

*Appunti del corso di*  
***Fisica Matematica***

$\mathcal{N}$     $\mathcal{L}$     $\mathcal{H}$

**Pietro Scapolo**

Anno accademico 2022-2023



# Prefazione

Questo documento contiene una raccolta di appunti relativi al corso di Fisica Matematica, tenuto dal professor A. Ponno presso il Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei" dell'Università degli Studi di Padova durante l'anno accademico 2022-2023. Gli appunti, originariamente scritti in LaTeX da me, sono stati arricchiti integrandoli con le dispense dell'anno precedente, le quali sono state create in collaborazione con Manjodh Singh e Veronica Bedin.

Desidero sottolineare che questi appunti rappresentano una rielaborazione personale e non sono stati revisionati dal professor A. Ponno. Pertanto, potrebbero contenere errori, e il professore non ha alcuna responsabilità sul loro contenuto. Questo documento non intende sostituire le lezioni del professore o altri appunti scritti da altri studenti, ma piuttosto offrire un'ulteriore prospettiva utile per comprendere i concetti trattati nel corso. Pertanto, consiglio prima di tutto di seguire le lezioni, e magari consultare questo documento e altri appunti per un ulteriore punto di vista.

Se trovate eventuali correzioni o suggerimenti segnalatemi via mail!  
[pietro.scapolo@studenti.unipd.it](mailto:pietro.scapolo@studenti.unipd.it)

# Ringraziamenti

Ringrazio inoltre, per il fantastico lavoro di revisione, i gentilissimi: Martina Tesser, Benedetta Rasera, Caterina Spadetto, Veronica Marchiori, Stefano Sorace Distilo e Pietro Pecchini. È inutile dire che senza il loro aiuto il testo non sarebbe com'è adesso e per questo siamo loro grati.

<b>Prefazione</b>	<b>I</b>
<b>Meccanica newtoniana</b>	<b>1</b>
<b>1 Concetti di base</b>	1
<b>2 Principi di Newton</b>	4
2.1 Principio 1: principio d'inerzia	4
2.2 Principio 2: legge di Newton	6
2.3 Alcuni esempi di forze	8
<u>N.1</u> Attrito viscoso 1d	8
2.4 Teorema di Caley-Hamilton	11
<u>N.2</u> Oscillatore armonico	14
2.5 Principio 3: azione e reazione	21
2.6 Principio 4: sovrapposizione delle forze	21
2.7 Principio 5: relatività ristretta di N-G	23
<b>3 Forze posizionali</b>	27
3.1 Descrizione del problema	27
3.2 Conservazione del momento angolare	29
<u>N.3</u> Oscillatore armonico spaziale	29
3.3 Forza di gravitazione	33
Leggi di Keplero	33
Validità dell'approssimazione di massa puntiforme	36
3.4 Forza elastica	39
<b>4 Problema dei due corpi: moto centrale</b>	40
4.1 Descrizione del problema	40
4.2 Coordinate polari	43
4.3 Moto centrale in coordinate polari	45
4.4 Moto centrale nel piano complesso	45
<u>N.4</u> Potenziale gravitazionale, I legge di Keplero	48
<u>N.5</u> La terza legge di Keplero	54
4.5 Leggi di conservazione	56
<u>N.6</u> Problema <i>ristretto</i> dei tre corpi <i>circolare piano</i>	59
<b>5 Analisi qualitativa della dinamica</b>	63
5.1 Introduzione	64
5.2 Diagrammi di fase	66
5.3 Come disegnare un diagramma di fase	68
5.4 Analisi locale vicino a un punto di minimo	69
5.5 Analisi locale vicino a un punto di minimo, caso radiale	72
Due esempi importanti di potenziale	74
<u>N.7</u> Potenziale armonico	74
<u>N.8</u> Potenziale kepleriano	76
<u>N.9</u> Moto di stelle nelle galassie e di galassie negli ammassi	80
5.6 Analisi locale vicino a un punto di massimo	82
<u>N.10</u> Orbita di Mercurio, problema dei tre corpi	84

	Precessione del perielio vicino all'orbita circolare . . . . .	87
5.7	Teorema di Bertrand . . . . .	90
	Perturbazione di orbite circolari . . . . .	90
	Periodo dell'orbita del moto radiale . . . . .	91
	Condizione di chiusura . . . . .	91
5.8	Un'applicazione: quantizzazione di Bohr-Born- Sommerfield...	99
	<u>N.11</u> Oscillatore armonico quantizzato . . . . .	102
Av	Approfondimenti . . . . .	103
Bv	Altri esempi di potenziale . . . . .	117
<b>Meccanica Lagrangiana</b>		<b>124</b>
<b>1</b>	<b>Meccanica vincolata</b> . . . . .	124
1.1	Sintesi della meccanica newtoniana . . . . .	125
1.2	Limiti della meccanica newtoniana . . . . .	126
	<u>N.12</u> Pendolo semplice rigido . . . . .	127
1.3	Varietà differenziabili . . . . .	132
1.4	Teorema di Lagrange . . . . .	136
	Notazione . . . . .	141
	Che cos è $\mathcal{K}$ ? . . . . .	142
	Teorema di pitagora sulla varietà . . . . .	145
	<u>L.1</u> Pendolo semplice rigido . . . . .	146
1.5	Quantità conservative . . . . .	146
	<u>L.2</u> Moto centrale piano . . . . .	150
	<u>L.3</u> Punto vincolato su paraboloide di rotazione . . . . .	152
	<u>L.4</u> Pendolo sferico . . . . .	155
<b>2</b>	<b>Forma generale delle equazioni di Lagrange</b> . . . . .	163
2.1	Energia . . . . .	163
2.2	Forma della lagrangiana . . . . .	164
2.3	Geodetiche . . . . .	166
<b>3</b>	<b>Equilibri, stabilità e piccole oscillazioni</b> . . . . .	167
3.1	Introduzione . . . . .	167
3.2	Equilibri . . . . .	167
	Linearizzazione del sistema attorno al punto di equilibrio ( $\bar{q} \ 0$ )	168
3.3	Equilibrio stabile secondo Lyapunov . . . . .	176
3.4	Proprietà del flusso di fase . . . . .	177
	<u>L.5</u> Moto armonico smorzato . . . . .	182
3.5	Linearizzazione . . . . .	185
<b>4</b>	<b>Esercizi</b> . . . . .	186
	<u>L.6</u> Pendolo doppio . . . . .	186
	<u>L.7</u> Pallina che rotola sul fondo . . . . .	191
	<u>L.8</u> Pallina su anello rotante . . . . .	194
	<u>L.9</u> Moto geodetico su un solido di rotazione . . . . .	196
	<u>L.10</u> Doppio pendolo legato da molla . . . . .	198



# Meccanica newtoniana

## 1 Concetti di base

### Massa $m$

Il concetto di massa non è banale, soprattutto ai tempi di Newton. Classicamente si adopera la distinzione tra massa gravitazionale vista come costante di accoppiamento gravitazionale e massa inerziale, costante che serve per definire la forza in  $F = ma$ . Dai dati sperimentali si sa che le due costanti sono uguali. Osservando che in generale  $m$  risulta proporzionale al volume occupato dal corpo in questione, risulta naturale pensare che nell'ambito della teoria atomica classica la massa totale derivi semplicemente dalla somma dei costituenti singoli. Questo non è esattamente vero, ma non è rilevante per questo corso.

### Carica $q$

La questione della carica è simile a quella della massa con l'unica differenza che esistono due tipi di cariche (elementari) opposte, che risultano essere ben modellizzabili con il simbolo  $\pm$ . Non solo esistono due tipi di cariche opposte, ma esistono sorprendentemente in quantità uguale, il che porta in modo naturale alla neutralità della materia.

### Punto materiale/particella

Il concetto di punto materiale o particella è non banale. Idealmente, è un corpo dotato di dimensione massa (e/o carica), ma senza volume (dimensione nulla). Poiché i corpi di questo tipo sono rari in natura (forse i quark e, in modo più delicato, gli elettroni in ambito classico), ci si aspetta che tale modello di corpo porti in generale a contraddizioni (ad esempio, divergenze del campo gravitazionale vicino ai corpi). Il modo corretto di pensare le cose è che tale è un modello approssimato che funziona bene relativamente al sistema in cui viene messo il corpo e siamo interessati soltanto a cosa succede lontano dal corpo, ignorando in particolare la struttura dello stesso.

## **1. Concetti di base**

---

### **Sistema isolato**

Un sistema isolato consiste in uno o più punti materiali isolati dall'esterno. Nel mondo reale, tali condizioni non sono facili da creare, poiché le interazioni fondamentali decrescono con la distanza, ma la gravità è comunque considerata una forza a distanza e ciò rappresenta un problema (come viene influenzato il sistema dall'ambiente? Soltanto numericamente in termini di forze oppure anche a livello più fondamentale? Vedi il "secchio di Newton").

### **Sistema di riferimento**

Un sistema di riferimento è un sistema di coordinate locali che viene usato per descrivere un evento. Servono  $n + 1$  punti per definire un sistema di riferimento in uno spazio dotato di  $n$  dimensioni. Ad esempio, in ambito cartesiano ne servono  $n$  per specificare i vettori (che esistono indipendentemente dalla presenza o meno del modo di misurare che imponiamo) degli assi e 1 per l'origine.

## Tempo

In meccanica classica esiste un solo tempo: dati 2 sdr diversi la descrizione delle posizioni è descrivibile da un solo parametro  $t$ . È come se da qualche parte dell'universo esistesse un orologio (analogico) gigante che va sempre alla stessa velocità per tutti i corpi. Detto in altro modo se si descrive ogni evento del sistema tramite  $(t, x, y, z)$  t non subisce trasformazioni importanti cambiando sdr, questo significa che fissato un sdr e pensando al mondo come  $\mathcal{R}^4$ , tutto il mondo prosegue nella direzione  $\hat{t}$  ad una stessa velocità<sup>1</sup>. Invece in relatività fissato un sdr ogni corpo può andare a velocità diverse.

## Cinematica

Fissato un sdr i moti sono descritti da funzioni del tipo  $\mathbf{x}(t) : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}^3$  dette curve, il sostegno è detto traiettoria. Segue in modo naturale il concetto di velocità  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  che spesso conviene pensare comunque nello stesso spazio delle posizioni, infatti risulta tangente alla traiettoria (segue immediatamente dalla definizione) e dà il verso di percorrenza. Inoltre notare che la derivata di un vettore  $(x, y, z)$  rispetto a  $t$  è  $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$ . In modo analogo si definisce l'accelerazione.

---

<sup>1</sup>Frase delicata, si intende che le velocità sono comunque misurate usando  $t$

## 2 Principi di Newton

2.1	Principio 1: principio d'inerzia . . . . .	4
2.2	Principio 2: legge di Newton . . . . .	6
2.3	Alcuni esempi di forze . . . . .	8
	<u>N.1</u> Attrito viscoso 1d . . . . .	8
2.4	Teorema di Caley-Hamilton . . . . .	11
	<u>N.2</u> Oscillatore armonico . . . . .	14
2.5	Principio 3: azione e reazione . . . . .	21
2.6	Principio 4: sovrapposizione delle forze . . . . .	21
2.7	Principio 5: relatività ristretta di N-G . . . . .	23

### 2.1 Principio 1: principio d'inerzia

*Esiste almeno un sistema di riferimento privilegiato, detto sistema di riferimento inerziale rispetto al quale un punto materiale isolato ha accelerazione nulla.  $a(t) = 0$*

L'accelerazione nulla implica che (sono tutte quantità vettoriali):

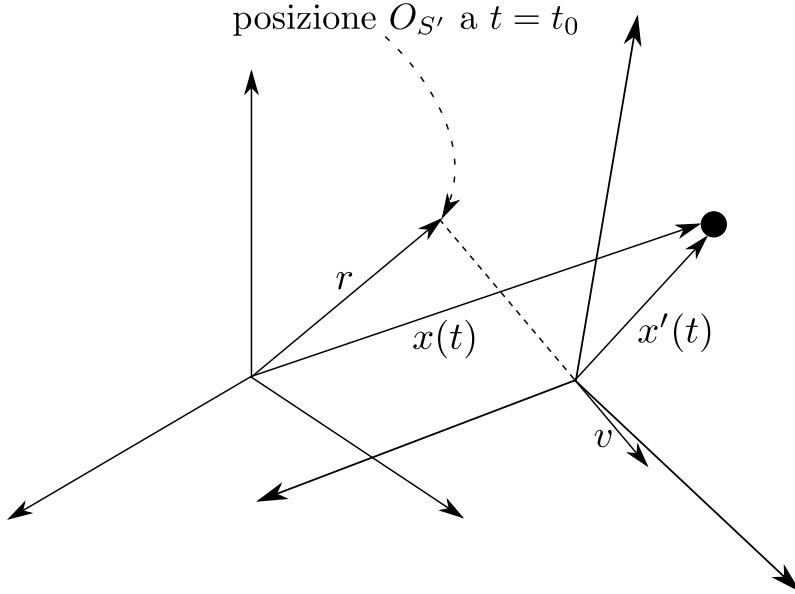
$$a(t) = \ddot{x}(t) = 0 \quad (2.1)$$

$$\int_0^t \ddot{x}(t) dt = \dot{x}(t) - \dot{x}(0) \quad (2.2)$$

E quindi  $v(t) = v(0)$ , cioè si ha velocità costante (vale anche il viceversa, basta ripercorrere al contrario). Quindi nella definizione di sistema inerziale si può sostituire "accelerazione nulla" con "si muove di moto rettilineo uniforme".

**Corollario 2.1.** Se esiste un sistema di riferimento inerziale allora ne esistono infiniti.

**Dimostrazione:**



Utilizzando i postulati dello spazio/tempo assoluto si ha che per il vettore posizione nei due sistemi di riferimento:

$$x(t) = r + v \cdot (t + t_0) + Rx'(t) \quad (2.3)$$

Notare come il tempo che compare è uno solo<sup>a</sup> e come il vettore  $x'(t)$  (vettore scritto nel sdr S') subisca soltanto una rotazione e non altre trasformazioni per essere sommato a  $r$  e  $v \cdot (t + t_0)$  (vettore scritto nel sdr S), questo segue dal postulato dello spazio assoluto.  $R$  è una matrice di rotazione  $R^T R = 1$  e siccome è propria vale  $\det R = 1$

$$x'(t) = R^T(x(t) - r - v(t + t_0)) \quad (2.4)$$

**Osservazione:**

Se  $R = \mathbb{1}_3$ ,  $r = 0$ ,  $t_0 = 0$  allora  $x'(t) = x(t) - vt$  è una trasformazione di Galileo-Newton.

Derivando rispetto al tempo:  $v(t) = v + Rv'(t)$ . Derivando ancora si trova:  $\dot{v}(t) = a(t) = Ra'(t)$  ma per ipotesi  $a = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$  e siccome  $R$

## 2. Principi di Newton

---

è invertibile,  $a'(t) = R^T 0 = 0$  quindi anche l'accelerazione nel secondo sistema di riferimento è 0. Quindi anche  $K'$  è inerziale.

Di conseguenza l'insieme degli sdr inerziali costituisce una classe di equivalenza, cioè gli unici sdr inerziali sono quelli che si muovono di MRU l'uno rispetto all'altro.  $\square$

<sup>a</sup>postulato del tempo assoluto,  $t_0$  è soltanto un parametro (non essenziale) che serve per dire che i due osservatori possono cominciare a cronometrare in due istanti diversi

### 2.2 Principio 2: legge di Newton

*Un punto materiale **non isolato** in un sistema di riferimento inerziale si muove secondo la legge*

$$ma(t) = F \Leftrightarrow m\ddot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}(t), t) \quad (2.5)$$

dove  $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  è la forza agente sul punto. Notare che il tempo  $t$  che compare nell'equazione è sempre lo stesso e non ha traslazioni di alcun genere (cioè le forze agiscono istantaneamente), e quindi questa è un'equazione differenziale del secondo ordine (in forma normale  $\ddot{x}(t) = \frac{f(\dots)}{m}$ ).

#### Osservazione:

Questa legge non ha validità sempre, per esempio esiste la forza di reazione di radiazione su una particella carica  $q$  da parte del campo da essa generato (Abraham-Lorentz).

$$f_{rad} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \dot{a}(t) \quad (2.6)$$

$p_{rad} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} |\dot{a}(t)|^2$  potenza irraggiata dalla particella (Larmor). Quindi se la particella è carica e la sua accelerazione varia abbastanza velocemente, allora la forza dipende anche da altre derivate e si entra in una fisica classica e non newtoniana.

Si può conoscere il moto dal secondo principio della dinamica per il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Fissando allora posizione, e velocità all'istante iniziale allora segue una soluzione unica, una sola legge oraria, in un intervallo di tempo sufficiente piccolo intorno all'istante iniziale fissato:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{f(x(t), \dot{x}(t), t)}{m} \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Il teorema di Cauchy assicura l'esistenza e l'unicità *locale*, servono condizioni ben più forti per avere l'esistenza e unicità globali<sup>2</sup>. Tutto implica in modo diretto il determinismo newtoniano. Un altro modo di vederlo è tramite Taylor ponendo  $h = t - t_0$  si ha:

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)h + \ddot{x}(t_0) \frac{h^2}{2} + o(h^3) \dots \quad (2.8)$$

$$= x_0 + v_0 h + \frac{f(x_0, v_0, t_0)}{m} \frac{h^2}{2} + o(h^3) \quad (2.9)$$

Per avere un precisione migliore per la soluzione di  $x(t)$  vicino a  $t = t_0$  servono derivate di ordine superiori, come si fa? Si deriva rispetto al tempo l'equazione di Newton, cosa che si può fare soltanto se è in forma *normale*, infatti se per assurdo la forza dipendesse anche da  $\frac{d^3x}{dt^3}$  facendo la derivata (totale!) dell'equazione di Newton comparirebbe anche un'equazione che ha come incognite  $\frac{d^3x}{dt^3}$  e  $\frac{d^4x}{dt^4}$  che è evidentemente non risolvibile con le informazioni a disposizione.  $\frac{d}{dt} \frac{1}{m} f(\dots) = \frac{1}{m} \left( \frac{d}{dt} (\dots) \dot{x} + \dots \right)$ . Questo è un principio di determinismo newtoniano regolato da un'equazione differenziale ordinaria.

È importante sottolineare che l'equazione di Newton è un'equazione *vettoriale*, quindi il problema di Cauchy scritto prima è un sistema di ben 9 equazioni (3 differenziali scalari di secondo ordine e 6 algebriche).

---

<sup>2</sup>che poi sorprendentemente sono sempre verificate nel mondo reale

## 2. Principi di Newton

---

### 2.3 Alcuni esempi di forze

Inizialmente ha senso considerare casi banali ovvero in cui la forza è della forma  $f(t)$ , ovvero la forza è indipendente da  $x(t)$  e  $\dot{x}(t)$ .

$$m\ddot{x} = f(t) \rightarrow \ddot{x} = \frac{f(t)}{m} \quad (2.10)$$

La soluzione di questo problema è si trova integrando:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{x}(0) + \frac{1}{m} \int_0^t f(s) ds \\ x(t) &= x(0) + t\dot{x}(0) + \frac{1}{m} \int_0^t \int_0^u f(s) ds du \end{aligned} \quad (2.11)$$

Seguono esempi più complessi.

#### Tema (N.1): Attrito viscoso 1d

L'equazione del moto è:

$$m\ddot{x}(t) = -\gamma\dot{x} \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \gamma > 0 \end{cases} \quad (\text{N.1 - 1})$$

Questo problema è equivalente a risolvere:

$$\dot{v} = -\frac{\gamma}{m}v \quad v = \dot{x} \quad (\text{N.1 - 2})$$

Che può essere riformulato in maniera più efficace definendo  $\mu = \frac{\gamma}{m} > 0$  ottenendo:

$$\boxed{\dot{v} = -\mu v} \quad (\text{N.1 - 3})$$

La soluzione è del tipo:  $v(t) = Ce^{-\mu t}$ . Esistono diversi modi di risolvere questa equazione per esempio per:

- separazione di variabili  $\frac{dv}{dt} = -\mu v \rightarrow \frac{dv}{v} = -\mu dt$  e poi si integra.

- serie di potenze

si esprime la soluzione come

$$v(t) = \sum_{j \geq 0} c_j t^j \quad (\text{N.1 - 4})$$

e si cerca un'espressione per  $c_j$ .<sup>a</sup> Esprimendo la derivata prima si ha:

$$\dot{v}(t) = \sum_{j \geq 0} c_j j t^{j-1} \quad (\text{N.1 - 5})$$

Innanzitutto si osserva che  $j \neq 0$  in quanto se  $j = 0$  si avrebbe un termine di grado  $-1$ . La somma allora si può restringere a  $j \geq 1$ .

Cambiando poi l'indice di sommatoria con  $n = j - 1$  si riscrive

$$\sum_{n \geq 0} c_{n+1}(n+1)t^n \quad (\mathcal{N}.1 - 6)$$

prima di eguagliare col termine di sinistra ( $\mathcal{N}.1 - 4$ ) rinomino l'indice  $j$  con  $n$ :

$$\sum_{n \geq 0} c_{n+1}(n+1)t^n = -\mu \sum_{n \geq 0} c_n t^n \quad (\mathcal{N}.1 - 7)$$

È possibile portare tutto a sinistra e scrivere come un'unica sommatoria:

$$\sum_{n \geq 0} (c_{n+1}(n+1) + \mu c_n) t^n = 0 \quad (\mathcal{N}.1 - 8)$$

Il simbolo di uguale è riferito a ogni termine della sommatoria, quindi significa identicamente uguale a 0 ( $\forall t$ ). Si trova così l'equazione che devono soddisfare i coefficienti della serie:

$$\begin{aligned} c_{n+1}(n+1) + \mu c_n &= 0 & \forall n \geq 0 \\ c_{n+1} &= -\mu \frac{c_n}{n+1} \end{aligned} \quad (\mathcal{N}.1 - 9)$$

La forma dei coefficienti si può determinare per ricorrenza. Procedendo iterativamente si può dedurre che l'algoritmo è:

$$c_n = (-1)^n \frac{\mu^n}{n!} c_0 \quad (\mathcal{N}.1 - 10)$$

Da cui segue:

$$\Rightarrow v(t) = \sum_{n \geq 0} c_n t^n = c_0 \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(\mu t)^n}{n!} = c_0 e^{-\mu t} \quad (\mathcal{N}.1 - 11)$$

Dove nell'ultima uguaglianza si è voluto mostrare che il calcolo non è altro che l'espansione di Taylor dell'esponenziale.

## 2. Principi di Newton

---

### Osservazioni:

(i) Nell'equazione di partenza ( $\mathcal{N}.1 - 3$ ) si poteva porre  $\mu = 1$  senza perdere di generalità, semplicemente consiste nel riscalamento del tempo  $t' = \mu t$ .

(ii) Il caso in esame è quello unidimensionale in cui  $t \in \mathbb{R}$ . È possibile estendere al caso multidimensionale promuovendo  $v$  a vettore  $v \in \mathbb{R}^d \Rightarrow c_j \in \mathbb{R}^d$ . Si avrebbe allora:

$$v(t) = e^{-\mu t} c_0 \quad c_0 \in \mathbb{R}^d, \mu \in \mathbb{R} \quad (\mathcal{N}.1 - 12)$$

Senza violare questa uguaglianza si potrebbe anche promuovere  $\mu$  a una matrice  $\mu = A$  di dimensione  $d \times d$ , infatti  $Av \in \mathbb{R}^d$ . È facile vedere che con questa generalizzazione ogni passaggio eseguito precedentemente risulta ancora valido prestando però attenzione all'ordine dei fattori.

$$\dot{v} = -Av \Rightarrow v(t) = e^{-At} c_0 \quad (\mathcal{N}.1 - 13)$$

Dove  $c_0$  è un vettore di dimensione  $d$  e ha il significato di  $v_0$  nella risoluzione del problema di Cauchy. L'esponenziale di matrice assume il significato della sua espansione in serie:  $e^z := \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ .

---

<sup>a</sup>la sommatoria potrebbe andare da 0 ad  $N$  fissato, ma si vede subito che se inserita nell'equazione si avrebbe a sinistra un polinomio di grado  $N$  e a destra un polinomio di grado  $N - 2$  e quindi è necessario che la sommatoria arrivi a  $\infty$ .

Nell'osservazione dell'esempio precedente si è implicitamente utilizzato il risultato del teorema di *Caley Hamilton* per estendere il problema al caso multidimensionale.

## 2.4 Teorema di Caley-Hamilton

### Teorema 2.1

*A, matrice quadrata qualunque, soddisfa la sua equazione caratteristica.  $P_A(A) = 0$ , dove  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1})$ .*

Questa identità implica che si possa scrivere l'equazione:  $c_0 + c_1 A + \dots + c_d A^d = 0$ .

Se  $c_d \neq 0$  segue che  $A^d = c_d^{-1}(-c_0 - c_1 A - \dots - c_{d-1} A^{d-1})$ , allora per risolvere il problema multidimensionale non serve calcolare infinite potenze di  $A$  ma un numero finito perché la potenza  $A^d$  si può ottenere a partire dalle potenze precedenti.

**Dimostrazione:** Sia  $A$  matrice  $2 \times 2$ .

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = \quad (2.12)$$

$$= \lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{\text{tr}(A)} + \underbrace{(ad-bc)}_{\det(A)} \quad (2.13)$$

Questo è un polinomio di grado 2, ed è dunque fattorizzabile nella forma:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2 \quad (2.14)$$

Con  $\lambda_{1,2}$  autovalori di  $A$  per definizione. Si evince immediatamente che i coefficienti dell'equazione caratteristica sono funzioni degli autovalori della matrice  $A$  e quindi sono invarianti per coniugazione. Cioè data  $S$  matrice  $n \times n$  se  $A$  ha dimensione  $n \times n$  se

$$A \rightarrow S^{-1}AS \Rightarrow \det(S^{-1}AS - \lambda \mathbb{1}) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) \quad (2.15)$$

Essendo il polinomio invariante lo sono anche gli autovalori.

Se al posto di  $\lambda$  si inserisce la matrice  $A$  si ottiene:

$$P_A(A) = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Riscrivendo (2.12) come  $A^2 = \tau A + \delta \mathbb{1} = 0$  con ovvio significato dei simboli segue che  $A^2 = \tau A - \delta \mathbb{1}$ . Determinata la potenza 2 si può scrivere la potenza 3 come  $A \cdot A^2$

$$A^3 = AA^2 = \tau A^2 - \delta A = \tau(\tau A - \delta \mathbb{1}) - \delta A = (\tau^2 - \delta)A - \tau \delta \mathbb{1} \quad (2.17)$$

## 2. Principi di Newton

---

Allora iterando questo per gli ordini successivi si deduce che qualsiasi potenza di  $A$  è funzione della traccia e del determinante di  $A$ . In particolare:

$$A^n = \alpha(\tau, \delta)A + \beta(\tau, \delta)\mathbb{1} \quad (2.18)$$

□

Di conseguenza se  $f(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$  allora si può riformulare il problema nella forma  $f(A) = \sum_{n \geq 0} c_n A^n = c_0 \mathbb{1} + c_1 A + \dots + c_n A^n$ . Per Caley Hamilton le potenze che intervengono in questo sviluppo sono due, la potenza 1 e 0.

**Osservazioni:**

- (i) Se  $A$  è invertibile allora anche  $A^{-1}$  è combinazione lineare di  $A$  e  $\mathbb{1}$ . Quindi è possibile applicare il teorema per la risoluzione di funzione analitiche con potenze negative.

$$A^{-1} = \frac{1}{\delta} (\tau \mathbb{1} - A) \quad (2.19)$$

- (ii) Se  $\lambda_j$  è autovalore di  $A$ , allora  $\lambda_j^2 - \tau \lambda_j + \delta = 0$

$$\Rightarrow f(\lambda_j) = \alpha(\tau, \delta) + \beta(\tau, \delta)\lambda_j \quad (2.20)$$

Grazie a questo teorema è possibile scrivere una formula risolutiva per un qualsiasi problema della forma  $\dot{x} = Ax$  le cui soluzioni sono  $x(t) = e^{tA}c$ . In cui  $A$  è una matrice  $2 \times 2$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{C}^2$  e  $c = x(0) \in \mathbb{R}^2$ . Per il teorema di Caley Hamilton è possibile scrivere:

$$e^{tA} \stackrel{\mathcal{C}-\mathcal{H}}{=} g(t)\mathbb{1} + h(t)A \quad (2.21)$$

Quindi il problema ora è trovare un'espressione per  $h(t)$  e  $g(t)$ . Innanzitutto si vede che se  $t = 0$  risulta che

$$\mathbb{1} = g(0)\mathbb{1} + h(0)A \quad (2.22)$$

che è vera  $\forall A \iff g(0) = \mathbb{1}$  e  $h(0) = 0$ . Sfruttando ora l'osservazione 2 è possibile sostituire ad  $A$  i suoi autovalori ed ottenere un'equazione equivalente:

$$\begin{cases} e^{t\lambda_1} = g(t) + h(t)\lambda_1 \\ e^{t\lambda_2} = g(t) + h(t)\lambda_2 \end{cases} \quad (2.23)$$

Adesso questo sistema è risolvibile per  $g(t)$  e  $h(t)$ .

$$(I - II) = e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2} = h(t)(\lambda_1 - \lambda_2)$$

$$\Rightarrow h(t) = \boxed{\frac{e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}} \quad (2.24)$$

$$(I\lambda_2 - II\lambda_1) = \lambda_2 e^{t\lambda_1} - \lambda_1 e^{t\lambda_2} = g(t)(\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$\Rightarrow g(t) = \boxed{\frac{\lambda_1 e^{t\lambda_2} - \lambda_2 e^{t\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2}} \quad (2.25)$$

La soluzione generale di  $\dot{x} = Ax$  è quindi:

$$x(t) = \left[ \frac{\lambda_2 e^{t\lambda_1} - \lambda_1 e^{t\lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \mathbb{1} + \frac{e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} A \right] c \quad (2.26)$$

Se i due autovalori coincidono, cioè c'è una molteplicità algebrica maggiore di 1 e non c'è una molteplicità geometrica uguale, la soluzione presenta oltre agli esponenziali dei polinomi. Ha senso allora studiare quindi il limite di  $\epsilon \rightarrow 0$ , con  $\lambda_1 = \lambda_2 + \epsilon$ .<sup>3</sup> Riscrivendo  $h(t)$  e  $g(t)$  si ottiene:

$$h(t) = \frac{e^{t(\lambda_2+\epsilon)} - e^{t\lambda_2}}{\epsilon} = e^{t\lambda_2} \frac{e^{t\epsilon} - 1}{\epsilon} = \quad (2.27)$$

$$= e^{t\lambda_2} \frac{\cancel{\lambda_2} + \cancel{\epsilon t} + o(\epsilon^2 t^2) - \cancel{\lambda_2}}{\cancel{\epsilon}} \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\uparrow} \boxed{e^{t\lambda_2} t} \quad (2.28)$$

$$g(t) = \frac{(\lambda_2 + \epsilon)e^{t\lambda_2} - \lambda_2 e^{t(\lambda_2+\epsilon)}}{\epsilon} = e^{t\lambda_2} \frac{\lambda_2 + \epsilon - \lambda_2 e^{t\epsilon}}{\epsilon} \quad (2.29)$$

$$= e^{t\lambda_2} \frac{\cancel{\lambda_2} + \epsilon - \lambda_2(\cancel{\lambda_2} + t\epsilon + o(t^2\epsilon^2))}{\epsilon} \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\uparrow} \boxed{e^{t\lambda_2}(1 - \lambda_2 t)} \quad (2.30)$$

### Esercizio 2.4.1

Fare il calcolo per  $\lambda_1 = \gamma + i\omega$  e  $\lambda_2 = \gamma - i\omega$ . Suggerimento  $e^{(\gamma+i\omega)t} = e^{\gamma t} e^{i\omega t}$

#### Osservazione:

In generale  $e^{A+B} \neq e^A e^B$ . Ciò vale  $\iff AB = BA$ , ovvero se e solo se commutano.

---

<sup>3</sup>Come si avvicinano i due autovalori? Prendendo due autovalori qualsiasi ( $\in \mathbb{C}$ ) se questi sono sulla retta dei reali allora quando si avvicinano fino a coincidere ( $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ ) dovranno sempre rimanere sulla retta dei reali, questo perchè le soluzioni complesse, quelle fuori dalla retta dei reali, sono una la complessa coniugata dell'altra. Allora significa che se un autovalore si avvicina all'altro passando per il piano complesso produrrà automaticamente una soluzione complessa coniugata creando dunque un terzo autovalore che non ha senso di esistere.

### Tema ( $\mathcal{N}.2$ ): Oscillatore armonico

$$m\ddot{x} = -kx \longrightarrow \boxed{\ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2x} \quad (\mathcal{N}.2 - 1)$$

$w := \sqrt{\frac{k}{m}} \geq 0$  pulsazione propria dell'oscillatore.

Una rapida analisi a priori porta a capire che riscalando il tempo di un fattore  $\omega$  il problema è ridotto alla ricerca di funzioni tali che derivate due volte diano la funzione stessa cambiata di segno. Funzioni di questa forma sono  $\sin(\omega t)$  e  $\cos(\omega t)$  e dunque, essendo l'equazione lineare ed omogenea, la soluzione sarà una combinazione lineare delle due funzioni.

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (\mathcal{N}.2 - 2)$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ . Questa è la famiglia a due parametri delle soluzioni. I parametri sono due perchè il moto è determinato assegnando i due valori iniziali nell'equazione di Newton, posizione e velocità. La soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

Esistono diverse strade per risolvere l'equazione ( $\mathcal{N}.2 - 1$ ).

- Espansione in serie di potenze, è analogo al procedimento dell'esempio precedente. Posto  $\tau := \omega t$  si cerca la soluzione nei polinomi di grado infinito:

$$x(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tau^n \quad (\mathcal{N}.2 - 3)$$

Si usano quindi le serie di potenze<sup>a</sup> e calcolando le derivate prime e seconde si ha:

$$\begin{aligned} \dot{x}(\tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \tau^{n-1} \\ \ddot{x}(\tau) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n \tau^{n-2} \end{aligned} \quad (\mathcal{N}.2 - 4)$$

E rinominando gli indici ( $n \rightarrow n+2$ ) si ha:

$$\ddot{x}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} \tau^n \quad (\mathcal{N}.2 - 5)$$

Ora sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$\sum_{n=0} (n+2)(n+1)c_{n+2}\tau^n = \sum_{n=0} -c_n\tau^n$$

Due polinomi sono uguali se e solo se i coefficienti di  $\tau$  dello stesso grado sono uguali, ovvero:

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+1)}$$

Si noti che la conoscenza di  $c_0$  e  $c_1$  è indipendente<sup>b</sup> tra loro e che è determinata proprio dalle condizioni iniziali. si distinguono ora due casi:

- Calcolando i primi termini di indice pari (supposto  $c_0 \neq 0$ ) si ha:  $c_0$ ,  $c_2 = -\frac{c_0}{2 \cdot 1}$ ,  $c_4 = -\frac{c_2}{4 \cdot 3} = \frac{c_0}{4!}, \dots$

I coefficienti sono a segni alterni e il denominatore è il numero dell'indice fattoriale. Quindi la soluzione è

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{c_0}{(2k)!} \quad (\mathcal{N.2 - 6})$$

## 2. Principi di Newton

---

Quindi la sommatoria degli indici pari che compare nell'espressione di  $x(\tau) = \sum_{n=0} c_n \tau^n$  vale:

$$\Rightarrow x_1(\tau) = \left( \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k \tau^{2k}}{(2k)!} \right) c_0 = \cos(\tau) c_0$$

- In modo analogo a prima si ha (supposto che  $c_1 \neq 0$ ):

$$c_1, c_3 = -\frac{c_1}{3 \cdot 2}, c_5 = -\frac{c_3}{5 \cdot 4} = \frac{c_1}{5!}$$

In generale:

$$c_{2k+1} = (-1)^k \frac{c_1}{(2k+1)!} \quad (\mathcal{N.2} - 7)$$

Quindi la sommatoria dei soli indici dispari per  $x(\tau)$  restituisce:

$$x_2(\tau) = \left( \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{\tau^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) c_1 = \sin(\tau) c_1$$

Il collegamento di tali funzioni con la circonferenza goniometrica viene dopo, infatti tutte le proprietà trigonometriche possono essere dimostrate a partire dalle definizioni di sin e cos scelte.

In ogni caso la soluzione generale è di conseguenza

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \sum_{n=0} c_n \tau^n = x_1(\tau) + x_2(\tau) = c_0 \cos(\tau) + c_1 \sin(\tau) \\ x(t) &= a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \end{aligned}$$

esattamente come detto prima.

- Riscrivere l'equazione nella forma  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)^c$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \iff \left( \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) x = \quad (\mathcal{N.2} - 8)$$

$$= \boxed{\left( \frac{d}{dt} + i\omega \right) \left( \frac{d}{dt} - i\omega \right) x = 0} \quad (\mathcal{N.2} - 9)$$

L'ordine dei due termini tra parentesi è indifferente, allora la soluzione del problema si può cercare studiando le due parentesi separatamente:

$$\left( \frac{d}{dt} \pm i\omega \right) x = 0 \quad (\mathcal{N.2} - 10)$$

Che si può riscrivere come:  $\dot{x} = (\mp i\omega)x$  la cui soluzione è immediata:

$$x(t) \propto e^{\mp i\omega t} = \alpha e^{\omega t} + \beta e^{-i\omega t} \quad (\mathcal{N.2} - 11)$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . La soluzione cercata però deve essere reale non complessa, questo si risolve banalmente ricordando che  $\bar{e}^z = e^{\bar{z}}$ , se  $z \in \mathbb{C}$ , dunque è sufficiente porre  $\beta = \bar{\alpha}$  così che  $x(t) \in \mathbb{R}$  inoltre tale condizione continua a far sì che  $x(t)$  sia soluzione.

$$x(t) = \alpha e^{i\omega t} + \bar{\alpha} e^{-i\omega t} = 2\operatorname{Re}(\alpha e^{i\omega t}) \quad (\mathcal{N.2} - 12)$$

È possibile scrivere  $\alpha = \alpha' + i\alpha''$  così da ottenere:

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha' (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + i\alpha'' (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \\ x(t) &= \underbrace{2\alpha'}_a \left( \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right) + \underbrace{-2\alpha''}_{+b} \left( \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right) \end{aligned}$$

E sfruttando le formule di Eulero:  $\begin{cases} \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (\mathcal{N.2} - 13)$$

- spazio delle fasi

$$\ddot{x} = -\omega^2 x(t) \iff \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 x \end{cases} \quad (\mathcal{N.2} - 14)$$

Si definisce  $z(t) := \frac{\omega x(t) + iv(t)}{\sqrt{2}}$ , il fattore  $\sqrt{2}$  non è essenziale, è inserito soltanto perché è nota cosa viene dopo e quindi si fa una semplificazione a priori. Invece il fattore  $\omega$  davanti a  $x(t)$  è essenziale, in quanto dopo si vuole far comparire qualcosa del tipo  $\dot{z} = z$  e se non ci fosse non comparirebbe  $z(t)$  nell'espressione di  $\dot{z}(t)$ . Infatti:

$$\dot{z}(t) = \frac{\omega \dot{x}(t) + i\ddot{x}(t)}{\sqrt{2}} \quad (\mathcal{N.2} - 15)$$

## 2. Principi di Newton

---

E utilizzando il fatto che in questo caso  $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$  si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \frac{\omega \dot{x}(t) - i\omega^2 x(t)}{\sqrt{2}} \\ &= -i\omega \frac{\omega x(t) + i\dot{x}(t)}{\sqrt{2}} = -i\omega z(t) \\ \implies \dot{z}(t) &= -i\omega z(t)\end{aligned}\tag{N.2 - 16}$$

Ma questa ha una soluzione banale (variabili separabili):

$$\implies z(t) = z(0)e^{-i\omega t}$$

**Osservazione:**

$$|z(t)| = |z(0)||e^{-i\omega t}| = |z(0)|\tag{N.2 - 17}$$

Il moto avviene lungo una circonferenza<sup>d</sup> perché il modulo del numero complesso (distanza dal punto complesso 0+i0) è costante e vale  $|z(0)|$ . Il verso di percorrenza è orario (per il segno -, quindi per  $t$  che cresce l'angolo diminuisce e diventa sempre più negativo) con velocità angolare  $-\omega$ , e quindi per trovare il periodo di percorrenza della circonferenza (che corrisponde anche al periodo del moto reale) basta calcolare  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Inoltre i parametri liberi sono sempre due, in quanto la funzione  $z(t)$  all'istante  $t = 0$  vale proprio  $z(0)$  che per definizione di  $z(t)$  vale

$$z(0) = \frac{\omega x(0) + v(0)}{\sqrt{2}}$$

Il modulo quadro di tale numero complesso è uguale all'energia totale diviso la massa  $|z(0)|^2 = \frac{E}{m}$ . Quindi fisicamente  $|z(0)|$  rappresenta  $\sqrt{\frac{E}{m}}$ . Il motivo sta nel fatto che l'energia totale è quadratica sia in  $v$  e che in  $x$ , e quindi non è difficile costruire un vettore 2D la cui norma sia in qualche modo collegata all'energia totale. In ogni caso partendo dalle equazioni di Newton per il moto armonico si è arrivati a concludere, senza alcun uso dell'energia, che si conserva il modulo di  $z(t)$  che è proprio l'energia. Il risultato non è così sorprendente, alla fine dei conti la conservazione dell'energia (o più in generale le leggi di conservazione) sono *sempre* contenute già dentro le equazioni del moto. Inoltre per un sistema 1D di secondo ordine (come il nostro) non possono esistere più di un integrale primo,

altrimenti il moto dovrebbe avvenire al massimo su insiemi discreti di punti che è assurdo. Dall'altra parte in questo caso esiste sempre un integrale primo che è proprio l'energia.

Il problema dell'oscillatore armonico si può anche estendere al caso 2D o 3D<sup>e</sup> (considerazioni ulteriori sono fatte nel tema N.4)

$$\ddot{X} = -\omega^2 X \quad (\mathcal{N}.2 - 18)$$

L'equazione si può risolvere per componenti e ogni componente soddisfa l'equazione ( $\mathcal{N}.2 - 1$ ).

$$\ddot{x}_j = -\omega^2 x_j \rightarrow x_j(t) = a_j \cos(\omega t) + b_j \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_d(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) \\ \vdots \\ a_d \cos(\omega t) + b_d \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Nessuno vieta che  $\omega$  sia una matrice:

$$\ddot{X} = -\Omega^2 X \quad (\mathcal{N}.2 - 19)$$

Dove  $\Omega$  è  $\omega$  promosso a matrice. Le condizioni da imporre sono  $\det \Omega \neq 0$  perché il vettore  $b$  in generale è del tipo  $v/\Omega$  e quindi la matrice deve essere invertibile. Il problema è quindi quello già studiato:

$$\ddot{X} + \Omega^2 x = 0 \iff \left( \frac{d^2}{dt^2} + \Omega^2 \right) x = \quad (\mathcal{N}.2 - 20)$$

$$= \boxed{\left( \frac{d}{dt} + i\Omega \right) \left( \frac{d}{dt} - i\Omega \right) x = 0} \quad (\mathcal{N}.2 - 21)$$

<sup>a</sup>Perché non si studiano anche le serie con potenze negative, cioè cose del tipo  $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \tau^n$ ? Perché si è in ambito reale, quindi *tutto* può essere scritto come Taylor.

<sup>b</sup>L'informazione su  $c_i$  dà l'informazione non su quello successivo, ma su quello dopo ancora

<sup>c</sup>in maniera equivalente si potevano ricavare le due radici del polinomio caratteristico di secondo grado associato ottenendo  $\lambda = \pm i\omega$  e procedere alla risoluzione secondo i metodi di analisi.

<sup>d</sup>N.B. ci si riferisce al piano  $(\frac{\omega}{\sqrt{2}}x; \frac{v}{\sqrt{2}})$ , quindi evidentemente nello spazio delle fasi  $(x, v)$  il moto avviene su una ellisse

<sup>e</sup>in realtà il caso 3D è equivalente al 2D perché l'orbita è piana.

