Компютърно упражнение N 1
/по готова програма за явния метод на Ойлер/

Задача 1. По явния метод на Ойлер да се реши моделната задача

$$\begin{vmatrix} u' = \lambda u \\ u(0) = 1 \end{vmatrix}, \quad 0 < x < 1$$

при $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{100}$ за $\lambda = -10$ и $\lambda = 1$. За всяка от стойностите на λ да се изобразят графично точното и приближените решения (на един чертеж).

Задача 2. По явния метод на Ойлер да се намери приближеното решение на задачата

$$\begin{vmatrix} u' = x + 2u, \quad 0 < x \le 1, \\ u(0) = 0.25 \end{vmatrix}$$

при $h = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$ и да се сравни с точното решение $u(x) = \frac{1}{2}\left(e^{2x} - x - \frac{1}{2}\right)$.

Задача 3. Тяло с маса m и зададена начална скорост v_0 пада във въздушното пространство към земята. Ако предположим, че на тялото действат само земното привличане и съпротивлението на въздуха, което е обратно пропорционално на скоростта $v(t)$ на падане, по закона на Нютон имаме

$$F = m\frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

Следователно за скоростта $v = v(t)$ получаваме задачата на Коши

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{k}{m}v \\ v(0) = v_0 \end{vmatrix}.$$

Пресметнете $v(t)$, $0 < t \le 5$, ако $g = 9.8\ m/\sec^2$, $\frac{m}{k} = 0.5\sec.$, $v_0 > \frac{mg}{k}$ и $v_0 < \frac{mg}{k}$, където $v_0 = 0;\ 3;\ 4.9;\ 6;\ 10.$

Сравнете с точното решение $v(t) = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}}$, $\left(v(t) -> \frac{mg}{k}, \quad t -> \infty\right)$.