1} \\ g(\theta) & = & cc_{n-1,1} + cc_{n-1,2}(\theta - \tau_{n-1}) + cc_{n-1,3}(\theta - \tau_{n-1})^2 + cc_{n-1,4}(\theta - \tau_{n-1})^2(\theta - \tau_n), \ \ \text{pour } \theta = \tau_n \end{array} \right. \tag{1}$$

On veut tracer la courbe d'équation $z = g(\theta),\ \tau_1 \le \theta \le \tau_n$.
Écrire une fonction Scilab

```
[z] = calcg(θ, τ, cc)
```

qui, étant donné le nombre θ, le vecteur t et la matrice de coefficients cc, calcule $z = g(\theta)$ définie par la relation (1). On appellera la fonction `hornv` dans `calcg`.