### Esercizio 2.4.2

## **2. Principi di Newton**

---

Si consideri il caso di un oscillatore armonico 3D.  $\ddot{x} = -\omega^2 x$

1. Dimostrare che il moto è piano.
  2. Mostrare che l'orbita  $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$  è un'ellisse con origine nel centro delle coordinate. Determinare i semiassi.
-

## 2.5 Principio 3: azione e reazione

*Definite due forze:*

$$\begin{cases} m_1 a_1 = f_{12}(x_{11}, x_{21}, v_{11}, v_{21}, t) \\ m_2 a_2 = f_{21}(x_{22}, x_{12}, v_{22}, v_{12}, t) \end{cases} \quad (2.31)$$

*Per un sistema isolato di 2 punti materiali in un sistema di riferimento inerziale, le forze  $f_{12}$  e  $f_{21}$  soddisfano:*

$$1 \quad f_{12} = -f_{21} \text{ vettorialmente!}$$

$$2 \quad (f_{12} // f_{21}) // (x_1 - x_2)$$

Un esempio di questo principio è  $f_{12} = \varphi_{12}(x_1, x_2, v_1, v_2, t) \cdot \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|}$  con  $\varphi_{12} = \varphi_{21}$ . Questo è il caso di tutte le forze fondamentali.

$$\begin{aligned} \underline{\text{gravità}} &\Rightarrow f_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|x_1 - x_2|^3} (x_1 - x_2) \\ \underline{\text{elettrostatica}} &\Rightarrow f_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|x_1 - x_2|^3} (x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Invece quelle fenomenologiche possono avere una forma diversa (si pensi alla forza normale).

Invece se su una particella agiscono più di una forza?

## 2.6 Principio 4: sovrapposizione delle forze

*In un sistema inerziale di  $n$  punti materiali isolati:*

$$\begin{cases} m_1 a_1 = f_1 \\ \vdots \\ m_n a_n = f_n \end{cases} \quad (2.32)$$

*la forza  $f_i$  agente sulla particella  $i$  è della forma.*

$$f_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n f_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.33)$$

$$f_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \varphi_{ij}(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n, t) \cdot \hat{x}_{ij} \quad (2.34)$$

*Dove  $f_{ij}$  soddisfa il principio 3.*

## 2. Principi di Newton

---

### Esempio: Sole-Terra-Luna

$$m_T \ddot{x}_T = -G \frac{m_T m_S}{|x_T - x_S|^3} (x_T - x_S) - G \frac{m_T m_L}{|x_T - x_L|^3} (x_T - x_L) \quad (2.35)$$

$$m_L \ddot{x}_L = -G \frac{m_L m_S}{|x_L - x_S|^3} (x_L - x_S) - G \frac{m_T m_L}{|x_T - x_L|^3} (x_T - x_L) \quad (2.36)$$

$$m_S \ddot{x}_S = -G \frac{m_T m_S}{|x_T - x_S|^3} (x_T - x_S) - G \frac{m_S m_L}{|x_S - x_L|^3} (x_S - x_L) \quad (2.37)$$

Riscrivere la forza in questo modo rende naturale la derivazione della prima equazione della dinamica che sarà affrontata più avanti.

Siccome la teoria delle equazioni differenziali vettoriali del primo ordine autonome è molto più facile/sviluppata, si riscropongono le equazioni di Newton nel seguente modo (si utilizza  $s$  come tempo):

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = \frac{1}{m} f_i(x_1 \dots x_n, v_1, \dots, v_n, s) \frac{|x_i - x_j|}{x_i - x_j} & i = 1, \dots, n \\ \dot{s} = 1 & s(0) = 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

dove quindi la funzione da cercare è

$$Y = f(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s), v_1(s), \dots, v_n(s), s(s)) \quad (2.39)$$

e l'equazione da risolvere è:

$$\dot{Y} = f(v_1, v_2, \dots, v_n, f_1, \dots, f_n, 1)$$

Quindi con le condizioni iniziali il sistema ha (nello spazio 3D)  $3n + 3n + 3n + 3n + 1 = 12n + 1$  gradi di libertà. Come visto al principio 1 presi due sdr inerziali la trasformazione che li collega è:

$$\begin{cases} x = r + Rx' + Vs' \\ s = s' - t_0 \end{cases} \quad (2.40)$$

Derivando rispetto al tempo la prima equazione:  $v = Rv' + V$

$$\begin{cases} x_i(t) = r + Rx'_i(t) + Vs' \\ v_i(t) = Rv'_i(t) + V & \text{Trasformazione di Galilei (-Newton)} \\ s(t) = s'(t) - t_0 \end{cases}$$

$$G : (x'_i, v'_i, s'_i) \longmapsto (x_i, v_i, s) \quad i = 1, \dots, n \quad (2.41)$$

## 2.7 Principio 5: relatività ristretta di N-G

*Le equazioni del moto di un sistema isolato di  $n$  punti materiali di un sistema inerziale devono essere **invarianti** per ogni trasformazione  $G$  (cioè  $\forall r \in \mathbb{R}^3, \forall V \in \mathbb{R}^3, \forall R : R^T R = \mathbb{1}, \forall t_0 \in \mathbb{R}$ ).*

Si dice ristretta perché si riferisce a una classe ristretta di sistemi. È un *postulato* (come i quattro principi precedenti) che sta a significare che osservatori in due sdr diversi non devono notare differenze nei loro calcoli<sup>4</sup>, cioè le quantità che per esempio l'osservatore 1 misura sono legate con la stessa forma anche per l'osservatore 2: se si ha un corpo di massa  $m = 1Kg$  (che si assume indipendente dal sdr, questo è un altro postulato) allora se si imprime una forza di  $1N$  si deve sempre misurare un'accelerazione di  $1\frac{m}{s^2}$ . Cioè detto in altre parole ancora, se l'equazione che lega  $F, m$  e  $a$  per l'oss. 1 è  $F = ma$ , allora per l'oss. 2 deve avere la stessa forma a vista  $F' = ma'$ .

**Proposizione 2.1.** *L'invarianza Galileiana impone una forma delle forze del tipo:*

$$\varphi_{ij}(\dots|x_i - x_j|, \dots|v_i - v_j| \dots)$$

*Con  $i, j = 1, \dots, n$  e  $i \neq j$ . Cioè  $\varphi_{ij}$  dipende dai moduli  $|x_i - x_j|, |v_i, v_j| \forall i \neq j$  e non dipende esplicitamente dal tempo.*

Quando si fanno delle trasformazioni sui vettori (e da come è definito  $G$ ) si prendono i vettori e si fanno le trasformazioni richieste, nel nostro caso prima una rotazione sul vettore  $x'$ , poi una traslazione del risultato rispetto al vettore  $r + V \cdot (s')$ . Ma, e in certi casi questo è il modo corretto di vedere le cose, le trasformazioni possono essere viste come delle trasformazioni sul sistema di assi (e di fatto lo sono, perché i vettori sono fissi nello spazio, esistenti senza un sistema di coordinate). Per esempio fare una rotazione sui vettori con una matrice  $R$  equivale a ruotare il nostro sdr con una matrice  $R^T$ , simile cosa vale per le traslazioni. E quindi è evidente l'invarianza galileiana: indipendentemente dalla trasformazione usata, che sia una traslazione (dove metto l'origine) o rotazione (da come guardo il sistema, "dritto" o "storto"), il sistema deve avere lo stesso comportamento<sup>5</sup>. Il modulo è, come vedremo, essenziale perché le forze devono dipendere soltanto dal modulo delle distanze reciproche.

---

<sup>4</sup>Una generalizzazione di questa sarà quella di Einstein, quindi due osservatori inerziali non devono essere in grado di distinguere il moto relativo e le trasformazioni che collegano i due sdr sono quelle di Lorentz.

<sup>5</sup>Attenzione! questo è ben diverso dalla mia simmetria per rotazioni, basta immaginare un qualsiasi sistema a due corpi

## 2. Principi di Newton

---

**Dimostrazione:**

$$\begin{cases} R\dot{x}'_i + V\dot{s}' = Rv'_i + V \\ R\dot{v}'_i = \frac{1}{m_i} f_i(r + Rx'_j + Vs', \dots, Rv'_j + V, s' - t_0) \\ \dot{s} = 1 \end{cases} \quad (2.42)$$

Siccome  $\dot{s}' = 1$  (usiamo sempre il tempo per parametrizzare le nostre traiettorie):

$$1) \implies \dot{x}'_i = v'_i$$

$$2) \implies \dot{v}'_i = \frac{1}{m_i} R^T f_i(r + Rx'_1 + Vs', \dots, r + Rx'_j + Vs', \dots, Rv'_1 + V, \dots, Rv'_j + V, \dots, s' - t_0)$$

Si pone ora  $t_0 = 0$ ,  $V = 0$ ,  $R = \mathbb{1}$ . Quindi la 2) diventa:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m_i} f_i(r + x'_1, \dots, r + x'_j, \dots, v'_1, \dots, v'_j, \dots, s) = \\ & \frac{1}{m_i} \sum_{j=1, j \neq i}^n \varphi_{ij}(r + x'_1, \dots, x'_j, \dots, v'_1, \dots, v'_j, \dots, s) \cdot \frac{x'_i + r - x'_j - r}{|x'_i + r - x'_j - r|} \end{aligned}$$

Ora utilizzando l'invarianza delle equazione di Newton rispetto alle trasformazioni di Galileo<sup>a</sup> che deve valere  $\forall \mathbf{r}^b$ :

$$\varphi_{ij}(x'_1 + r, x'_2 + r, \dots, x'_n + r, \dots) = \varphi_{ij}(x'_1, \dots, x'_n) \frac{x'_i - x'_j}{|x'_i - x'_j|}$$

$\forall r \iff \varphi_{ij}$  dipende dalle differenze  $x'_k - x'_l$  (possibilmente tutte<sup>c</sup>). Ponendo  $t_0 = 0$ ,  $R = \mathbb{1}$ ,  $r = 0$  e  $V \neq 0$  nella 2) si dimostra allo stesso modo che  $\varphi_{ij}$  dipende dalle differenze  $v_k - v_l$ .

In modo analogo si mostra la presenza del modulo; infatti ponendo  $t_0 = 0, V = 0, r = 0$  e  $R \neq \mathbb{1}$  il membro di destra della 2) diventa:

$$\frac{1}{m_i} \sum_{j=1, j \neq i}^n \phi_{ij}(\dots, Rx'_k - Rx'_l, \dots, Rv'_k - Rv'_l, \dots, s') R^T \frac{R(x'_i - x'_j)}{|Rx'_i - Rx'_j|}$$

Siccome si assume che lo spazio sia euclideo (sostanzialmente le distanza si misurano con il teorema di pitagora) il modulo  $|Rx|$  di una cosa ruotata è semplicemente il modulo  $|x|$ . Invece  $R$  e  $R^T$  al numeratore si semplificano perché  $R^T R = \mathbb{1}$ . Quindi l'unica  $R$  che resta è negli argomenti dei  $\phi_{ij}$ , allora la 2) diventa:

$$v'_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1, j \neq i}^n \phi_{ij}(\dots, Rx'_k - Rx'_l, \dots, Rv'_k - Rv'_l, \dots, s') R^T \frac{R(x'_i - x'_j)}{|Rx'_i - Rx'_j|}$$

che deve essere vera per l'invarianza di Galileo allora  $R$  deve sparire completamente, e inoltre deve farlo  $\forall R$  (essenziale). L'unico modo efficace di farlo è mettere i moduli agli argomenti  $x'_k - x'_l$  e  $v'_k - v'_l$ .

Per l'indipendenza delle forze dal tempo  $t$  si ragiona così: posto  $t_0 \neq 0, V = 0, r = 0$  e  $R = \mathbb{1}$  allora la 2) si riscrive

$$v'_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1, j \neq i}^n \phi_{ij}(\dots, |x'_k - x'_l|, \dots, |v'_k - v'_l|, \dots, s' - t_0) R^T \frac{x'_i - x'_j}{|x'_i - x'_j|}$$

usando ancora l'invarianza di Galileo e la validità dell'equazione  $\forall t_0$  deve essere che o  $s' = t_0 + \text{cost}$  (assurdo, il tempo non si muove) oppure  $s'$  non compare come variabile esplicita nella 2).

□

---

<sup>a</sup>notiamo che nelle condizioni in cui siamo messi ( $t_0 = 0, V = 0, R = \mathbb{1}$ ) il membro di sinistra dell'equazione di newton (la seconda del sistema) non è cambiato, cioè la velocità misurata nel sdr S e sdr S' sono sempre lo stesso vettore, e questo deve essere vero anche per l'evoluzione di tale vettore nel tempo. E questo è possibile se e solo se

## 2. Principi di Newton

---

anche il membro di sinistra non cambia, e siccome questo deve essere vero  $\forall r$  segue quanto scritto sopra

<sup>b</sup>Fatto essenziale, altrimenti si potrebbero porre altre condizioni nell'espressione per rendere vera l'uguaglianza per certi valori di  $r$

<sup>c</sup>di fatto in natura si ha le forze sono due a due:  $\phi_{ij}$  dipende soltanto  $r_j - r_i$

**Corollario 2.2.** *Per un punto materiale isolato se vale che  $m \frac{d^2x}{dt^2} = f$ , allora per il principio 5,  $f \equiv 0$ .*

### 3 Forze posizionali

---

3.1	Descrizione del problema . . . . .	27
3.2	Conservazione del momento angolare . . . . .	29
	<u>N.3</u> Oscillatore armonico spaziale . . . . .	29
3.3	Forza di gravitazione . . . . .	33
	Leggi di Keplero . . . . .	33
	Validità dell'approssimazione di massa puntiforme . . . . .	36
3.4	Forza elastica . . . . .	39

---

#### 3.1 Descrizione del problema

Si intendono le forze della forma:

$$f_{ij} = \varphi_{ij}(|x_i - x_j|) \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|} \quad (3.1)$$

Dove  $\varphi_{ij}$  è lo scalare di forza che dipende dalla sola distanza dei due punti materiali e per il principio 3 vale che:  $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$ .

**Osservazione:**

$\varphi_{ij}(r)$  è una funzione reale di variabile reale ( $\geq 0$ ) e quindi esiste sempre una primitiva<sup>6</sup> rispetto alla variabile  $r$ . Tale primitiva viene chiamata energia potenziale associata alla forza in questione:

$$\Phi_{ij}(r) = - \int \varphi_{ij}(r) dr \left( = - \int_A^B f_{ij}(s) \cdot ds \right) \quad (3.2)$$

$$\Rightarrow f_{ij} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_{ij}(|x_i - x_j|) \quad (3.3)$$

---

<sup>6</sup>vedi teorema fondamentale del calcolo integrale

### 3. Forze posizionali

---

**Dimostrazione:**

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_{ij}(|x_i - x_j|) = -\Phi'_{ij}(|x_i - x_j|) \frac{\partial}{\partial x_i} |x_i - x_j| = \quad (3.4)$$

$$-\Phi'_{ij}(|x_i - x_j|) \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\sqrt{(x_i - x_j) \cdot (x_i - x_j)}}_{\text{prodotto scalare}} \quad (3.5)$$

$$-\Phi'_{ij}(|x_i - x_j|) \frac{\frac{\partial}{\partial x_i} (x_i \cdot x_i + x_j \cdot x_j - 2x_i \cdot x_j)}{2\sqrt{(x_i - x_j) \cdot (x_i - x_j)}} \quad (3.6)$$

$$-\Phi'_{ij}(|x_i - x_j|) \frac{\cancel{x}_i - \cancel{x}_j}{2|x_i - x_j|} \quad (3.7)$$

$$-\Phi'_{ij}(|x_i - x_j|) \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|} = \varphi(|x_i - x_j|) \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|} \quad (3.8)$$

□

Questo tipo di forze, dette anche *centrali*, sono quelle presenti tra i punti del sistema isolato (forze interne).

### 3.2 Conservazione del momento angolare

Cruciale per lo studio di forze posizionali è il momento angolare

**Definizione 3.1 (Memento angolare):**  $\ell := \mathbf{x} \times m\dot{\mathbf{x}}$

Adesso utilizzando il momento angolare appena definito ha senso riprendere l'esempio dell'oscillatore armonico per mostrare alcune leggi di conservazione.

#### Tema ( $\mathcal{N}.3$ ): Oscillatore armonico spaziale

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -k\mathbf{x} \rightarrow \ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

Con  $\mathbf{x}, a, b \in \mathbb{R}^3$ . Utilizzando la definizione di momento angolare  $\ell$  il cui modulo è  $|\ell| = |\mathbf{x}| |\mathbf{p}| \sin \theta$  si osserva che se la sua derivata si annulla allora è una quantità conservata, quindi  $\dot{\ell}(t) = \ell(0) \forall t$ . Questo è verificato per l'oscillatore armonico:

$$\dot{\ell} = \frac{d\ell}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{x} \times m\dot{\mathbf{x}}) = \underbrace{\dot{\mathbf{x}} \times m\dot{\mathbf{x}}}_{\dot{\mathbf{x}} // \dot{\mathbf{x}} \Rightarrow = 0} + \mathbf{x} \times m\ddot{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{x} \times (-k\mathbf{x})}_{\mathbf{x} // \mathbf{x} \Rightarrow = 0} = 0$$

Segue che se  $\dot{\ell}(t) = 0 \Rightarrow \ell(t) = \ell(0) = \mathbf{x}(0) \times -k\mathbf{x}(0)$ . Esistono due possibilità:

1.  $\dot{\ell}(0) = 0 \Rightarrow \mathbf{x}(0) // \dot{\mathbf{x}}(0) \Rightarrow \mathbf{x}(t) // \dot{\mathbf{x}}(t) \forall t$
2.  $\dot{\ell}(0) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{x}(t) \not// \dot{\mathbf{x}}(t) \forall t$

Da queste considerazioni segue che

$$\mathbf{x}(t) \cdot \ell(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \mathbf{x}(0) \cdot \ell(0) = 0 = [x_1\ell_1 + x_2\ell_2 + x_3\ell_3 = 0]$$

Che è l'equazione di un piano perpendicolare a  $\ell$  passante per l'origine. Questo implica che il moto dell'oscillatore armonico tridimensionale è piano, il piano è quello dell'equazione ( $\mathcal{N}.3 - 1$ ).

Adesso ha senso chiedersi, data la soluzione del problema:

$$\begin{cases} x_1(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) \\ x_2(t) = a_2 \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t) \end{cases} \quad (\mathcal{N}.3 - 1)$$

Qual è la forma dell'orbita  $\gamma : t \rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ ?

### 3. Forze posizionali

---

Osservando che  $a_1 \cos(\theta) + b_1 \sin(\theta) = A \cos(\theta + \alpha)$  con  $\tan(\alpha) = -\frac{b_1}{a_1}$ .  
Allora

$$\begin{cases} x_1(t) = A \cos(\theta + \alpha) = A \cos(\omega t + \alpha) \\ x_2(t) = B \cos(\omega t + \beta) \end{cases} \quad (\mathcal{N}.3 - 2)$$

Si definisce ora:  $\psi := \omega t + \alpha$  e  $\delta := \beta - \alpha$ .

$$\begin{cases} x_1(t) = A \cos(\psi) \\ x_2(t) = B \sin(\psi + \delta) \end{cases} \quad (\mathcal{N}.3 - 3)$$

Dalla prima si trova  $\boxed{\frac{x_1}{A} = \cos(\psi)}$  e dalla seconda

$$\frac{x_2}{B} = \cos \beta \cos \delta - \sin \psi \sin \delta \Rightarrow \boxed{\sin \psi = \left( -\frac{x_2}{B} + \frac{x_1}{A} \cos \delta \right)}$$

Sfruttando l'identità trigonometrica  $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{1}{\sin^2 \delta} \left( \frac{x_1}{A} \cos \delta - \frac{x_2}{B} \right)^2 = 1 \quad (\mathcal{N}.3 - 4)$$

Questa è l'equazione di una conica. In particolare è l'equazione di un'ellisse ruotata:

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{x_2^2}{B^2} - \frac{2x_1 x_2}{AB} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (\mathcal{N}.3 - 5)$$

Questo problema può essere posto anche in forma matriciale:

$$(x_1 \ x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{A^2 \sin^2 \delta} & -\frac{\cos \delta}{AB \sin^2 \delta} \\ -\frac{\cos \delta}{AB \sin^2 \delta} & \frac{1}{B^2 \sin^2 \delta} \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1$$

$M$  è una matrice simmetrica perché è associato a una forma bilineare che rappresenta una conica. Allora vale che  $M^T = M$ , allora per il teorema spettrale  $\exists R$ ,

$(R^T R = \mathbb{1} \iff R \text{ è ortogonale})$ , :  $R^T M R = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$  con  $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$  sempre per il teorema spettrale. È possibile scrivere una forma canonica di questa relazione. Siano  $x \in \mathbb{R}^2$  i vettori di  $S''$  e  $y \in \mathbb{R}^2$  i vettori di  $S$ . Sfruttando la

(N.3 - 6) si ha:

$$\begin{aligned}
 x = Ry \Rightarrow (Ry)^T M (Ry) &= 1 \Rightarrow x^T M x = 1 \\
 &= y^T \underbrace{R^T M R}_{{\in D^{2 \times 2}}} y = 1 = (y_1 \ y_2) \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (\text{N.3 - 6}) \\
 &\Rightarrow \boxed{m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 = 1}
 \end{aligned}$$

Si può dimostrare che  $m_1$  e  $m_2$  esistono sempre:

$$\begin{aligned}
 \det(m - \lambda \mathbb{1}) = 0 &\iff \lambda^2 - \text{tr}(M)\lambda + \det M = 0 \\
 \iff \lambda^2 + \frac{1}{A^2 B^2 \sin^4 \delta} - \frac{\cos^2 \delta}{A^2 B^2 \sin^4 \delta} - \left( \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} \right) \frac{\lambda}{\sin^2 \delta} &= 0 \\
 \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ \underbrace{\left( \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} \right) \frac{1}{\sin^4 \delta}}_{\tau > 0} \pm \sqrt{\left( \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \delta} - \underbrace{\frac{4}{A^2 B^2 \sin^2 \delta}}_{\gamma > 0}} \right]
 \end{aligned}$$

Se  $\lambda_{\pm}$  esistono devono essere positivi enndendo che  $\tau > \tau \sqrt{1 - \frac{\gamma}{\tau^2}}$  con  $\gamma, \tau > 0$ . La matrice  $M$  e la conica ad essa associata sono definite positive.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \exists \lambda_{\pm} \in \mathbb{R} &\iff \left( \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \delta} - \frac{4}{A^2 B^2 \sin^2 \delta} \geq 0 \\
 \iff \frac{1}{A^4 \sin^4 \delta} + \frac{1}{B^2 \sin^4 \delta} + \frac{2}{A^2 B^2 \sin^4 \delta} - \frac{4}{A^2 B^2 \sin^2 \delta} + & \\
 + \underbrace{\frac{2}{A^2 B^2 \sin^4 \delta}}_{+0} - \frac{2}{A^2 B^2 \sin^4 \delta} &\geq 0 \\
 \iff \left( \frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \delta} + \frac{4}{A^2 B^2 \sin^4 \delta} (1 - \sin^2 \delta) &> 0
 \end{aligned}$$

La diseguaglianza è sempre verifica e, come prevedeva il teorema spettrale,  $\lambda_{\pm}$  esistono sempre e i semiassi dell'ellisse sono  $a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_-}}$  e  $b = \frac{1}{\sqrt{\lambda_+}}$ .

**Osservazioni:**

(i) per  $\delta = 0$  l'equazione diventa  $\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{x_1}{B^2} \boxed{-} \frac{2x_1 x_2}{AB} = \left( \frac{x_1}{A} \boxed{-} \frac{x_2}{B} \right)^2 = \iff x_1 = \frac{B}{A} x_1$

(ii) per  $\delta = \pi$  si ha invece  $\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{x_1}{B^2} \boxed{+} \frac{2x_1 x_2}{AB} = \left( \frac{x_1}{A} \boxed{+} \frac{x_2}{B} \right)^2 = \iff x_1 = -\frac{B}{A} x_1$

### 3. Forze posizionali

---

Visto questo esempio si può generalizzare la conservazione del momento angolare:

**Definizione 3.2 (Momento della forza):**  $\ell = \vec{x}(t) \times m\dot{\vec{x}}(t)$

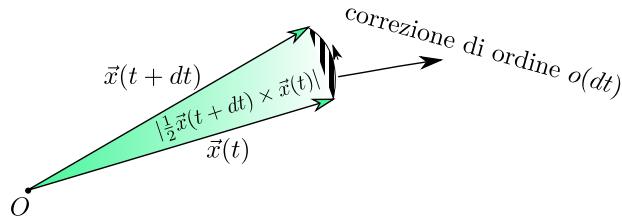
$$\Rightarrow \dot{\ell} = \vec{x}(t) \times m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{x}(t) \times \vec{f}$$

Si vede subito che  $\dot{\ell} = 0 \iff \vec{x} \parallel \vec{f}$ . Essendo il momento della forza derivata del momento angolare quando il primo è nullo il secondo si conserva. Inoltre per la definizione di forza tali per cui  $\vec{f} \parallel \vec{x}$  (perchè  $\vec{f} = \varphi \hat{x}$ ) si può concludere che in un campo di forze centrali  $\dot{\ell} = 0 \Rightarrow \ell$  è conservato.

**Osservazione:**

Una delle conseguenze di quest'ultima conclusione è che quando un corpo è in moto in un campo di forza centrale la sua velocità areolare è costante.

**Dimostrazione:**



Per definizione geometrica la velocità areolare:

$$\Delta A(t) = \frac{|\vec{x}(t) \times \vec{x}(t+dt)|}{2} = \quad (3.9)$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{x}(t) \times (\vec{x}(t) + \dot{\vec{x}}(t)\Delta t + o(\Delta t^2))| = \quad (3.10)$$

$$= \frac{\Delta t}{2m} |\ell(t) + o(\Delta t)| \quad (3.11)$$

$$\Rightarrow \dot{A}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{|\ell(0)|}{2m} = \text{cost} \quad (3.12)$$

□

### 3.3 Forza di gravitazione

$$F_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{(x_i - x_j)^2} \hat{x}_{ij}$$

La forza gravitazionale, a differenza di quella di interazione elettrica, prevede l'esistenza soltanto di massa positiva e quindi è solo attrattiva. Le caratteristiche legate alla gravitazione newtoniana sono descritte dalle:

#### Leggi di Keplero

1. I pianeti si muovo su orbite ellittiche in cui il sole occupa uno dei due fuochi<sup>7</sup>.
2. La velocità aerolare è costante.
3.  $\frac{T^2}{a^3} = \text{cost}$ , essendo  $T$  il tempo di rivoluzione e  $a$  il semiasse maggiore dell'orbita ellittica.

Perché la gravitazione ha questa forma? Un po' è stato già discusso prima, cioè che le forze fondamentali sono di fatto forze centrali. Di seguito è spiegato perché la forma risulta di questo tipo:

- **Perché il prodotto tra le masse?** Una delle grandi conquiste di Newton è stata quella di notare che le forze celesti e quelle terrestri sono le stesse (in contrapposizione alla fisica aristotelica). E sulla terra tutti i corpi cadono con accelerazione costante e quindi vale:

$$a = \text{cost.} = \frac{F_g}{m}$$

ma ci è possibile se e solo se  $F_g \propto m$ . Ovviamente la forza dipende anche dalla massa della Terra che attrae il corpo, quindi  $F \propto m_1 m_2$ ;

- **Perché dipende dall'inverso del quadrato di r?** Si può giustificare in vari modi (per esempio flusso), ma uno dei più importanti, che è quello che riporta Newton, usa l'invarianza di scala  $\frac{T^2}{r^3} = \text{cost}$ . proposta da Keplero osservando il sistema solare.

**Dimostrazione:** Prendendo un sdr inerziale solidale con il sole di massa  $M$  si ha:

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = -GmM\varphi(|x|)\hat{x} \quad (3.13)$$

---

<sup>7</sup>È corretta solo per certe approssimazioni, in realtà i pianeti non compiono vere e proprie orbite ellittiche a causa delle perturbazioni gravitazionali dovute agli altri pianeti.

### 3. Forze posizionali

---

Si può riscalare posizione e tempo come  $\begin{cases} x = ax' \\ t = Tt' \end{cases}$

$$\frac{a}{T^2} \frac{d^2x'}{dt'^2} = GM\varphi(a|x'|)\hat{x}' \quad (3.14)$$

moltiplicando per  $a^2$

$$\frac{a^3}{T^2} \frac{d^2x'}{dt'^2} = GMa^2\varphi(a|x'|)\hat{x}' \quad (3.15)$$

C'è così un riscalamento, quindi le orbite si riducono a una sola e il periodo di rivoluzione diventa unico. Nell'equazione per Keplero  $\frac{a^3}{T^2} =$  costante

$$\frac{a^3}{T^2} = k \longrightarrow \frac{d^2x'}{dt'^2} = \left(\frac{1}{k}GM\right)\varphi(a|x'|)\hat{x}' \quad (3.16)$$

se  $a^2\varphi(a|x'|) = \varphi(|x'|) \iff \varphi(a|x'|) = a^{-2}\varphi(|x'|)$ . Cioè  $\varphi$  è omogenea di grado -2 in  $x'$  e quindi, come dimostriamo sotto, è uguale a  $\frac{1}{x^2}$

□

**Definizione 3.3 (Funzione omogenea):** Una funzione  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  si dice omogenea di grado  $s \in \mathbb{R}$  se  $f(\lambda x) = \lambda^s f(x)$  per qualsiasi  $\lambda > 0$ .

**Teorema 3.1 (Teorema di Eulero per funzioni omogenee)**

Se  $f$  è  $C^1$  e omogenea di grado  $s$ , allora vale che

$$x \cdot \nabla f(x) = sf(x) \quad (3.17)$$

con  $x \in \mathbb{R}^d$ . In particolare se  $d = 1$ ,  $f(x) = c|x|^s$ , dove  $c$  è una costante.

**Dimostrazione:** Derivando rispetto a  $\lambda$  e si pone  $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} \frac{df(\lambda x)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=1} &= \frac{df(\lambda x)}{d\lambda x} \cdot x \Big|_{\lambda=1} = \\ &= x_1 \frac{df(x)}{dx_1} + \dots + x_d \frac{df(x)}{dx_d} = \nabla f(x) \cdot x \end{aligned}$$

I precedenti sono solo identità, valide per ogni funzione.

$$\frac{df(\lambda x)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=1} = \frac{d\lambda^s f(x)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=1} = \quad (3.18)$$

$$= f(x) \frac{d\lambda^s}{d\lambda} \Big|_{\lambda=1} = f(x)s\lambda^{s-1} \Big|_{\lambda=1} = sf(x) \quad (3.19)$$

dove si è usato l'omogeneità della  $f$  rispetto alle  $x$ . Così si conclude la dimostrazione della prima parte dell'enunciato.

Per la seconda parte si nota che per  $d=1$  il teorema di Eulero afferma che  $xf'(x) = sf(x)$  che è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Verificata  $\iff x \frac{df}{dx} = sf \iff \frac{df}{f} = s \frac{dx}{x}$

$$\begin{aligned} \int \frac{df}{f} &= s \int \frac{dx}{x} \iff \ln|f| = s \cdot \ln|x| + c \\ \ln|f| - \ln|x|^s &= c \iff \ln \frac{|f|}{|x|^s} = c \iff |f| = e^c |x|^s \\ f(x) &= c|x|^s \end{aligned} \tag{3.20}$$

Quindi per il teorema di Eulero nel caso gravitazionale precedente dove  $s = -2$  e  $d = 1$ , abbiamo  $\varphi(r) = \frac{c}{r^2}$  e scegliamo  $c=1$  (abbiamo già tirato fuori la  $G$  da questa costante  $c$ ).  $\square$

### Osservazione:

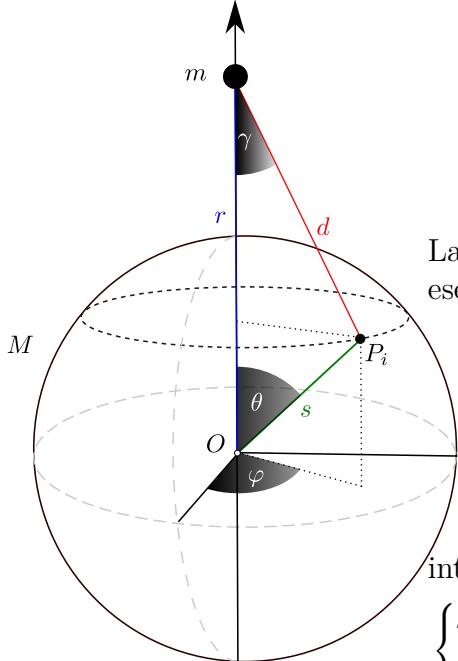
Per  $d = 2$  sia  $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$   $\hat{f}(x, y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$  sono omogenee di grado  $-2$  e sono profondamente diverse. Quindi soltanto per  $d = 1$  esiste una sola forma analitica per le funzioni omogenee.

### 3. Forze posizionali

#### Validità dell'approssimazione di massa puntiforme

Ha senso chiedersi adesso se *la forza a distanza è la stessa che si avrebbe se la massa della terra fosse concentrata tutta nel suo centro*.

Si ipotizza innanzitutto che:



- la densità di massa  $\mathcal{M}$  sia  $\rho(s)$  dove  $s$  è la distanza tra il punto della sfera considerata e il suo centro ( $s = |\overline{OP}_i|$ )
- per simmetria sferica tutti i contributi non paralleli all'asse z si elidono a vicenda

La componente  $z$  della forza (per unità di volume) esercitata da  $P_i$  su  $m$  vale

$$\mathcal{F} = -\frac{Gm\rho(s)\cos\gamma}{d^2} \quad (3.21)$$

Per calcolare la forza complessiva sarà necessario integrare quest'ultima su tutto il volume della sfera.

$$\begin{cases} r = s \cos\theta + d \cos\gamma \\ s \sin\theta = d \sin\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \cos\gamma = r - s \cos\theta \\ d \sin\gamma = s \sin\theta \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d^2 = r^2 + s^2 - 2rs \cos\theta \\ \cos\gamma = \frac{r - s \cos\theta}{d} \end{cases} \quad (3.23)$$

Si può ora riformulare l'espressione di  $\mathcal{F}$  nel seguente modo:

$$\mathcal{F} = -G\rho(s)m \frac{r - s \cos\theta}{[r^2 + s^2 - 2rs \cos\theta]^{3/2}} \quad (3.24)$$

Per  $r > R_T$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -Gm \int_S \frac{\cos\gamma\rho(s)}{d^2} d^3s = \\ &= Gm \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^R ds \rho(s) \frac{(r - s \cos(\theta))s^2 \sin\theta}{(r^2 + s^2 - 2rs \cos\theta)^{3/2}} = \\ &= Gm2\pi \int_0^\pi d\theta \int_0^R ds \rho(s) \frac{\partial}{\partial r} (r^2 + s^2 - 2rs \cos\theta)^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

$\int d\theta, \int ds$  non dipendono da  $r$

$$(3.26)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} Gm2\pi \int_0^\pi d\theta \int_0^R ds \frac{s^2 \rho(s) \sin\theta}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos\theta}} \quad (3.27)$$

Cambio di variabile  $u = -\cos\theta \Rightarrow du = \sin\theta d\theta \Rightarrow -1 \leq u \leq 1$

$$\mathcal{F} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ 2\pi Gm \int_0^R ds \int_{-1}^1 \frac{\rho(s)s^2}{\sqrt{r^2 + s^2 + 2rsu}} du \right] = \quad (3.29)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} \left[ Gm2\pi \int_0^R ds \rho(s) \frac{s^2}{rs} \sqrt{r^2 + s^2 + 2rsu} \right] \Big|_{u=-1}^{u=1} = \quad (3.30)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} \left[ Gm2\pi \int_0^R ds \rho(s) \frac{s}{r} [(r+s) - (r-s)] \right] = \quad (3.31)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{4\pi Gm}{r} \int_0^R ds \rho(s) s^2 \right] = -\frac{Gm}{r^2} \left( 4\pi \int_0^R ds \rho(s) s^2 \right) = \\ = \boxed{-\frac{GmM}{r^2}} \quad (3.32)$$

La risposta quindi è sì, per  $r > R_T$  nell'approssimazione di terra sferica, è possibile utilizzare l'approssimazione di punto materiale posto al centro della sfera la cui massa è quella della terra. Trattandosi di un punto materiale il caso in considerazione è discreto:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_d = -Gm \sum_p \frac{m_p(x-y_p)}{|x-y_p|^3} \\ \mathcal{F}_c = -Gm \int \frac{\rho(s)(x-y)}{|x-y|^3} d^3y \end{cases} \quad (3.33)$$

È possibile passare dal continuo al discreto tramite la funzione delta di Dirac ponendo  $\rho(y) = \sum_p m_p \delta(y - x_p)$ . Nella trattazione appena fatta si è implicitamente utilizzato che  $\rho(y) = \rho(|y|)$ . Ammesso che  $\rho$  non dipenda esclusivamente dal modulo di  $y$  si procede sviluppando il potenziale gravitazionale:

$$U(x) := -Gm \int \frac{\rho(y)d^3y}{|x-y|} = \quad (3.34)$$

$$\stackrel{|x|\gg 1}{=} -Gm \left[ \underbrace{\frac{\int \rho(s)d^3y}{|x|} + \frac{1}{|x|^2} \int \rho(y)(y \cdot \hat{x})d^3y}_{\text{dipolo}} + \underbrace{\frac{1}{|x|^3} \int \rho(y) \frac{3(y \cdot \hat{x})^2 - |y|^2}{2} d^3y}_{\text{quadrupolo}} + O\left(\frac{1}{|x|^4}\right) \right]$$

Il termine di dipolo si può riscrivere come:

$$-Gm \frac{1}{|x|^2} \int \rho(y)(y \cdot \hat{x})d^3y = -Gm \frac{x}{|x|^3} \cdot \underbrace{\left( \int \rho(y)y d^3y \right)}_{\propto \text{centro di massa}} \quad (3.35)$$

$$= -Gm \underbrace{\left( \int \rho(y)d^3y \right)}_{\text{Massa della distribuzione}} \cdot \frac{x}{|x|^3} \cdot X \quad (3.36)$$

### 3. Forze posizionali

---

Con  $X := \frac{\int \rho(y)yd^3y}{\int \rho(y)d^3y}$  ma se si sceglie un sistema di coordinate con origine nel centro di massa allora  $X = 0$  e quindi anche il termine di dipolo. Per la prima equazione cardinale della dinamica la risultante delle forze esterne è uguale alla massa totale per l'accelerazione del centro di massa. Essendo le forze esterne nulle allora il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme, quindi per il principio della relatività di Galileo esiste un sistema di riferimento inerziale per cui  $X = 0 \forall t$ .

**Osservazione:**

Nel caso dell'elettrostatica  $\rho$  assume il senso della *densità di carica*, a differenza del potenziale gravitazionale il la correzione di dipolo non si può annullare, mettendosi in un sistema di riferimento opportuno con una trasformazione di coordinate, perchè il *centro di carica* non soddisfa la stessa proprietà del baricentro.

### 3.4 Forza elastica

$$\varphi_{ij} = -k_{ij}|x_i - x_j|$$

Viene detta anche legge di Hooke ed è una forza di carattere fenomenologico (ha cause più fondamentali e l'equazione citata sopra può essere derivata da equazioni più fondamentali della natura). Quello scritto sopra è il modulo (con segno) della forza, invece  $F$  è:

$$F_{ij} = -k_{ij}(x_i - x_j)$$

$k$  può essere positivo (forza repulsiva) o negativo (forza attrattiva).

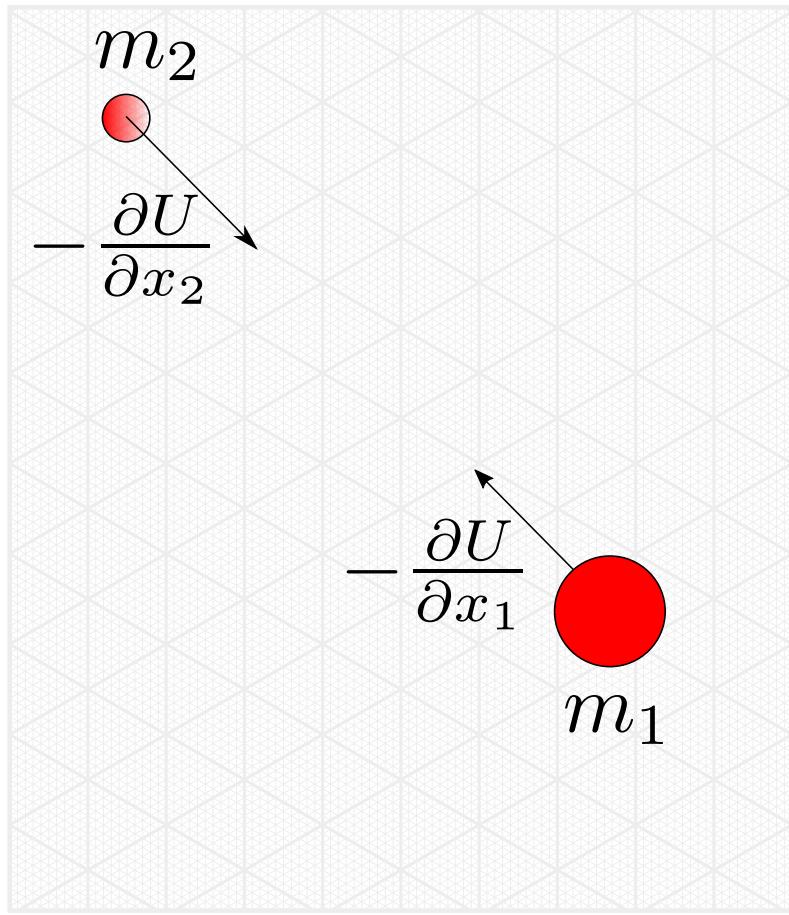
## 4 Problema dei due corpi: moto centrale

---

4.1	Descrizione del problema . . . . .	40
4.2	Coordinate polari . . . . .	43
4.3	Moto centrale in coordinate polari . . . . .	45
4.4	Moto centrale nel piano complesso . . . . .	45
	<u>N.4</u> Potenziale gravitazionale, I legge di Keplero . . . . .	48
	<u>N.5</u> La terza legge di Keplero . . . . .	54
4.5	Leggi di conservazione . . . . .	56
	<u>N.6</u> Problema <i>ristretto</i> dei tre corpi <i>circolare piano</i> . . . . .	59

---

### 4.1 Descrizione del problema



Analizzando il caso di moto di 2 corpi interagenti con una forza centrale:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} = -U'(|x_1 - x_2|) \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|} \\ m_2 \ddot{x}_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2} = +U'(|x_1 - x_2|) \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|} \end{cases} \quad (4.1)$$

Dove si è usata ' per indicare la derivata rispetto a  $r = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$ . Ora si nota che per la posizione del CM vale che:

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \rightarrow \ddot{X} = 0 \quad (4.2)$$

e quindi si può dedurre che il moto relativo sia in qualche modo semplice, in quanto è l'unico moto che ha veramente senso in un universo che contiene soltanto i due corpi:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{1}{m_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ \ddot{x}_2 = -\frac{1}{m_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\rightarrow \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) U'(|x_1 - x_2|) \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|} \quad (4.4)$$

e infatti definendo  $x := x_1 - x_2$  e  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  la massa ridotta.

