06 Estimation par Intervalle de Confiance

mardi 11 octobre 2022

1. Intervalle de confiance (IC)

   - 1 - Notion : Donner une estimation du paramètre sous forme d'un intervalle de valeurs
   - 2 - $X_1, \ldots, X_n \sim^{iid} F_\theta, \theta \in \Theta$
   - 3 - Intervalle de confiance au niveau $1 - \alpha$ pour la paramètre θ
     1- $\mathbb{P}(T_1 < \theta \leq T_2) = 1 - \alpha$, où $[T_1, T_2] = [\varphi_1(X_1, \ldots, X_n), \varphi_2(X_1, \ldots, X_n)] \in \Theta$
     2- $\exists\, une\ infinité\ d'IC\ pour\ \theta\ au\ niveau\ 1 - \alpha$

2. Fonction pivotale

   - 1 - Notion : une fonction aléatoire $\pi(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ des observations sur des échantillons X, et dont la loi (cette fonction) ne dépend pas de θ paramètre considéré.
     1- $\pi(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ n'est pas une statistique 非统计量
       1> $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim T_{n-1}$ $une\ fonction\ pivotale$
       2> $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ $n'est\ pas\ une\ fonction\ pivotale\ (car\ f\ dépend\ \sigma)$
     2- $On\ a\ P\left(f_{\frac{\alpha}{2}} \leq \pi(X_1, \ldots, X_n; \theta) \leq f_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow f_{\frac{\alpha}{2}} \leq \pi(X_1, \ldots, X_n; \theta) \leq f_{1-\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \varphi_1(X_1, \ldots, X_n) \leq \theta \leq \varphi_2(X_1, \ldots, X_n)\ IC$
       1> $\varphi_1(X_1, \ldots, X_n), \varphi_2(X_1, \ldots, X_n)$ $sont\ des\ statistiques$

3. Fonction asymptotiquement pivotale

   - 1 - Notion : une fonction aléatoire $\pi(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ des observations sur des échantillons X, et dont la loi (cette fonction) asymptotique (selon TCL) ne dépend pas de θ paramètre considéré.

4. $IC\ pour\ \mathbb{E}(X) = \mu$ (Gaussien, $variance\ connue$)

   - 1 - Fonction pivotal pour μ : $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$
   - 2 - $P\left(\bar{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow IC^b_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \bar{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]$

5. $IC\ pour\ \mathbb{E}(X) = \mu$

   - 1 - $IC\ pour\ \mathbb{E}(X) = \mu$ $(Gaussien, variance\ inconnue)$
     1- La variance es paramètre de nuisance, car elle n'est pas le paramètre d'intérêt
     2- Fonction pivotal pour μ : $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{S^{*2}}} \sim T_{n-1}$, où $S^{*2} = \frac{n}{N-1} S^2$
     3- $P\left(\bar{X} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^{*2}}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^{*2}}{n}}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow C^b_{1-\alpha}(\mu)$
     $= \left[\bar{X} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^{*2}}{n}}, \bar{X} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^{*2}}{n}}\right]$

-2- IC pour $\mathbb{E}(X) = \mu$ ($non - \text{Gaussien}, variance\ connue$)

1- Fonction asymptotiquement pivotale pour μ : $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{\sigma^2}} \rightarrow^{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1), n\ est\ grand$

1> Il faut démarche identique à celle du cas gaussien

2- $IC_{1-\alpha}^{b,\text{app}}(\mu) = \left[\bar{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \bar{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right], n \geq 5\ validité$

-3- IC pour $\mathbb{E}(X) = \mu$ ($non - \text{Gaussien}, variance\ inconnue$)

1- Fonction asymptotiquement pivotale pour μ : $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{S^{*2}}} \rightarrow^{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$, (Thm Slutsky)

1> Il faut démarche identique à celle du cas gaussien

2> $IC_{1-\alpha}^{b,app}(\mu) = \left[\bar{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^{*2}}{n}}, \bar{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^{*2}}{n}}\right], n \geq 30\ validité$

6. $IC\ pour\ Var(X) = \hat{\sigma}$ (Gaussien, $espérance\ connue$)

-1- Fonction pivoitale pour σ^2 : $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \sum \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2, \hat{\sigma}^2 = EMV\ de\ \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum(X_i - \mu)^2$

-2- $\mathbb{P}\left(\chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow IC_{1-\alpha}^b(\sigma^2) = \left[\frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}}\right]$

7. $IC\ pour\ Var(X) = \sigma$ (Gaussien, $espérance\ inconnue$)

-1- Fonction pivoitale pour σ^2 : $\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} = \frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum \frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

-2- $\mathbb{P}\left(\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{nS^{*2}}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow IC_{1-\alpha}^b(\sigma^2) = \left[\frac{nS^{*2}}{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{nS^{*2}}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}}\right]$

8. *IC pour la proportion* 比例 p

-1- Fonction asymptotiquement pivotale pour p : $\frac{Y-np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \rightarrow^{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

9. EMV et IC

-1- EMV est convergent et asymptotiquement gaussien

1- $fonction$ asymptotiquement pivotale pour θ : $\frac{(\hat{\theta}_{MV} - \theta)}{\sqrt{\frac{1}{I_{n(\hat{\theta}_{MV})}}}} \rightarrow^{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1), quand\ n \rightarrow +\infty$