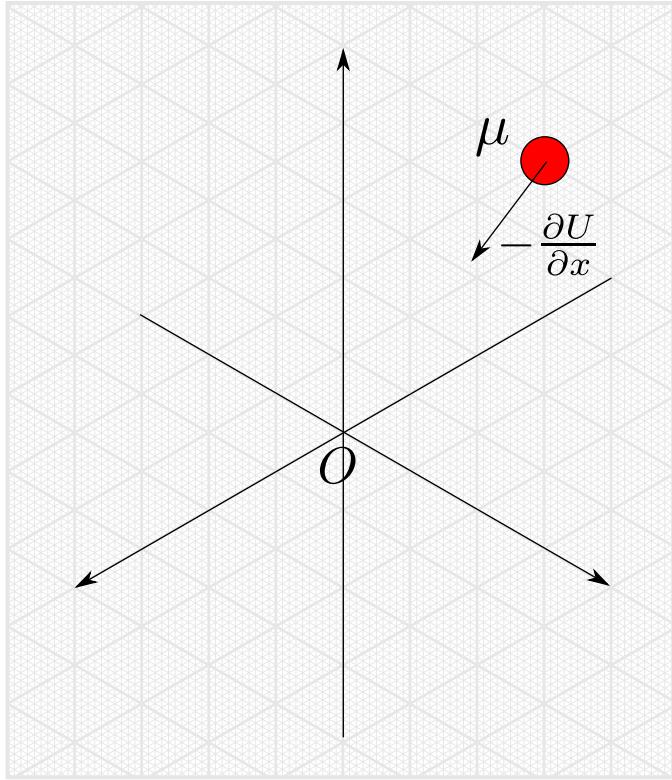
$$\rightarrow \mu \ddot{x} = -\frac{dU(r)}{dr} \frac{x}{|x|} = -\frac{\partial U(|x|)}{\partial x} \quad \text{dinamica relativa}$$

e quindi il moto relativo è descritto come se si avesse una particella sola di massa  $\mu$  con forza  $-\frac{\partial U}{\partial x}$ , la stessa che agisce su ciascuna particella. Ovviamente è la stessa equazione che si ottiene mettendosi nel sdr (*non* inerziale) solidale ad una delle particelle. E forse il procedimento ha anche più senso da punto di vista logico, ma sono equivalenti. In ogni caso quello che si vuole concludere è che il moto è quello centrale di una sola particella con la forza diretta verso il centro, quindi è possibile studiare più in generale questi tipi di moti.

#### 4. Problema dei due corpi: moto centrale

---

**Definizione 4.1 (Moto centrale):** è il moto di un punto materiale di massa  $\mu$  che si muove sotto l'azione di una forza centrale (conservativa) di energia potenziale  $U(|x|)$ .



Ricordando che il momento angolare della particella è  $\ell = x \times \mu \dot{x}$  si vede che quest'ultimo si conserva:

$$\dot{\ell} = \underbrace{\dot{x} \times \mu \dot{x}}_{\dot{x} \parallel \dot{x}}^0 + x \times \mu \ddot{x} = x \times \underbrace{(-U'(|x|)) \frac{x}{|x|}}_{F_{central} \parallel x} \equiv 0$$

Dal fatto che  $\dot{\ell} = 0$  e ricordando che  $\ell$  è perpendicolare sia a  $x$  che  $\dot{x}$  consegue che il moto è piano.

Supponendo di conoscere  $\ell$ , qual è il piano su cui avviene il moto?

È il luogo dei punti/vettori  $x$  perpendicolari a  $\ell$ :  $\ell \cdot x = 0$  è l'equazione di un piano passante per l'origine con parametri di giacitura le componenti di  $\ell_x x + \ell_y y + \ell_z z = 0$ . Ovviamente conoscendo  $x_0$  e  $\dot{x}_0$ ,  $\ell$  è determinato dalla  $(x \times \mu \dot{x})$ , e da qui il piano di moto.

Quindi mettendosi nel piano di moto, il problema è bidimensionale (è addirittura monodimensionale) chiamando  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  le equazioni di moto scomposte lungo

i due assi diventano:

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \mu \ddot{x} = -U'(r) \frac{x}{r} \\ \mu \ddot{y} = -U'(r) \frac{y}{r} \end{cases} \quad (4.5)$$

però il problema ha chiaramente più senso se posto in coordinate polari, dopotutto la forza dipende solo da  $r$  e gode di simmetria circolare. Quindi il cambio di coordinate è:

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = r(t) \sin \theta(t) \end{cases}$$

## 4.2 Coordinate polari

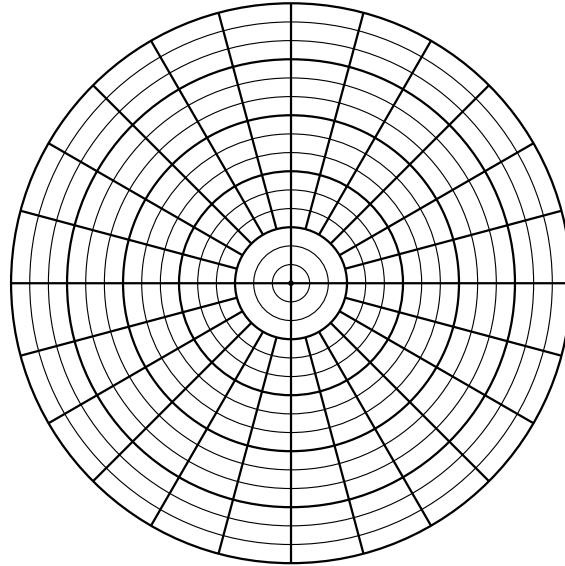


Figura 1.1: L'equivalente del piano cartesiano in coordinate polari

Nel sistema scritto sopra (4.5) compaiono le derivate (totali) seconde rispetto al tempo.

### Esercizio 4.2.1

Calcolare direttamente  $\ddot{x}$  e  $\ddot{y}$ .

Il differenziale delle coordinate nel piano cartesiano per il vettore  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  si può scrivere come

$$dX = dx\hat{e}_x + dy\hat{e}_y \quad (4.6)$$

## 4. Problema dei due corpi: moto centrale

---

In alternativa si possono utilizzare le coordinate polari, in questo caso gli unici spostamenti infinitesimi che si hanno sono quello radiale e angolare. In particolare muovendosi lungo il piano polare si può avere uno spostamento di  $r + dr$  e/o di  $r(\theta + d\theta)$

$$dX = dr\hat{e}_r + r d\theta\hat{e}_\theta \quad (4.7)$$

Questa è la rappresentazione dello stesso vettore ma in una base diversa. Si può ottenere, con il teorema di pitagora, lo spostamento infinitesimo. Ciò è giustificato dal fatto che per costruzione i versori scelti sono ortogonali:

$$\begin{aligned} ds^2 &= |dX|^2 = dX \cdot dX = (dx)^2 + (dy)^2 = (dr)^2 + (r d\theta)^2 \\ |\dot{r}|^2 &= \left| \frac{dX}{dt} \right|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Fissando ora l'angolo  $\theta$  si ha

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (4.9)$$

che è l'equazione di una curva  $r \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . È quindi possibile determinare il vettore tangente ovvero

$$\hat{e}_r := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y} \quad (4.10)$$

In modo analogo si può determinare  $\hat{e}_\theta$  fissando  $r$  e facendo variare  $\theta$ . Il vettore tangente alla curva  $\theta \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  è

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}}_{\text{non normalizzato!}} \quad (4.11)$$

$$\rightarrow \hat{e}_\theta := \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = -\sin \theta \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_x}$$

### Osservazioni:

- (i)  $\hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_r = 0$
- (ii)  $\hat{e}_\theta = \frac{d}{d\theta} \hat{e}_r$
- (iii)  $\hat{e}_r = -\frac{d}{d\theta} \hat{e}_\theta$
- (iv)  $\hat{e}_r = \hat{e}_r(\theta)$

### 4.3 Moto centrale in coordinate polari

Il problema da studiare è

$$\mu \ddot{x} = -U'(|x|)\hat{x} \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (4.12)$$

Per quanto detto prima si ha che  $x = r\hat{e}_r$  e

$$v = \dot{x} = \dot{r}\hat{e}_r + r \left( \frac{d}{d\theta} \hat{e}_r \right) \dot{\theta} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \quad (4.13)$$

Il momento angolare è

$$\ell = x \times \mu \dot{x} = r\hat{e}_r \times \mu(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) \quad (4.14)$$

$$= \mu r^2 \dot{\theta} (\hat{e}_r \times e_\theta) = \boxed{\mu r^2 \dot{\theta} \hat{e}_z} \quad (4.15)$$

L'equazione di Newton è

$$\mu \frac{d^2}{dt^2} (r\hat{e}_r) = -U'(r)\hat{e}_r \quad (4.16)$$

$$= \mu \ddot{v} = \mu(\ddot{r}\hat{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r) \quad (4.17)$$

$$= (\mu\ddot{r} - \mu r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (\mu r\ddot{\theta} + 2\mu\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta \quad (4.18)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \mu\ddot{r} - \mu r\dot{\theta}^2 = -U'(r) \\ \mu(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \end{cases}} \longleftrightarrow \mu r^2 \dot{\theta} = \ell_z \text{ costante} \quad (4.19)$$

La seconda equazione altro non è che la legge di conservazione del momento angolare.

### 4.4 Moto centrale nel piano complesso

Un metodo alternativo per lo studio del problema dei due corpi è sfruttare il fatto che tra  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{C}$  esiste un'isomorfia, ma il vantaggio che ha  $\mathbb{C}$ , nonostante sia di dimensione 2 rispetto al campo  $\mathbb{R}$ , è che le derivate si fanno come si farebbero in  $\mathbb{R}$  introducendo la notazione esponenziale/polare. Comunque definendo  $z(t) := x(t) + iy(t)$ , dunque  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|_{\mathbb{C}}$  e quindi calcolando le derivate richieste:

$$z(t) = r(t)e^{i\theta(t)} \quad (4.20)$$

$$\dot{z} = \dot{r}e^{i\theta} + ir\dot{\theta}e^{i\theta} = (\dot{r} + ir\dot{\theta})e^{i\theta} \quad (4.21)$$

$$\ddot{z} = (\ddot{r} + ir\dot{\theta} + ir\ddot{\theta})e^{i\theta} + (ir\dot{\theta} - r\dot{\theta}^2)e^{i\theta} = \quad (4.22)$$

$$= [(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + i(2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta})]e^{i\theta} \quad (4.23)$$

#### 4. Problema dei due corpi: moto centrale

---

Quindi in coordinate polari  $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$  è l'accelerazione lungo  $\hat{r}$ , invece  $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$  è l'accelerazione lungo  $\hat{\theta}$ . Di conseguenza il sistema è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \mu\ddot{r} - \mu r\dot{\theta}^2 = -U(r) \\ \underbrace{\mu(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})}_{\cdot r \neq 0} = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

$$0 = \mu 2r\dot{r}\dot{\theta} + \mu r^2\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\theta}) \quad (4.25)$$

Si trova che:  $\mu r^2\dot{\theta} = \text{cost.}$  (*rispetto al tempo*).

La quantità che si conserva è di nuovo il modulo del momento angolare, per convincersi basta scrivere  $\ell$  in coordinate polari:

$$x = r\hat{e}_r \quad \dot{x} = \dot{r}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{r}\hat{e}_r + r\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\theta} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\ell = x \times \mu\dot{x} = r\hat{e}_r \times \mu(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = \quad (4.26)$$

$$= \mu r^2\dot{\theta}(\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta) = \mu r^2\dot{\theta}\hat{e}_z \quad (4.27)$$

Dove si è usato il fatto che  $z = re^{i\theta t}$ , quindi la derivata prima di questa per avere  $\dot{z}$  lungo gli assi  $\hat{e}_r$  e  $\hat{e}_\theta$  (ricordare che in  $\mathbb{C}$  il corrispettivo dei due versori sono rispettivamente  $e^{i\theta t}$  e  $ie^{i\theta t}$ ). In ogni caso è come atteso. Ma questa quantità, di fatto un integrale primo del sistemi scritto sopra, ci permette di ridurre i gradi di libertà del sistema. Infatti sostituendo nella prima equazione lungo  $\hat{r}$ :

$$\mu\ddot{r} - \mu r \left( \frac{\ell_z}{\mu r^2} \right)^2 = -U'(r) \quad (4.28)$$

e riorganizzando:

$$\mu\ddot{r} = \frac{\ell_z^2}{\mu r^3} - U'(r) \quad (4.29)$$

Il primo termine dà la componente repulsiva perché ha segno sempre positivo: è la forza centrifuga<sup>8</sup>. Notare che la forza totale a sua volta può essere scritta come meno la derivata di un'energia potenziale totale:

$$= -\frac{d}{dr} \left( U(r) + \frac{\ell_z^2}{2\mu r^2} \right) \quad (4.30)$$

Definendo  $U_{eff}(r) := U_e(r) := U(r) + \frac{\ell_z^2}{2\mu r^2}$ .

$$\Rightarrow \mu\ddot{r} = -U'_e(r) \quad (4.31)$$

---

<sup>8</sup>Si vede ancora meglio prima di fare la sostituzione, infatti la prima equazione del sistema è la stessa che si ottiene in un sdr rotante con la particella

**Osservazione:**

Questo è il massimo che si può dire per una forza centrale qualsiasi, da qui in poi il problema si può studiare qualitativamente tramite il ritratto di fase. Di seguito si studierà qualche caso con  $U(r)$  specifica.

Ci sono due potenziali centrali molto importanti: il caso gravitazionale e quello elastico. L'energia potenziale gravitazionale, ponendo lo zero dell'energia a  $r = +\infty$ , vale:  $U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$ ; invece il potenziale elastico, posto lo zero all'equilibrio (0):  $\frac{1}{2}kr^2$ . Si studiano assieme perché per il teorema di Bertrand sono le uniche forze centrali che hanno la proprietà che tutte le orbite (spaziali) limitate sono anche chiuse.

## 4. Problema dei due corpi: moto centrale

---

### Tema (N.4): Potenziale gravitazionale, I legge di Keplero

La legge fondamentale che governa i moti centrali in natura è della forma:

$$U(r) = -\frac{k}{r} \quad (k > 0) \quad (\text{N.4 - 1})$$

dove  $k = Gm_1m_2$  per i moti gravitazionali e  $k = |q_1q_2|$  per i moti colombiani (con particelle di carica opposta). L'obiettivo attuale è quello di ricavare la forma delle traiettorie possibili. Tutto questo lo si fa in coordinate polari nel piano di moto.

In particolare utilizzando i risultati precedenti sul piano di moto:

$$\mu\ddot{r} = -U'_e(r), \quad U_e(r) = \frac{\ell_z^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \quad (\text{N.4 - 2})$$

$$\dot{\theta} = \frac{\ell_z}{\mu r^2} \quad (\text{N.4 - 3})$$

In ogni caso per trovare la forma dell'orbita bisogna trovare sostanzialmente la legge oraria di  $\theta(t)$ , ricavarci  $t$  da questa e sostituirla nell'equazione che caratterizza  $r(t)$ . Si nota che se  $\ell_z \neq 0 \Rightarrow \theta(t)$  monotona (e continua ovviamente) in  $t \Rightarrow \exists t(\theta)$ , cioè l'inversa.

In particolare prendendo  $r(t)$  e usando un abuso notazione abbiamo  $r(t) = r(t(\theta)) = r(\theta)$ , per essere corretti bisognerebbe indicare  $r(\theta)$  con un'altra funzione diversa. Nell'equazione di Newton/E-L compaiono derivate seconde rispetto a  $t$  che vanno convertite in derivate rispetto a  $\theta$ :

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \frac{\ell_z}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \quad (\text{N.4 - 4})$$

e quindi applicando tale operatore a  $r$  (usando l'apice per le derivate rispetto a  $\theta$ ):

$$\Rightarrow \dot{r} = \frac{\ell_z}{\mu r^2} r'(\theta) \quad (\text{N.4 - 5})$$

e quindi prendendo la derivata seconda di quest'ultima moltiplicando allo stesso modo:

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \dot{r} = \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\ell_z}{\mu r^2} r' \right) = \frac{\ell_z}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\ell_z}{\mu r^2} r'(\theta) \right) = \quad (\text{N.4 - 6})$$

$$= \frac{\ell_z^2}{\mu^2 r^4} r'' - 2 \frac{\ell_z^2}{\mu^2 r^5} r'^2 = \frac{\ell_z^2}{\mu^2 r^4} \left( r'' - \frac{2}{r} r'^2 \right) \quad (\text{N.4 - 7})$$

E così l'equazione di E-L è diventata un'equazione differenziale per le due coordinate  $r$  e  $\theta$ :

$$\frac{\ell_z^2}{r^4} \left( r'' - \frac{2}{r} r'^2 \right) = -U'_e(r) \quad (\mathcal{N}.4 - 8)$$

La soluzione di questa è la parametrizzazione dell'orbita in coordinate polari. Notare come la parentesi che contiene  $r''$  sia praticamente la derivata seconda  $\frac{1}{r(\theta)}$  rispetto a  $\theta$ . Infatti se si introduce la variabile  $\frac{1}{r}$  questa espressione si semplifica notevolmente:  $u(\theta) := \frac{1}{r(\theta)}$ . Quindi calcolando le derivate di questa:

$$u' = -\frac{1}{r^2} r'; \quad u'' = -\frac{r''}{r^2} + \frac{2}{r^3} r'^2 = -\frac{1}{r^2} \left( r'' - \frac{2}{r} r'^2 \right)$$

$$\left( r'' - \frac{2}{r} r'^2 \right) = -r^2 u'' = \frac{-u''}{u^2} \quad (\mathcal{N}.4 - 9)$$

L'equazione di Newton diventa quindi:

$$(a \text{ sinistra di } "="): \mu \ddot{r} = \frac{\ell_z^2}{\mu} u^4 \left( -\frac{u''}{u^2} \right) = -\frac{\ell_z^2}{\mu} u^2 u''.$$

$$(a \text{ destra di } "="): -\frac{d}{dr} U_e(r) = -\frac{du}{dr} \frac{d}{du} U_e \left( \frac{1}{u} \right) = u^2 \frac{d}{du} U_e \left( \frac{1}{u} \right)$$

Quindi:

$$\mu \ddot{r} = -U'_e(r) \iff \frac{-\ell_z^2}{\mu} u^2 u'' = \frac{d}{du} U_e \left( \frac{1}{u} \right) \quad (\mathcal{N}.4 - 10)$$

mettendo in forma normale:

$$\Rightarrow u'' = -\frac{\mu}{\ell_z^2} \frac{d}{du} \left[ \frac{\ell_z^2}{2\mu} u^2 + U \left( \frac{1}{u} \right) \right] \quad (\mathcal{N}.4 - 11)$$

$$\iff u'' = -u - \frac{\mu}{\ell_z^2} \frac{d}{du} U \left( \frac{1}{u} \right) \quad (\mathcal{N}.4 - 12)$$

Che è l'equazione di Binet per l'equazione polare dell'orbita dei moti centrali ed è l'equazione di un moto armonico per potenziali che vanno con il quadrato della distanza. Che si può risolvere analiticamente.

Sostituendo il potenziale:  $U(r) = -\frac{k}{r} \Rightarrow U \left( \frac{1}{u} \right) = -ku$

$$\rightarrow u'' = -u + \frac{k\mu}{\ell_z^2} \quad (\mathcal{N}.4 - 13)$$

Posto ora

$$u(\theta) = \frac{k\mu}{\ell_z^2} + v(\theta) \quad (\mathcal{N}.4 - 14)$$

## 4. Problema dei due corpi: moto centrale

---

L'equazione diventa quella di un oscillatore armonico con pulsazione propria 1 con equilibrio nell'origine:

$$\Rightarrow v'' = -v \Rightarrow v = c \cos \theta + b \sin \theta \quad (\mathcal{N}.4 - 15)$$

Equazioni di questo tipo possono sempre essere riscritte come  $v = A \cos(\theta - \theta_0)$  (come nel caso dell'oscillatore armonico spaziale  $\mathcal{N}.4$ ). Senza perdere di generalità si pone  $\theta_0 = 0 \Rightarrow u(\theta) = A \cos \theta + \frac{k\mu}{\ell_z^2}$ . Ritornando alla definizione  $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$  si riscrive:

$$r(\theta) = \frac{1}{\frac{k\mu}{\ell_z^2} + A \cos \theta} = \frac{\frac{\ell_z^2}{k\mu}}{1 + \left(\frac{\ell_z^2}{k\mu} A\right) \cos \theta} := \boxed{\frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta}}$$

$r(\theta) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}$  altro non è che l'equazione polare di una sezione conica di "parametro  $p$ " ed eccentricità  $\epsilon > 0$  adimensionale.

- per  $\epsilon \rightarrow 0$  la sezione degenera in una circonferenza,  $\Rightarrow$  moto circolare (energia minima)
- se  $0 < \epsilon < 1$  ho una curva chiusa periodica tra  $[0, 2\pi]$ , ovvero le orbite kepleriane ellittiche ( $E_{min} < E < 0$ )
- $\epsilon = 1$  moti parabolici (quando  $\theta \rightarrow \pm\pi$ ,  $r \rightarrow +\infty$ )
- $\epsilon > 1$  ci sono moti iperbolici (quando  $\theta \rightarrow \pm\theta^* : \cos(\theta^*) = -\frac{1}{\epsilon}$ ,  $r \rightarrow +\infty$ )

Le considerazioni energetiche riguardo ai tre casi discendono direttamente dal ritratto di fase. Ora si dimostra che l'equazione scritta sopra è proprio l'equazione di una conica, e in seguito si mostra come le condizioni iniziali decidano  $p$  e  $\epsilon$ . Intanto si dà una definizione di conica con cui lavorare:

**Definizione 4.2:** Una sezione conica è il luogo dei punti  $P$  del piano  $xy$  il cui rapporto tra la distanza di un punto fisso  $F$ , detto fuoco, e da una retta fissa  $r$ , detta direttrice, è costante, cioè indipendente da  $x$  e  $y$ . Per definizione il valore costante del rapporto è l'eccentricità della conica.

$$\frac{\overline{PF}}{d(P, r)} = \frac{r}{d} = \epsilon \quad (\mathcal{N}.4 - 16)$$

$\epsilon$  è detta l'eccentricità della conica.

Da qui arrivare alla definizione polare è banale, basta scrivere le quantità in questione in coordinate polari. Preso il fuoco nell'origine e  $x = D$  come

diretrice (per le equazioni generiche è sufficiente traslare/ruotare). Dal corso di geometria si ha che  $d = D - r\cos(\theta)$  e quindi la definizione si traduce come:

$$\frac{r}{D - r\cos(\theta)} = \epsilon \quad (\mathcal{N}.4 - 17)$$

chiamando  $p := D\epsilon = \text{cost}$  (rispetto a  $r$  e  $\varphi$ ) e ricavando  $r$  abbiamo l'equazione polare scritta sopra:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon\cos(\theta)} \quad (\mathcal{N}.4 - 18)$$

Questi parametri sono legati alle grandezze fisiche nel seguente modo.

- **Circonferenza** Per  $\epsilon = 0$  abbiamo  $r = p = \text{cost}$  che è l'equazione polare di una circonferenza. Dallo studio dell'energia meccanica e del ritratto di fase di questi sistemi si è già visto che esiste un solo valore dell'energia, tra l'altro corrispondente al minimo assoluto  $E_{min}$ , per cui  $r$  è costante lungo il moto e si è visto che questo dà  $r_c = \frac{l^2}{k\mu}$

- **Orbite ellittiche**

Dal ritratto di fase si era visto che i moti con due punti di inversione per  $r$  si hanno  $E_{min} < E < 0$ . Questi devono corrispondere evidentemente alle orbite ellittiche nello spazio.

È possibile determinare l'eccentricità  $\epsilon$  in funzione di  $\ell_z$  ed  $E$ :

$$\frac{\mu\dot{r}^2}{2} + \frac{\ell_z^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} = E \quad (\mathcal{N}.4 - 19)$$

$$\boxed{\dot{r} = -\frac{\ell_z}{\mu}u'; \quad u = \frac{1}{r} = \frac{1 + \epsilon\cos\theta}{p}; \quad p = \frac{\ell_z^2}{\mu k}; \quad u' = -\frac{\epsilon}{p}\sin\theta}$$

$$\frac{\mu}{2}\frac{\ell_z^2}{\mu^2}(u')^2 + \frac{\ell_z^2}{2\mu}u^2 - ku = E$$

$$\frac{\mu}{2}\frac{\ell_z^2}{2\mu}\left(\frac{\mu k}{\ell_z^2}\right)^2 + (1 + \epsilon\cos\theta)^2 - k\frac{\mu k}{\ell_z^2}(1 + \epsilon\cos\theta) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\ell_z^2}{2\mu}\epsilon^2\frac{\mu^2k^2}{\ell_z^4}\sin^2\theta + \frac{\mu^2k^2}{2\mu\ell_z}(1 + 2\epsilon\cos\theta + \epsilon^2\cos^2\theta) + \\ &\quad - \frac{\mu k^2}{\ell_z^2} - \cancel{\frac{\mu k^2}{\ell_z^2}\epsilon\cos\theta} = \end{aligned}$$

#### 4. Problema dei due corpi: moto centrale

---

$$= \frac{\mu k^2}{2\ell_z^2} \epsilon^2 - \frac{\mu k^2}{2\ell_z^2} = E \quad (\mathcal{N}.4 - 20)$$

$$\Rightarrow \epsilon^2 - 1 = \frac{2\ell_z^2 E}{\mu k^2} \quad (\mathcal{N}.4 - 21)$$

Esiste, inoltre, una definizione alternativa per l'ellisse:

**Definizione 4.3:** L'ellisse è luogo dei punti  $P$  del piano  $xy$  la cui somma delle distanze da due punti fissi, detti fuochi, è una costante (cioè indipendente dalle coordinate  $x$  e  $y$ ):

$$\overline{PF'} + \overline{PF} = 2a \quad (\mathcal{N}.4 - 22)$$

dove  $F$  e  $F'$  sono i due fuochi e  $a$  è il semiasse maggiore<sup>a</sup>. Si definisce il semiasse minore  $b$  l'oggetto legato in questo modo alle quantità precedenti:  $b^2 + f^2 = a^2$ , dove  $f$  è la distanza fuoco-centro. Inoltre l'eccentricità è  $\epsilon = \frac{f}{a}$ .

Si può mostrare facilmente l'equivalenza delle due definizioni (per  $0 < \epsilon < 1$ ): basta scrivere l'ultima definizione in coordinate cartesiane e poi fare la trasformazione in coordinate polari piane.

Siccome le equazioni polari scritte, e soprattutto quella di Binet, per l'ellisse sono "dritte" (semiasse maggiore parallelo alla linea coordinata ottenuta per  $\varphi = 0$ ) si ha che i due punti estremali dell'orbita spaziale si ottengono per

$$\theta = \pm\pi: \begin{cases} r_+ = \frac{p}{1+\epsilon} \\ r_- = \frac{p}{1-\epsilon} \end{cases} .$$

Avendo già calcolato  $p = r_c$ , dalle due equazioni precedenti è possibile ricavare due quantità interessanti di facile lettura geometrica:

$$\begin{cases} r_+ + r_- = 2a = \frac{2p}{1-\epsilon^2} \\ r_+ - r_- = 2f = \frac{2\epsilon p}{1-\epsilon^2} \end{cases} \quad (\mathcal{N}.4 - 23)$$

In particolare  $r_+$  e  $r_-$  corrispondono alla distanza massima e minima dal centro, quindi i due punti devono coincidere con i punti di inversione che si trovano così:

$$U_e(r) = E \iff -\frac{k}{r} + \frac{\ell_z^2}{2\mu r^2} = E \quad (\mathcal{N}.4 - 24)$$

$$\rightarrow r^2 + \frac{k}{E}r - \frac{\ell_z^2}{2\mu E} = 0 \quad (\mathcal{N}.4 - 25)$$

$$r_{\pm} = \frac{1}{2} \left( -\frac{k}{E} \pm \sqrt{\frac{k^2}{E^2} + \frac{2\ell_z^2}{\mu E}} \right) \quad (\mathcal{N}.4 - 26)$$

E quindi abbiamo le seguenti due quantità:

$$r_+ - r_- = \sqrt{\frac{k^2}{E^2} + \frac{2\ell_z^2}{\mu E}} \quad (\mathcal{N}.4 - 27)$$

$$r_+ + r_- = -\frac{k}{E} \quad (\mathcal{N}.4 - 28)$$

E quindi è possibile scrivere le due quantità geometriche in termini delle quantità fisiche:

$$\begin{cases} f = \frac{r_+ - r_-}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k^2}{E^2} + \frac{2\ell_z^2}{\mu E}} \\ a = -\frac{1}{2} \frac{k}{E} \end{cases} \quad (\mathcal{N}.4 - 29)$$

Caratterizzando completamente l'orbita spaziale in termini di coordinate cartesiane. Notare che  $a > 0$ . Invece per l'equazione in coordinate polari i due parametri risultano:

$$\begin{cases} p = r_c = \frac{l^2}{k\mu} \\ \epsilon = \sqrt{1 - \frac{2E l^2}{\mu k^2}} \end{cases} \quad (\mathcal{N}.4 - 30)$$

si può verificare in particolare che  $0 \leq \epsilon < 1$  e  $\epsilon = 0$  riporta al caso dell'orbita circolare. In ogni caso l'equazione generale per orbite ellittiche/circolari è:

$$r(\theta) = \frac{\frac{\ell^2}{k\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E}{\mu k^2}} \cos \theta} \quad (\mathcal{N}.4 - 31)$$

---

<sup>a</sup>si riferisce semplicemente alla semiproiezione sull'asse  $x$  dell'ellisse, non ha niente a che vedere con il suo valore

## 4. Problema dei due corpi: moto centrale

---

### Tema (N.5): La terza legge di Keplero

Dal tema precedente è automatica la dimostrazione della terza legge di Keplero:  $\frac{T^2}{a^3} = \text{costante}$  (indipendente rispetto a  $m_p$ ); partendo dal fatto che  $\dot{A} := \frac{|\ell_z|}{2\mu}$  è costante lungo il moto. Allora integrando si scrive:

$$A(T) - A(0) = \frac{|\ell_z|}{2\mu} T \quad (\mathcal{N}.5 - 1)$$

Se  $T$  è il periodo del moto, allora l'area spazzata  $A(T) - A(0)$  dal raggio vettore è proprio l'area dell'ellisse e ricordando che l'area di un ellisse è  $A = \pi ab$  si ha:

$$A(T) = \pi a \cdot b = \frac{|\ell_z|T}{2\mu} \quad (\mathcal{N}.5 - 2)$$

$$T_{riv} = \frac{2\mu\pi}{|\ell_z|} \left( -\frac{k}{2E} \right) \frac{|\ell_z|}{\sqrt{-2\mu E}} = \sqrt{\frac{\mu}{2}} k \pi \frac{1}{(-E)^{3/2}} \\ \left( -E = \frac{k}{2a} \right) \quad (\mathcal{N}.5 - 3)$$

$$T_{riv} = \sqrt{\frac{\mu}{2}} k \pi \left( \frac{2a}{k} \right)^{3/2} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} a^{3/2} \quad (\mathcal{N}.5 - 4)$$

$$\Rightarrow \frac{T_{riv}^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{\mu}{k} \quad (\mathcal{N}.5 - 5)$$

In modo analogo si poteva ottenere lo stesso risultato considerando il semiasse maggiore:

$$A(T_{riv}) = \pi a \cdot b \Rightarrow \pi \sqrt{r_c} a^{\frac{3}{2}} = \frac{|\ell_z|T}{2\mu} \quad (\mathcal{N}.5 - 6)$$

Dall'altra parte  $r_c = \frac{\ell_z^2}{k\mu}$  che sostituita nella precedente ci dà la relazione cercata:

$$\frac{T_{riv}}{a^{3/2}} = 2\pi \mu \frac{\sqrt{r_c}}{|\ell_z|} = 2\pi \mu \frac{|\ell_z|}{\sqrt{k\mu}} \frac{1}{|\ell_z|} \quad (\mathcal{N}.5 - 7)$$

$$\frac{T_{riv}^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{\mu}{k} \quad (\mathcal{N}.5 - 8)$$

Attenzione, questa non è ancora la legge di Keplero (il rapporto risulta addirittura quasi proporzionale a  $m_p$ ). Sostituendo a  $k$  e  $\mu$  le loro espressioni

$$\mu = \frac{m_p M_s}{m_p + M_s} \text{ e } k = GM_s m_p;$$

$$\Rightarrow \frac{T_{rev}^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_p + M_s)} = \frac{4\pi^2}{GM_s} \frac{1}{1 + \frac{m_p}{M_s}} \quad (\mathcal{N}.5 - 9)$$

Ovvero una quantità praticamente indipendente da  $m_p$ . In particolare vediamo che la legge di keplero non è esatta, lo è soltanto per moti centrali in quanto questi sono equivalenti al problema dei due corpi in cui uno ha massa infinita.

**Osservazione:**

La legge di Keplero allora non è esatta ma con la massa del Sole confrontata con quella della terra i conti tornano tutti. Ricostruendo il moto:

$$\begin{cases} x_1 = X + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x \simeq X + x \\ x_2 = X - \frac{m_1}{m_1 + m_2} x \simeq X \end{cases} \quad (\mathcal{N}.5 - 10)$$

E  $X$  si può mettere a 0 ipotizzando che il Sole si muova di moto rettilineo uniforme.

## 4. Problema dei due corpi: moto centrale

---

### 4.5 Leggi di conservazione

- La prima è la *prima equazione cardinale* per il problema dei due corpi:  $M\ddot{X} = 0$  con  $M = m_1 + m_2$ , cioè che il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme. Definendo  $P := M\dot{X}$  la quantità di moto totale, la prima legge di conservazione si può scrivere come

$$M\ddot{X} = 0 \iff \frac{d}{dt}P = 0 \quad (4.32)$$

- Introdotta la quantità *momento angolare totale*  $L = x_1 \times m_1\dot{x}_1 + x_2 \times m_2\dot{x}_2$  e poi derivando si ha  $\dot{L} = x_1 \times m_1\ddot{x}_1 + x_2 \times m_2\ddot{x}_2$  ovvero:

$$= x_1 \times \varphi \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|} + x_2 \times \left( -\varphi \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|} \right) \quad (4.33)$$

Mettendo in evidenza  $\varphi$  si ottiene:

$$= (x_1 - x_2) \times \varphi \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|} \equiv 0 \quad (4.34)$$

Che segue direttamente dal fatto che si sta moltiplicando per due quantità parallele. Si è dedotta quindi la *seconda equazione cardinale* cioè

$$\dot{L} = 0 \Rightarrow L = \text{cost } \forall t \quad (4.35)$$

- Sia  $U(r) = -\int \varphi(r)dr$  che esiste sempre perchè è lo scalare di forza, si era dimostrato all'inizio della sezione 3.1:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_1} U(|x_1 - x_2|) = \varphi(|x_1 - x_2|) \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|} \\ -\frac{\partial}{\partial x_2} U(|x_1 - x_2|) = -\varphi(|x_1 - x_2|) \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|} \end{cases} \quad (4.36)$$

$$\iff \begin{cases} m_1\dot{x}_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} \\ m_2\dot{x}_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2} \end{cases} \quad (4.37)$$

Moltiplicando scalarmente la prima per  $\dot{x}_1$  e la seconda per  $\dot{x}_2$  e sommando:

$$\begin{aligned} m_1\dot{x}_1 \cdot \ddot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 \cdot \ddot{x}_2 &= - \left[ \frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} \cdot \dot{x}_2 \right] \\ \frac{d}{dt} \left( m_1 \frac{\dot{x}_1 \cdot \dot{x}_1}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left( m_2 \frac{\dot{x}_2 \cdot \dot{x}_2}{2} \right) &= -\frac{d}{dt} U \end{aligned} \quad (4.38)$$

Dove l'ultimo termine si ottiene dalla regola della catena. Portando tutto a sinistra:

$$\iff \frac{d}{dt} \left( \underbrace{\frac{m_1|\dot{x}_1|^2}{2} + \frac{m_2|\dot{x}_2|^2}{2}}_{:=K} + U(|x_1 - x_2|) \right) = 0$$

Cioè si conserva  $H(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) := K + U$ . In altre parole

$$\boxed{\dot{H} = \frac{d}{dt}H = 0 \Rightarrow H(t) = H(0)} \quad (4.39)$$

Allora bastano i valori iniziale per trovare l'unica soluzione dell'equazione differenziale.

Si possono esprimere  $L$  e  $H$  in termini di  $x, X, \dot{x}, \dot{X}$ :

$$\begin{aligned} L &= x_1 \times m_1 \dot{x}_1 + x_2 \times m_2 \dot{x}_2 = \\ &\left( X + \frac{m_2}{M} x \right) \times m_1 \left( \dot{X} + \frac{m_2}{M} \dot{x} \right) + \left( X - \frac{m_1}{M} x \right) \times m_2 \left( \dot{X} - \frac{m_1}{M} \dot{x} \right) = \\ &= X \times m_1 \dot{X} + X \times m_1 \frac{m_2}{M} \dot{x} + \frac{m_2}{M} x \times m_1 \dot{X} + \frac{m_2^2}{M^2} x \times m_1 \dot{x} \\ &\quad + X \times m_2 \dot{X} - X \times m_2 \frac{m_1}{M} \dot{x} - \frac{m_1}{M} x \times m_2 \dot{X} + \frac{m_1^2}{M^2} x \times m_2 \dot{x} = \\ &= X \times (m_1 + m_2) \dot{X} + \\ &\quad + \underbrace{X \times \frac{m_1 m_2}{M} \dot{x} - X \times \frac{m_1 m_2}{M} \dot{x}}_{=0} + x \times \frac{m_1 m_2^2}{M^2} \dot{x} + x \times \frac{m_1^2 m_2}{M^2} \dot{x} = \\ &= X \times M \dot{X} + \underbrace{\left( \frac{m_1 m_2^2}{M^2} + \frac{m_1^2 m_2}{M^2} \right)}_{\mu} x \times \dot{x} = \\ &= \boxed{\underbrace{X \times M \dot{X}}_{L_{cm}} + \underbrace{x \times \mu \dot{x}}_{\ell}} \end{aligned}$$

Il momento angolare totale, espresso con queste variabili, si divide naturalmente nella somma del momento angolare del centro di massa e del moto relativo. Questa quantità si conserva, quindi siccome era già noto che  $\dot{L}_{cm} = X \times M \ddot{X} \equiv 0$ , che segue che il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme, si ottiene che anche  $\ell$  si conserva. Questo risultato era già stato trovato con lo studio del moto radiale. In generale il termine del centro di massa si può eliminare con una trasformazione di coordinate e dunque si può pensare il momento angolare totale come quello del moto relativo.

#### 4. Problema dei due corpi: moto centrale

---

$$K = m_1 \frac{|\dot{x}_1|^2}{2} + m_2 \frac{|\dot{x}_2|^2}{2} = \quad (4.40)$$

$$= \frac{m_1}{2} \left| \dot{X} + \frac{m_2}{M} \dot{x} \right|^2 + \frac{m_2}{2} \left| \dot{X} - \frac{m_1}{M} \dot{x} \right|^2 \quad (4.41)$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{2} |\dot{X}|^2 + \underbrace{\left( \frac{m_1}{2} \frac{m_2^2}{M^2} + \frac{m_2}{2} \frac{m_1}{M^2} \right)}_{\frac{\mu}{2}} |\dot{x}|^2 = \quad (4.42)$$

$$= \boxed{\frac{M}{2} |\dot{X}|^2 + \frac{\mu}{2} |\dot{x}|^2} \quad (4.43)$$

Allora  $H$  si può riscrivere completamente come

$$H = \underbrace{\frac{M}{2} |\dot{X}|^2}_{\text{indipendente da } t} + H_{rel}, \quad H_{rel} := \mu \frac{|\dot{x}|^2}{2} + U(|x|) \quad (4.44)$$

#### Osservazione:

Si può inoltre dimostrare, senza usare le equazioni del moto, che

$$H_{rel} = \mu \frac{|\dot{x}|^2}{2} + U(|x|) = \mu \frac{\dot{r}^2}{2} + U_e(r) \quad (4.45)$$

Ovviamente si conserva  $\ell$  per il moto radiale, da ciò segue che il moto è piano.  
 $\Rightarrow x \in \mathbb{R}^2$ . In coordinate polari si ha che

$$|\dot{x}|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \quad (4.46)$$

$$\ell = \mu r^2 \dot{\theta} \hat{e}_3 \quad (4.47)$$

Da qua si può porre  $\ell = 0$  cioè  $\dot{\theta} = 0$  per la (4.47). Allora si può esprimere l'energia cinetica, che è in funzione di  $\dot{x}^2$ , in termini solo di  $\dot{r}$  e  $r$ :

$$|\dot{x}|^2 = \dot{r}^2 + \frac{\ell_z^2}{\mu^2 r^2} \Rightarrow \boxed{H_{rel} = \mu \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\ell_z^2}{2\mu r^2} + U(r)} \quad (4.48)$$

### Tema (N.6): Problema *ristretto* dei tre corpi *circolare piano*

Senza perdere di generalità si tratta un problema conosciuto ovvero quello dell'interazione gravitazionale. Le equazioni che descrivono il moto sono

$$m_1 \ddot{x}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{|x_1 - x_2|^3} (x_1 - x_2) - G \frac{m_1 m_3}{|x_1 - x_3|^3} (x_1 - x_3) \quad (\text{N.6 - 1})$$

$$m_2 \ddot{x}_1 = -G \frac{m_2 m_1}{|x_2 - x_1|^3} (x_2 - x_1) - G \frac{m_2 m_3}{|x_2 - x_3|^3} (x_2 - x_3) \quad (\text{N.6 - 2})$$

$$m_3 \ddot{x}_3 = -G \frac{m_3 m_1}{|x_3 - x_1|^3} (x_3 - x_1) - G \frac{m_3 m_2}{|x_3 - x_2|^3} (x_3 - x_2) \quad (\text{N.6 - 3})$$

Un modo semplice per risolvere il problema è considerare una massa molto minore delle altre due:  $\frac{m_3}{m_1} \ll 1$ ,  $\frac{m_3}{m_2} \ll 1$ , che potrebbe essere per esempio il caso dello studio del sistema *Sole-Mercurio-Giove*. Utilizzando questa approssimazione ciò equivale allo studio dei due corpi, prime due equazioni, *Giove-Sole* perturbato dalla presenza della massa di Mercurio. La presenza di Mercurio rientra nella terza equazione dove la massa  $m_3$  è presente ambo i membri e quindi il limite è ininfluente. La risoluzione della terza equazione si ottiene quindi prima risolvendo le prime due, una volta ottenuti i due risultati  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  si inseriscono nella terza equazione. Con questa approssimazione quindi il problema consiste nello studio nel problema dei due corpi + soluzione di un'equazione differenziale:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{|x_1 - x_2|^3} (x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -G \frac{m_2 m_1}{|x_2 - x_1|^3} (x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_3 = -G \frac{m_1}{|x_3 - x_1(t)|^3} (x_3 - x_1(t)) - G \frac{m_2}{|x_3 - x_2(t)|^3} (x_3 - x_2(t)) \end{cases}$$

Se non ci sono altri restrizioni si avrà un moto *non centrale* perchè sarà attratto da due masse, quindi i gradi di libertà non si riducono ulteriormente. Si può restringere ulteriormente il problema imponendo che il terzo corpo orbiti (1) circolarmente sullo (2) stesso piano del moto dei due pianeti.

Occorre definire

$$x = x_1 - x_2 \quad (\text{N.6 - 4})$$

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{N.6 - 5})$$

Dove  $X$  si può porre a 0, con un opportuna trasformazione di coordinate, perchè il moto del centro di massa è rettilineo uniforme quindi esiste sicuramente un

#### 4. Problema dei due corpi: moto centrale

---

sistema di riferimento in cui è 0. Le prime due equazioni sono ridotte quindi a

$$\ddot{x} = -GM \frac{x}{|x|^3} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = X + \frac{m_2}{M}x = \frac{m_2}{M}x \\ x_2 = X - \frac{m_1}{M}x = -\frac{m_1}{M}x \end{cases} \quad (\mathcal{N}.6 - 6)$$

Chiamando adesso  $\xi := x_3$  la terza equazione si può formulare come

$$\ddot{\xi} = -\frac{\partial U(\xi, t)}{\partial \xi} \quad (\mathcal{N}.6 - 7)$$

Dove ricostruendo si ha che

$$U(\xi, t) = -\frac{Gm_1}{|\xi - \frac{m_2}{M}x|} - \frac{Gm_2}{|\xi + \frac{m_1}{M}x|} \quad (\mathcal{N}.6 - 8)$$

Il problema è allora dato da (N.6 - 6) e (N.6 - 7):

$$\begin{cases} \ddot{x} = -GM \frac{x}{|x|^3} \\ \ddot{\xi} = -\frac{\partial U(\xi, t)}{\partial \xi} \end{cases} \quad (\mathcal{N}.6 - 9)$$

Utilizzando l'ipotesi di moto piano si può imporre che all'istante iniziale  $\xi$  appartenga al piano del moto dei due corpi massivi, ma per i tempi successivi? Per rispondere si nota che la forma del potenziale suggerisce che la forza (cioè il gradiente del potenziale) sia data dalla combinazione lineare di due vettori:  $\xi$  e  $x$ , di conseguenza la combinazione lineare di due vettori che giacciono sul piano del moto sarà anch'essa sullo stesso piano.

Passando ora al caso reale del sistema *Sole-Giove-Mercurio* si ha

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow J \\ x_2 \rightarrow S \\ \xi \rightarrow M \end{cases}; \quad \frac{m_J}{m_S} \simeq 10^{-3} \quad (\mathcal{N}.6 - 10)$$

Si verifica adesso se per questo sistema questa descrizione è adeguata. La posizione medie sono: per Mercurio  $|\xi| \simeq 0.4$  UA, per Giove  $|x| \simeq 5$  UA. Inoltre  $M = m_J + m_S \simeq m_S$  allora il rapporti presenti nelle equazioni del moto  $\frac{m_J}{M} = \frac{m_J}{m_S} \simeq 10^{-3}$  e  $\frac{m_S}{M} \simeq \frac{m_S}{m_S} = 1$ . Definendo adesso  $\mu = \frac{m_J}{m_S}$  si può riscrivere il potenziale con tutte queste approssimazioni:

$$U(\xi, t) := -\frac{Gm_J}{|\xi - x|} - \frac{Gm_S}{|\xi + \mu x|} \quad (\mathcal{N}.6 - 11)$$

Le condizioni sperimentalistiche di questo studio sono  $\mu|x| \ll |\xi| \ll |x|$  allora si può riscrivere il primo termine come

$$\frac{1}{|x - \xi|} = \frac{1}{\sqrt{|x|^2 - 2x \cdot \xi + |\xi|^2}} = \frac{1}{|x|} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2x \cdot \xi}{|x|^2} + \frac{|\xi|^2}{|x|^2}}} \quad (\mathcal{N}.6 - 12)$$

Che espanso in serie di potenze  $(1 + \epsilon)^{-1/2} = 1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{3}{8}\epsilon^2 + \dots$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{|x|} \left[ 1 + \frac{x \cdot \xi}{|x|^2} - \frac{1}{2} \frac{|\xi|^2}{|x|^2} + \frac{3}{8} \frac{(x \cdot \xi)^2}{|x|^4} + \dots \right] = \\ &= \boxed{\frac{1}{|x|} + \frac{x \cdot \xi}{|x|^3} + \frac{1}{2} \frac{3(x \cdot \xi)^2 - |\xi|^2 |x|^2}{|x|^5} + \dots} \end{aligned}$$

Il secondo termine si può espandere come

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\xi + \mu x|} &= \frac{1}{|\xi|} \frac{1}{\sqrt{1 + 2\mu \frac{\xi \cdot x}{|\xi|^2} + \mu^2 \frac{|x|^2}{|\xi|^2}}} = \\ &= \frac{1}{|\xi|} \left[ 1 - \mu \frac{\xi \cdot x}{|\xi|^2} + \frac{1}{2} \mu^2 \frac{|x|^2}{|\xi|^2} + \frac{3}{2} \mu^2 \frac{(\xi \cdot \mu)^2}{|\xi|^4} + \dots \right] = \\ &= \boxed{\frac{1}{|\xi|} - \mu \frac{\xi \cdot x}{|\xi|^3} + \frac{1}{2} \mu^2 \frac{3(\xi \cdot x)^2 - |x|^2 |\xi|^2}{|\xi|^5} + \dots} \end{aligned}$$

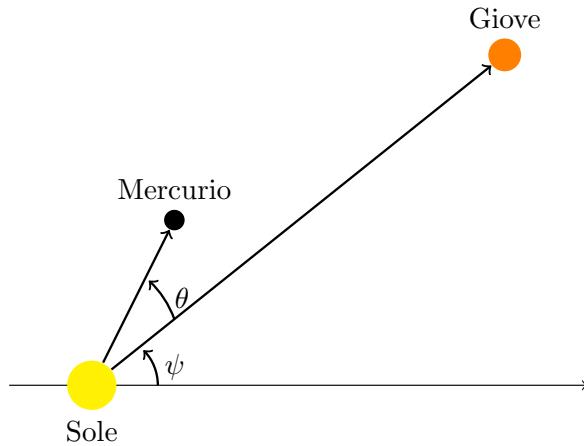
Essendo  $\mu$  piccolo si potrebbe pensare di fermarsi al primo ordine dell'espansione, ma i due termini di dipolo sono *mediamente* nulli con una semplificazione, quindi si perderebbe l'ordine rilevante.

L'approssimazione di orbita circolare (condizione veramente verificata per Giove) implica che il modulo di  $x$  è costante, allora quando si derivano i potenziali i termini di  $|x|$  sono eliminati e rimangono solo i termini di dipolo e quadrupolo delle espansioni. Lo studio prosegue concentrandosi quindi sul prodotto scalare  $\xi \cdot x$ .

In un sdr con il Sole nell'origine si chiama  $\psi(t) = \Omega t + \psi(0)$  l'angolo che intercetta Giove e  $\theta(t)$  l'angolo tra Giove e Mercurio.

#### 4. Problema dei due corpi: moto centrale

---



In riferimento a questa immagine

$$\xi \cdot x = |\xi||x| \cos \theta \quad (\mathcal{N}.6 - 13)$$

Dai dati sperimentali si ha che  $T_J \simeq 11$  anni e  $T_M = \simeq 88$  giorni. In prima approssimazione si cerca di mediare, letteralmente fare la media, sull'angolo che varia più velocemente<sup>a</sup>. Fare ciò semplifica notevolmente il problema e fisicamente ha senso perché l'asse che intercetta Giove è praticamente fermo quando quello di Mercurio invece si sposta molto più velocemente allora, in prima approssimazione, si considera il suo valore medio. In pratica quello che si fa è la sostituzione

$$U(\xi, t) \rightarrow U_{medio}(\xi, t) := \langle U(\xi, t) \rangle_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\xi, t) d\theta \quad (\mathcal{N}.6 - 14)$$

Come anticipato, con questa approssimazione i termini di dipolo spariscono. Il potenziale medio complessivo è:

$$\begin{aligned} U_{medio}(\xi, t) &= \\ &= -Gm_J \left( \frac{1}{|x|} + \frac{1}{4} \frac{|\xi|^2}{|x|^3} + \dots \right) - Gm_S \left( \frac{1}{|\xi|} + \frac{\mu^2}{4} \frac{|x|^2}{|\xi|^3} + \dots \right) \end{aligned}$$

Questa procedura risulta valida anche se  $\xi$  non appartiene inizialmente a quello del moto di  $x$  purché  $\theta$  vari velocemente rispetto a  $\psi$ .

Lo studio del ritratto di fase è ripreso nell'esempio [N.10](#) a pagina 84.

---

<sup>a</sup>Van Kampen, N. G. (1951). Elimination of fast variables. In Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences (Vol. 54, pp. 764-766).

## 5 Analisi qualitativa delle equazioni differenziali ordinarie dei sistemi newtoniani

---

5.1	Introduzione . . . . .	64
5.2	Diagrammi di fase . . . . .	66
5.3	Come disegnare un diagramma di fase . . . . .	68
5.4	Analisi locale vicino a un punto di minimo . . . . .	69
5.5	Analisi locale vicino a un punto di minimo, caso radiale . . . . .	72
	Due esempi importanti di potenziale . . . . .	74
	<u>N.7</u> Potenziale armonico . . . . .	74
	<u>N.8</u> Potenziale kepleriano . . . . .	76
	<u>N.9</u> Moto di stelle nelle galassie e di galassie negli ammassi	80
5.6	Analisi locale vicino a un punto di massimo . . . . .	82
	<u>N.10</u> Orbita di Mercurio, problema dei tre corpi . . . . .	84
	Precessione del perielio vicino all'orbita circolare . . . . .	87
5.7	Teorema di Bertrand . . . . .	90
	Perturbazione di orbite circolari . . . . .	90
	Periodo dell'orbita del moto radiale . . . . .	91
	Condizione di chiusura . . . . .	91
5.8	Un'applicazione: quantizzazione di Bohr-Born- Sommerfield...	99
	<u>N.11</u> Oscillatore armonico quantizzato . . . . .	102
Av	Approfondimenti . . . . .	103
Bv	Altri esempi di potenziale . . . . .	117

---

## 5.1 Introduzione

Le equazioni differenziali ordinarie del primo ordine sono le più importanti della meccanica, perché ogni problema è riducibile alla risoluzione di questa equazione.

Si possono scrivere come:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} f(x) := g(x) \quad (5.1)$$

O anche col sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = g(x) \end{cases} \quad (5.2)$$

Questo sistema è sostanzialmente uguale ai casi affrontati precedentemente, infatti è del tipo  $\dot{Y} = F(Y)$  dove per  $Y = (x, v)$ , e quindi  $F(Y)$  è un campo vettoriale in 2D (nello spazio delle fasi  $(x, v)$ ).

Questi sistemi (equazione di Newton su  $\mathbb{R}$  con forza posizionale) sono conservativi, infatti come già fatto vedere precedentemente la quantità

$$H = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + U(x) \quad (5.3)$$

è costante lungo le soluzioni dell'equazione di Newton. Dove  $U'(x) = -f(x)$  (ovvero  $U(x) = -\int f(x)dx$ ) è l'energia potenziale della forza esterna  $f(x)$ .

**Dimostrazione:**

$$\dot{H} = \frac{d}{dt}(H(x(t), \dot{x}(t))) = m\dot{x}\ddot{x} + U'(x)\dot{x} = \quad (5.4)$$

$$\dot{x}(m\ddot{x} + U'(x)) = \dot{x}(m\ddot{x} - f(x)) = 0 \quad (5.5)$$

e quindi  $H$  si conserva e lungo il moto vale:

$$H(x, \dot{x}) = H(x_0, v_0) = \frac{m}{2} v_0^2 + U(x_0) \quad (5.6)$$

□

**Osservazioni:**

(i) Il sistema generale di equazione differenziali ordinarie autonome in  $\mathbb{R}^2$  è della forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x, v) \\ \dot{v} = B(x, v) \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (5.7)$$

E di conseguenza i sistemi meccanici (conservativi) sono una sottoclasse molto particolare di questi con  $A(x, v) = v$ .

(ii) È interessante notare come si possa arrivare allo stesso risultato anche moltiplicando per  $\dot{x}$  l'equazione di Newton<sup>9</sup>:

$$\dot{x}m\ddot{x} = \dot{x}f(x) = -\dot{x}\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{d}{dt}U(x) \quad (5.8)$$

Dove  $\dot{x}m\ddot{x} = \frac{d}{dt}\frac{m}{2}\dot{x}^2$ , e quindi portando tutto a sinistra:

$$\frac{d(K + U)}{dt} = \frac{dH}{dt} = 0 \quad (5.9)$$

Questo procedimento ha il vantaggio che introduce in modo naturale la quantità  $H$  senza conoscerla a priori.

---

<sup>9</sup>è come se stessimo ricavando un'espressione della potenza

## 5.2 Diagrammi di fase

Esistono soluzioni costanti che sono delle coppie del tipo  $(\tilde{x}, 0)$ , e si ricavano in modo analogo a prima ponendo  $F(Y) = 0$  e di conseguenza si ha che le soluzioni costanti/di equilibrio sono:

$$t \mapsto (x(t), v(t)) = (\tilde{x}, 0) \quad \forall t \quad (5.10)$$

invece da un punto di vista energetico questi corrispondono alle coppie  $(\tilde{x}, 0)$  tale che l'integrale primo  $H$  sia minimo, che alla fine dei conti corrisponde al trovare al trovare i minimi di  $U(x)$ . Inoltre siccome  $H$  si conserva lungo il moto, quest'ultimo deve necessariamente svolgersi sugli insiemi di livello di  $H$ :

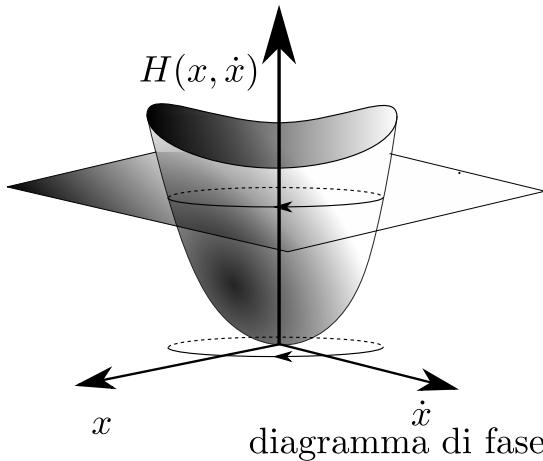
$$H(x(t), v(t)) = E \quad (= H(x_0, v_0)) \quad (5.11)$$

Cioè le curve  $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$  soluzioni di  $\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{m}f(x) \end{cases}$  giacciono su un insieme di livello  $H$  determinato dalle condizioni iniziali.

Si chiama *piano delle fasi*, o *spazio di fase*, o *spazio delle fasi*. Per  $n$  punti materiali che si possono muovere in  $R^d$ , lo spazio delle fases ha dimensione  $2 \cdot n \cdot d$ . In questo caso si ha che:

**Definizione 5.1:** Il grafico di  $f(x)$  con il verso delle traiettorie del sistema e dei punti di equilibrio si chiama *diagramma di fase dell'equazione  $\dot{x} = f(x)$* .

Per il moto unidimensionale (cioè un solo punto che si muove sulla retta  $\mathbb{R}$  soggetto alla  $f(x)$ ) l'insieme di livello è costituito da curve piane, eventualmente degeneri in un punto, oppure è vuoto.



**Osservazioni:**

(i) Nei casi che si studieranno si avrà l'espressione esplicita di  $H$ , quindi ovvero si ha un'equazione che identifica esattamente le curve di livello:

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) = E \quad (5.12)$$

$$\rightarrow \dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E - U(x)) \quad (5.13)$$

$$\rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \quad (U(x) \leq E) \quad (5.14)$$

Quindi le curve di livello, dette anche *orbite* nello spazio delle fasi  $(x, v)$ , sono delle curve simmetriche rispetto all'asse  $x$ . Quindi sostanzialmente basta disegnare la curva di livello all'energia  $E = H(x_0, v_0)$  e il punto si muoverà su tale curva con velocità  $(v, \frac{f(x)}{m})$  e il moto vero e proprio avviene sull'asse  $x$  ottenuto proiettando il moto 2D che avviene sulla curva di livello.

(ii) È importante sottolineare la seguente cosa:

$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2} \geq 0 \rightarrow \frac{m\dot{x}^2}{2} = E - U(x) \geq 0 \rightarrow U(x) \leq E \quad (5.15)$$

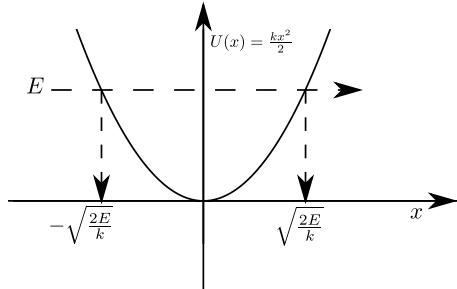
Il valore dell'energia potenziale  $U(x)$  non può superare il valore dell'energia  $E$  come mostrato sopra<sup>10</sup>, quindi il moto vero può avvenire soltanto su degli intervalli dell'asse  $x$  che sono soluzione della disequazione scritta sopra.

---

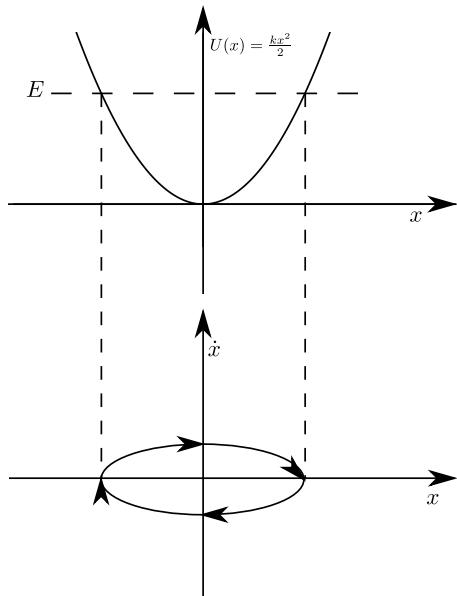
<sup>10</sup>alla fine è ciò che dice la conservazione dell'energia, cioè che la somma dell'energia cinetica e potenziale è fissata, questo modo di pensare semplifica e rende evidenti molte cose successive.

### 5.3 Come disegnare un diagramma di fase

Più in generale per disegnare un ritratto di fase, si disegna  $U(x)$  e fissato un certo livello di energia si trova l'intervallo di  $x$  in cui il moto è permesso, basta prendere l'intervallo di  $\mathbb{R}$  dove la  $U(x) < E$ .

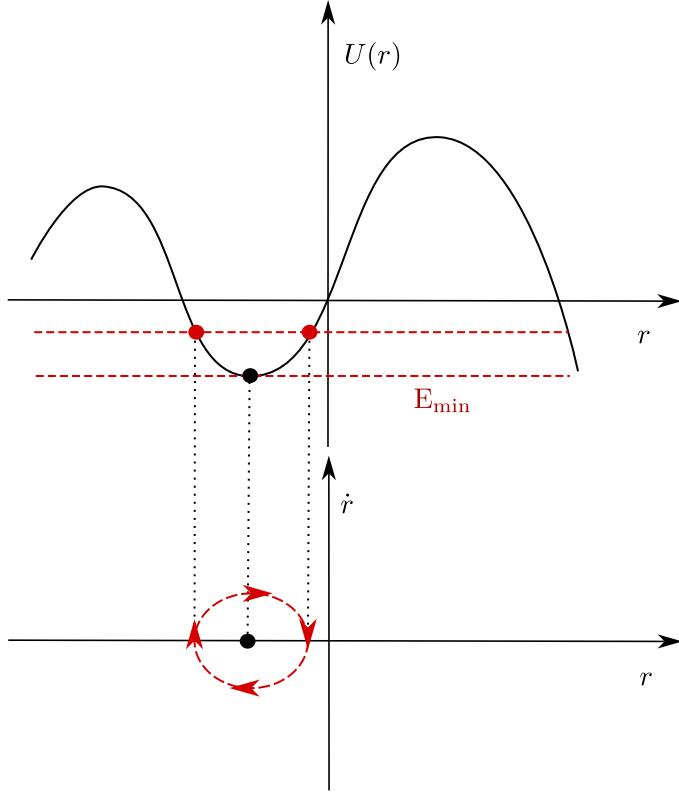


Si trova che la  $x$  deve essere compresa tra i due *punti di inversione*, chiamati così perché quando  $U = E$  allora  $K = 0$  e di conseguenza anche la velocità è nulla e c'è dunque l'inversione del moto. Più in generale si disegna il grafico di  $U(x)$  e sotto si tiene il grafico x-v. Si trovano i punti di inversione che rappresentano gli estremi della curva di livello. Se il numero dei punti di inversione è due allora ci sarà una curva chiusa e simmetrica rispetto all'asse  $x$  che li collega e ha tante gobbe quante ne ha  $U(x)$  (bisogna ricordare che la somma tra  $U(x)$  e  $K$  è fissata ad  $E$ ). Se il numero dei punti inversione (diverso dal punto di equilibrio) è uno allora la curva sarà aperta e andrà ad infinito.



## 5.4 Analisi locale vicino a un punto di minimo

In un caso più complesso si può avere:



Per risolvere questo caso si può procedere con la *linearizzazione del sistema Newtoniano vicino a  $r(E_{min})$* . Sopra si è mostrato che per un'equazione differenziale lineare autonoma le curve di livello sono delle ellissi esatte, invece cosa accade se il sistema non è lineare? Accade una cosa simile, cioè si aprono delle curve chiuse simili a ellissi vicino ai punti di equilibrio. È possibile vederlo linearizzando l'equazione differenziale, infatti ragionando come nel caso di equazioni  $\dot{x} = f(x)$  si pone  $(x(t), \dot{x}(t)) = (r_*, 0) + (\xi, \eta)$  segue che:

$$\begin{cases} x(t) = r_* + \xi(t) \\ \dot{x}(t) = 0 + \eta(t) \end{cases} \quad (5.16)$$

derivando e sostituendo nell'equazione differenziale originale:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta \\ \dot{\eta} = -\frac{1}{m}U'(r_* + \xi) \end{cases} \quad (5.17)$$

ora invece sfruttando il fatto che ci si trova in un punto dello spazio delle fasi vicino al punto di equilibrio  $(r_*, 0)$  si può calcolare lo sviluppo di Taylor attorno a tale

## 5. Analisi qualitativa della dinamica

---

punto:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta \\ \dot{\eta} = -\frac{1}{m} [U'(r_*) + U''(r_*)\xi + \dots] \end{cases} \quad (5.18)$$

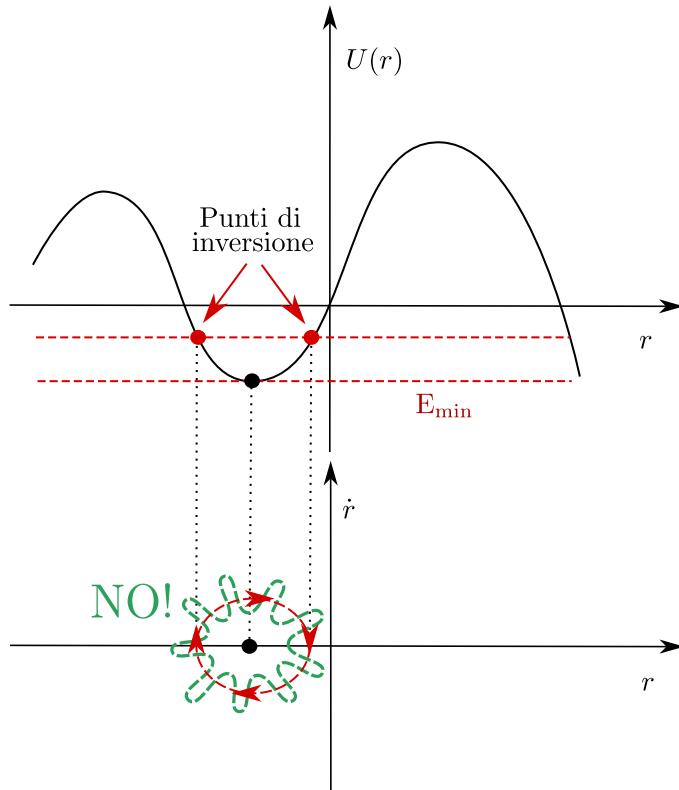
siccome si è vicino a un punto di equilibrio semplice/non degenere ( $\frac{d^2U(r_*)}{dx^2} \neq 0$ ), si ha:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta \\ \dot{\eta} = -\frac{1}{m} U''(r_*)\xi \end{cases} \iff \ddot{\xi} = -\omega^2\xi \quad (5.19)$$

con  $w := \sqrt{\frac{U''(r_*)}{m}}$ . Il sistema scritto sopra è lineare in  $(\xi, \eta)$  e riconduce all'equazione dell'oscillatore armonico che ha una soluzione già nota:

$$t \mapsto \begin{cases} \xi(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \\ \eta(t) = -\omega a \sin(\omega t) + \omega b \cos(\omega t) \end{cases} \quad (5.20)$$

tutto questo è perchè si è appunto approssimato  $U(x)$  con una parabola vicino al suo punto stazionario  $r_*$ . Questa è anche la descrizione parametrica dell'ellisse nello spazio delle fasi, e quindi il moto è periodico di periodo  $\frac{2\pi}{\omega}$



**Osservazioni:**

(i) Tra i punti di inversione il moto è regolare e monotono (cioè sulla curva di livello ci si muove in un verso senza fermarsi), in particolare si trovano i punti critici (le gobbe delle curve di livello menzionate prima) con lo studio della conservazione dell'energia:

$$v_{\pm}(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \longrightarrow \text{considerando } v_+(x) \longrightarrow \quad (5.21)$$

$$\frac{d}{dx}v_+(x) = \frac{-\frac{2}{m}U'(x)}{2\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} = -\frac{1}{m}\frac{U'(x)}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \quad (5.22)$$

Come già detto prima,  $U(x)$  e  $v_+(x)$  hanno le gobbe allineate, quando una ha un minimo l'altra un massimo e viceversa.

(ii) Supponendo che il moto avvenga su una curva chiusa nello spazio delle fasi, qual è il tempo di percorrenza tra  $x_+$  e  $x_-$  (i due punti di inversione)? Come già visto:

$$v_+ = \dot{x} = +\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

e separando le variabili:

$$\longrightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}$$

integrandando tra  $x_-(E)$  e  $x_+(E)$  si ottiene il periodo completo:

$$T = 2 \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \quad (5.23)$$

L'integrando esiste sempre continuo nell'intervallo considerato, tranne agli estremi dove presenta qualche problema.

Queste due osservazioni sono trattate più in dettaglio per il caso del potenziale kepleriano N.8.

## 5.5 Analisi locale vicino a un punto di minimo, caso radiale

In modo del tutto analogo è possibile sviluppare lo stesso ragionamento nel caso del moto centrale in cui  $U$  dipende da  $r$ . Lo sviluppo di questo calcolo è incentrato nel determinare l'equazione per  $\theta(t)$ . Si considera come prima  $r_*$  il valore di  $r$  relativa al valore minimo di energia  $E_*$  e si immagina di perturbarla di un valore  $\Delta E > 0$  tale che  $\frac{\Delta E}{E} \ll 1$ . In tal caso Vale che

$$E = E_* \Rightarrow r(t) = r_* \quad \forall t \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\ell_z}{\mu r_*^2} \quad (5.24)$$

Cioè si ha un moto circolare uniforme. Per valore di energia  $E > E_*$  si ha un moto radiale limitato dai punti di inversione  $r_+$  e  $r_-$ .

### Conservazione dell'energia

$$\frac{\mu \dot{r}^2}{2} + U_e(r) = E = E_* + \Delta E \quad (5.25)$$

sviluppando l'energia efficace attorno ad  $r_*$  si ha:

$$U_e(r) = U_e(r_*) + \cancel{U'_e(r_*)(r - r_*)} + \frac{1}{2} U''_e(r_*)(r - r_*)^2 + o(3) \quad (5.26)$$

$$= E_* + \frac{1}{2} U''_e(r_*)(r - r_*)^2 + o(3) \quad (5.27)$$

Dove  $U' = 0$  perchè si sta studiando un punto di minimo.

$$\frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \cancel{E_*} + \frac{1}{2} U''_e(r_*)(r - r_*)^2 + o(3) = \cancel{E_*} + \Delta E \quad (5.28)$$

La quale si può riscrivere come:

$$\frac{U''(r - r_*)^2}{2\Delta E} + \frac{\mu \dot{r}^2}{2\Delta E} = 1 + o\left(\frac{(r - r_*)^3}{\Delta E}\right) \quad (5.29)$$

$$= \frac{(r - r_*)^2}{\frac{2\Delta E}{U''}} + \frac{\dot{r}^2}{\frac{2\Delta E}{\mu}} = 1 + o\left(\frac{3}{\Delta E}\right) \quad (5.30)$$

cioè l'equazione di un'ellisse centrata in  $(r_*, 0)$  con semiasse dell'ordine di  $\sqrt{\Delta E}$

**Equazione del moto**

$$\mu \ddot{r} = -U'_e(r) \quad (5.31)$$

Definendo  $\xi := r - r_*$  si ha  $r(t) = r_* + \xi(t)$

$$\Rightarrow \mu \ddot{\xi} = -U'_e(r_* + \xi) = -\cancel{U'_e(r_*)} - U''_e(r_*)\xi + o(\xi^2) \quad (5.32)$$

Ovvero l'equazione dell'oscillatore armonico che risolta da:

$$r(t) = r_* + \xi(t) = r_* + a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + o(\Delta E) \quad (5.33)$$

$$\text{con } \omega^2 = \frac{U''_e(r)}{\mu} > 0.$$

**Ricostruzione del moto spaziale**

$$\dot{\theta} = \frac{\ell_z}{\mu r^2(t)} = \frac{\ell_z}{\mu(r_* + \xi(t))^2} = \frac{\ell_z}{\mu r_*^2 \left(1 + \frac{\xi(t)}{r_*}\right)^2} \quad (5.34)$$

Dato che per costruzione  $\frac{\xi(t)}{r_*} \ll 1$  si può sviluppare secondo Taylor:

$$\frac{1}{1 + \epsilon} = 1 - \epsilon + \epsilon^2 + \dots \Rightarrow \frac{1}{(1 + \epsilon)^2} = 1 + 3\epsilon^2 - 2\epsilon + \dots \quad (5.35)$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \frac{\ell_z}{\mu r_*^2} t - \frac{2\ell_z}{\mu r_*^2} \int_0^t \xi(s) ds + \frac{3\ell_z}{\mu r_*^4} \int_0^t \xi^2(s) ds + o(\xi^3)} \quad (5.36)$$

Due esempi importanti di potenziale

**Tema (N.7): Potenziale armonico**

Utilizzando la legge di conservazione dell'energia che per l'oscillatore armonico si ha:

$$H(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \quad (\text{N.7 - 1})$$

Si studiano gli insiemi di livello di tale funzione<sup>a</sup>:

$$H(x, \dot{x}) = E \quad (\text{N.7 - 2})$$

Detto in altro modo si intende insieme di livello  $E$  di  $H$  l'insieme

$$S := \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : H(x, \dot{x}) = E\} = H^{-1}(E) \quad (\text{N.7 - 3})$$

Inoltre si può notare che la funzione  $H$  è non negativa in tutto  $\mathbb{R}^2$ , quindi non esistono gli insiemi di livello per  $E < 0$ . Invece per gli altri casi si distinguono i seguenti casi:

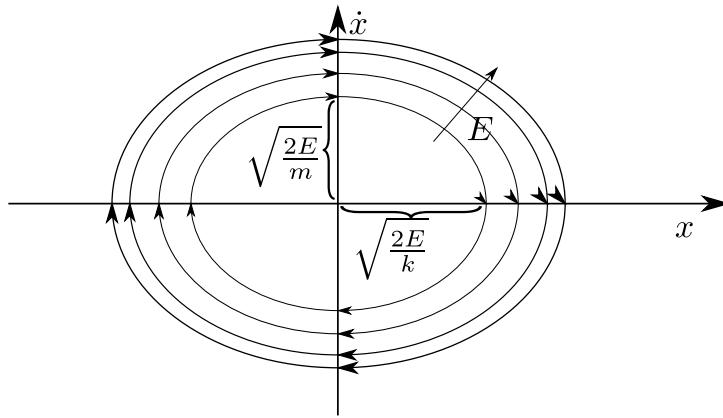
- $E > 0$

$$\frac{kx^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} = E$$

Ora si potrebbe isolare  $\dot{x}$  per averla in funzione di  $x$ , ma conviene scriverla in tale modo:

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{\dot{x}^2}{2E/m} = 1$$

Cosicché questa risulta essere l'equazione di un'ellisse di semiassi  $\sqrt{\frac{2E}{k}}$  e  $\sqrt{\frac{2E}{m}}$



Inoltre quando si disegna il diagramma di fase nello spazio delle fasi  $(x, \dot{x})$  bisogna indicare tutti i versi di percorrenza delle curve di livello. Quindi scelta una curva di livello basta prenderne un punto che sta sopra l'asse  $x$  e il verso è sempre da sinistra verso destra. Una banale conseguenza è che le orbite chiuse sono sempre percorse in senso orario.

- **E=0**

$$E = 0 \iff x = 0, \dot{x} = 0$$

Ovvero un punto di equilibrio (l'unico) del sistema, cioè l'origine del piano  $(x, \dot{x})$ . Quindi al diminuire di  $E$  le ellissi degenerano nel punto di origine.

---

<sup>a</sup>Essendo questa una funzione da  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}$  è possibile rappresentarla in  $\mathbb{R}^3$  come una superficie, gli insiemi di livello  $E$  equivale a tagliare la superficie all'altezza  $E$  e prendere la sezione che ne risulta (una curva)

### Tema (N.8): Potenziale kepleriano

Vale la pena notare che è raro che i potenziali valgano strettamente, per esempio per studiare il moto della Terra rispetto al Sole, oltre alle influenze degli altri pianeti, ci sono altre correzioni legate al fatto che i corpi non sono puntiformi, hanno una struttura interna<sup>a</sup>, etc.:  $U(r)_{\text{corr}} := \frac{k}{r}(1 + \dots)$ . Anzi più in generale il potenziale potrebbe non essere proprio più dipendente dalla sola  $r$ .

La formulazione dell'energia è

$$H = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + U_e(r) = E \implies \frac{\mu \dot{r}^2}{2} = E - U_e(r) \geq 0 \quad (\text{N.8 - 1})$$

Gli intervalli consentiti di moto radiale sono quelli dell'insieme  $\{r > 0 : U_e(r) \leq E\}$ . In generale se  $U_e$  ammette un minimo assoluto ed  $E_{\min} = \min_{r>0} U_e(r)$  allora per  $E < E_{\min}$  non si hanno moti. Inoltre dalla legge di conservazione  $\dot{\theta} = \frac{\ell_z}{\mu r^2}$

$$U_e(r) = \frac{\ell_z^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \quad (\text{N.8 - 2})$$

$$\text{Se } U_e(r) = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{\ell_z^2}{2\mu k}$$

$$U'_e(r) = 0 \iff -\frac{\ell_z^2}{\mu r^3} + \frac{k}{r^2} = 0 \Rightarrow r_c = \frac{\ell_z^2}{\mu k} (= 2r_0) \quad (\text{N.8 - 3})$$

Serve un disegno qualitativo. Ha una sola radice per la derivata, quindi c'è un punto critico e calcolando i valori asintotici per  $x \rightarrow 0$  (tende a  $+\infty$ ) e  $x \rightarrow +\infty$  (tende a 0) si vede che è per forza un punto di minimo; chiamato  $r_c$ . È possibile disegnarne il grafico.

- $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\min}$

Aumentando l'energia, il primo livello energetico interessante si incontra per  $E = U_e(r_c)$ . L'unico valore di  $r$  consentito è quindi  $r_c$ , essendo costante si può determinare la legge del moto per  $\theta$ .

$$\dot{\theta} = \frac{\ell_z}{\mu r_c^2} \implies \boxed{\theta(t) = \theta(0) + \underbrace{\frac{\ell_z}{\mu r_c^2} t}_{\omega_c}} \quad (\text{N.8 - 4})$$

Ovvero moto circolare uniforme nello spazio fisico. Di conseguenza si può ricavare il periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

- $E_{\min} < E < 0$

Invece per energie superiori, ma comunque sotto lo zero, si aprono delle (specie di) ellissi attorno a  $r = r_c$  dando due punti di inversione  $r_+$  e  $r_-$ . Si possono trovare calcolando le radici di

$$\frac{\ell_z^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} = E \longrightarrow \frac{\ell_z^2}{2\mu} - kr = Er^2 \quad (\mathcal{N}.8 - 5)$$

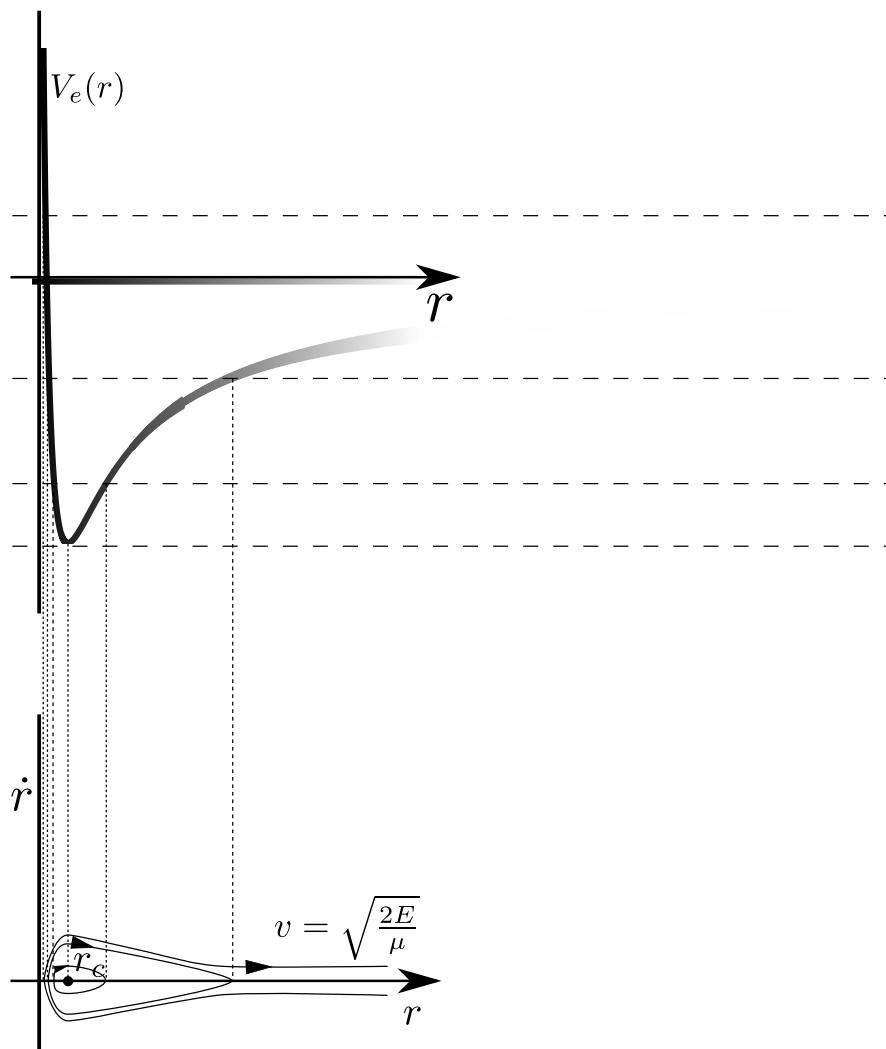
$$\rightarrow r^2 + \frac{k}{E}r - \frac{\ell_z^2}{2\mu E} = 0 \Rightarrow \boxed{r_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{k}{E} \pm \sqrt{\frac{k^2}{E^2} + \frac{4\ell_z^2}{2\mu E}} \right]}$$

La condizione della radice impone che  $E_{\min} < E < 0 \Rightarrow 0 < r_- < r_+$  Ciò significa che il moto è limitato nello spazio fisico e quindi per il teorema di Bertrand sono anche chiuse: il caso corrisponde a delle ellissi per il moto reale.

- $E = 0$

Invece per  $E = 0$  si ha una parabola come moto nello spazio fisico, e per energie superiori si trovano delle iperboli. Quest'ultime non sono curve limitate quindi il corpo esce dall'influenza gravitazionale per  $t \rightarrow +\infty$ . Inoltre la curva di fase per  $E = 0$  è detta *separatrice* tra i due tipi moto.

Per capire il verso di percorrenza si basti pensare che quando  $\dot{r} > 0$  vuol dire che  $r$  sta crescendo, quindi va verso destra. Viceversa, quando  $\dot{r} < 0$  allora  $r$  sta diminuendo, quindi va verso sinistra. Il grafico del potenziale e del moto radiale nel piano  $(r, \dot{r})$  è quello riportato.



*Osservazioni:*

(i) L'orbita poteva avere un'altra forma pur mantendendo il massimo centrale e i due zeri  $r_-$  e  $r_+$ ? Siccome

$$\dot{r} = +\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_e(r))} \quad (\mathcal{N}.8 - 6)$$

$$\frac{d\dot{r}}{dr} = \frac{-\frac{2}{\mu}E'_e(r)}{2\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_e(r))}} \stackrel{?}{=} 0 \quad (\mathcal{N}.8 - 7)$$

Che è 0 dove si annulla il numeratore, cioè dove si annulla  $U'_e(r)$  cioè  $r_c$ . Inoltre la funzione è monotona crescente per  $r_- < r < r_c$  e monotona decrescente per  $r_c < r < r_+$ .

(ii) Bisogna verificare anche che non ci siano punti angolosi (cosa non scontata vista la presenza della radice), per vedere ciò si calcolano i limiti per  $r \rightarrow r_{\pm}$  da destra e sinistra. Da destra si ha:

$$\lim_{r \rightarrow r_+^+} \frac{d\dot{r}}{dr} = -\frac{U'_e(r)}{\sqrt{2\mu(E - U_e(r))}} = +\infty \quad (\mathcal{N}.8 - 8)$$

In questo caso il numeratore resta finito nel calcolo del limite perché  $U'(r_-)$  non è un punto critico. Da sinistra ci si aspetta  $-\infty$  affinché ci sia continuità. Ed è così. Le condizioni imposte sono:

$$\frac{d\dot{r}}{dr} \rightarrow \pm\infty \text{ per } r \rightarrow r_{\mp}^{\pm} \quad (\mathcal{N}.8 - 9)$$

(iii) Lo spazio fisico  $(r, \theta)$  è diverso da quello del diagramma di fase  $(r, \dot{r})$  in cui sono contenute le informazioni del moto radiale.

---

<sup>a</sup>cosa che viene completamente ignorata nel concetto della particella

### Tema (N.9): Moto di stelle nelle galassie e di galassie negli ammassi

Si consideri un ammasso sferico di materia con densità  $\rho(s)$  dove  $s$  è la distanza dal centro; di raggio  $R$  oltre al quale non c'è niente. L'energia potenziale  $U(r)$  dell'ammasso sferico è della forma:

$$U(r) = -Gm2\pi \int_0^R \rho(s)s^2 \left( \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos \theta}} \right) ds \quad (\text{N.9 - 1})$$

Dove il fattore  $2\pi$  è il risultato dell'integrazione in  $d\varphi$ . Per risolvere si applica la sostituzione  $u = -\cos \theta$

$$\begin{aligned} &= -\pi Gm \int_0^R \rho(s)s^2 \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{s^2 + r^2 + 2rsu}} ds = \\ &= -\pi Gm \int_0^R \rho(s)s^2 \left( \frac{\sqrt{s^2 + r^2 + 2rsu}}{rs} \Big|_{u=-1}^{u=1} \right) ds = \\ &= -2\pi \frac{Gm}{r} \int_0^R \rho(s)s(r+s-|r-s|) ds = \\ \Rightarrow U(r) &= \begin{cases} -\frac{Gm}{r} \underbrace{\left( 4\pi \int_0^R \rho(s)s^2 ds \right)}_M & r > R \\ -2\pi \frac{Gm}{r} \left[ \int_0^r \rho(s)s^2 ds + \int_r^R \rho(s)s \cdot 2r ds \right] & 0 < r < R \end{cases} \end{aligned}$$

Concentrandosi sul caso  $0 < r < R$  si ha:

$$-4\pi \frac{Gm}{r} \left[ \int_0^r \rho(s)s^2 ds + r \int_r^R \rho(s)s ds \right] \quad (\text{N.9 - 2})$$

Adesso, se  $\rho(s)$  è indipendente da  $s$  si può portare fuori dall'integrale:

$$\begin{aligned} \Rightarrow U(r) &= -4\pi \frac{Gm}{r} \rho \left[ \frac{r^3}{3} + \frac{r}{2}(R^2 - r^2) \right] = \\ &= -4\pi \frac{Gm}{r} \rho \left( -\frac{1}{6}r^3 + \frac{1}{2}R^2r \right) = \boxed{\frac{2\pi}{3} Gm\rho r^2 - 2\pi Gm\rho R^2} \end{aligned}$$

Che ha la forma dell'equazione di un oscillatore armonico  $U(r) \sim r^2$ , bisogna sottolineare che è stato approssimata la distribuzione della galassia come se fosse continua. Il risultato ottenuto è che

$$U(r) = \begin{cases} -\frac{GmM}{r} & r > R \\ \frac{2\pi}{3} Gm\rho r^2 - 2\pi Gm\rho R^2 & r < R \end{cases} \quad (\text{N.9 - 3})$$

Andando a calcolare la forza del potenziale si ha:

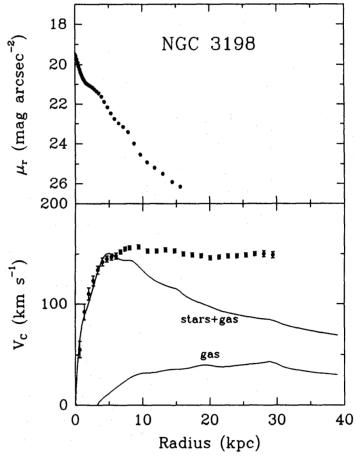
$$F(r) = -U'(r) = \begin{cases} -\frac{GmM}{r^2} & r > R \\ -\frac{4\pi}{3}Gm\rho r = -\frac{G(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho)m}{r^2} = -\frac{GM(r)m}{r^2} & r < R \end{cases}$$

Passando allo studio qualitativa si ha che il potenziale efficace è della forma:

$$U_e(r) = \frac{\ell_z^2}{2mr^2} + U(r) \quad (\mathcal{N}.9 - 4)$$

Dove  $U(r)$  è ( $\mathcal{N}.9 - 3$ ), quindi all'interno si hanno orbite circolari infatti  $U(r) = cr^2$  esplicitando  $\ell_z = mr^2\dot{\theta} = mrv_\theta$  dove  $v_\theta = r\dot{\theta}$ . Il moto circolare si ha

$$\begin{aligned} U'_e(r) = 0 &\iff -\frac{\ell_z^2}{mr^3} + 2cr = 0 \\ &\Rightarrow \frac{m^2r^2\dot{r}_\theta^2}{r^3} = 2cr \end{aligned}$$



Velocità radiale osservata della galassia NGC 3198 confrontata con la curva di rotazione prevista dai dati fotometrici. Il grafico in alto mostra la densità di massa del disco.  
Fonte: Begeman, K.G., "HI rotation curves of spiral galaxies. I. NGC 3198," *Astronomy and Astrophysics*, Vol. 223, p. 47-60, 1989.

Da qua si trovano i valori di  $v_\theta$  nei due casi:

$$\begin{cases} v_\theta(r) = \text{cost} \cdot r & r < R \\ -\frac{m^2v_\theta^2}{mr} + \frac{GmM}{r^2} = 0 \Rightarrow v_\theta = \text{cost} \frac{1}{\sqrt{r}} & r > R \end{cases}$$

Quindi per  $r$  interni la velocità è costante mentre fuori va come  $\sim r^{-\frac{1}{2}}$ .

C'è una discrepanza con i dati sperimentali perché risulta che per  $r > R$  la velocità non decresce come  $\sim \frac{1}{\sqrt{r}}$  ma è costante. Sembrerebbe che ci fosse materia (quindi massa) che non hanno un'interazione elettromagnetica e quindi sfuggono all'analisi degli esperimenti. Questo è il problema della materia oscura e consiste circa nel 90% della massa presente.

Tuttavia si può notare che se la densità di materia oscura fosse della forma:

$$\begin{aligned} \rho_{dark}(s) = \frac{k}{s^2} \rightarrow U(r) &= -\frac{\text{cost}}{r} [r + r \log R - r \log r] \\ &= \text{cost} + \text{cost} \log r \end{aligned}$$

Il potenziale sarebbe allora logaritmico e la derivata è  $1/r$  che cancella esattamente il termine che fa discostare l'esperimento dalla teoria.

## 5.6 Analisi locale vicino a un punto di massimo

Per quanto riguarda il massimo locale, supponendo che  $r_*$  sia massimo locale non degenere di  $U(r)$  e cioè:

$$U_e(r) = U_e(r_*) + U'_e(r_*)(r - r_*) + \frac{1}{2}U''_e(r_*)(r - r_*)^2 + o(3)$$

$$E = E_* + \Delta E \quad E_* = U_e(r_*) \quad (5.37)$$

Dalla conservazione dell'energia:

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = U_e(r) = \frac{\dot{r}^2}{2} + \mathcal{E}_* + \frac{1}{2}U''_e(r_*)(r - r_*)^2 + o(3) = \mathcal{E}_* + \Delta E \quad (5.38)$$

Per semplificare le notazioni si può definire tutto in funzione di  $|\Delta E|$  e usando la funzione segno per dargli il segno:

$$\Delta E = \sigma|\Delta E| \quad \text{con } \sigma = \text{sgn}(\Delta E) = \pm 1 \quad (5.39)$$

E quindi riprendendo l'equazione di prima e facendo qualche semplificazione e la nuova notazione si ha:

$$\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{|U'(r'_*)|}{2}(r - r'_*)^2 + \dots = \sigma|\Delta E| \quad (5.40)$$

E mettendo in forma normale:

$$\frac{\dot{r}^2}{2|\Delta E|} - \frac{(r - r'_*)^2}{2|\Delta E|/|U''(r'_*)|} - \dots = \sigma \quad (5.41)$$

Nel caso in cui  $\sigma = +1$  si ha:

$$\begin{cases} \sigma = +1 \longrightarrow (\Delta E > 0) \\ \frac{\dot{r}^2}{b^2} - \frac{(r - r'_*)^2}{a^2} = +1 \end{cases} \quad (5.42)$$

cioè l'equazione di un'iperbole (entrambi i rami).

Analogamente per  $\sigma = -1$  si ha:

$$\begin{cases} \sigma = -1 (\Delta E < 0) \\ -\frac{\dot{r}^2}{b^2} + \frac{(r - r'_*)^2}{a^2} = +1 \end{cases} \quad (5.43)$$

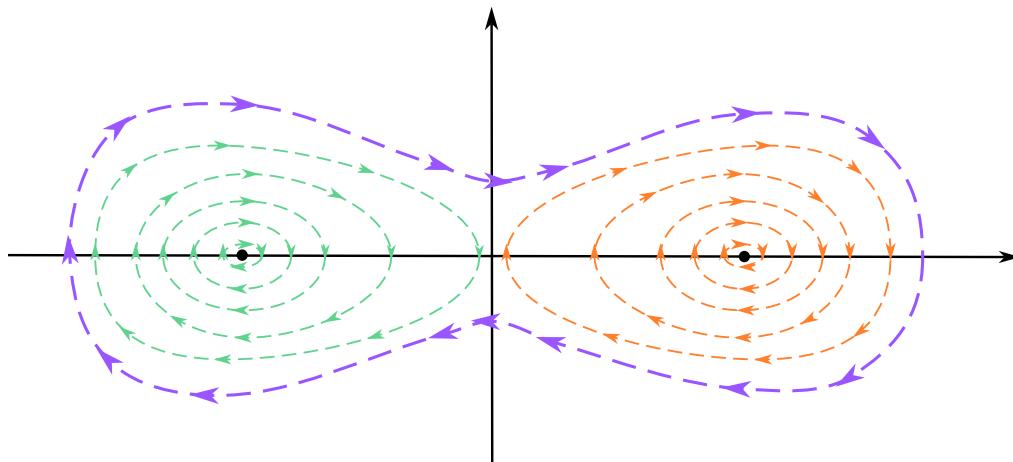
che è l'equazione dell'altra iperbole (i due rimanenti rami) con gli stessi asintoti dell'iperbole precedente.

Man mano che ci si avvicina con l'energia al massimo locale di  $U(r)$  ( $E = U'_e(r_*)$ ,  $(\Delta E = 0)$ ), i due rami dell'iperbole degerano in due asintoti. L'equazione degli asintoti si trova riprendendo l'equazione dove non si è ancora fatto la divisione per  $\Delta E$  e lo si pone uguale a 0:

$$\dot{r}^2 = |U'(r'_*)|(r - r'_*)^2 \implies \dot{r} = \pm \sqrt{|U'(r'_*)|}(r - r'_*) \quad (5.44)$$

Nel centro dell'iperbole si ha il punto di eq. instabile  $(r'_*, 0)$  e quest'ultimo è il punto di incontro degli asintoti costituendo così un punto angoloso per la curva di livello che si raccorda agli asintoti.

Sempre riferendosi alla stessa figura ci sono tre tipi di moti possibili date dalle soluzioni dell'equazione: vicino ai punti di equilibrio stabili si aprono curve chiuse simili a ellissi che ad un certa energia si raccordano agli asintoti dando origine alle connessioni omocline (collegano un punto di equilibrio a se stesso), aumentando ancora l'energia si trovano delle curve a otto.



Quindi concludendo i punti di equilibrio  $(\tilde{r}, 0)$  corrispondenti ai minimi locali non degeneri dell'energia potenziale ( $U'(\tilde{r}) = 0, U''(\tilde{r}) > 0$ ) si chiamano centri.

I punti di equilibrio  $(\tilde{r}, 0)$  corrispondenti a massimi locali non degeneri dell'energia potenziale ( $U'(\tilde{r}) = 0, U''(\tilde{r}) < 0$ ) si chiamano punti iperbolicci o punti di sella.

### Tema ( $\mathcal{N}.10$ ): Orbita di Mercurio, problema dei tre corpi

Il potenziale per il problema dei tre corpi, che è stato ricavato analiticamente nel tema  $\mathcal{N}.6$ , è della forma:

$$U_{medio}(\xi, t) = -Gm_J \left( \frac{1}{|x|} + \frac{1}{4} \frac{|\xi|^2}{|x|^3} + \dots \right) + \\ -Gm_S \left( \frac{1}{|\xi|} + \frac{\mu^2}{4} \frac{|x|^2}{|\xi|^3} + \dots \right)$$

Riscrivendo il potenziale con  $|x| := R$

$$U_{medio}(\xi, t) = -\frac{Gm_S}{|\xi|} - \frac{Gm_S \mu^2}{4} \frac{R^2}{|\xi|^3} + \frac{Gm_J}{4} \frac{|\xi|^2}{R^3} \left( -\frac{Gm_S}{R} \right)$$

Il primo termine è la forza di gravitazione già vista, poi compare un termine che va come l'inverso del cubo di  $\xi$  cioè un potenziale attrattivo, dominante per  $\xi$  piccoli. L'effetto fisico di quest'ultimo è superiore rispetto al potenziale centrifugo che va come l'inverso del quadrato di  $\xi$ .

Il termine ultimo è un potenziale repulsivo armonico, è presente perché Giove attira gravitazionalmente Mercurio e quello è il risultato medio.

#### *Osservazione:*

Le sorti di Mercurio sembrerebbero quindi due, o il Sole lo attira fino a inglobarlo, o Giove lo allontana completamente dal campo gravitazionale del Sole. Per chiarire ciò si può valutare il rapporto tra i due termini perturbativi:

$$\mathcal{G}m_J \frac{|\xi|^2}{R^3} \frac{1}{\mathcal{G}m_S \mu^2} \frac{|\xi|^3}{R^2} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{|\xi|}{R} \right)^5 \\ \simeq 10^3 \left( \frac{0.4}{5} \right)^5 \simeq 10^3 \cdot 10^{-5} = 10^{-2} \ll 1$$

Quindi il contributo dominante è quello del Sole. Questo rapporto sottolinea l'importanza di non essersi fermati allo sviluppo di dipolo nel calcolo analitico del potenziale.

$$\ddot{\xi} = -\frac{\partial U_{medio}}{\partial \xi}, \quad U_{medio} = U_{medio}(|\xi|) \quad (\mathcal{N}.10 - 1)$$

$$\Rightarrow \ell = \xi \times \dot{\xi} \text{ costante} \quad (\mathcal{N}.10 - 2)$$

$$H = \frac{|\dot{\xi}|^2}{2} + U_{medio}(|\xi|) \quad (\mathcal{N}.10 - 3)$$

Passando alle coordinate polari nel piano di  $\xi$

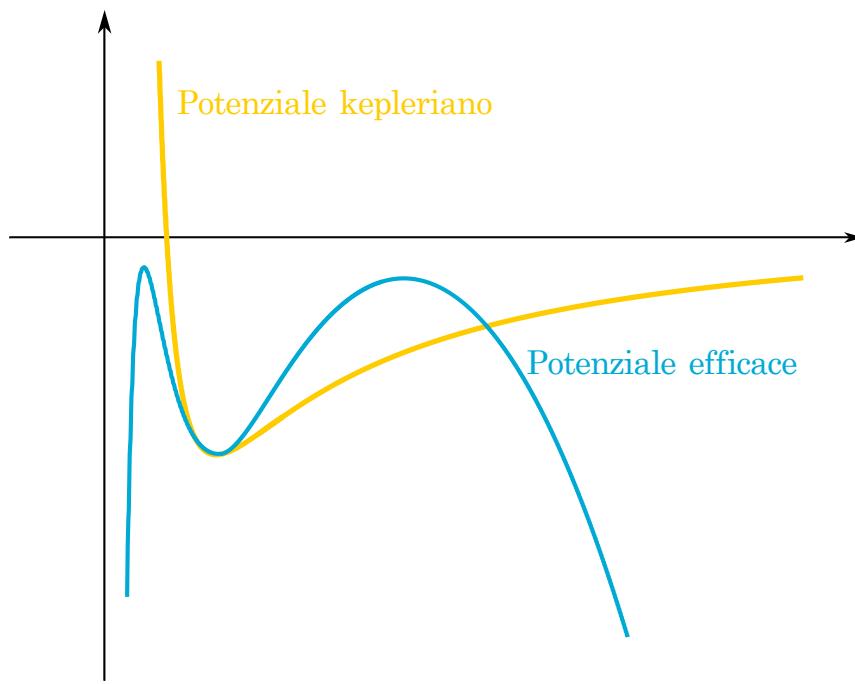
$$\ell_z = r^2 \dot{\theta} \quad |\dot{\xi}|^2 = \dot{r}^2 + r \dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{\ell_z^2}{r^2} \quad (\mathcal{N}.10 - 4)$$

$$H = \frac{\dot{r}^2}{2} + \underbrace{\frac{\ell_z^2}{2r^2} + U_{medio}(r)}_{U_e(r)} = E \quad (\mathcal{N}.10 - 5)$$

I valori di  $r$  consentiti sono per valori di  $U_e(r) \leq E$ . Per poter disegnare il potenziale si scrive l'espressione esplicita del potenziale efficace  $U_e(r)$ :

$$U_e(r) = \underbrace{\frac{\ell_z^2}{2r^2} - \frac{Gm_S}{r}}_{\text{Potenziale ordinario kepleriano}} - \frac{Gm_S \alpha}{r^3} - Gm_J K r^2 \quad (\mathcal{N}.10 - 6)$$

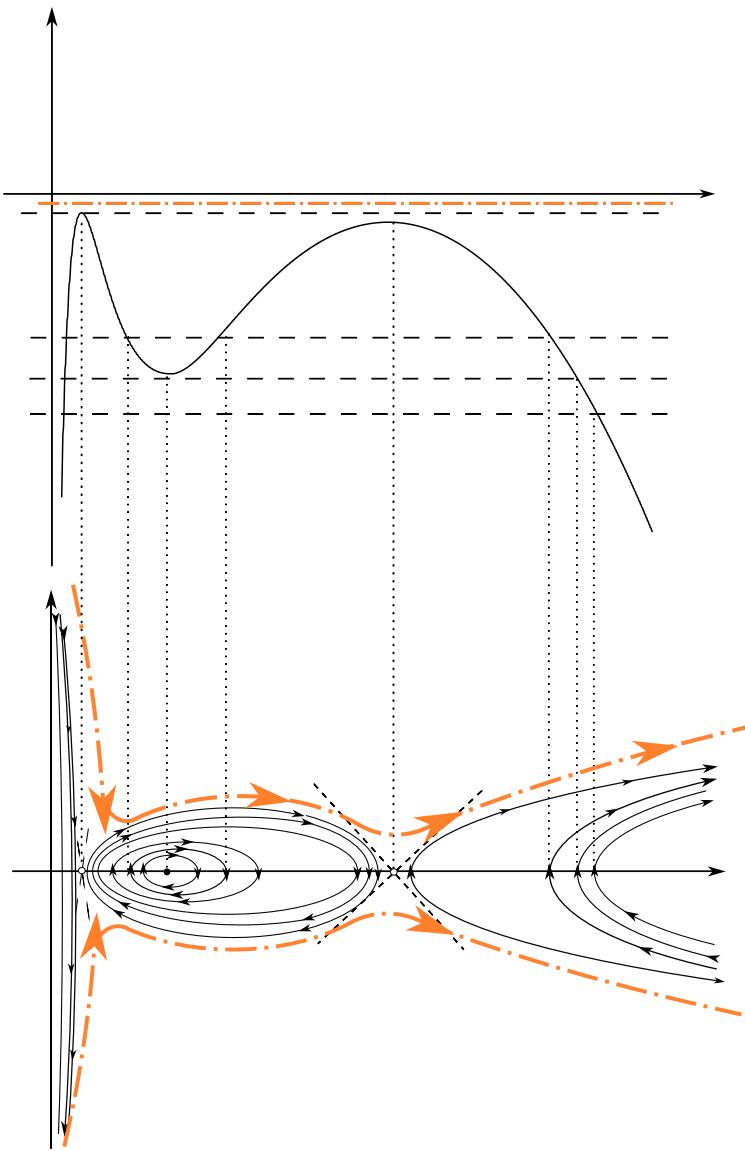
Con  $\alpha = \frac{\mu^2 R^2}{4}$  e  $k = \frac{1}{4R^3}$ . Il grafico del potenziale, confrontato con il potenziale kepleriano è:



## 5. Analisi qualitativa della dinamica

---

Come è chiaro dal grafico, a differenza del caso kepleriano imperturbato, l'analisi del ritratto di fase prende in considerazione anche i due punti di massimo introdotti rispettivamente dal termine  $\sim r^{-3}$  dovuto alla presenza del sole (primo massimo) e dal termine  $\sim r^2$  dovuto dalla presenza dovuto alla presenza di Giove. Si riporta di seguito il ritratto di fase.



### Precessione del perielio vicino all'orbita circolare

Scrivendo ora il potenziale efficace trascurando il termine quadratico in  $r$  perchè è piccolo rispetto agli altri, si ha:

$$U_e(r) = \frac{\ell_z^2}{2r^2} - \frac{Gm_S}{r} - \frac{Gm_S\alpha}{r^3} \quad (\mathcal{N}.10 - 7)$$

Dove  $\alpha = \frac{\mu^2 R^2}{4}$  e  $\mu = \frac{m_J}{m_S}$ .

L'obbiettivo è calcolare, attorno il minimo, il moto di precessione. Innanzitutto si cerca il minimo

$$U'_e(r) = -\frac{\ell_z^2}{r^3} + \frac{Gm_S}{r^2} + \frac{3Gm_S\alpha}{r^4} = 0 \Rightarrow r^2 - \frac{\ell_z^2}{Gm_S}r + 3\alpha = 0$$

Gli zeri sono:

$$r_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ \underbrace{\frac{\ell_z^2}{Gm_S}}_{r_K} \pm \sqrt{\left( \underbrace{\frac{\ell_z^2}{Gm_S}}_{r_K} \right)^2 - 12\alpha} \right] \quad (\mathcal{N}.10 - 8)$$

Dove  $r_K$  è il raggio dell'orbita kepleriana non perturbata. La condizione di esistenza, dalla radice, di  $r_{\pm}$  è

$$\exists r_{\pm} : \ell_z^2 \geq Gm_S \sqrt{12\alpha} = \sqrt{3}Gm_S\mu R \quad (\mathcal{N}.10 - 9)$$

In termini di  $r_K$  la condizione è equivalente a  $r_K > \sqrt{3}\mu R$  che è ampiamente verificata nel caso reale dell'orbita di Mercurio. Altrimenti il potenziale centri-fugo non è sufficiente a modificare la forma del potenziale efficace che diventa monotono crescente.

Riscrivendo la derivata del potenziale

$$U'_e(r) = \frac{Gm_S}{r^4} \left( r^2 - \frac{\ell_z^2}{Gm_S}r + 3\alpha \right) = \frac{Gm_S}{r^4} (r - r_+)(r - r_-)$$

Si vede subito che  $r_-$  è punto di massimo e  $r_+$  di minimo senza aver calcolato la derivata seconda ma solo fattorizzando.

**Osservazione:**

Se  $r_c = r_+ \rightarrow \frac{\ell_z^2}{Gm_S}$  si ha il caso kepleriano.

## 5. Analisi qualitativa della dinamica

---

Attorno al minimo locale  $r_c$  l'orbita è circolare. considerando l'equazione

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= -U'_e(r) \\ r(t) &= r_c + \xi(t) \implies \ddot{\xi} = -U''_e(r_c)\xi \\ \omega_{rad} &= \sqrt{U''_e(r)} \Rightarrow T_{rad} = \frac{2\pi}{\omega_{rad}} = \frac{2\pi}{\sqrt{U''_e(r_c)}} \\ \dot{\theta} &= \frac{\ell_z}{r^2} \Rightarrow \Delta\theta(T_{rad}) = \frac{\ell_z}{r_c^2} T_{rad} = \boxed{\frac{\ell_z}{r_c^2} \frac{2\pi}{\sqrt{U''_e(r_c)}}}\end{aligned}$$

Dove ci si aspetta che

$$\frac{\Delta\theta(T_{rad})}{2\pi} = \frac{\ell_z}{r_c^2} \frac{1}{\sqrt{U''_e(r)}} \quad (\mathcal{N}.10 - 10)$$

In questo caso  $U_e(r) = \frac{\ell_z^2}{2r^2} + U(r)$  perchè  $U(r) = -\frac{Gm_S}{r} - \frac{Gm_s\alpha}{r^2}$ . Siccome  $r_c$  è definito a partire da  $U'_e(r) = 0$  cioè

$$-\frac{\ell_z^2}{r^3} + U'(r) = 0 \Rightarrow \frac{\ell_z^2}{r^3} = U'(r) \quad (\mathcal{N}.10 - 11)$$

Per  $r = r_c$  vale che  $U''(r) = \frac{3\ell_z^2}{r^4} + U''(r) \underset{r=r_c}{=} \frac{3}{r}U'(r) + U''(r)$  cioè

$$\boxed{U''_e(r_c) = \frac{3}{r_c}U'(r_c) + U''(r_c)} \quad (\mathcal{N}.10 - 12)$$

Inoltre  $\frac{|\ell_z|}{r_c^2} = \sqrt{\frac{U'(r_c)}{r_c}}$  allora:

$$\frac{\Delta\theta(T_{rad})}{2\pi} = \frac{\sqrt{U'(r_c)/r_c}}{\sqrt{3\frac{U'(r_c)}{r_c} + U''(r_c)}} = \frac{1}{\sqrt{3 + r_c U''(r_c)/U'(r_c)}}$$

Ci si è ricondotti a un'equazione dove compaiono le derivate, fino alla seconda, dell'energia potenziale:

$$U(r) = -\frac{Gm_S}{r} - \frac{Gm_S\alpha}{r^3} = -Gm_s \left( \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{r^3} \right) \quad (\mathcal{N}.10 - 13)$$

$$U'(r) = Gm_S \left( \frac{1}{r^2} + \frac{3\alpha}{r^4} \right) \quad (\mathcal{N}.10 - 13)$$

$$U''(r) = -Gm_S \left( \frac{2}{r^3} + \frac{12\alpha}{r^5} \right) \quad (\mathcal{N}.10 - 14)$$

Da qua è possibile ottenere

$$\Rightarrow \frac{rU''(r)}{U'(r)} = \frac{-Gm_S \left( \frac{r}{r^2} + \frac{12\alpha}{r^4} \right)}{Gm_S \left( \frac{1}{r^2} + \frac{3\alpha}{r^4} \right)} = -\frac{2r^2 + 12\alpha}{r^2 + 3\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\theta(T_{rad})}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{3 - \frac{2r_c^2 + 12\alpha}{r_c^2 + 3\alpha}}} = \boxed{\sqrt{\frac{r_c^2 + 3\alpha}{r_c^2 - 3\alpha}}}$$

Riscrivendo ora  $r_c$  si ha

$$r_c = r_+ = \frac{1}{2} \left( r_k + r_k \sqrt{1 - \frac{12\alpha}{r_K^2}} \right) = \quad (\mathcal{N}.10 - 15)$$

$$= r_K \left( \frac{1 + \sqrt{1 - 12\alpha/r_K^2}}{2} \right) \stackrel{\frac{12\alpha}{r_K^2} \ll 1}{=} \quad (\mathcal{N}.10 - 16)$$

$$\simeq r_K \left( \frac{1 + 1 - \frac{6\alpha}{r_K^2}}{2} \right) = r_K \left( 1 - \frac{3\alpha}{r_K^2} \right) \quad (\mathcal{N}.10 - 17)$$

E il suo quadrato è quindi

$$r_c^2 = r_K^2 \left( 1 - \frac{3\alpha}{r_K^2} \right)^2 = r_K^2 \left( 1 - \frac{6\alpha}{r_K^2} + O\left(\frac{\alpha^2}{r_K^4}\right) \right) \simeq r_K^2 - 6\alpha$$

$$\frac{\Delta\theta(T_{rad})}{2\pi} = \left( \frac{r_K^2 - 6\alpha + 3\alpha}{r_K^2 - 6\alpha - 3\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{r_K^2 - 3\alpha}{r_K^2 - 9\alpha}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 - 3\alpha/r_K^2}}{\sqrt{1 - 9\alpha/r_K^2}} = \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{\alpha}{r_K^2} + \dots \right) \left( 1 + \frac{9}{2} \frac{\alpha}{r_K^2} + \dots \right) = 1 + \frac{3\alpha}{r_K^2}$$

Quindi finalmente la correzione è

$$\frac{\Delta\theta(T_{rad})}{2\pi} = 1 + \frac{3\alpha}{r_K^2} \approx 10^{-4} \quad (\mathcal{N}.10 - 18)$$

## 5.7 Teorema di Bertrand

### Perturbazione di orbite circolari

In questa sezione si proverà a capire in quali casi il periodo del moto radiale coincide con quello del moto angolare. Il periodo del moto radiale è la grandezza definita come:

$$T_{rad} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{U_e''(r)}} \quad (5.45)$$

Definendo  $\Delta\theta(t) = \theta(t) - \theta(0)$  si ha:

$$\Delta\theta(T_{rad}) = \underbrace{\frac{\ell_z}{\mu r_*^2} T_{rad}}_{(1)} + \underbrace{\frac{3\ell_z}{\mu r_*^4} A^2 \frac{T_{rad}}{2}}_{(2)} \quad (5.46)$$

Dove si è sfruttato che:

1.  $\int_0^{T_{rad}} A \cos(\omega t + \varphi) dt = 0$
2.  $\int_0^{T_{rad}} A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{A^2}{2} T_{rad}$

$$\Rightarrow \Delta\theta(T_{rad}) = \left( \frac{\ell_z}{\mu r_*^2} + \frac{3\ell_z A^2}{2\mu r_*^4} \right) T_{rad} + \dots \quad (5.47)$$

Si è trovato che  $\Delta\theta(nT_{rad}) = n\Delta\theta(T_{rad})$  allora il problema si può riformulare chiedendo quale sia il valore di  $m$  nell'equazione:

$$\Delta\theta(mT_{rad}) = n\Delta\theta(T_{rad}) = m2\pi \quad (5.48)$$

Che è verificata

$$\Leftrightarrow \left( \frac{\ell_z}{\mu r_*^2} + \frac{3\ell_z A^2}{2\mu r_*^4} \right) \sqrt{\frac{\mu}{U_e''(r_*)}} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \quad (5.49)$$

Questo risultato è particolare: cioè è richiesto che una funzione con variabili continue e che rappresentano i parametri del moto siano uguali a un numero razionale. Una funzione  $f(x) = q \in \mathbb{Q}$  continua e con  $x \in \mathbb{R}^n$  può essere solo costante.<sup>11</sup> Allora la domanda è se esistono quindi forze *speciali* caratterizzate da un legame stretto tra le variabili che le compongono che fa sì che  $f(x)$  rimanga costante ma con  $x$  che può variare nel continuo? La risposta è sì, tuttavia vale solo per il caso kepleriano in cui  $m = n \Rightarrow q = 1$  e nel caso dell'oscillatore armonico in cui  $n = 2m \Rightarrow q = \frac{1}{2}$ . In tutti gli altri casi l'effetto di una perturbazione energetica all'orbita circolare non restituisce una funzione costante con immagine razionale che nel moto si traduce in una precessione del perielio (uno slittamento degli assi orbitali) come per il caso dell'orbita di Mercurio.

---

<sup>11</sup>Se così fosse allora si potrebbe prendere un punto  $x_0$  tale che  $f(x_0) = q \in \mathbb{Q}$  ma allora esisterebbe  $\epsilon \in \mathbb{R}^n : f(x_0 + \epsilon) \notin \mathbb{Q}$

### Periodo dell'orbita del moto radiale

Supponendo che il moto avvenga su una curva chiusa nello spazio delle fasi, qual è il tempo di percorrenza tra  $r_+$  e  $r_-$  (i due punti di inversione)? Come già visto:

$$\dot{r}_\pm = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(x))}$$

scegliendo  $r_+$  e separando le variabili:

$$\rightarrow dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_e(r))}}$$

integrando tra  $r_-(E)$  e  $r_+(E)$  si ottiene proprio il periodo completo del moto radiale:

$$T = 2 \int_{r_-(E)}^{r_+(E)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_e(r))}} \quad (5.50)$$

L'integrando esiste sempre continuo nell'intervallo considerato, tranne agli estremi dove presenta qualche problema. Ma si vede abbastanza facilmente che l'integrale converge sempre a meno che uno dei punti di inversione non sia un massimo locale.

### Condizione di chiusura

Considerando ora

$$\dot{\theta} = \frac{\ell_z}{\mu r^2} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\ell_z}{\mu r^2} \iff \frac{d\theta}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{\ell_z}{\mu r^2} \quad (5.51)$$

In questo modo si lega  $\theta$  a  $r$  invece che a  $t$  analogamente a come si era fatto nella trattazione dell'orbita del potenziale kepleriano N.4.

$$\frac{d\theta}{dr} \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_e(r))} = \frac{\ell_z}{\mu r^2} \quad (5.52)$$

$$\rightarrow \frac{d\theta}{dr} = \frac{\ell_z}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_e(r))}} = \frac{\ell_z}{\sqrt{2\mu r^2(E - U_e(r))}} \quad (5.53)$$

Integrando tra  $r_-$  ed  $r_+$  e moltiplicando per 2:

$$\Delta\theta(T_{rad}) = \Phi = \frac{2\ell_z}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_e(r)}} \quad (5.54)$$

Che è l'angolo di rivoluzione in un periodo di moto radiale ed è compatibile con il risultato trovato per l'orbita di Mercurio. In generale vale che:

$$\Delta\theta(nT_{rad}) = n\Delta\theta(T_{rad}) \quad (5.55)$$

## 5. Analisi qualitativa della dinamica

---

Per la chiusura dell'orbita si deve avere la seguente condizione:

$$\exists n, m : \Delta\theta(nT_{rad}) = 2\pi m \quad (5.56)$$

cioè dopo  $n$  giri radiali bisogna che ci siano stati un numero intero di periodi angolari. E per quanto detto prima la relazione è equivalente a  $\Delta\theta(T_{rad}) = 2\pi \frac{m}{n}$ . E quindi la condizione di chiusura risulta essere:

$$2 \int_{r_-}^{r_+} \frac{\ell_z}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_e(r))}} = \frac{m}{n} 2\pi \quad (5.57)$$

Per qualche  $m$  e  $n$ . Ovvero:

$$\frac{\Phi(E, \ell_z)}{2\pi} = q \in \mathbb{Q} \quad (5.58)$$

Ciò è verificato se  $\frac{\Phi(E, \ell_z)}{2\pi}$  è costante esattamente per quanto detto nel caso delle perturbazioni di orbite circolari.

Ha senso allora chiedersi quali sono i potenziali centrali  $U(r)$  con (almeno) un minimo locale tali che tutte le orbite limitate sono chiuse, cioè tali che

$$\frac{\Phi(E, \ell_z)}{2\pi} = q \in \mathbb{Q} \quad \forall E, \ell_z \in \mathbb{R}^2 : \text{ il moto periodico è radiale} \quad (5.59)$$

**Teorema 5.1**

Tra tutti i potenziali centrali  $U(r)$  tali che  $U_e = \frac{\ell_z^2}{2\mu r^2} + U(r)$  ammette almeno un minimo locale non degenere, gli unici che hanno tutte le orbite limitate chiuse sono il potenziale kepleriano  $U(r) = -\frac{k}{r}$  ( $k > 0$ ) e il potenziale armonico  $U(r) = \frac{k}{2}r^2$  ( $k > 0$ )

**Dimostrazione:**

Prima si considera la condizione di chiusura delle orbite, ovvero:  $\Phi(E, \ell_z) = \Delta\theta(T_{rad}) = 2\pi m/n$ . Ricordando la derivazione di  $\Phi$

$$\Phi(E, \ell_z) = \sqrt{\frac{2}{\mu}} \ell_z \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{E - \underbrace{\frac{\ell_z^2}{2\mu r^2} - U(r)}_{U_e(r)}}} \quad (5.60)$$

Dove  $r_+$  e  $r_-$  sono le soluzioni di  $U_e(r) = E$ .

- (Ricerca dei potenziali candidati) Si considera prima il caso in cui  $E \rightarrow E_{min} = U_e(r_c)$  (da sopra), cioè preso la regione di minimo si abbassa l'energia progressivamente fino al punto di minimo dopodiché si studieranno energie molto grandi per generalizzare il risultato. Senza passare per il calcolo del limite della (5.60) ci si aspetta che:

$$\Phi(E, \ell_z) \xrightarrow{E \rightarrow E_{min}} \frac{\ell_z}{\mu r_c^2} 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{U_e''(r_c)}} \quad (5.61)$$

Cioè  $\Delta\theta(T_{rad})$  per energie di poco superiori a quella dell'orbita circolare. Questo è compatibile con il risultato ottenuto per il caso dell'orbita di Mercurio anche se compare  $\mu$  perchè nel problema citato veniva semplificato. È possibile riscrivere l'equazione togliendo la dipendenza di  $U_e$  ma esprimendo tutto in funzione di  $U(r)$ , così da poter usare le ipotesi del teorema direttamente. I calcoli, già svolti per il problema dell'orbita di Mercurio N.10, portano a:

$$\begin{aligned} \Phi(E, \ell_z) &\rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{U'(r_c)}{3U'(r_c) + r_c U''(r_c)}} = 2\pi q, \quad q \in \mathbb{Q} \\ &\iff \frac{U'(r_c)}{3U'(r_c) + r_c U''(r_c)} = q^2 \end{aligned} \quad (5.62)$$

Come già detto questa implicazione è verificata se la funzione è costante perchè se così non fosse allora si potrebbe prendere un punto

## 5. Analisi qualitativa della dinamica

---

$x_0$  tale che  $f(x_0) = q \in \mathbb{Q}$  ma allora esisterebbe  $\epsilon \in \mathbb{R}^n : f(x_0 + \epsilon) \notin \mathbb{Q}$ . Questo implica che:

$$\Phi(E, \ell_z) \stackrel{!}{=} q^2 \quad \forall r \in I \ni r_c \quad (5.63)$$

Che è il cuore del teorema, ovvero se la funzione è costante attorno ad  $r_c$  questo deve esserlo anche per ogni valore dell'intervallo che comprende  $r_c$ . In questo modo ad  $r_c$  si può sostituire  $r$  e allora si ottiene un'equazione differenziale per  $U(r)$ .

$$\rightarrow U'(r) = 3q^2 U'(r) + q^2 r U''(r) \quad (5.64)$$

$$\rightarrow (1 - 3q^2)U'(r) = q^2 r U''(r) \quad (5.65)$$

$$\Rightarrow \boxed{U''(r) = \frac{1}{r} U'(r) \left( \frac{1}{q^2} - 3 \right)} \quad (5.66)$$

Che equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} W(r) = U'(r) \\ W'(r) = \left( \frac{1}{q^2} - 3 \right) \frac{1}{r} W(r) \end{cases} \iff \frac{dW}{W} = \left( \frac{1}{q^2} - 2 \right) \frac{dr}{r}$$

$$\begin{aligned} \ln W &= \left( \frac{1}{q^2} - 3 \right) \ln r + \text{cost} \\ \ln W - \ln r^{\left( \frac{1}{q^2} - 3 \right)} &= \text{cost} \iff \ln \frac{W}{r^{\left( \frac{1}{q^2} - 3 \right)}} = \text{cost} \\ \Rightarrow \frac{W}{r^{\left( \frac{1}{q^2} - 3 \right)}} &= \underbrace{\text{cost}'}_{e^{\text{cost}}} \Rightarrow W(r) = \text{cost}' r^{\left( \frac{1}{q^2} - 3 \right)} \\ \Rightarrow \boxed{U(r) = \text{cost} \cdot r^{\left( \frac{1}{q^2} - 2 \right)}} \end{aligned}$$

Questa è la famiglia di potenziali che soddisfano le ipotesi richieste.

**Osservazioni:**

- (i) Se  $\frac{1}{q^2} = 2 \Rightarrow U(r) = \text{cost}$  ma ciò non è possibile perché  $q = \sqrt{2}$  e per ipotesi deve essere razionale.

$$(ii) \quad \left[ \frac{1}{q^2} > 2 \Rightarrow c > 0 \right] \text{ e } \left[ \frac{1}{q^2} < 2 \Rightarrow c < 0 \right] \text{ altrimenti } U'(r) < 0$$

e dunque

$$\Rightarrow U'_e(r) = -\frac{\ell_z^2}{\mu r^3} + U'(r) < 0 \quad (5.67)$$

Ovvero la condizione di minimo è violata.

Dato  $K > 0$  il potenziale può assumere due forme

$$U(r) = cr^\alpha \quad \text{con } \alpha = \frac{1}{q^2} - 2 > 0 \quad (5.68)$$

$$U(r) = -cr^{-\beta} \quad \text{con } \beta = 2 - \frac{1}{q^2} > 0 \quad (5.69)$$

Che corrispondono rispettivamente alla famiglia di potenziali armo-nici e kepleriani.

### Passaggi importanti

– Condizione di chiusura

$$\boxed{\Delta\theta(T_{rad}) \stackrel{!}{=} 2\pi q \quad q \in \mathbb{Q}}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\ell_z}{\mu r^2} = \frac{dr}{dr} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dr} \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dr} = \frac{\ell_z}{\mu r^2} \frac{1}{\dot{r}}}$$

$$\Delta\theta(T_{rad}) \int_{r_-}^{r_+} \frac{d\theta}{dr} dr \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_e)}}}{=} \int_{r_-}^{r_+} \frac{\ell_z}{\mu r^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_e)}} dr \stackrel{!}{=} 2\pi q$$

–  $E \rightarrow E_{min}$  dall'alto

$$\mu \ddot{r} = -U'_e(r) \iff r(t) = r_c + \xi(t)$$

$$\mu \ddot{\xi} = -U''_e(r_c)\xi \implies \boxed{\omega := \sqrt{\frac{U''_e(r_c)}{\mu}}}$$

$$\Delta\theta(T_{rad}) = \int \dot{\theta} dt = \frac{\ell_z}{\mu r^2} T = \frac{\ell_z}{\mu r^2} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\ell_z}{\mu r^2} \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{U''_e(r_c)}{\mu}}}$$

## 5. Analisi qualitativa della dinamica

---

- $U_e''(r_c)$  in funzione solo di  $U$  e derivate

$$U'_e(r_c) = 0 = \frac{-\ell_z^2}{\mu r_c^3} + U'(r_c) \Rightarrow \boxed{U'(r_c) = \frac{\ell_z^2}{\mu r_c^3}}$$

$$U''_e(r_c) = \frac{3}{r_c} \frac{\ell_z^2}{\mu r_c^3} + U''(r_c) = \boxed{\frac{3}{r_c} U'(r_c) + U''(r_c)}$$

- Condizione di chiusura in funzione di  $U$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\theta(T_{rad})}{2\pi} &= \frac{\ell_z}{\mu r^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{U''_e(r_c)}{\mu}}} \\ &= \sqrt{\frac{\ell_z^2}{\mu r_c^4}} \sqrt{\frac{1}{\frac{3}{r_c} U'(r_c) + U''(r_c)}} = \boxed{\sqrt{\frac{U'(r_c)/r_c}{\frac{3}{r_c} U'(r_c) + U''(r_c)}} = q} \end{aligned}$$

- Affinché una funzione continua sia uguale a un numero  $\in \mathbb{Q}$  è necessario che sia costante. E quindi se attorno  $r_c$  la funzione è costante lo deve essere anche per ogni intervallo contenente  $r_c$

$$\frac{U'}{3U' + rU''} = q^2 \quad (5.70)$$

- (Verifica di  $\Phi = \text{cost}$ ) Di seguito si mostra che per tali potenziali  $\Phi(E, \ell_z)$  è effettivamente costante. Partendo dall'espressione di  $\Phi$

$$\Phi(E, \ell_z) = \sqrt{\frac{2}{\mu}} \ell_z \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - \frac{\ell_z^2}{2\mu r^2} - U(r)}} = 2\pi q \quad (5.71)$$

$$1. \boxed{U(r) = cr^\alpha}$$

$$\Rightarrow U_e(r) = \frac{\ell_z^2}{2\mu r^2} + cr^\alpha \quad (5.72)$$

$\Phi$  deve essere costante in  $E$  (e anche in  $\ell_z$ ) allora si cerca il  $\lim_{E \rightarrow \infty} \Phi(E, \ell_z)$ . Utilizzando il cambio di variabile  $x := \frac{\ell_z}{\sqrt{2\mu r}}$  si ottiene

$$\Phi(E, \ell_z) = 2 \int_{x_-/x_+}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - x^2 - c \left(\frac{\ell_z}{\sqrt{2\mu}}\right)^\alpha x^{-\alpha}}}$$

Dove  $x_- := \frac{\ell_z}{\sqrt{2\mu}r_+}$  e  $x_+ = \frac{\ell_z}{\sqrt{2\mu}r_-}$  cioè le soluzione di  $x^2 + c\left(\frac{\ell_z}{\sqrt{2\mu}}\right)^\alpha x^{-\alpha} = E$  risolta asintoticamente per  $E \rightarrow \infty$ . Quindi

$$x^2 + c\left(\frac{\ell_z}{\sqrt{2\mu}}\right)^\alpha x^{-\alpha} = E \Rightarrow \begin{cases} x_+ \sim \sqrt{E} \\ x_- \propto E^{-1/\alpha} \end{cases}$$

Si utilizza adesso un altro cambio di variabile  $y = \frac{x}{x_+}$ , che è possibile avendo visto gli asintotici di  $x_+$  e  $x_-$ . In questo modo l'integrale ha estremi 0 e 1 e si può studiare l'asintotico dell'integrale senza preoccuparsi degli estremi.

$$\frac{x_-}{x_+} \propto E^{-1/\alpha-1/2} \quad \text{per } E \rightarrow +\infty \quad (5.73)$$

Si ha ora:

$$\begin{aligned} \Phi &= 2x_+ \int_{x/x_+}^1 \frac{dy}{\sqrt{E - x_+^2 y^2 - c\left(\frac{\ell_z}{\sqrt{2\mu}}\right)^\alpha x_+^{-\alpha} y^{-\alpha}}} \\ &\stackrel{E \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{E} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{E - Ey^2}} = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} \stackrel{y=\sin\theta}{=} 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta d\theta}{\cos\theta} = 2 \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

In un periodo di moto radiale quindi si percorre mezza orbita.  
Si è trovato quindi che per

$$\begin{aligned} E \rightarrow +\infty \Rightarrow \Phi(E, \ell_z) &\sim \pi \text{ ma } \Phi(E, \ell_z) = 2\pi q \quad \forall E \Rightarrow q = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{1}{q^2} - 2 = 4 - 2 = 2. \end{aligned}$$

2. 
$$U(r) = -\frac{c}{r^\beta}$$

Utilizzando il primo cambio di variabile che si era utilizzando per il potenziale armonico si ottiene:

$$\Phi(E, \ell_z) = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - x^2 + c\left(\frac{\ell_z}{\sqrt{2\mu}}\right)^{-\beta} x^\beta}}$$

Al contrario di prima però i valori asintotici di  $r_+$  ed  $r_-$  sono

$$x \rightarrow 0 \text{ per } E \rightarrow 0^- \Rightarrow \begin{cases} x_+ \longrightarrow \left[\left(\frac{\ell_z}{\sqrt{2\mu}}\right)^{-\beta} c\right]^{\frac{1}{2-\beta}} \\ x_- \rightarrow 0 \end{cases}$$

## 5. Analisi qualitativa della dinamica

---

Utilizzando ora la seconda sostituzione  $y = \frac{x}{x_+}$

$$\begin{aligned} \Phi &= 2x_+ \int_{\frac{x_-}{x_+}}^1 \frac{dy}{\sqrt{E - x_+^2 y^2 + c \left( \frac{\ell_z}{\sqrt{2\mu}} \right)^{-\beta} x_+^\beta y^\beta}} \\ &\stackrel{E \rightarrow 0^-}{\sim} 2x_+ \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{x_+^2 y^\beta - x_+^2 y^2}} = 2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^\beta - y^2}} \\ &\quad \text{con } y = x_+(0) \\ &\quad \boxed{\xi = y^{\frac{2-\beta}{2}} \rightarrow y = \xi^{\frac{2}{2-\beta}}} \\ &\Rightarrow \Phi \sim 2 \int_0^1 \frac{2}{2-\beta} \xi^{\frac{\beta}{2-\beta}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^{\frac{2\beta}{2-\beta}} - \xi^{\frac{4}{2-\beta}}}} = \\ &= \frac{4}{2-\beta} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{4}{2-\beta} \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{2\pi}{2-\beta}} \end{aligned}$$

Allora  $\Phi(E, \ell_z) = 2\pi q \quad \forall E$  e per  $E \rightarrow \infty$  si ha che  $\Phi = \frac{2\pi}{2-\beta}$  e quindi risulta che  $\Rightarrow q = 1$  ovvero l'orbita fa un giro completo in un periodo di moto radiale e  $\beta = 1$ .

□

---

<sup>a</sup>In analisi con  $\sim$  si indica quando il rapporto è 1, con  $\propto$  se il rapporto è costante.

## 5.8 Un'applicazione: quantizzazione di Bohr-Born-Sommerfield...

A partire dal modello di Bohr, teorizzato nel 1913, è nota la relazione che lega la frequenza di emissione di un fotone quando un elettrone passa da un orbita a un'altra:

$$\omega_{em} = \frac{E' - E''}{\hbar} \underset{\text{sperimentale}}{\uparrow} = \text{cost} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (5.74)$$

Nei successivi anni il modello atomico è stato progressivamente migliorato e ampliato, in particolare è stato possibile ottenere la formula sperimentale a partire dall'assioma della quantizzazione e da alcuni concetti spiegati in questo documento. Considerando l'atomo di H composto da un protone e un elettrone, il potenziale che descrive l'interazione tra protone ed elettrone è:

$$U(r) = -\frac{e^2}{r} \quad (5.75)$$

Dove per atomi idrogenoidi si adotta la sostituzione:  $+e \rightarrow Ze$ , dove  $Z$  è il numero di protoni oppure un valore efficace  $Z_{eff}$  che prende in considerazione ulteriori effetti come quello di schermo della carica protonica.

Il periodo radiale dell'orbita circolare nel diagramma delle fasi è:

$$T_{rad}(E) = \sqrt{2\mu} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{E - U_e(r)}} \quad (5.76)$$

Riscalando il problema  $\dot{r} \rightarrow \mu\dot{r}$  e chiamando  $p_r := \mu r$  la quantità di moto radiale, è possibile mettere in relazione l'area racchiusa dall'orbita circolare con il periodo  $T_{rad}$ :

$$T_{rad}(E) = \frac{d}{dE} A(E) \quad (5.77)$$

La formula di  $A(E)$  è

$$A(E) = \oint_{C_E} p_r dr \quad (5.78)$$

$$= 2 \int_{r_-}^{r_+} p(r) dr = 2 \int_{r_-}^{r_+} \mu \dot{r} dr = \quad (5.79)$$

$$\text{dalla conservazione dell'energia } \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + U_e(r) = E \\ = 2 \int_{r_-}^{r_+} \mu \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_e(r))} dr = \quad (5.80)$$

$$= 2\sqrt{2\mu} \int_{r_-(E)}^{r_+(E)} \sqrt{E - U_e(r)} dr \quad (5.81)$$

## 5. Analisi qualitativa della dinamica

---

$$\frac{dA}{dE} = 2\sqrt{2\mu} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\cancel{\sqrt{E-U_e(r)}}} + 2\sqrt{2\mu} \left( \cancel{\sqrt{E-U_e(r)}} \Big|_{r=r_+} \frac{dr_+}{dE} - \cancel{\sqrt{E-U_e(r)}} \Big|_{r=r_-} \frac{dr_-}{dE} \right)$$

Dove si è utilizzato che

$$F(\theta) = \int_a^{x(\theta)} f(s)ds = \frac{d}{dx} \int_a^x f(s)ds \Big|_{x(\theta)} x'(\theta) = f(x(\theta)) \cdot x'(\theta)$$

L'unità di misura dell'area, nel piano delle fasi, che si è definita è quella di un "azione" ovvero [energia  $\times$  tempo] o [impulso  $\times$  spazio]. L'assioma di quantizzazione richiede che

$$A(E) = nh \quad n \text{ intero positivo } \geq 1 \quad (5.82)$$

Dove  $h$  è la costante di Planck,  $\hbar := \frac{h}{2\pi} \simeq 10^{-27}$  erg  $\cdot$  sec. Si può ora definire la variabile d'azione:

$$I(E) := \frac{A(E)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_E} p_r dr \underset{\substack{\uparrow \\ \text{assioma di quantizzazione}}}{=} n\hbar \quad (5.83)$$

### Osservazione:

La cosa più logica che si potrebbe pensare è quella di quantizzare direttamente l'energia, in realtà quello che accade la quantizzazione dell'azione. La quantizzazione dell'energia è una diretta conseguenza e si riflette in maniera diversa e diversificata per l'energia. Invertendo  $I(E) = n\hbar$  si trova

$$E_n = I^{-1}(n\hbar) \quad (5.84)$$

Dalla terza legge di keplero è noto che

$$\frac{T_{rad}}{a^3} = 4\pi^2 \frac{\mu}{K} \quad (5.85)$$

Dove in questo caso  $K = e^2$  per il caso kepleriano era  $Gm_1m_2$ . La relazione che lega il semiasse maggiore con l'energia è:

$$a = -\frac{1}{2} \frac{K}{E} = \frac{K}{2|E|} \quad (5.86)$$

$$\Rightarrow T_{rad}(E) = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{K}} \left( \frac{K}{2|E|} \right)^2 = \pi K \sqrt{\frac{\mu}{2}} |E|^{-3/2} \quad (5.87)$$

Integrando si ottiene

$$A(E) = \pi K \sqrt{\frac{\mu}{2}} |E|^{-1/2} = \boxed{\pi K \sqrt{2\mu} \frac{1}{\sqrt{|E|}}} \quad (5.88)$$

La variabile d'azione è quindi

$$I(E) = \frac{A(E)}{2\pi} = K \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{\sqrt{|E|}} \quad (5.89)$$

Adesso si potrebbe invertire per trovare l'energia e quantizzarla, oppure quantizzare la variabile d'azione e poi invertirla. Seguendo il primo approccio

$$E = -\frac{K^2 \mu}{2I^2} \quad (5.90)$$

Inserendo ora  $K = Ze^2$ , con  $Z = 1$  per H, e imponendo la quantizzazione  $I = n\hbar$  si ottiene

$$E_n = E|_{I=n\hbar} = -\frac{Z^2 e^4 \mu}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad \begin{array}{c} \equiv \\ \uparrow \\ \boxed{\alpha = \frac{e^2}{c\hbar} \simeq \frac{1}{137}} \end{array} \quad -\frac{\mu c^2}{2} \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2}$$

Dove si è usato il sistema di Gauss (CGS) per cui  $4\pi\epsilon_0 = 1$ . Il significato di questa formula è che quando si rappresenta il potenziale  $U_e(r)$  è che i livelli di energia permessi sono discreti:

La formula di emissione che quantifica la frequenza emessa nel salto dal livello n al livello m, con  $n > m$ , è

$$\omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar} = \frac{\mu c^2}{2} Z^2 \alpha^2 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (5.91)$$

In accordo con la formula sperimentale già presente in quel periodo.

### Tema (N.11): Oscillatore armonico quantizzato

Applicando quanto detto all'oscillatore armonico tridimensionale, si hanno tre equazioni differenziali indipendenti:

$$m\ddot{X} = -kX \iff \ddot{X} = -\omega^2 X \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 \\ \ddot{x}_3 = -\omega^2 x_3 \end{cases}$$

Si limita allora lo studio all'oscillatore armonico 1D. Moltiplicando ambo i membri dell'equazione per  $\dot{x}$  si ottiene

$$m\dot{x}\ddot{x} = -kx\dot{x} \quad (\text{N.11 - 1})$$

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{\dot{x}^2}{2} \right) = - \frac{d}{dt} \left( k \frac{x^2}{2} \right) \quad (\text{N.11 - 2})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k}{2}x^2 = E} \quad (\text{N.11 - 3})$$

Da questa si ottiene facilmente l'equazione dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{\dot{x}^2}{2E/m} = 1 \quad (\text{N.11 - 4})$$

Analogamente a prima si riscalala il problema  $\dot{x} \rightarrow p = m\dot{x}$

$$\rightarrow \frac{x^2}{(2E/k)} + \frac{p^2}{(2Em)} = +1 \quad (\text{N.11 - 5})$$

L'area dell'ellisse è  $A = \pi ab$

$$A = \pi ab = \pi \sqrt{\frac{2E}{k}} \sqrt{2Em} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} E = \frac{2\pi}{\omega} E$$

**Osservazione:**

$$\frac{dA}{dE} = \frac{2\pi}{\omega} = T \text{ da prima}$$

$$E = \omega \frac{A}{2\pi} = \omega I \quad (\text{N.11 - 6})$$

Quantizzando  $I = n\hbar$  si ha

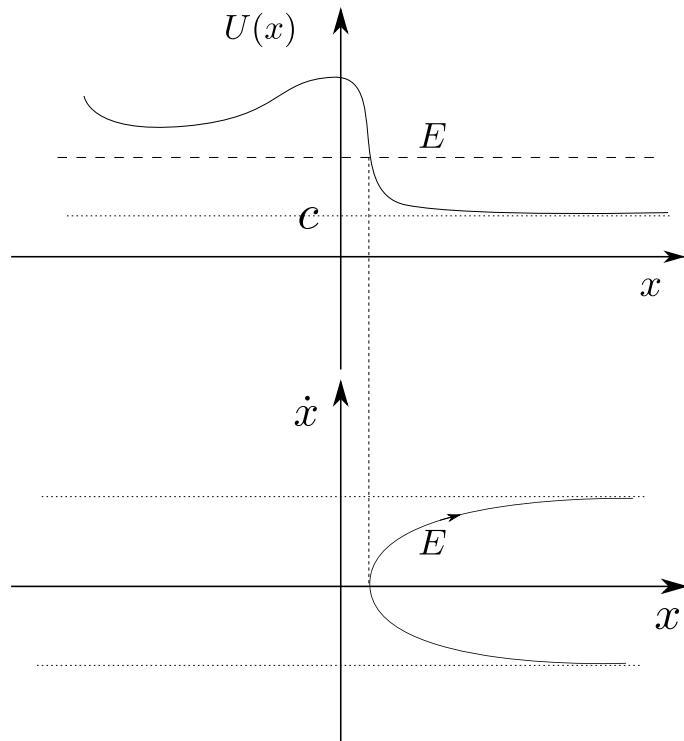
$$\boxed{E_n = n\hbar\omega} \quad (\text{N.11 - 7})$$

Cioè la relazione dell'energia per l'oscillatore armonico quantizzato.

## Av Approfondimenti

### Inversione

Supponendo che  $U(x)$  abbia un asintoto orizzontale a  $U(x) = c$ , allora come sarà il ritratto di fase? Chiaramente il caso interessante è quello in cui  $U(x)$  viene da sopra e si appoggia sull'asintoto perché l'altro caso è ancora a "coppa".



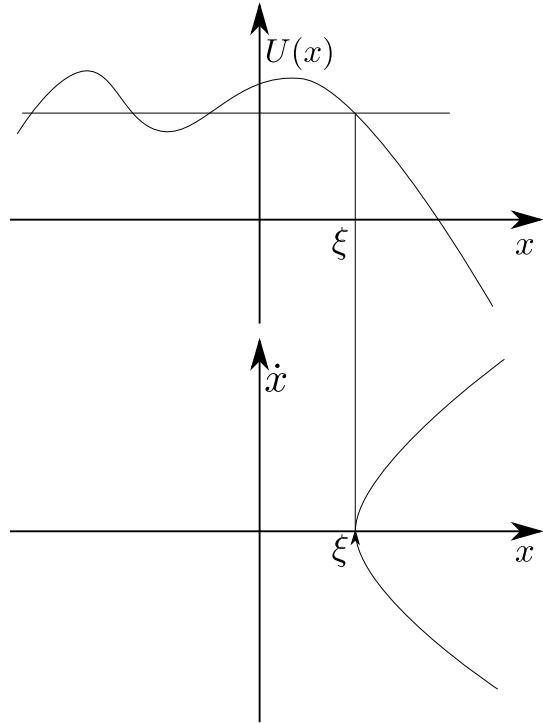
Sostanzialmente nel ritratto di fase per energie sufficientemente vicine all'asintoto, cioè in modo che la parte di  $U(x)$  che sta sotto l'energia scelta sia una funzione monotona. In particolare si hanno delle curve simili a "parabole" con asse sull'asse delle ascisse che per  $x \rightarrow \infty$  tendono alla seguente velocità:

$$\frac{mv^2}{2} = E - U(x) \quad (\text{V. 1})$$

$$\rightarrow v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \quad (\text{V. 2})$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - c)} \quad (\text{V. 3})$$

### Fuga all'infinito



L'obiettivo è trovare il tempo per raggiungere il punto  $x = \pm\infty$ . Ci si aspetta che questo sia possibile solo se  $U(x)$  tende a  $\mp\infty$  per  $x \rightarrow \pm\infty$  (è come se esistesse un minimo di energia in questi punti). Utilizzando di nuovo la conservazione dell'energia che di fatto caratterizza tutto il moto si ha:

$$\frac{mv^2}{2} = E - U(x) \quad (v = \dot{x}) \quad (\text{V. 1})$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \quad (\text{V. 2})$$

separando le variabili e integrando tra  $\xi$  e  $+\infty$  (e prendendo  $\xi$  abbastanza grande in modulo, altrimenti la particella potrebbe "incastrarsi" in dei minimi locali):

$$T(\xi) = \int_{\xi}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \quad (\text{V. 3})$$

Supponendo che  $U(x) \neq 0$  nell'intervallo considerato<sup>a</sup>, quindi l'unico problema sta nel fatto che si sta integrando su un intervallo infinito, ma supponendo che  $U(x) \sim -x^\alpha$  per  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\alpha > 0$  allora si ha che  $\int_x^\infty \frac{dx}{x^{\alpha/2}}$  converge, cioè  $T(\xi) < +\infty$ , se e solo se  $\alpha > 2$ . Ovviamente analogamente al caso di  $\dot{x} = f(x)$  nella soluzione  $x(t)$  nel piano  $(t, x)$  la limitatezza di  $T$  è rappresentata da un asintoto verticale in  $t = T$  (detto anche tempo di blow-up), dopo tale istante la soluzione  $x(t)$  cessa di esistere.

<sup>a</sup>non si perde di generalità, dopotutto basta traslare  $U(x)$  senza avere grandi differenze nello studio del moto

## Buca infinita di potenziale

Si vuole studiare il moto di una particella costretta a muoversi nell'intervallo  $[-l, l]$ , quindi nei punti in cui si trova nell'intervallo in questione la particella si muove senza freni/accelerazioni (quindi forza nulla  $\rightarrow U(x) = \text{cost}$ ), invece quando raggiunge i punti  $\pm l$ , incontra una barriera di potenziale che rimanda indietro. Non è semplice considerare un potenziale di questo tipo con punti angolosi, quindi si può pensare di considerare una successione  $U_n$  che converge al potenziale  $U_\infty$ :

$$m\ddot{x} = -U'_n(x) \quad (\text{V. 1})$$

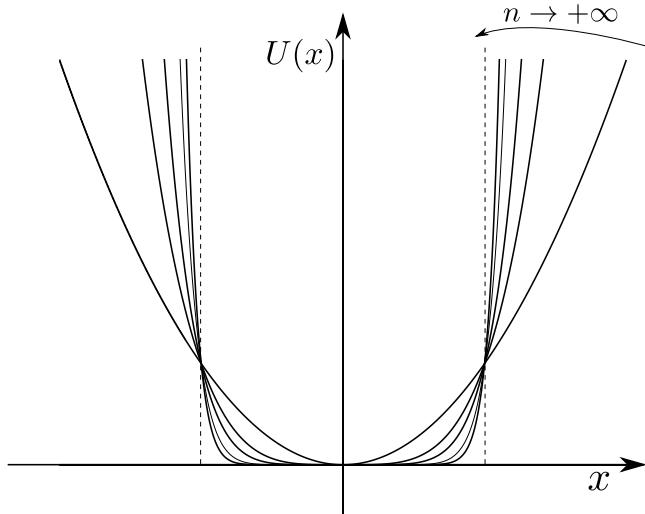
$$U_n(x) = \epsilon \left( \frac{x}{l} \right)^{2n} \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{V. 2})$$

### Osservazione:

per  $n = 1$ ,  $U_1 = \frac{\epsilon}{l^2} x^2 = \frac{k}{2} x^2$

E la funzione limite è:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| < l \\ \epsilon, & |x| = l \\ +\infty, & |x| > l \end{cases} \quad (\text{V. 3})$$



### Diagramma di fase

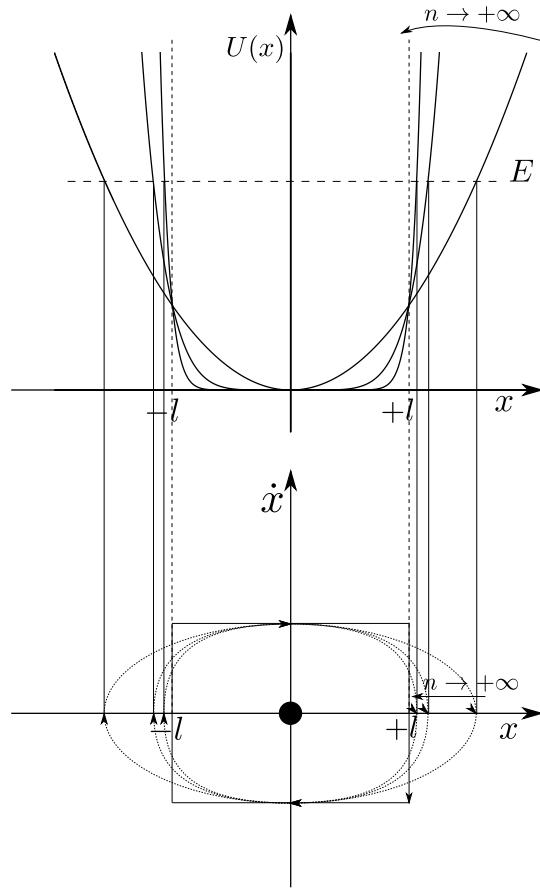
Per  $n$  fissato, aumentando  $E$  la velocità nel punto di equilibrio aumenta sempre di più. Invece fissato  $E$ , aumentando solo  $n$ , i punti di inversione  $x_{\pm}$  si avvicinano sempre di più a  $x = \pm l$ , invece il punto più alto della curva chiusa che collega tali punti di inversione, siccome l'energia è fissata, è sempre lo stesso, cosicché la curva chiusa tende a un rettangolo, quindi la velocità resta tende a rimanere costante nell'intervallo e la pallina resta intrappolata in un intervallo sempre più vicino a quello voluto. Infatti più rigorosamente abbiamo che i punti di inversione di trovano risolvendo  $x_{\pm}$ :  $U_n(x) = E$ .

$$\epsilon \left( \frac{x}{l} \right)^{2n} = E \quad (\text{V. 4})$$

$$\rightarrow x_{\pm} = \pm l \left( \frac{E}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2n}} \quad (\text{V. 5})$$

che fissata una certa  $E$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\pm} = \pm l \quad (\text{V. 6})$$



In modo analogo il periodo del moto si trova fissando una certa  $E$ :

$$T_n(E) = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\underbrace{\frac{2}{m}(E - U_n(x))}_{\sqrt{v_+}}}} \quad (\text{V. 7})$$

$$= 4 \int_0^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_n(x))}} = \quad (\text{V. 8})$$

$$x = x_+ \xi \quad (\text{V. 9})$$

$$= 4 \int_0^1 \frac{x_+ d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - E \xi^{2n})}} \quad (\text{V. 10})$$

**Osservazioni:**

$$(i) \ U_n(x_+\xi) = E\xi^{2n}$$

$$T_n(E) = \frac{4x_+}{\sqrt{\frac{2}{m}E}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2n}}} \quad (\text{V. 11})$$

$$= 2l\sqrt{2m} \left(\frac{E}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2n}} E^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2n}}} \quad (\text{V. 12})$$

(ii)  $1 - \xi^{2n}$  ammette la decomposizione

$$\underbrace{(1-\xi^2)}_{(1-\xi)(1+\xi)} (1 + \xi^2 + \xi^4 + \dots + \xi^{2n-2}).$$

Quindi quando il potenziale è  $U_\infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(E) = 2l\sqrt{2m} (E)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{V. 13})$$

Per  $n \rightarrow \infty$  vale che  $\frac{mv^2}{2} = E$  ( $-l < x < l$ )

$$v_\pm = \pm \sqrt{\frac{2}{m}E}$$

$$T_\infty(E) = 2 \frac{2l}{v^+} = 2l\sqrt{2m} E^{-\frac{1}{2}}$$

che è lo stesso risultato trovato prima. Per trovare il periodo si può ricorrere al calcolo dell'area nello spazio delle fasi. Si calcola quindi l'area del diagramma di fase  $A_\infty(E)$  nel piano  $(x, p)$ . Visto che è un rettangolo si può usare la formula  $A = \text{base} \cdot \text{altezza}$ :

$$A_\infty(E) = 2l \cdot 2mv_+ = \quad (\text{V. 14})$$

$$= 4lm \sqrt{\frac{2}{m}E} = 4\sqrt{2m} l \sqrt{E} \quad (\text{V. 15})$$

$$\Rightarrow \frac{dA_\infty}{dE} = T_\infty \quad (\text{V. 16})$$

Esattamente come già trovato prima.

Supponendo adesso che l'area possa assumere valori del tipo  $A_\infty = sh$ , con  $h$  costante di Planck e  $s$  numero naturale. Ma dall'altra parte l'area si scrive ancora come l'area di un rettangolo (esattamente come prima):

$$\rightarrow sh = 4\sqrt{2m} l \sqrt{E} \quad (\text{V. 17})$$

isolando

$$E_s = \frac{s^2 h^2}{32ml^2} \quad (\text{V. 18})$$

Si ha la quantizzazione dell'energia. Queste sono le energie permesse per particelle quantistiche nella scatola monodimensionale.

### Invarianza di scala del problema

Notando che  $U_n(x)$  è omogenea di grado  $2n$ :  $U_n(\lambda x) = \lambda^{2n} U_n(x)$

$\Rightarrow f_n(x) = -U'_x(x)$  è omogenea di grado  $2n - 1$ . Questo è un fatto essenziale perché ciò significa che esistono dei riscalamenti per le  $x$  e  $t$  particolari tale per cui il problema resta appunto invariante. Intanto partendo dall'eq. di newton si ha:

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = f_n(x) \quad (\text{V. 19})$$

Ora riscalando  $x$  con  $\lambda x'$  e riscalo  $t$  con  $\lambda^\alpha t'$ . Sostituendo si ha:

$$m \frac{\lambda}{\lambda^{2\alpha}} \frac{d^2}{dt'^2} x' = f_n(\lambda x') = \lambda^{2n-1} f_n(x') \quad (\text{V. 20})$$

È importante notare che proprio perché  $f_n$  è omogenea che si può cercare di far sparire  $\lambda$  (altrimenti questa rimarrebbe intrappolata dentro l'argomento della funzione), cioè di rendere l'equazione, e quindi il moto, non dipendente dal particolare valore di  $\lambda$ . Infatti isolando i  $\lambda$ :

$$m \frac{d^2}{dt'^2} x' = \lambda^{2n-2+2\alpha} f_n(x') \quad (\text{V. 21})$$

Questa equazione è indipendente da  $\lambda \iff 2n - 2 + 2\alpha = 0$ . Quindi risulta  $\alpha = 1 - n$ . E così si è trovato il riscalamento corretto. Però ora interessa anche sapere come cambia l'energia  $E$  sotto questo riscalamento. Il calcolo porta a:

$$E = \frac{m}{2} \left( \frac{d}{dt} x \right)^2 + U_n(x) \quad (\text{V. 22})$$

$$\text{riscalando } \Rightarrow \frac{\lambda^2}{\lambda^{2(1-n)}} \frac{m}{2} \left( \frac{dx'}{dt'} \right)^2 + \lambda^{2n} U_n(x') = \quad (\text{V. 23})$$

$$\lambda^{2n} \left( \frac{m}{2} \left( \frac{dx'}{dt'} \right)^2 + U_n(x') \right) = \lambda^{2n} \quad (\text{V. 24})$$

Quindi il gruppo di scala è  $\begin{cases} x = \lambda x' \\ t = \lambda^{1-n} t' \\ E = \lambda^{2n} \end{cases}$

## 5. Analisi qualitativa della dinamica

---

Quindi riassumendo si è visto che  $U_n$  è omogenea, questo implica che riscalandando  $x$  esiste uno riscalamento per  $t$  tale che l'equazione di newton nuova in  $x'$  e  $t'$  non risente del particolare valore di  $\lambda$ . Questo cosa significa? Significa che se si misurano certe quantità in questo nuovo sistema di coordinate non serve accorgersi del particolare riscalamento che si è addottato. Per esempio se si misurano delle lunghezze e ne se ne fa il rapporto con una certa potenza dell'energia associata si deve ottenere la stessa costante che si è ottenuto con  $x$  e  $t$ . Infatti prendendo la prima equazione e l'ultima (che è stata ottenuta perché tutte le quantità ricavate precedentemente sono espresse in termini dell'energia), si deve elevare la seconda alla  $\frac{1}{2n}$  per avere l'uguaglianza di si è parlato appena sopra:

$$\frac{x}{E^{1/2n}} = \frac{\lambda x'}{\lambda^{1/2n}} = \frac{x'}{E^{\frac{1}{2n}}} = \text{costante indipendente da } \lambda \quad (\text{V. 25})$$

Questo consente di dire che una qualsiasi lunghezza misurata sarà proporzionale all'energia associata:

$$\Rightarrow x_+ - x_- \propto E^{1/2n} \quad (\text{V. 26})$$

$$\Rightarrow x_{\pm} \propto E^{1/2n} \quad (\text{V. 27})$$

Una cosa analoga avviene per i tempi: fissando una certa energia, misurando qualche tempo e se si calcola il rapporto questo deve essere una costante indipendente da  $\lambda$ . Infatti:

$$\frac{t}{E^{\frac{1-n}{2n}}} = \frac{\cancel{\lambda^{1-n}} t'}{\cancel{\lambda^{1-n}} E^{\frac{1-n}{2n}}} = \frac{t'}{E^{\frac{1-n}{2n}}} \quad (\text{V. 28})$$

E quindi un qualsiasi tempo è proporzionale a  $E$ , in particolare il periodo:

$$T(E) \propto E^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}} \quad (\text{V. 29})$$

In questo ambito il metodo con cui si è ricavata la particolare forma della forza di gravità di Newton diventa chiaro: Keplero misurò dei tempi (periodi) e lunghezze associate (semiassi maggiori) e notò che il rapporto tra i due (con certe potenze) era una costante indipendente (per esempio) dall'asse maggiore, cioè le due quantità erano proporzionali (con certi esponenti), ma allora il problema gode di invarianza di scala (con certi esponenti del fattore di scala), e quindi l'eq. di Newton associata deve essere indipendente da  $\lambda$ . E qui il ragionamento va nel verso opposto: è possibile cercare gli esponenti giusti per avere l'invarianza di scala e da cui trovare le relazioni che sussistono tra le varie quantità associate.

## Equazione logistica

Considerando la seguente equazione:

$$\dot{x} = kx(1 - \frac{1}{p}x) \quad (\text{V. 1})$$

Dove  $k$  è detto il tasso di riproduzione e  $p$  la capacità di portata. L'equazione è chiamata anche equazione logistica.

Ridefinendo le due variabili  $t$  e  $x$  nel seguente modo:

$$y = \frac{x}{p} \quad (\text{V. 2})$$

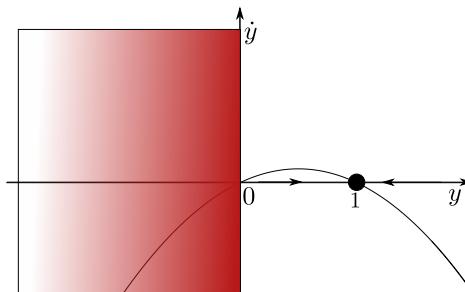
$$\tau = kt \quad (\text{V. 3})$$

l'equazione differenziale si riduce a:

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\tau} = y(1 - y) \quad (\text{V. 4})$$

Cioè tutti i sistemi logistici visti ad una appropriata scala di tempi e di popolazione appaiono identici.

Graficando si ottiene:



Da cui si vede che lo zero (0) è instabile mentre lo zero (1) è equilibrio stabile, la popolazione tende sempre alla portata. L'equazione è un primo tentativo di modellizzare l'andamento delle popolazioni dove esiste una portata del sistema ben precisa fissata a priori e può essere decisa in base alle risorse presenti. Se la popolazione è minore della portata allora questa cresce perché ci sono abbastanza risorse per tutti, altrimenti decresce in modo analogo. Vicino alla portata la crescita/decrescita della popolazione è esponenziale, è sufficiente risolvere l'equazione differenziale per vederlo.

### Modello SIR (propagazione di malattie virali)

Sia  $N(t)$ : numero totale di casi al tempo  $t$ ; ( $N(t) = I(t) + R(t)$ ), dove  $I(t)$  sono gli infetti e  $R(t)$  sono i guariti o i morti<sup>a</sup>. Chiamando  $P$  la popolazione totale è possibile definire la percentuale di casi sul totale come  $n(t) := \frac{N(t)}{P}$ . Questa quantità è soluzione della seguente equazione differenziale<sup>b</sup>

$$\dot{n} = a(1 - n) \left( n + \frac{1}{R_0} \ln(1 - n) \right) := f(n) \quad \text{con } n \geq 0 \quad (\text{V. 1})$$

dove le varie costanti hanno il seguente significato:

$$\begin{cases} a : \text{tasso di contagio} \\ b : \text{tasso di "rimozione"} \\ R_0 : \frac{a}{b} \text{ (numero di riproduzione iniziale)} \end{cases} \quad (\text{V. 2})$$

Se  $R_0 > 1$  la pandemia si espande, invece se  $R_0 < 1$  si spegne.

L'ipotesi è che la popolazione dei suscettibili  $S(0) \approx P$ . Un'altra ipotesi è l'immunità, ovvero chi si ammala non può ricontrarre la malattia (infatti al totale dei casi si è sommato oltre agli infetti anche i ricoverati e "non si torna indietro").

Non si riesce dare una soluzione esatta esplicita (si può sempre risolvere al computer), ma possiamo comunque farne uno studio qualitativo. Si vuole trovare in particolare gli zeri del campo vettoriale (membro di sinistra) e per fare ciò c'è bisogno dello studio di funzione di tale equazione. Intanto si nota che c'è uno zero banale in  $n = 0$ , un equilibrio instabile/repulsivo infatti: se  $n \ll 1$  allora  $\ln(1 - n) \approx -n$  e si ha

$$\dot{n} \approx a(1 - n)n \left( 1 - \frac{1}{R_0} \right) = (a - b)(1 - n)n \quad (\text{V. 3})$$

E diventa un modello con comportamento logistico. Si nota che inizialmente i casi crescono esponenzialmente, infatti  $f(n) \approx (a - b)n$ . In particolare la funzione  $f(n)$  è positiva per  $n \rightarrow 0^+$  confermando che lo zero in  $n = 0$  è repulsivo (da destra).

C'è anche uno 0 semplice per  $n \rightarrow 1$ , infatti nonostante la funzione non sia definita per  $n = 1$ , ne esiste comunque il limite, cioè è una discontinuità eliminabile. Invece per la natura dell'equilibrio andiamo a vedere la pendenza nel punto  $n = 1$ :

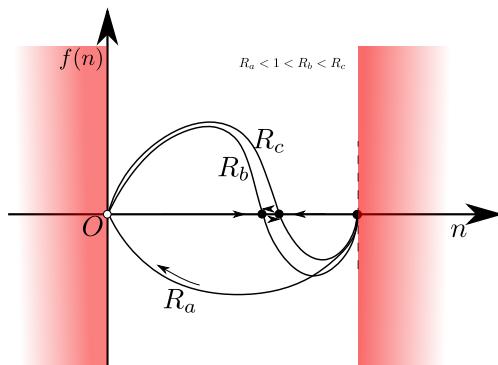
$$f'(n) = a \left[ -1 \left( n + \frac{1}{R_0} \ln(1 - n) \right) + (1 - n) \left( 1 - \frac{1}{R_0} \frac{1}{1 - n} \right) \right]$$

$$= a \left[ 1 - 2n - \frac{1}{R_0} \ln(1-n) - \frac{1}{R_0} \right] \quad (\text{V. 4})$$

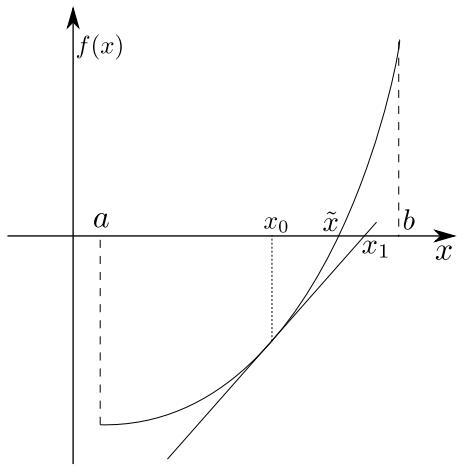
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(n) = +\infty \quad (\text{V. 5})$$

Quindi la pendenza di  $f(n)$  in  $n = 1$  è positiva, cioè la  $f(n)$  è negativa per  $n \rightarrow 1^-$ , quindi  $n = 1$  è un equilibrio repulsivo.

Per  $n \rightarrow 0^+$  la  $f(n)$  è positiva, invece per  $n \rightarrow 1^-$  negativa, quindi esiste uno zero intermedio  $\tilde{n}$ , e questo sarà anche il nostro unico equilibrio stabile/attrattivo.



### Metodo delle tangenti di Newton-Raphson



Per calcolare il secondo zero  $\tilde{x}$  si può utilizzare il metodo delle tangenti di Newton-Raphson. Questo metodo si applica in piccoli intervalli,

$$x \mapsto f(x), \quad x \in [a, b] \quad (\text{V. 6})$$

Le ipotesi per applicare questo metodo sono:

- $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$
- $f(a)f(b) < 0$

Allora esiste (unico)  $\tilde{x} \in ]a, b[$  tale che  $f(\tilde{x}) = 0$ .

Per partire si sceglie un  $x_0$  nell'intervallo e si calcola la retta tangente al grafico di  $f$  in  $x_0$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (\text{V. 7})$$

La retta ha uno zero in  $x_1$  tale che  $f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$

$$\rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (\text{V. 8})$$

Iterando questi passaggi si ottiene una successione definita per ricorrenza:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (\text{V. 9})$$

Questa successione ha soluzione  $x_n = \tilde{x}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Si dimostra che  $\forall x_0 \in [a, b]$   $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \tilde{x}$  (sotto le ipotesi fatte). Il fatto interessante è che l'algoritmo converge molto velocemente e spesso basta una sola iterazione. Ciò sarà vero anche in questo caso.

Tornando al modello SIR, prima di studiare la funzione con il metodo di Newton-Raphson, si definisce  $u := 1 - n$  perché semplifica i calcoli e soprattutto perché si è interessati a sapere quanto lontano ci si ferma rispetto al contagiare tutti. Si ottiene:

$$g(u) = 1 - u + \frac{1}{R_0} \ln(u) = 0 \quad (\text{V. 10})$$

Intanto è facile vedere il valore della funzione agli estremi dell'intervallo in cui è definita che risultano essere ancora  $(0, 1)$ :

$$g(0^+) = -\infty$$

$$g(1) = 0$$

Quindi la funzione è negativa per  $u = 0^+$  e nulla per  $u = 1$ , noi ci si aspetta che lì in mezzo esista un altro valore  $\tilde{u}$  tale che  $g(u) = 0$ , da cui si troverà  $\tilde{n} = 1 - \tilde{u}$ . Ma per applicare l'algoritmo bisogna mettersi in un intervallo in cui si è sicuri che la funzione cambi segno e non abbia punti stazionari. Ma provando a calcolare la derivata rispetto  $u$  si ha:  $g'(u) = -1 + \frac{1}{R_0 u} > 0$  infatti

$$\frac{1}{R_0 u} > 1 \iff u < \frac{1}{R_0} \quad (\text{V. 11})$$

Quindi la funzione  $g(u)$  parte negativamente dal punto  $u = 0$  e cresce in modo monotono fino a  $u = \frac{1}{R_0}$  cui corrisponde un valore positivo della  $g(u)$ . Si è nelle condizioni per applicare l'algoritmo di Newton-Raphson. La mappa dal metodo Newton-Raphson da iterare è:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)} \quad (\text{V. 12})$$

$$= u_n - \frac{1 - u_n + \frac{1}{R_0} \ln(u_n)}{-1 + \frac{1}{R_0 u_n}} \quad (\text{V. 13})$$

Per  $u_0$  potremmo prendere un qualsiasi  $u < 1/R_0$ , ma prendendo la soluzione di  $1 + \frac{1}{R_0} \ln(u) = 0$  cioè  $u_0 = e^{-R_0}$  perché ciò ci permette di semplificare notevolmente l'espressione di  $u_1$  (vedere il numeratore dell'equazione precedente). Inoltre è interessante notare che effettivamente  $e^{-R_0} < \frac{1}{R_0}$ . Quindi sostituendo  $u_0$  in  $u_n$  e calcolando  $u_1$  abbiamo:

$$u_1 = u_0 - \frac{1 - u_0 + \frac{1}{R_0} \ln(u_0)}{-1 + \frac{1}{R_0 u_0}} \quad (\text{V. 14})$$

## 5. Analisi qualitativa della dinamica

---

$$= e^{-R_0} - \frac{1 - e^{-R_0} - 1}{-1 + \frac{1}{R_0} e^{R_0}} = e^{-R_0} + \frac{e^{-R_0}}{\frac{1}{R_0} e^{R_0} - 1} \quad (\text{V. 15})$$

$$u_1 = e^{-R_0} \left( 1 + \frac{1}{\frac{1}{R_0} e^{R_0} - 1} \right) \quad (\text{V. 16})$$

Se  $R_0 = 3$  si ottiene la frazione (secondo termine parentesi)  $* = 0.17$ , se  $R_0 = 5 \rightarrow 0.03$ . Già per  $R$  modesti l'equilibrio stabile è praticamente uguale a  $n=1$  e ci si avvicina esponenzialmente con  $R_0$ .

<sup>a</sup>In alcuni modelli epidemiologici si studiano separatamente le popolazioni guarite e quelle decedute, ma qui si può fare questa semplificazione perché si considera che si può prendere la malattia una sola volta.

<sup>b</sup>Attenzione, nel mondo reale  $n(t)$  è una funzione a valori discreti, quindi in teoria l'equazione sarebbe un'equazione a differenze finite, ma le due danno risultati praticamente uguali nel caso in cui  $P$  sia molto grande.

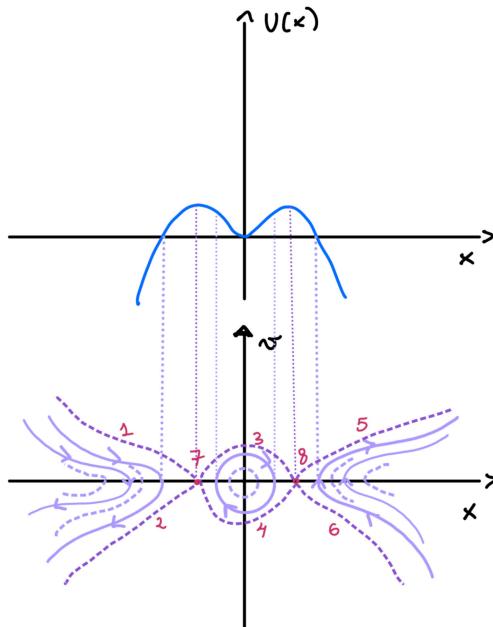
## B<sub>V</sub> Altri esempi di potenziale

### Oscillatore armonico non semplice

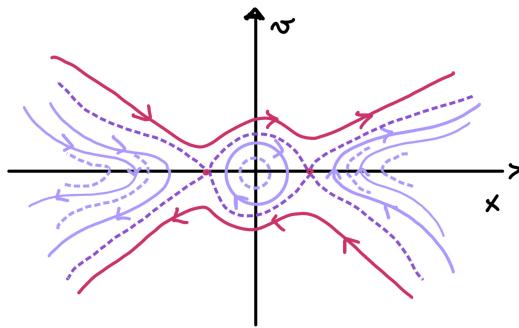
$$m\ddot{x} = -kx + \alpha x^3 \quad (\text{V. 1})$$

$$U(x) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{\alpha}{4}x^4 \quad (\text{V. 2})$$

Il caso  $\alpha = 0$  è stato già studiato molte volte, quindi  $\alpha \neq 0$ . Inoltre per  $\alpha < 0$  il potenziale non è molto diverso dal potenziale armonico semplice, quindi il diagramma di fase è praticamente identico (ma le curve di livello *non* sono ellissi). Quindi si studia il caso  $\alpha > 0$ . Si disegna  $U(x)$  tramite uno studio di funzione, e dopodichè quello che si è sempre fatto: si sceglie un'energia vicino ad un minimo/massimo, si disegna la curva di livello relativa, si alza/abbassa l'energia, si disegna la curva di livello etc. Inoltre si nota che siccome  $U(x)$  è pari, il ritratto di fase sarà simmetrico anche rispetto all'asse  $v$ .



Per  $E = E_c$  (energia dei massimi locali) ci sono 8 moti possibili: due soluzioni di equilibrio, soluzioni degeneri in quattro asintoti e due soluzioni *eterocline* (connettono due equilibri).



Aumentando ancora il livello di  $E$  si ottengono 2 moti possibili. Le curve di livello relative sono aperte. Per ultimo si può fare una classificazione veloce dei 3 equilibri (sostanzialmente vedere se sono zeri di  $U(x)$  con  $\frac{d^2U}{dx^2}(x) \neq 0$ ):

$$U(x) = 0 \longrightarrow \frac{kx^2}{2} = \alpha \frac{x^4}{4} \quad (\text{V. 3})$$

Le cui soluzioni sono  $x = 0$  e  $\tilde{x}_\pm = \pm\sqrt{\frac{2k}{\alpha}}$ .

$$(x) = 0 \longrightarrow kx - \alpha x^3 = 0 \quad (\text{V. 4})$$

Le cui soluzioni sono  $x = 0$  e  $\tilde{x}_\pm = \pm\sqrt{\frac{k}{\alpha}}$

$$U'(x) = k - 3\alpha x^2 \implies U'(\tilde{x}_\pm) = k - 3\alpha \tilde{x}_\pm^2 = k - 3\alpha \frac{k}{\alpha} = -2k < 0 \quad (\text{V. 5})$$

E quindi gli zeri sono tutti non degeneri:  $(0, 0)$  centro;  $(\tilde{x}_\pm, 0)$  sono due punti iperbolicci (o di sella).

**Osservazione:**

Siccome:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{k}{2}x^2 - \frac{\alpha}{4}x^4 = E \quad (\text{V. 6})$$

si ha:

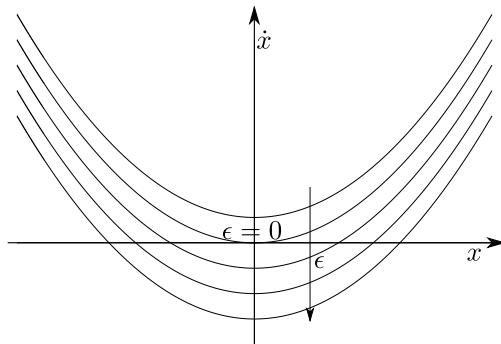
$$\rightarrow v_+(x) = +\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{k}{2}x^2 + \frac{\alpha}{4}x^4)} \quad (\text{V. 7})$$

E quindi  $v_+ \sim x^2, x \rightarrow +\infty$  da cui acquisisce anche la concavità verso alto.

## Oscillatore armonico traslato

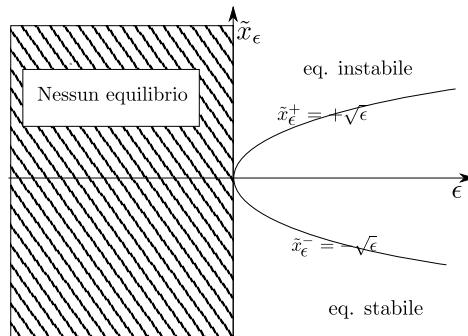
$$\dot{x} = x^2 - \epsilon \quad (\text{V. 1})$$

Caso:  $\epsilon = 0$



Attrattivo da sinistra e repulsivo da destra. Al lettore è lasciato risolvere esattamente per  $\epsilon = 0$  con dato iniziale qualsiasi  $\tilde{x} \neq 0$  trovando il tempo di volo ad infinito.

### Soluzione parziale/considerazioni

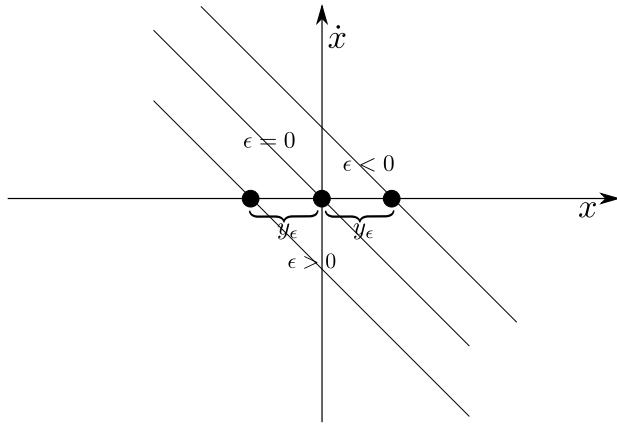


Nel caso in cui  $\epsilon \neq 0$  o non si ha soluzione: caso  $\epsilon < 0$  (non c'è intersezione con l'asse x) o ci sono due soluzioni una stabile/attrattiva e una instabile/repulsiva: caso  $\epsilon > 0$ .

Le due soluzioni  $\tilde{x}_\epsilon^\pm = \pm\sqrt{\epsilon}$  si possono riassumere in un grafico con assi  $\tilde{x}_\epsilon$  -  $\epsilon$  in cui si nota che per  $\epsilon < 0$  non esistono soluzioni e per  $\epsilon > 0$  esiste una soluzione instabile e una stabile. Attenzione che in un grafico come questo il sistema abita sull'asse y.

## Retta

$$\dot{x} = -x - \epsilon \quad (\text{V. 1})$$



Si vuole trovare lo spostamento degli equilibri per  $\epsilon$  qualsiasi confrontandoli con il caso  $\epsilon = 0$  esplicitando la correzione degli stessi al primo ordine.

Considerando il campo  $f(x)_\epsilon = f(x) - \epsilon$  si denota l'equilibrio semplice generico  $\tilde{x}_\epsilon$  (funzione di  $\epsilon$ ). Per  $\epsilon$  piccoli  $\tilde{x}_\epsilon$  sarà poco diverso da  $\tilde{x}_0$ :  $\tilde{x}_\epsilon = \tilde{x}_0 - y_\epsilon$ ; quindi considerando una  $f(x)_\epsilon$  generica è possibile fare una linearizzazione (in questo caso non è necessario, essendo la funzione già lineare) permettendo di scrivere la differenza  $y_\epsilon$ . Infatti intanto vale

$$0 = f_\epsilon(\tilde{x}_\epsilon) = f_0(\tilde{x}_0 - y_\epsilon) + \epsilon \quad (\text{V. 2})$$

Ora sviluppando con Taylor:

$$f_0(\tilde{x}_0) - \frac{df}{dx}(\tilde{x}_0) \cdot y_\epsilon = -\epsilon \quad (\text{V. 3})$$

Da qui utilizzando che  $\tilde{x}_0$  è uno zero semplice si ha la seguente equazione importante valida per ogni funzione:

$$y_\epsilon = \frac{\epsilon}{\frac{df}{dx}(\tilde{x}_0)} \quad (\text{V. 4})$$

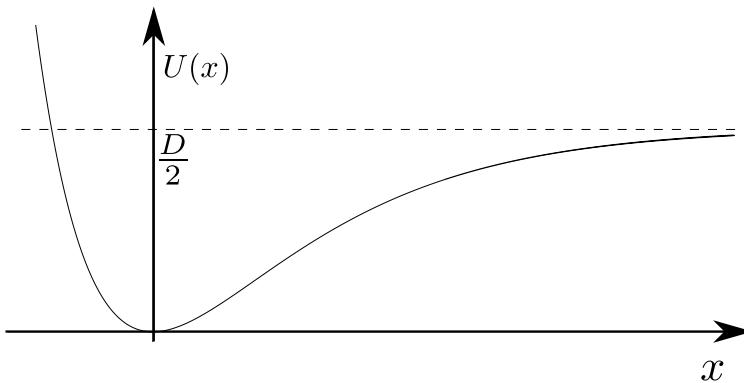
In questo caso la derivata vale 1, quindi tutti gli equilibri si spostano *esattamente* di  $-\epsilon$  (essendo la funzione  $f(x)$  lineare l'approssimazione di Taylor è esatta).

## Potenziale di Morse

$$m\ddot{x} = -U'(x) \quad (\text{V. 1})$$

in cui  $U(x)$ :

$$U(x) = \frac{D}{2}(e^{-\alpha x} - 1)^2 \quad (\text{V. 2})$$



Si può notare che per  $x$  che tende a 0  $U(x)$  è approssimabile con una parabola:

$$\lim_{x \rightarrow 0} U(x) \simeq \frac{D}{2}(1 - \alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 x^2)^2 = \frac{D}{2}\alpha^2 x^2 + o(x^3) \quad (\text{V. 3})$$

Cioè la forza è praticamente lineare vicino a  $x = 0$ , quindi il moto è oscillatorio semplice con frequenza (o meglio pulsazione) delle piccole oscillazioni intorno a 0 è  $\omega = \sqrt{\frac{D\alpha^2}{m}}$ .

### Osservazione:

Sviluppando l'espressione di  $U$  si trova  $\frac{D}{2}(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x} + 1)$ . Il +1 è ininfluente sul diagramma di fase.

## 5. Analisi qualitativa della dinamica

---

### Diagramma di fase

Riprendendo la conservazione dell'energia:

$$\frac{mv^2}{2} = E - U(x) \quad (\text{V. 4})$$

Quando  $E = \frac{D}{2}$  si ha:

$$v^2 = \frac{2}{m} \frac{D}{2} (1 - (e^{-\alpha x} - 1)^2) \quad (\text{V. 5})$$

e

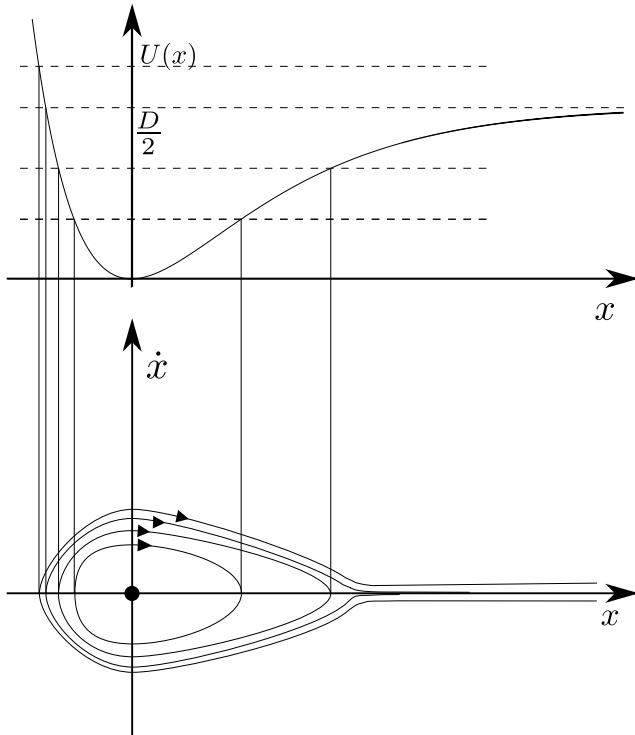
$$v(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{V. 6})$$

Quando invece  $E > \frac{D}{2}$  (alte energie):

$$\frac{mv^2}{2} = E - \frac{D}{2} (e^{-\alpha x} - 1)^2 \quad (\text{V. 7})$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} E - \frac{D}{2} \quad (\text{V. 8})$$

$$v(x) \rightarrow \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{D}{2} \right)} \quad (\text{V. 9})$$





# Meccanica Lagrangiana

## 1 Meccanica vincolata

---

1.1	Sintesi della meccanica newtoniana . . . . .	125
1.2	Limiti della meccanica newtoniana . . . . .	126
	<u>N.12</u> Pendolo semplice rigido . . . . .	127
1.3	Varietà differenziabili . . . . .	132
1.4	Teorema di Lagrange . . . . .	136
	Notazione . . . . .	141
	Che cos è $\mathcal{K}$ ? . . . . .	142
	Teorema di pitagora sulla varietà . . . . .	145
	<u>L.1</u> Pendolo semplice rigido . . . . .	146
1.5	Quantità conservate . . . . .	146
	<u>L.2</u> Moto centrale piano . . . . .	150
	<u>L.3</u> Punto vincolato su paraboloide di rotazione . . . . .	152
	<u>L.4</u> Pendolo sferico . . . . .	155

---

## 1.1 Sintesi della meccanica newtoniana

Nelle sezioni precedenti, riguardanti la meccanica newtoniana, si è trattato principalmente il calcolo e la soluzione dell'equazione del moto. In generale si tratta di risolvere una cosa della forma:

$$M\ddot{X} = F(X; \dot{X}, t) \quad (1.1)$$

Dove  $X, \dot{X}, \ddot{X}, F \in \mathbb{R}^N$  in cui  $N = nd$ ,  $n$  è il numero di particelle e  $d$  la dimensione dello spazio fisico.  $M$  la matrice della massa del sistema:

$$M = \begin{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ \ddots \\ m_1 \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} m_2 \\ \ddots \\ m_2 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} m_n \\ \ddots \\ m_n \end{matrix} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$$\iff \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t) \\ m_2\ddot{x}_2 = f_2(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t) \\ \vdots \\ m_n\ddot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t) \end{cases} \quad (1.3)$$

I vettori  $X$  e le sue derivate sono:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ \vdots \\ x_1^{(d)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_2^{(d)} \\ \vdots \\ x_n^{(d)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad N = nd \quad (1.4)$$

## 1. Meccanica vincolata

---

Analogamente il vettore di forza, cioè l'allineamento delle forze:

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad N = nd \quad (1.5)$$

A questo problema si aggiungono le condizioni iniziali  $X(0)$ ,  $\dot{X}(0)$  e si risolve l'equazione differenziale per determinare il moto e le sue proprietà.

### 1.2 Limiti della meccanica newtoniana

Il calcolo analitico dell'equazione di Newton per un sistema a più corpi può diventare laborioso e complesso, i problemi che emergono sono riferiti alla risoluzione di:

- *Meccanica dei sistemi vincolati*

come per esempio il moto di un punto materiale vincolato a muoversi su una superficie (o curva) assegnata. Operando delle restrizioni sul sistema le equazioni studiate fin'ora non sono valide, bensì va aggiunto un termine (una vera e propria forza) che è quello che vincola il moto secondo le richieste, questo termine aggiuntivo è un'incognita del problema:

$$M\ddot{X} = F(X, \dot{X}, t) + R \quad (1.6)$$

- Un altro problema della meccanica newtoniana è capire *come l'equazione  $M\ddot{X} = F$  sotto trasformazione di coordinate qualsiasi di coordinate*, comprese le trasformazioni da sistemi inerziali a non inerziali.

Per esempio equivale a chiedersi:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \Rightarrow x(t) = g(y(t)) \quad (1.7)$$

Che equazione soddisfa  $y(t)$ ?  $\rightarrow \ddot{y} = \tilde{f}(y, \dot{y}, t)$ .

## Tema ( $\mathcal{N}.12$ ): Pendolo semplice rigido

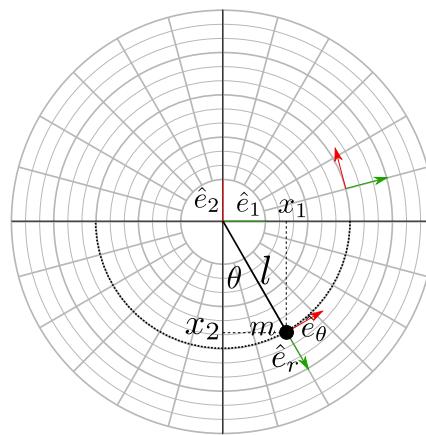
Si tratta il caso del pendolo semplice rigido libero di muoversi in tutto il piano, senza attrito:

$$m\ddot{x} = -mg\hat{e}_2 + R \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (\mathcal{N}.12 - 1)$$

dove si è supposto di non conoscere nulla riguardo al forza  $R$ , nemmeno la direzione, il vincolo imposto è:

$$|x| = l \iff x_1^2 + x_2^2 = l^2 \quad (\mathcal{N}.12 - 2)$$

Ovvero il vincolo posto è che il moto si verifichi sulla circonferenza di raggio  $l$ .



è chiaro che è utile utilizzare le coordinate polari i cui versori possono essere messi in relazione alla base canonica e le coordinate polari:

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \theta \\ x_2 = -r \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{e}_r = \left( \begin{array}{c} \frac{\partial x_1}{\partial r} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} \end{array} \right) = \sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2 \\ \hat{e}_\theta = \frac{1}{r} \left( \begin{array}{c} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{array} \right) = \cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2 \end{cases} \quad (\mathcal{N}.12 - 3)$$

Ora ricavando uno alla volta i termini dell'equazione di Newton per fare il cambio di coordinate. Usando le relazioni precedenti è possibile scrivere  $\hat{e}_2$  in funzione delle coordinate polari:

$$\hat{e}_2 = -\cos \theta \hat{e}_r + \sin \theta \hat{e}_\theta \quad (\mathcal{N}.12 - 4)$$

## 1. Meccanica vincolata

---

Per ottenere l'accelerazione  $\ddot{x}$  si parte da  $x(t) = l\hat{e}_r(\theta(t))$ .

$$\dot{x} = l \frac{d\hat{e}_r}{d\theta} \dot{\theta} \quad (\mathcal{N}.12 - 5)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = l \frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta} \dot{\theta}^2 + l\hat{e}_\theta \ddot{\theta} = \quad (\mathcal{N}.12 - 6)$$

$$= \boxed{-l\hat{e}_r \dot{\theta}^2 + l\hat{e}_\theta \ddot{\theta}} \quad (\mathcal{N}.12 - 7)$$

E quindi sostituendo tutti i pezzi nell'equazione di Newton:

$$m\ddot{x} = ml\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - ml\dot{\theta}^2\hat{e}_r = +mg \cos \theta \hat{e}_r - mg \sin \theta \hat{e}_\theta + R_\theta \hat{e}_\theta + R_r \hat{e}_r \quad (\mathcal{N}.12 - 8)$$

Quindi infine imponendo che i coefficienti di  $\hat{e}_r$  devono essere uguali così come quelli di  $\hat{e}_\theta$ , si ottiene il seguente sistema:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + R_\theta \\ -ml\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta + R_r \end{cases} \quad (\mathcal{N}.12 - 9)$$

Ci sono tre incognite (le due componenti della forza e la funzione  $\theta$ ) e due equazioni. Aggiungendone una terza facendo l'*ipotesi di vincolo ideale* ovvero  $R_\theta = 0$  (non ci sono attriti/filo rigido che tirano nella direzione di  $\hat{e}_\theta$ ). Quindi il sistema diventa:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + R_\theta \\ -ml\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta + R_r \end{cases} \quad (\mathcal{N}.12 - 10)$$

Questa viene chiamata anche l'equazione del pendolo matematico. Riscrivendo:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} = -g \sin \theta / l \rightarrow \theta(t) \\ R_r = -mg \cos \theta(t) - ml\dot{\theta}^2(t) \end{cases} \quad (\mathcal{N}.12 - 11)$$

Dalla prima è possibile ricavare  $\theta(t)$ . Inoltre vale la pena notare che questa è una prima forma di moto vincolato e il procedimento usato, che è lo stesso che si usa per risolvere problemi con piano inclinato, cioè proiettare il problema su un asse/piano perpendicolare al vincolo in modo da fare sparire le forze vincolari, è lo stesso che si userà in ambito lagrangiano.

### Osservazione:

Un'errore classico consiste nel decomporre la forza peso senza tenere conto della componente dell'accelerazione (la quale rende conto della forza centrifuga alla quale il vincolo si deve opporre) ( $ml\dot{\theta}^2(t)$ ), cioè non c'è

moto lungo  $\hat{e}_2$  e quindi  $F_{peso,\perp} = R_r$  ignorando il contributo della forza centrifuga. Infatti se così fosse il pendolo non curverebbe che è sbagliato; spesso non si ci accorge dell'errore in quanto non influisce sul risultato  $\theta(t)$  essendo l'equazione di essa indipendente dall'altra.

Considerando la prima equazione riscritta come:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta \quad \omega := \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ frequenza delle piccole oscillazioni} \quad (\mathcal{N}.12 - 12)$$

Se si è nel regime di piccole oscillazioni,  $|\theta| \ll 1$  si ha che

$$\sin \theta \sim \theta + \dots \Rightarrow \ddot{\theta} = -\omega^2 \theta \rightarrow \boxed{\theta(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)} \quad (\mathcal{N}.12 - 13)$$

Dall'equazione del moto, moltiplicando per  $\dot{\theta}$ , si ottiene la formula per l'energia (unità:  $\frac{J}{kgm^2}$ )

$$\dot{\theta} \ddot{\theta} = -\dot{\theta} \omega^2 \sin \theta \Rightarrow \boxed{\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega^2 \cos \theta = E} \quad (\mathcal{N}.12 - 14)$$

Aggiungendo un 1 per avere il minimo dell'energia potenziale a 0 e buttando via un fattore costante, l'energia si può scrivere come:

$$H = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \underbrace{\omega^2(1 - \cos \theta)}_{U(\theta) \Rightarrow -U'(\theta) = -\omega^2 \sin \theta} = \frac{E}{ml^2} \quad (\mathcal{N}.12 - 15)$$

### Osservazioni:

(i) Per piccole oscillazioni:  $|\theta| \ll 1$ ,  $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots \Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \omega^2 \frac{\theta^2}{2} \sim \mathcal{E}$

(ii) Fornendo tanta energia al sistema (che viene fatto dando tanta energia cinetica, c'è un limite superiore all'energia potenziale), cioè per

$$E \rightarrow \infty, \quad \frac{\dot{\theta}^2}{2} \sim E \Rightarrow \dot{\theta} \sim \pm \sqrt{2E} \quad (\mathcal{N}.12 - 16)$$

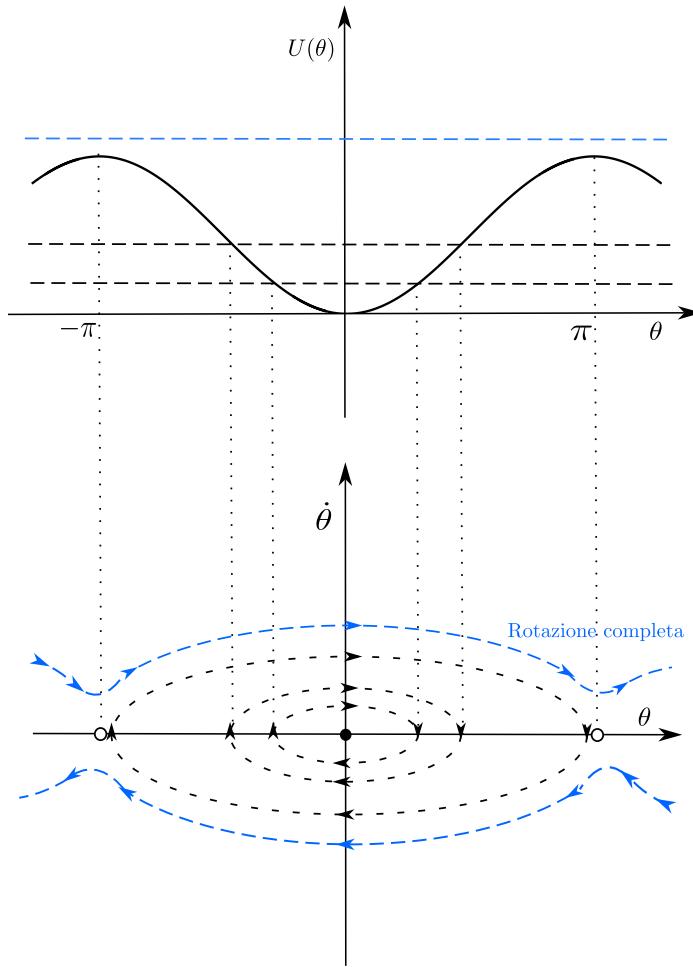
e  $\theta(t) \sim \pm \sqrt{2E} t + \theta_0$ : il pendolo continua a ruotare a velocità costante  $\rightarrow$  gravità trascurabile. Notare bene che per  $U(x)$  va usata la sua espressione generica, non quella per angoli piccoli. Il periodo è inoltre

$$T_{rot}(E) = \frac{2\pi}{|\dot{\theta}|} \sim \frac{2\pi}{\sqrt{2E}} \quad (\mathcal{N}.12 - 17)$$

## 1. Meccanica vincolata

---

In modo analogo a prima disegnando  $U(\theta)$ , si può disegnare il ritratto di fase:



Per sottolineare che il moto è periodico si può immaginare di chiudere il ritratto di fase (prendendo un solo periodo), facendo combaciare i due punti di equilibrio, creando una sorta di cilindro (toro) grazie al quale si coglie che non ci sono infiniti equilibri ma sono gli stessi che si ripetono.

Per completare l'analisi del sistema, bisogna conoscere anche le forze vincolari in gioco, alcuni casi estremi che sono gli unici possibili da ricavare in modo analitico perché l'equazione differenziale originale con  $\sin(\theta)$  non è risolvibile.

- Caso:  $0 < E \ll 1$

Si è nel caso in cui il pendolo parte praticamente fermo ad un'altezza piccola rispetto all'equilibrio, e quindi abbiamo praticamente un moto

armonico semplice:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t), \quad \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0 \quad (\mathcal{N}.12 - 18)$$

inoltre per  $\theta$  piccoli vale:

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots \quad (\mathcal{N}.12 - 19)$$

di conseguenza sostituendo nell'equazione per  $R_r$  ricavata prima si ha:

$$\begin{aligned} R_r &\simeq -ml\dot{\theta}^2 - mg\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = \\ &= -mg - ml \underbrace{\omega_0^2}_{(g/l)^2} \theta_0^2 \sin^2(\omega t) + \frac{mg}{2} \theta_0^2 \cos^2(\omega t) \\ &= -mg\left(1 + \theta_0^2 \sin^2(\omega t) - \frac{\theta_0^2}{2} \cos^2(\omega t)\right) \end{aligned} \quad (\mathcal{N}.12 - 20)$$

- Caso  $E \rightarrow \infty$  In modo analogo a prima ricordando che il moto è rettilineo uniforme in  $\theta(t)$  abbiamo:

$$R_r \sim -ml\dot{\theta}^2 \sim -ml2E \quad (\mathcal{N}.12 - 21)$$

### 1.3 Varietà differenziabili

L'equazione del moto e del vincolo sono:

$$M\ddot{X} = F(X, \dot{X}, t) \quad X \in \mathbb{R}^N \quad (N = nd) \quad (1.8)$$

$$\Phi(X, t) = 0 \quad \text{condizioni di vincolo} \quad (1.9)$$

Dove  $\Phi : \begin{matrix} \mathbb{R}^N \\ \Psi \\ \Psi \\ X \end{matrix} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^M$  con  $M \leq N$ , ovvero in modo esplicito si hanno  $N$  equazioni del tipo

$$\Phi(X, t) = 0 \iff \begin{cases} \Phi_1(X_1, \dots, X_M, t) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_N(X_1, \dots, X_M, t) = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Sotto alcune condizioni questo sistema definisce una varietà differenziabile di classe  $C^k$ . Le condizioni, oltre quelle che riguardano la regolarità, sono quelle tali per cui si riesce a risolvere il sistema di  $N$  equazioni esplicitandone  $M$  in funzione delle restanti  $N - M$ . Cioè risolvere il problema in maniera *esplicita*, per questo motivo si ricorre al teorema di Dini che descrive quando una funzione in forma esplicita si può esprimere, localmente, in forma esplicita. Secondo Dini ci sono allora  $M$  variabili in funzione delle restanti  $N - M$  se  $\frac{\partial \Phi}{\partial X}$  ha rango  $M$ .

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_M)}{\partial(X_1, \dots, X_N)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_M}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_M}{\partial X_N} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Con questa forma si richiede che in ogni punto  $X$  esiste un minore, quindi una sottomatrice quadrata  $M \times M$  con determinante  $\neq 0$ , ovvero equivalentemente  $\nabla_X \Phi_1, \dots, \nabla_X \Phi_N$  sono linearmente indipendenti. Queste sono le condizioni, equivalenti, sotto le quali  $\Phi(X, t) = 0$  definisce una varietà differenziabile di classe  $C^k$  indipendentemente dalla regolarità. Tutto questo è utile perché consente di risolvere il problema del moto vincolato in moto *localmente* esplicito.

**Esempio: Pendolo**

$$\Phi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - l^2 = 0 \quad (1.12)$$

$$\text{con } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ di dimensione } L = N - M \quad (1.13)$$

Esplicitando per esempio  $x_2$  come

$$x_2 = \pm \sqrt{l^2 - x_1^2} \quad (1.14)$$

In generale l'esplicitabilità è locale ed è per *rami* e non è unica. Scrivendo lo jacobiano

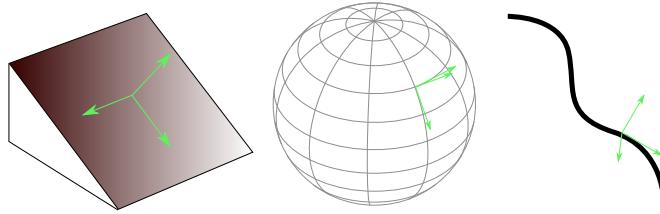
$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) = (2x_1, 2x_2) \neq (0, 0) \quad (1.15)$$

Segue che esiste una (e quindi infinite) parametrizzazione della varietà:

$$X = X(q, t) \quad (1.16)$$

Dove  $q \in \mathbb{R}^L$  e  $L = N - M$

**Esempio:**



$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\Phi(x, yz) = 0}_{\text{implicita}} \\
 \iff & \underbrace{z = f(x, y)}_{\text{parametrizzazione locale}} \\
 \iff & \underbrace{\begin{cases} x = x(q_1, q_2) \\ y = y(q_1, q_2) \\ z = z(q_1, q_2) \end{cases}}_{\text{altre (infinite) parametrizzazioni}}
 \end{aligned}$$

La varietà può essere assegnata implicita cioè un'applicazione del tipo

$$1) \quad \Phi(X, t) = 0 \quad \Phi : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^M \quad (1.17)$$

tale che  $\nabla_X \Phi_1, \dots, \nabla_X \Phi_M$  linearmente indipendenti. In alternativa, in modo equivalente, si può assegnare con la forma

$$2) \quad X = X(q, t), \quad q \in \mathbb{R}^L, \quad L = N - M \quad (1.18)$$

e  $\frac{\partial X}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial q_L}$  linearmente indipendenti. Considerando ora una curva

$$\gamma : s \mapsto \gamma(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \vdots \\ \gamma_N(s) \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

sulla varietà  $\mathcal{M}$  definita come sopra, in particolare  $\gamma(s) \in M \ \forall s \in I \subseteq \mathbb{R}$ , allora dalla prima definizione di varietà segue che:

$$\Phi(\gamma(s), t) = 0 \quad \forall s \in I \quad (1.20)$$

$$\iff \begin{cases} \Phi_1(\gamma(s)) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_M(\gamma(s)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{d\Phi_i(\gamma(s))}{ds} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, M \quad (1.21)$$

$$\iff \sum_{j=1}^N \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j} \frac{d\gamma_j}{ds} = \nabla_X \Phi_i \cdot \frac{d\gamma}{ds} = 0 \quad \forall s \in I \quad (1.22)$$

Allora, esattamente come deve essere, tutti i gradienti di  $\Phi_i$  sono tutti ortogonali a  $\frac{d\gamma}{ds}$ , che è il vettore tangente a  $\gamma$  cioè sono ortogonali a  $\gamma$  nel punto  $X = \gamma(s), \forall s \in I$ . Inoltre  $\nabla_x \Phi_1, \dots, \nabla_x \Phi_M$  generano lo spazio normale a  $\mathcal{M}$  in  $X : N_X \mathcal{M}$ ; e  $\frac{\partial X}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial q_L}$  generano  $T_X \mathcal{M}$ .

**Osservazioni:**

- (i)  $\dim T_X \mathcal{M} = \dim \mathcal{M} = L (= N - M)$  e  $\dim N_X \mathcal{M} = M$
- (ii) Se  $M = 0$  allora corrisponde a una trasformazione di coordinate e quindi sarà necessario porre  $R = 0$ .

L'equazione di Newton  $M\ddot{X} = F(X, \dot{X}, t) + R$  descrive un sistema vincolato sulla varietà differenziale  $\mathcal{M}$  immersa in  $\mathbb{R}^N$ , di dimensione  $\dim \mathcal{M} = L$  con  $L < N$ . L'ipotesi su  $R : R \perp \mathcal{M}$  in ogni punto  $X \in \mathcal{M}$  ovvero  $R \perp T_X \mathcal{M}$  (o  $R \in N_x \mathcal{M}$ )  $\forall X \in \mathcal{M}$ .

## 1.4 Teorema di Lagrange

Riassumendo il problema del moto vincolato da risolvere è così descritto:

$$\begin{cases} M\ddot{X} = F(X, \dot{X}, t) + R \\ \Phi(X, t) = 0 \ (\Phi : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^M) : \mathcal{M} \\ R \in N_X \mathcal{M} (\perp T_X \mathcal{M}) \ \forall X \in \mathcal{M} \end{cases} \quad (1.23)$$

Questo è per definizione il sistema newtoniano a  $L = M - N$  gradi di libertà soggetto a vincoli

- olonomi

$\Phi(X, t)$  non dipende da  $\dot{X}$ , in particolare  $\Phi$  deve essere tale che la seconda equazione della definizione sia sempre verificata.

- bilateri

si riferisce all'uguale sulla seconda equazione scritta sotto, cioè  $R$  può puntare sia verso l'interno che verso l'esterno della varietà; un esempio di vincolo bilatero potrebbe essere un anello stretto che scorre su una guida dove la guida tiene attaccato a sé in qualsiasi modo l'anello, invece un vincolo unilatero è quella di particella appoggiata su una emisfera dove la particella viene soltanto *spinta* dalla superficie

- ideali

si riferisce al princ. di d'Alambert.

La terza equazione, equivalente a richiedere  $R \cdot \xi = 0 \ \forall \xi \in T_X \mathcal{M}$ , è detta principio di d'Alambert o principio dei lavori virtuali; è un'ipotesi utile in più che permette di trovare una soluzione, si richiede che la reazione vincolare sia perpendicolare alla forma  $R$ ,  $\xi$  appartiene al campo tangente alla forma  $T_X \mathcal{M}$ . Infatti l'idea per risolvere questi tipi di problemi sarebbe quella di mettersi in un sistema di coordinate conveniente in cui la reazione vincolare *non* contribuisce al moto.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>si pensi all'esempio del piano inclinato in cui se ci si mette in un sistema di coordinate che ha gli assi o paralleli o perpendicolari al piano il moto diventa banale lungo l'asse parallelo al piano inclinato. Notare anche che se ci fosse una reazione non perpendicolare al piano, il moto non sarebbe risolvibile. La condizione di d'Alembert serve proprio per questo. Tutta la meccanica lagrangiana consiste nel generalizzare l'esempio del piano inclinato con la formulazione lagrangiana.

**Esempio: Sfera**

Considerando come varietà differenziabile una superficie immersa in  $\mathbb{R}^3$ , quindi serve una funzione che va da  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}$ :

$$\Phi(X) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad (1.24)$$

Infatti l'insieme di livello 0 è proprio una superficie sferica di raggio 1 centrata nell'origine. Notando che  $\frac{\partial\Phi}{\partial z} \neq 0$  se  $z \neq 0$  segue che per Dini si ha che  $z$  si può esplicitare rispetto alle altre due negli intorni di qualsiasi punto della superficie tranne quelli dell'equatore. In realtà in questo caso è possibile esplicitare  $z$  con la stessa relazione praticamente ovunque:

$$z = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (1.25)$$

Dall'altra parte sarebbe più furbo usare le coordinate polari per un problema di questo tipo, infatti in questo caso la superficie è caratterizzata da un'equazione che coinvolge solo  $r$ :  $r = 1$ . Le altre coordinate, prima  $x$  e  $y$ , ora  $\theta$  e  $\phi$ , che sono quindi libere di muoversi, sono dette appunto coordinate *libere/generalizzate/lagrangiane*. Quindi la trasformazione tra i due sistemi coordinati è del tipo:

$$X(\theta, \varphi) = \begin{cases} x = \sin \theta \cos \varphi \\ y = \sin \theta \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\ z = \cos \theta \end{cases}$$

In particolare un vantaggio banale delle coordinate libere è che lo spazio cui possono muoversi le coordinate libere è un rettangolo caratterizzabile facilmente da delle disequazioni semplici; lo stesso non si può dire per le coordinate cartesiane in cui  $x$  e  $y$  si muovono in un cerchio. Lo spazio tangente  $T_{x_0}\mathcal{M}$  nel punto  $x_0$  alla varietà  $\mathcal{M}$  definita dalla parametrizzazione di  $X$  è generato dai vettori  $\frac{\partial X}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial q_l}$ . Allora il principio d'Alambert equivale alla seguente condizione:  $R \cdot \frac{\partial X}{\partial q_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, l$ .

## 1. Meccanica vincolata

---

**Osservazione:**

Se  $F = -\nabla_X U(X, t)$  cioè  $M\ddot{X} = -\nabla_X U$  per un sistema "libero", cioè non vincolato, allora definendo  $K = \frac{1}{2}\dot{X} \cdot M\dot{X}$  ( $= \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{2}|\dot{x}|^2$ ) l'energia cinetica e  $\mathcal{L}(X, \dot{X}, t) := K(\dot{X}) - U(X, t)$  allora

$$M\ddot{X} = -\nabla_X U \iff \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = 0 \quad (1.26)$$

Dove  $\mathcal{L}$  è la lagrangiana o funzione di Lagrange del sistema. In modo più esplito l'equazione è composta da

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_N} \end{pmatrix} = \frac{\partial K}{\partial \dot{X}} = \frac{\partial}{\partial \dot{X}} \frac{1}{2} \dot{X} \cdot M \dot{X} = \\ &= \frac{1}{2} M \ddot{X} + \frac{1}{2} M \dot{X} = \boxed{M \ddot{X} = P} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} &= -\frac{\partial U}{\partial X} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = \frac{d}{dt} M \ddot{X} + \frac{\partial U}{\partial X} = M \ddot{X} + \nabla_X U = 0 \quad (1.27)$$

Che è esattamente l'equazione di Newton. Si aggiunge che per  $M = 0$  ( $L = N$ ),  $R \equiv 0$ .

**Teorema 1.1**

Sia  $\mathcal{L} = K - U|_{\mathcal{M}}$  (cioè  $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U}$  dove  $\mathcal{K} = \frac{1}{2}\dot{X} \cdot M \dot{X}|_{X=X(q(t),t)}$  e  $\mathcal{U} = U(X, t)|_{X(q(t),t)}$ ) la lagrangiana del sistema ristretta ad  $\mathcal{M}$  allora la proiezione dell'equazioni di Newton sullo spazio tangente a  $\mathcal{M}$  (a ogni istante) è data dalle equazioni di Eulero-Lagrange della forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad (1.28)$$

Risolte le equazioni di E-L (cioè nota la curva  $t \mapsto q(t)$ ) si ha che  $R = M\ddot{X} + \nabla_X U|_{X=X(q(t),t)}$

**Dimostrazione:**

$$M\ddot{X} = F(X, \dot{X}, t) + R \quad (1.29)$$

(Poi si restringerà  $F$  come  $F = -\nabla_X U$ ). Proiettando su  $T_X \mathcal{M}$  cioè considerando

$$M\ddot{X} \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i} = F \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i} + \underbrace{R \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i}}_{=0 \text{ per hp di vincolo ideale}} \quad \forall i = 1, \dots, L \quad (1.30)$$

Se le forze sono potenziali allora la dimostrazione è conclusa. Lavorando sul membro di sinistra

$$M\ddot{X} \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \underbrace{\left( M\dot{X} \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i} \right)}_{\sum_k (M\dot{X})_k \frac{\partial X_k}{\partial q_i}} - \underbrace{M\dot{X} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial X}{\partial q_i}}_{\sum_k (M\dot{X})_k \frac{d}{dt} \frac{\partial X_k}{\partial q_i}} \quad (1.31)$$

Pezzo per pezzo si ha

1.  $\frac{\partial X_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{X}_k}{\partial \dot{q}_i}$
2.  $\frac{d}{dt} \frac{\partial X_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{X}_k}{\partial q_i}$

**Dimostrazione:**

1.

$$\dot{X}_i = \frac{d}{dt} X_i(q(t), t) = \sum_{\ell=1}^L \frac{\partial X_i}{\partial q_\ell} \dot{q}_\ell + \frac{\partial X_i}{\partial t} \quad (1.32)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial X_i}{\partial q_j} \quad (1.33)$$

2.

$$\frac{\partial \dot{X}_i}{\partial q_j} = \sum_{\ell=1}^L \frac{\partial^2 X_i}{\partial q_j \partial q_\ell} \dot{q}_\ell + \frac{\partial^2 X_i}{\partial q_j \partial t} \quad (1.34)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial X_i}{\partial q_j} = \sum_{\ell=1}^L \frac{\partial^2 X_i}{\partial q_\ell \partial q_j} \dot{q}_\ell + \frac{\partial^2 X_i}{\partial t \partial q_j} \quad (1.35)$$

Che sono uguali se vale il th. di Schwartz per lo scambio di derivata.

□

$$\Rightarrow M \ddot{X} \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( M \dot{X} \cdot \frac{\partial \dot{X}}{\partial \dot{q}_i} \right) - M \dot{X} \cdot \frac{\partial \dot{X}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_i} \quad (1.36)$$

Definendo  $Q_i := F \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i}$  si ottiene che la proiezione dell'equazione di Newton sul piano tangente ha la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_i} = Q_i \quad (1.37)$$

E prendono il nome di equazioni di Lagrange del primo tipo. Ora se  $F = -\nabla_X U$

$$\Rightarrow Q_i = -\nabla_X U \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i} = -\frac{\partial}{\partial q_i} U(X(q, t), t) = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i} \quad (1.38)$$

Se si definisce ora  $\mathcal{L} := \mathcal{K} - \mathcal{U}$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (1.39)$$

□

**Osservazioni:**

(i)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\mathcal{K} - \mathcal{U}) - \frac{\partial}{\partial q_i} (\mathcal{K} - \mathcal{U}) = \quad (1.40)$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i} = 0 \quad (1.41)$$

Per  $M > 0$ , cioè  $L < N$ . Se  $M = 0$ , ovvero  $L = N$ , allora  $X(q, t)$  è una trasformazione di coordinate  $x \rightarrow q$  e allora si pone  $R \equiv 0$ . Segue che le equazioni di Lagrange sono invarianti in forma per trasformazioni di coordinate.

(ii) Le equazioni di Lagrange sono invarianti in forma sotto qualsiasi cambio di coordinate (anche se  $R \neq 0$ ) perché questo coincide con la riparametrizzazione della varietà  $\mathcal{M}$ .

Secondo questo teorema la dinamica del sistema (ovvero la proiezione delle equazioni di Newton su  $T$ ) è determinata dalle equazioni di Lagrange della forma

$$\boxed{\text{primo tipo} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, \dots, L} \quad (1.42)$$

Dove

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}, t) := \underbrace{\frac{1}{2}(\dot{X} \cdot M \dot{X})}_{K} \Big|_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}(X \cdot M \dot{X}) \Big|_{X=(q(t), t)} \quad (1.43)$$

$$Q_i := F \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i} \quad (1.44)$$

Se inoltre  $F = -\nabla_X U(X, t)$  cioè le forze sono potenziali, allora

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (1.45)$$

Dove  $U(q, t) = U(X, t)|_{\mathcal{M}}$  e le equazioni assumono la forma

$$\boxed{\text{secondo tipo} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0} \quad (1.46)$$

Che prende il nome di equazione di Lagrange del secondo tipo.

### Notazione

$$\boxed{\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) := K - U|_{\mathcal{M}} = \mathcal{K} - \mathcal{U}} \quad (1.47)$$

- $\mathcal{L}$  è la lagrangiana del sistema
- $q_1, \dots, q_L$  sono le coordinate "libere" o "lagrangiane" o "generalizzate"
- $\dot{q}$  sono le velocità "libere" o "lagrangiane" o "generalizzate"

## 1. Meccanica vincolata

---

Che cos'è  $\mathcal{K}$ ?

L'espressione esplicita di  $\mathcal{K} = K|_{\mathcal{M}}$  è

$$K = \frac{1}{2}(\dot{X} \cdot M \dot{X}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{X}_i (M \dot{X})_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{X}_i \sum_{j=1}^N M_{ij} \dot{X}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \dot{X}_i \cdot M \dot{X}_j \quad (1.48)$$

$$\begin{cases} \dot{X}_i = \sum_{\ell=1}^L \frac{\partial X_i}{\partial q_\ell} \cdot \dot{q}_\ell + \frac{\partial X_i}{\partial t} \\ \dot{X}_j = \sum_{m=1}^L \frac{\partial X_j}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial X_j}{\partial t} \end{cases} \quad (1.49)$$

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}, t) = K|_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i,j=1}^N \left( \sum_{\ell=1}^L \frac{\partial X_i}{\partial q_\ell} \dot{q}_\ell + \frac{\partial X_i}{\partial t} \right) M_{ij} \left( \sum_{m=1}^L \frac{\partial X_j}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial X_j}{\partial t} \right) \right] = \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\ell,m=1}^L \left( \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial X_i}{\partial q_\ell} M_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial q_m} \right) \dot{q}_\ell \dot{q}_m}_{\mathcal{K}_2} + \\ & = \underbrace{\left( + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^L \left( \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial X_i}{\partial q_\ell} M_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial t} \right) \dot{q}_\ell + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^L \left( \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial X_i}{\partial t} M_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial q_m} \right) \dot{q}_m \right)}_{\mathcal{K}_1} + \\ & \quad \underbrace{\left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial X_i}{\partial t} M_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial t} \right)}_{\mathcal{K}_0} \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_0 \quad (1.52)$$

Quindi per una varietà che non cambia nel tempo (di forma o posizione) l'energia cinetica è la solita  $\mathcal{K}_2$ , l'energia cinetica classica proiettata<sup>2</sup> sulla varietà. Queste tre parti corrispondono a termini quadratici, lineari e indipendenti rispetto alle coordinate generalizzate e alle loro derivate temporali.

---

<sup>2</sup>Le proiezioni si riferiscono alle velocità usate per calcolare l'energia cinetica, non a quest'ultima che è uno scalare.

**Osservazioni:**

(i) se  $\frac{\partial X}{\partial t} = 0$  allora  $\mathcal{K}_1 = 0 = \mathcal{K}_0$  e  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_2$

(ii)  $M_{ij} = \delta_{ij} M_i$  perchè  $M$  è diagonale. Si possono allora introdurre le due quantità

$$A_{\ell m} := \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial X_i}{\partial q_\ell} M_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^N \mu_i \frac{\partial X_i}{\partial q_\ell} \frac{\partial X_i}{\partial q_m} \quad (1.53)$$

$$B_{\ell m} := \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial X_i}{\partial q_\ell} M_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \mu_i \frac{\partial X_i}{\partial q_\ell} \frac{\partial X_i}{\partial t} \quad (1.54)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{K}_2 = \frac{1}{2} \sum_{\ell,m=1}^L \dot{q}_\ell A_{\ell,m}(q, t) \dot{q}_m \\ \mathcal{K}_1 = \sum_{\ell=1}^L B_\ell(q, t) \dot{q}_\ell \\ \mathcal{K}_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mu_i \left( \frac{\partial X_i}{\partial t} \right)^2 \end{cases} \quad (1.55)$$

$\mathcal{K}$  si può scrivere quindi come una forma quadratica. La matrice  $A$  è spesso chiamata *matrice di massa* o *matrice delle masse generalizzate*. La ragione per cui viene chiamata matrice di massa è legata al modo in cui viene costruita e al significato fisico che ha.

La matrice  $A$  è definita come segue:

$$A_{\ell,m}(q, t) = \sum_{i,j} \left( \frac{\partial X_i}{\partial q_\ell} M_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial q_m} \right) \quad (1.56)$$

Qui,  $M$  è la matrice di massa del sistema, che è una matrice diagonale con gli elementi di massa  $\mu_i$  sulla diagonale. La matrice  $A$  viene ottenuta combinando le derivate delle coordinate cartesiane rispetto alle coordinate generalizzate  $q$ , moltiplicate per gli elementi della matrice di massa  $M$ . Il significato fisico della matrice  $A$  è che descrive la *distribuzione* delle masse del sistema nelle coordinate generalizzate. In altre parole, la matrice  $A$  tiene conto di come le masse del sistema influenzano l'energia cinetica quando si considerano le coordinate generalizzate invece delle coordinate cartesiane. La matrice di massa  $A_{\ell,m}$  è definita positiva:

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned} A_{\ell m}(q, t) &= \frac{\partial X}{\partial q_\ell} \cdot M \frac{\partial X}{\partial q_m} \\ &\left( = \sum_i \left( \frac{\partial X}{\partial q_\ell} \right)_i \left( M \frac{\partial X}{\partial q_m} \right)_i = \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial q_\ell} \sum_j M_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial q_m} \right) \end{aligned}$$

Sfruttando che  $A_{m\ell} = A_{\ell m}$  è sufficiente dimostrare che  $c \cdot Ac > 0 \ \forall c \in \mathbb{R}^L$

## 1. Meccanica vincolata

---

$$\text{e } c \cdot Ac = 0 \iff c = 0$$

$$c \cdot Ac = \sum_{\ell,m=1}^L c_\ell A_{\ell m} c_m = \sum_{\ell,m=1}^L c_\ell \left( \frac{\partial X}{\partial q_\ell} \cdot M \frac{\partial X}{\partial q_m} \right) c_m = \quad (1.57)$$

$$= \left( \sum_{\ell=1}^L c_\ell \frac{\partial X}{\partial q_\ell} \right) \cdot M \left( \sum_{m=1}^L c_m \frac{\partial X}{\partial q_m} \right) \quad (1.58)$$

Definendo ora  $V := \sum_{\ell=1}^L c_\ell \frac{\partial X}{\partial q_\ell}$  si è mostrato che  $c \cdot Ac = V \cdot MV \geq 0$  perchè  $M$  è simmetrica e definita positiva, essa è  $= 0 \iff V = 0$  (cioè  $c \cdot Ac = V \cdot MV > 0 \forall V \neq 0$ ) ma

$$V = \sum_{\ell=1}^L c_\ell \frac{\partial X}{\partial q_\ell} = 0 \iff c_1, \dots, c_L = 0 \quad (1.59)$$

Perchè per ipotesi  $\frac{\partial X}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial q_L}$  sono linearmente indipendenti perchè descrivono la varietà differenziale.  $\square$

La matrice  $B$  è definita come segue:

$$B_{\ell m} = \sum_{i,j} \left( \frac{\partial X_i}{\partial q_\ell} M_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial t} \right) \quad (1.60)$$

La matrice  $B$  è simile alla matrice  $A$ , con l'unica differenza che la derivata di  $X$  rispetto a  $q_m$  viene sostituita dalla derivata di  $X$  rispetto al tempo  $t$  nella sommatoria. La matrice  $B$  rappresenta una sorta di *accoppiamento* tra le coordinate generalizzate  $q$  e la derivata temporale delle coordinate cartesiane. In altre parole, la matrice  $B$  tiene conto di come le masse del sistema e le loro velocità influenzano l'energia cinetica quando si considerano le coordinate generalizzate e il tempo  $t$ .

**Teorema di pitagora sulla varietà**

In  $\mathbb{R}^d$  vale che  $dX = dx_1\hat{e}_1 + \dots + dx_d\hat{e}_d$ , che costituiscono una base per lo spazio. Utilizzando il prodotto scalare si può definire lo spostamento come

$$ds^2 := dX \cdot dX = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_d^2 \quad (1.61)$$

Che è il teorema di Pitagora generalizzato. Nel caso in esame, parametrizzando localmente la varietà la base è data dai vettori linearmente indipendenti:

$$d_q X = \frac{\partial X}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{\partial X}{\partial q_L} dq_L \quad (1.62)$$

Definendo come distanza per questo caso  $[ds^2 := d_q X \cdot M d_q X]$  si ottiene una distanza pesata in base alla masse per ogni direzione, ovvero l'elemento di linea quadrato (lo spostamento infinitesimo quadrato) sulla varietà. Si può chiamare anche metrica cinetica. Esplicitando per bene i termini si ha

$$ds^2 = d_q X \cdot M d_q X = \left( \sum_{\ell=1}^L \frac{\partial X}{\partial q_\ell} dq_\ell \right) \cdot \left( M \sum_{m=1}^L \frac{\partial X}{\partial q_m} dq_m \right) \quad (1.63)$$

Utilizzando la bilinearità del prodotto euclideo si possono portare fuori le somme

$$\sum_{\ell,m=1}^L \underbrace{\left( \frac{\partial X}{\partial q_\ell} \cdot M \frac{\partial X}{\partial q_m} \right)}_{A_{\ell m}} dq_\ell dq_m = dq \cdot Adq \quad (1.64)$$

Da cui segue

$$\mathcal{K}_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \quad (1.65)$$

Allora l'energia cinetica suggerisce come avviene lo spostamento sulla varietà differenziale.

### Tema ( $\mathcal{L}.1$ ): Pendolo semplice rigido

Sia  $\mathcal{M}$ : la circonferenza di raggio  $l$ . Il cambio di coordinate è

$$\begin{cases} x(t) = l \cos \theta \\ y(t) = -l \sin \theta \end{cases} \quad (\mathcal{L}.1 - 1)$$

Per scrivere la lagrangiana  $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U}$  si cerca prima l'espressione di  $ds$ . Lo spostamento infinitesimo è  $ds = l d\theta \Rightarrow ds^2 = l^2 d\theta^2$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = l^2 \dot{\theta}^2 \quad (\mathcal{L}.1 - 2)$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad (\mathcal{L}.1 - 3)$$

Inoltre  $\mathcal{U} = U|_{\mathcal{M}}$  è dato da

$$U(x, y) = mgy \quad (\mathcal{L}.1 - 4)$$

$$\text{infatti } -\nabla U = \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \end{pmatrix} = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -mg \hat{e}_z \quad (\mathcal{L}.1 - 5)$$

$$\mathcal{U} = U|_{\mathcal{M}} = -mg \cos \theta l + mgl = mgl(1 - \cos \theta) \quad (\mathcal{L}.1 - 6)$$

## 1.5 Quantità conservative

Si consideri la lagrangiana della forma:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \quad (= \mathcal{K} - \mathcal{U}) \quad (1.66)$$

Si possono definire allora:

**Definizione 1.1 (momento coniugato o lagrangiano):** La quantità  $p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t)$  si chiama momento lagrangiano coniugato alla coordinata  $q_i$ .

**Definizione 1.2 (coordinata ignorabile o ciclica):** Se  $\mathcal{L}$  non dipende da  $q_i$ , cioè  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ , la coordinata  $q_i$  si dice ignorabile o ciclica.

**Proposizione 1.1.** Data  $\mathcal{L}$ , se  $q_i$  è una coordinata ignorabile allora  $p_i$  è una costante del moto.

**Dimostrazione:**

$$\frac{d}{dt} p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (1.67)$$

□

**Esempio: Punto non vincolato soggetto a forza potenziale**

Il potenziale è della forma

$$U(x, y) \in \mathbb{R}^3 \quad (N = L = 3) \quad (1.68)$$

Cioè non dipende dalla quota.

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y) \quad (1.69)$$

z è quindi ignorabile e

$$P_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = m\dot{z} \text{ è ciclica} \quad (1.70)$$

**Definizione 1.3 (funzione di Jacobi):** la funzione

$$H(q, \dot{q}, t) := p \cdot \dot{q} - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^L \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad (1.71)$$

si chiama funzione energia (generalizzata) o funzione di Jacobi. Si chiama integrale di Jacobi se la quantità è conservata.

**Proposizione 1.2.** Data la funzione

$$\dot{H} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \text{ lungo le soluzioni delle eq. di Lagrange} \quad (1.72)$$

se  $\mathcal{L}$  non dipende esplicitamente dal tempo ( $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ ) allora  $H$  è una costante del moto. Cioè

$$H(q, \dot{q}) = E \quad \forall t \text{ legge di conservazione dell'energia} \quad (1.73)$$

**Dimostrazione:**

$$\dot{H} := \frac{d}{dt} H(q(t), \dot{q}(t), t) = \quad (1.74)$$

$$= \frac{d}{dt} (p \cdot \dot{q} - \mathcal{L}) = \frac{d}{dt} (p \cdot \dot{q}) - \frac{d}{dt} \mathcal{L} = \quad (1.75)$$

$$= \dot{p} \cdot \dot{q} + p \cdot \ddot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \cdot \dot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \ddot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \quad (1.76)$$

$$= \underbrace{\left( \dot{p} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right)}_{=0} \cdot \dot{q} + \underbrace{\left( p - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right)}_{=0} \cdot \ddot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (1.77)$$

Dove il primo termine è = 0 lungo le soluzioni delle equazioni di Lagrange  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$  cioè  $\dot{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$ , il secondo termine è 0 per definizione, cioè  $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ . Si è così mostrato la prima parte della proposizione. La conservazione di tale quantità segue in maniera automatica perchè se la derivata rispetto al tempo è 0 di conseguenza una quantità conservata. Inoltre:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \text{ dove } H = p \cdot \dot{q} - \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q} - \mathcal{L} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (1.78)$$

Il differenziale di questa funzione si può scrivere formalmente come

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q} \cdot dq + \frac{\partial H}{\partial \dot{q}} \cdot d\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (1.79)$$

Il differenziale, in base alla definizione di  $H$  data, è invece

$$dH = d(p \cdot \dot{q} - \mathcal{L}) = dp \cdot \dot{q} + p \cdot d\dot{q} - d\mathcal{L} = \quad (1.80)$$

$$= \dot{q} \cdot dp + p \cdot d\dot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \cdot q - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot d\dot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (1.81)$$

Unendo le due scritture si ottiene

$$= \underbrace{\left( p - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right)}_{=0} \cdot d\dot{q} + \dot{q} \cdot dp - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \cdot dq - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad (1.82)$$

La derivata di  $H$  è fatta lungo le soluzioni delle eq. di Lagrange, bisogna aggiungere dunque questa restrizione che è inserita in  $\dot{q} \cdot dp$ . Le equazioni

di Lagrange in forma compatta sono

$$\dot{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \iff \frac{dp}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \Rightarrow \boxed{dp = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} dt} \quad (1.83)$$

Allora inserendo  $dp$  nella (1.82) si ha

$$dH = \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \cdot \underbrace{\dot{q} dt}_{dq}} - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \cdot dq} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad (1.84)$$

Allora  $dH$  lungo le soluzioni delle equazioni di Lagrange è  $-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$

□

**Osservazione:**

$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t}$  quindi  $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$  allora la dipendenza esplicita di  $H$  segue da quella di  $\mathcal{L}$ .

### Tema ( $\mathcal{L}.2$ ): Moto centrale piano

È un caso non vincolato in cui  $M = 0$ ,  $L = N = 2$ . La lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U} \quad \mathcal{U} = U(r) \quad (\mathcal{L}.2 - 1)$$

Per trovare  $\mathcal{K}$  bisogna ricavare l'energia cinetica e per quanto visto prima bisogna trovare  $ds^2$ . Nel piano polare si possono fare due spostamenti indipendenti, in particolare ortogonali tra loro, uno radiale ( $r + dr$ ) e uno angolare  $r + rd\theta$ .

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (\mathcal{L}.2 - 2)$$

$$\mathcal{K} = \frac{m}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (\mathcal{L}.2 - 3)$$

Allora la lagrangiana è  $\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r)}$  ed è indipendente da  $\theta$ .

Per verificare che sia ala forma giusta si possono scrivere le equazioni di Euler-Lagrange e verificare che la forma newtoniana sia quella corretta.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}}^0 = 0 \quad (\mathcal{L}.2 - 4)$$

Dove il termine cancellato è dovuto al fatto che  $\mathcal{L}$  non dipende da  $\theta$ . Si deduce quindi una legge di conservazione a vista, in particolare se la  $\mathcal{L}$  non dipende da una coordinata  $q$  l'equazione della lagrangiana è della forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (\mathcal{L}.2 - 5)$$

Per il caso in esame si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \text{cost.} \quad (\mathcal{L}.2 - 6)$$

Cioè la conservazione del momento angolare, risolvendo infatti si trova  $\ell_z$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} (= \ell_z) \quad (\mathcal{L}.2 - 7)$$

L'equazione radiale è

$$\frac{d}{dt} (m\dot{r}) = mr\dot{\theta}^2 - U'(r) \iff m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -U'(r) \quad (\mathcal{L}.2 - 8)$$

Utilizzando anche  $mr^2\dot{\theta} = \ell_z$  si hanno le equazioni di Newton.

La funzione  $H(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})$  è indipendente dal tempo visto che lo è  $\mathcal{L}$  infatti

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (\mathcal{L}.2 - 9)$$

$$\Rightarrow H(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}}_{p_r} \cdot \dot{r} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}}_{p_\theta} \cdot \dot{\theta} - \mathcal{L} = \quad (\mathcal{L}.2 - 10)$$

$$= mr^2 + mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) = \quad (\mathcal{L}.2 - 11)$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) \quad (\mathcal{L}.2 - 12)$$

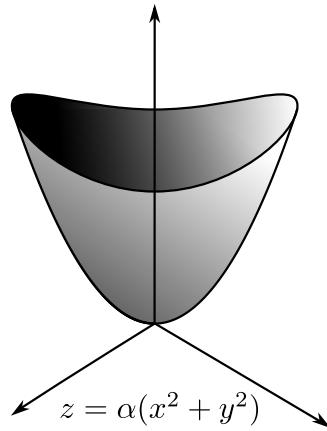
**Osservazioni:**

(i) Dall'equazione di Lagrange per  $\theta - \dot{\theta}$ , con  $\theta$  ciclica,  $mr^2\dot{\theta} = \ell_z$  (cost)

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\ell_z}{mr^2} \Rightarrow H = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell_z^2}{2mr^2} + U(r) \text{ energia del moto radiale} \quad (\mathcal{L}.2 - 13)$$

(ii) Se  $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U} \rightarrow H = \mathcal{K} + \mathcal{U}$  in generale?

(iii) Se si sostituisce  $\dot{\theta} = \frac{\ell_z}{mr^2}$ , dalla conservazione del momento angolare, in  $\mathcal{L}$  si ottiene un'espressione dipendente da  $r$ ,  $\dot{r}$  che non è una lagrangiana. Cioè le equazioni associate per  $r$ ,  $\dot{r}$  sono sbagliate. (dimostrarlo per esercizio). Il motivo profondo per cui è sbagliato è perchè la lagrangiana non si conserva lungo le equazioni che la risolvono.

**Tema ( $\mathcal{L}.3$ ): Punto vincolato su paraboloide di rotazione**


$$z = \alpha(x^2 + y^2) \quad (\mathcal{L}.3 - 1)$$

dove  $N = 3$ ,  $M = 1$ ,  $L = 2$ . Il vincolo è quindi

$$\Phi(x, y, z) = z - \alpha(x^2 + y^2) = 0 \quad (\mathcal{L}.3 - 2)$$

Dove la parametrizzazione è quella polare

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = \alpha r^2 \end{cases}$$

$$\mathcal{U} = U|_{\mathcal{M}} = mgz|_{\mathcal{M}} = mg\alpha r^2 \quad (\mathcal{L}.3 - 3)$$

$$\mathcal{K} = K|_{\mathcal{M}} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)|_{\mathcal{M}} \quad (\mathcal{L}.3 - 4)$$

Che come prima è data dallo spostamento  $ds^2$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 r^2 d\theta^2 + (2\alpha r)^2 dr^2 \quad (\mathcal{L}.3 - 5)$$

$$= (1 + 4\alpha^2 r^2) dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (\mathcal{L}.3 - 6)$$

$$\Rightarrow \mathcal{K} = \frac{m}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} [(1 + 4\alpha^2 r^2) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2] \quad (\mathcal{L}.3 - 7)$$

Si vede subito che  $\mathcal{U}$  non dipende da  $\theta$  che sarà quindi una quantità che si conserverà

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U} = \frac{m}{2} \left[ (1 + 4\alpha^2 r^2) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right] - mg\alpha r^2 \quad (\mathcal{L}.3 - 8)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} = \ell_z = \text{cost} \quad (\mathcal{L}.3 - 9)$$

Quindi  $\theta$  è una coordinata ciclica. Studiando ora l'equazione radiale si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \quad (\mathcal{L}.3 - 10)$$

$$\frac{d}{dt} (m(1 + 4\alpha^2 r^2) \dot{r}^2) + mr\dot{\theta}^2 - 2mg\alpha r = \quad (\mathcal{L}.3 - 11)$$

$$m(1 + 4\alpha^2 r^2) \ddot{r} + m8\alpha^2 r \dot{r}^2 = m4\alpha^2 r \dot{r}^2 + mr\dot{\theta}^2 - 2g\alpha r \quad (\mathcal{L}.3 - 12)$$

$$m(1 + 4\alpha^2 r^2) \ddot{r} = -4m\alpha^2 r \dot{r}^2 + \underbrace{mr\dot{\theta}^2}_{\frac{\ell_z^2}{mr^3}} - 2g\alpha r \quad (\mathcal{L}.3 - 13)$$

Ovvero l'equazione di Newton. Siccome la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo segue che  $H = \text{costante}$ .

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - \mathcal{L} = \quad (\mathcal{L}.3 - 14)$$

$$= m(1 + 4\alpha^2 r^2) \dot{r}^2 + mr^2 \dot{\theta}^2 - \frac{m}{2} [(1 + 4\alpha^2 r^2) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2] + mg\alpha r^2 = \\ = \frac{m}{2} [(1 + 4\alpha^2 r^2) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2] + mg\alpha r^2 (= \mathcal{K} + \mathcal{U}) \quad (\mathcal{L}.3 - 15)$$

Dalla seconda equazione di Lagrange  $mr^2 \dot{\theta} = \ell_z$

$$\rightarrow \dot{\theta} = \frac{\ell_z}{mr^2} \rightarrow H = \frac{m}{2} (1 + 4\alpha^2 r^2) \dot{r}^2 + U_e(r) \quad (\mathcal{L}.3 - 16)$$

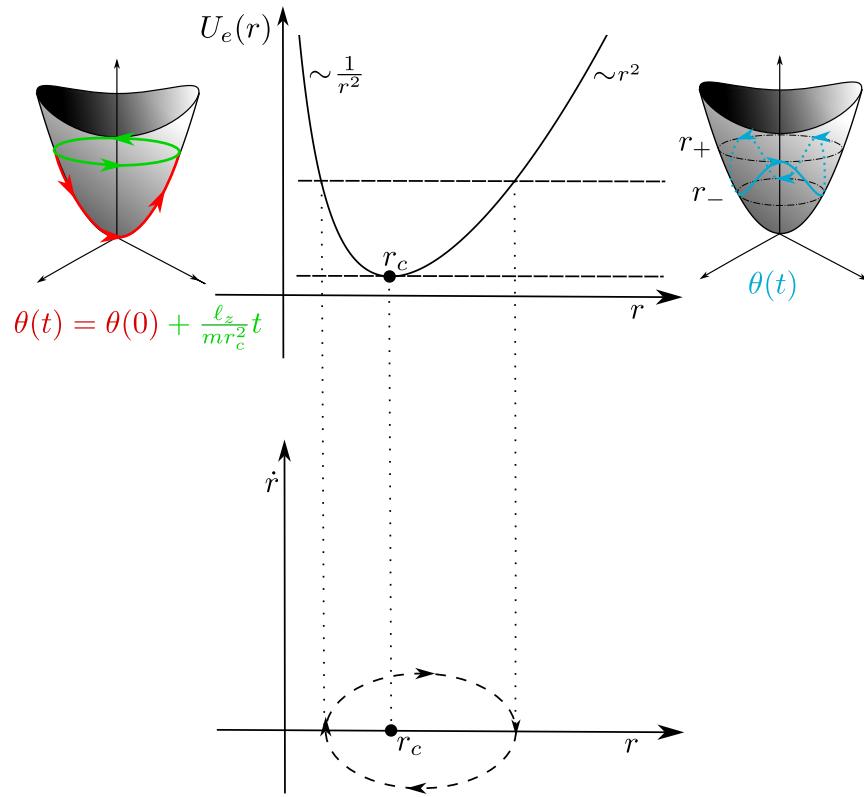
$$U_e(r) = \frac{\ell_z^2}{2mr^2} + mg\alpha r^2 \quad (\mathcal{L}.3 - 17)$$

### Osservazione:

$H = E$  con  $E > 0$  e del minimo dell'energia potenziale.

$$\frac{m}{2} (1 + 4\alpha^2 r^2) \dot{r}^2 \geq 0 \Rightarrow E - U_e(r) \geq 0 \quad (\mathcal{L}.3 - 18)$$

Quindi gli intervalli di moto radiale consentiti appartengono all'insieme di sottolivello di E di  $U_e(r)$ :  $\{r > 0 \mid U_e(r) \leq E\}$



Per energia minima il valore di  $r$  permesso è solo  $r = r_c$  di conseguenza la legge del moto per  $\theta$  è

$$\dot{\theta} = \frac{\ell_z}{\mu r_c^2} \Rightarrow \boxed{\theta(t) = \theta(0) + \underbrace{\frac{\ell_z}{\mu r_c^2}}_{\omega_c} t} \quad (\mathcal{L}.3 - 19)$$

E nel grafico è quella colorata di verde, per opportuni dati iniziali si potrebbe avere che  $\ell_z = 0$  cioè se la velocità è parallela ad  $r$ , questo il caso in cui il punto è diretto verso il minimo della parabola, di conseguenza si ha il moto colorato di rosso.

Attorno al minimo  $r_c$ , sviluppando l'energia  $E = E_{min} + \Delta E$ , il moto è descritto da ellissi. In particolare

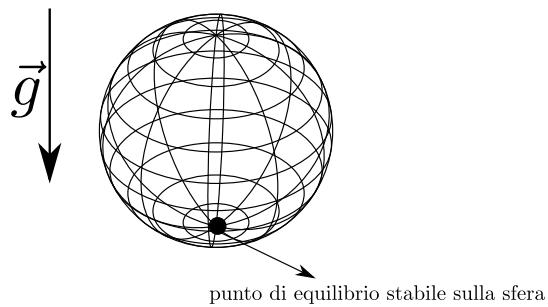
$$\frac{1}{2}U''_e(r_c)(r - r_c)^2 + \frac{1}{2}(1 + 4\alpha^2 r_c^2)\dot{r}^2 \simeq \Delta E \quad (\mathcal{L}.3 - 20)$$

I rami, superiore e inferiore delle curve chiuse, nel diagramma di fase sono dati da  $H = E$  risolta per  $\dot{r}$ :

$$\dot{r}_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \frac{E - U_e(r)}{1 + 4\alpha^2 r^2}} \quad (\mathcal{L}.3 - 21)$$

Questi due punti si riferiscono a due distanze dall'asse z, cioè due quote su cui il punto è vincolato a muoversi, nel grafico è il moto blu.

### Tema ( $\mathcal{L}.4$ ): Pendolo sferico



Si vuole studiare il moto di una particella costretta a muoversi su una sfera, non soggetta a forze esterne se non quelle vincolari. Quindi in questo caso la varietà differenziabile corrisponde allo spazio in cui la particella può muoversi, quindi la varietà "vincolare" risulta in forma implicita:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (\mathcal{L}.4 - 1)$$

Che è naturalmente parametrizzabile da coordinate sferiche<sup>a</sup>:

$$\rightarrow \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (\mathcal{L}.4 - 2)$$

si può calcolare lo spostamento in coordinate sferiche:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (\mathcal{L}.4 - 3)$$

#### Osservazione:

Lo spostamento infinitesimale può essere un calcolo complesso, tuttavia si può approssimare in modo geometrico. Pensando ad un punto  $P$  sulla sua superficie se si muove il punto  $P$  lungo un meridiano (una linea che va

## 1. Meccanica vincolata

---

dal polo nord al polo sud), il punto  $P$  si sposta lungo un arco di cerchio di raggio  $r$ . Pertanto, lo spostamento infinitesimale al quadrato in questa direzione è proporzionale a  $r^2 d\varphi^2$  ( $\varphi$  è l'angolo polare).

Ora, se si sposta il punto  $P$  lungo un parallelo (una circonferenza orizzontale intorno alla sfera), il raggio dell'arco di cerchio perpendicolare all'asse di rotazione della sfera varia in base alla latitudine. A una latitudine  $\varphi$ , il raggio del parallelo è  $r \sin(\varphi)$ . Pertanto, lo spostamento infinitesimale al quadrato in questa direzione è proporzionale a  $(r \sin(\varphi))^2 d\theta^2$  ( $\theta$  è l'angolo azimutale).

Infine l'altro spostamento possibile è quello radiale, cioè lungo un raggio della sfera, si può immaginare di allungare il raggio, lo spostamento infinitesimale al quadrato in questa direzione è  $dr^2$ .

Sommendo questi due contributi, si ottiene l'elemento di lunghezza infinitesima sulla superficie della sfera come prima:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (\mathcal{L}.4 - 4)$$

Imponendo il vincolo  $r = \text{cost} \Rightarrow \dot{r} = 0$  l'energia cinetica è:

$$K|_{\text{sfera}} = \frac{m}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \quad (\mathcal{L}.4 - 5)$$

Allora la lagrangiana si scrive come

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U} = \frac{m}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 - mgz = \frac{m}{2} r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mgr \cos \theta \quad (\mathcal{L}.4 - 6)$$

nel caso in cui non agisce la forza peso si avrebbe  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{K}$ . Dalla forma della lagrangiana si vede subito che  $\varphi$  è ignorabile, perché non compare esplicitamente nella  $(\mathcal{L}.4 - 6)$ , allora

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = \text{costante} \quad (\mathcal{L}.4 - 7)$$

Nel caso bidimensionale l'ignorabilità di  $\varphi$  mostrava che il momento angolare si conserva. In questo caso la forma fornita dalla lagrangiana è meno intuitiva, perciò per convincersi che è ancora  $\ell_z$  che si conserva occorre definirlo in coordinate polari sferiche:

$$\ell = x \times p = x \times m\dot{x} \quad (\mathcal{L}.4 - 8)$$

Per esprimere  $\ell$  in questo problema bisogna ricorrere alla base dei vettori in coordinate sferiche. Essi sono dati da:

$$\hat{e}_\theta = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\hat{e}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

dove i fattori di normalizzazione davanti al vettore derivato sono stati calcolati a posteriori usando il modulo del vettore derivato. Infine è utile notare che le coordinate sferiche per  $\theta = \frac{\pi}{2}$  si riducono alle coordinate polari piane. Il momento angolare allora è

$$\ell = x \times m\dot{x} = (r\hat{e}_r) \times m(r\dot{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi) = \quad (\mathcal{L}.4 - 9)$$

$$= (r^2\dot{\theta}(\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta)) + mr^2 \sin\theta\dot{\varphi}(\hat{e}_r \times \hat{e}_\varphi) = \quad (\mathcal{L}.4 - 10)$$

$$= mr^2\dot{\theta}\hat{e}_\varphi - mr^2 \sin\theta\dot{\varphi}\hat{e}_\theta \quad (\mathcal{L}.4 - 11)$$

Per scrivere  $|\ell|^2 = \ell \cdot \ell$  basta quadrare le componenti perchè tanto sono ortogonalì. Allora il modulo quadrato è:

$$|\ell|^2 = m^2 r^4 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \quad (\mathcal{L}.4 - 12)$$

Per scrivere adesso  $\ell_z$  basta proiettare il momento angolare lungo  $\hat{e}_z$ :

$$\ell_z = \ell \cdot \hat{e}_z = mr^2 \underbrace{\dot{\theta} \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_z}_{=0} - mr^2 \sin\theta \dot{\varphi} \underbrace{\hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_z}_{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta} = \quad (\mathcal{L}.4 - 13)$$

$$= mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \quad (\mathcal{L}.4 - 14)$$

La quantità conservata è proprio la componente del momento angolare lungo l'asse polare e per l'arbitrarietà della scelta dell'asse polare segue la conservazione del modulo del vettore momento angolare.

## 1. Meccanica vincolata

---

L'energia  $H$ , visto che  $\mathcal{L}$  è indipendente dal tempo, è anch'essa indipendente dal tempo e si scrive come

$$H = p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \quad (\mathcal{L}.4 - 15)$$

$$= \underbrace{mr^2 \dot{\theta}^2 + mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2}_{2\mathcal{K}} - \mathcal{K} + \mathcal{U} = \quad (\mathcal{L}.4 - 16)$$

$$= \mathcal{K} + \mathcal{U} \quad (\mathcal{L}.4 - 17)$$

Se inserita allora l'espressione  $\dot{\varphi} = \frac{\ell_z}{mr^2 \sin^2 \theta}$  in  $H = E$  si ottiene

$$H(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{\ell_z^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + mgr \cos \theta = E \quad (\mathcal{L}.4 - 18)$$

Quindi si ottiene una legge di conservazione per l'energia per il moto unidimensionale

$$\iff \frac{m}{2} r^2 \dot{\theta}^2 + U_e(\theta) = E \quad (\mathcal{L}.4 - 19)$$

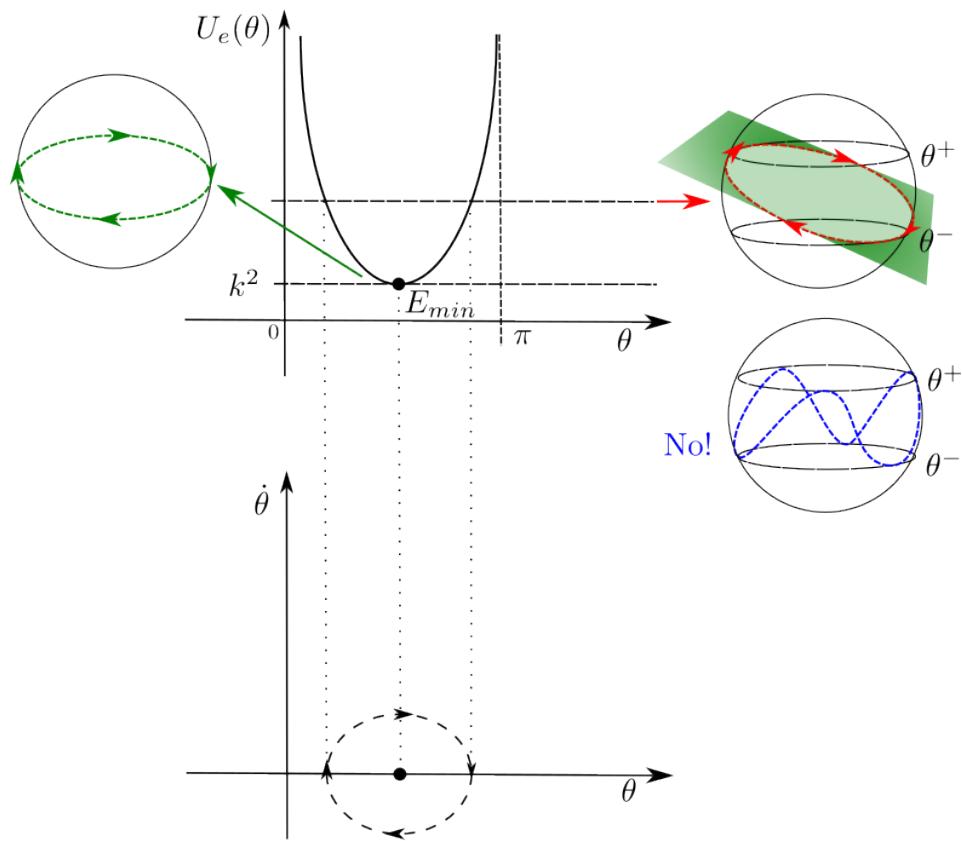
I  $\theta$  permessi tali che  $U_e(\theta) \leq E$

- se  $g = 0$  si ha un moto geodetico in assenza di forze "esterne"

$$U_e(\theta) = \frac{k^2}{\sin^2 \theta}, \quad k^2 = \frac{\ell_z^2}{2mr^2} \quad (\mathcal{L}.4 - 20)$$

Ricordando che le equazioni che descrivono la dinamica per sistemi vincolati ideali, ... sono del tipo  $m\ddot{x} = R$  si ha che le reazioni vincolari sono sullo spazio normale per definizione di vincolo ideale. Siccome si sta approcciando il caso della sfera si nota che la forza vincolare è di fatto centrale, cioè la forza è parallela al raggio. Un sistema soggetto a queste forze ha automaticamente la conservazione del momento angolare, di conseguenza il moto è piano. Il piano che interseca una sfera e la sua origine, perché  $\ell \cdot x = 0$ , è una circonferenza, un equatore. Quindi i moti geodetici su una sfera avvengono su circonferenze di raggio massimo, allora non è possibile avere moti *ondulatori* sulla circonferenza tra  $\theta_-$  e  $\theta_+$  ma solo moti circolari uniformi, il fatto che è uniforme deriva dalla legge di conservazione del momento angolare  $\ell = r \times m\dot{r}$ , con  $r$  nel piano di moto.

$$\ell = r \times mv = rmv\hat{\ell} = mr^2\dot{\phi} = \text{cost} \Rightarrow \boxed{\dot{\phi} = \text{cost}} \quad (\mathcal{L}.4 - 21)$$



Riscrivendo il modulo quadro di  $\ell$

$$|\ell|^2 = m^2 r^4 \left( \dot{\theta}^2 + \frac{\ell_z^2}{m^2 r^4 \sin^2 \theta} \right) = \quad (\mathcal{L}.4 - 22)$$

$$= mr^2 \underbrace{\left( mr^2 \dot{\theta}^2 + \frac{\ell_z^2}{mr^2 \sin^2 \theta} \right)}_{2E} \quad (\mathcal{L}.4 - 23)$$

Siccome  $E$  si conserva anche  $|\ell|^2$  si conserva.

**Esercizio 1.5.1**

La conservazione di  $|\ell|$  e quindi di  $|\ell|^2$  non è evidente, dimostrare che

$$\frac{d}{dt}|\ell|^2 = m^2r^4 \frac{d}{dt}(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \equiv 0 \quad (\mathcal{L}.4 - 24)$$

Lungo le soluzioni delle equazioni di Lagrange

- Se  $g \neq 0$  si ha

$$U_e(\theta) = mgr \left( \frac{c^2}{\sin^2 \theta} + \cos \theta \right), \quad c^2 = \frac{\ell_z^2}{2m^2r^3g} \quad (\mathcal{L}.4 - 25)$$

Oppure si può riscrivere come  $U_e(\theta) = \frac{\ell_z^2}{2mr^2} \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} + \tilde{c}^2 \cos \theta \right)$  in modo da avere le costanti solo su un termine. Per trovare la forma del potenziale si cercano i punti critici

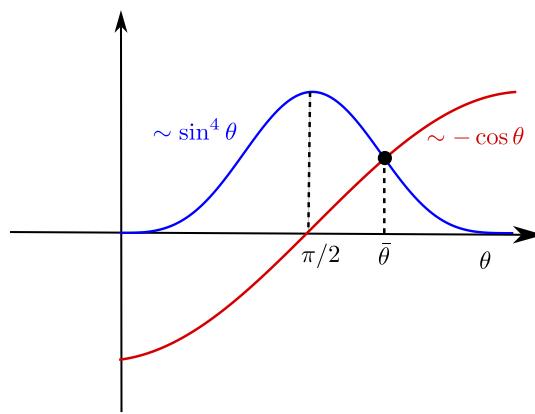
$$0 = U'_e(\theta) = -\frac{\ell_z^2}{2mr^2} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin^4 \theta} - mgr \sin \theta \quad (\mathcal{L}.4 - 26)$$

$$= -\sin \theta \left( \frac{\ell_z^2}{mr^2} \frac{\cos \theta}{\sin^4 \theta} + mgr \right) = \quad (\mathcal{L}.4 - 27)$$

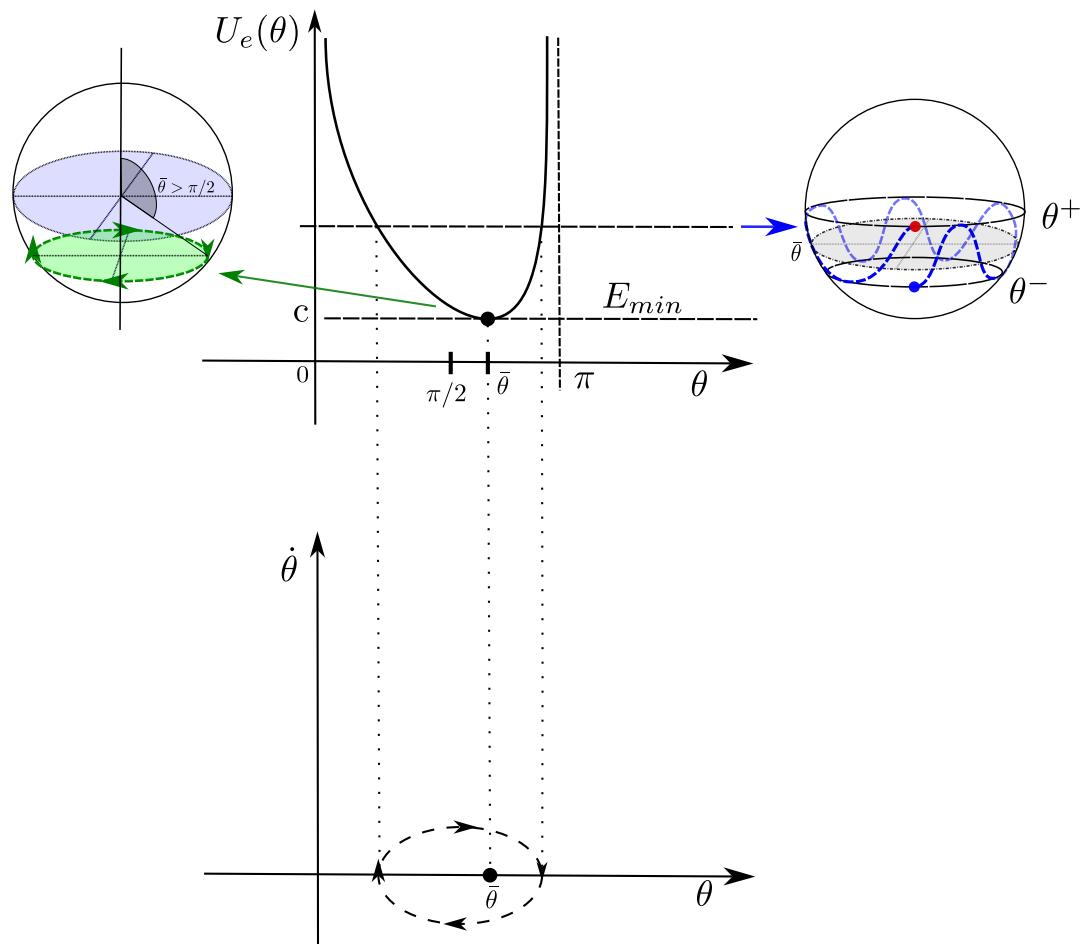
$$= \frac{\ell_z^2}{m^2r^3g} \cos \theta + \sin^4 \theta = \quad (\mathcal{L}.4 - 28)$$

$$\iff \sin^4 \theta = -c \cos \theta, \quad c = \frac{\ell_z^2}{m^2r^3g} \quad (\mathcal{L}.4 - 29)$$

Graficamente si può trovare l'intersezione.



Che è un minimo perché,  $\sin^2 \theta$  ha due asintoti a  $+\infty$  a  $0$  e  $\pi$ , quindi se fosse un massimo ci sarebbero altri due punti critici, di minimo, tra questo massimo e asintoti. Il potenziale quindi ha un minimo un po' più a destra di  $\pi/2$ . Il moto per energia minima è quindi un moto circolare uniforme su una circonferenza individuata da un piano perpendicolare all'asse polare per un angolo  $\bar{\theta} > \pi/2$ . Per valori superiori di energia si allarga l'intervallo dei  $\theta$  permessi:  $\theta_- \leq \theta \leq \theta_+$ . In questo caso la forza peso fa sì che non si abbia più un moto centrale e dunque piano, allora le orbite sono ondulatorie e non sono chiuse perchè il potenziale non soddisfa le condizioni, secondo il teorema di Bertrand, per cui l'orbita è chiusa.



### Osservazione:

Si può dimostrare, per entrambi i casi  $g = 0$  e  $g \neq 0$ , sviluppando l'energia come  $E = E_{min} + \Delta E$  in serie di Taylor fino al secondo ordine, in modo

## 1. Meccanica vincolata

---

equivalente al paraboloide, che le orbite vicino al punto di minimo sono ellissi.

---

<sup>a</sup>si usano queste perché si cerca di proiettare tutte le quantità sulla sfera quindi avere localmente una base che ha due assi sempre tangenti alla sfera semplifica tutto in quanto l'unica forza è quella vincolare sempre perpendicolare alla sfera.

## 2 Forma generale delle equazioni di Lagrange

---

2.1	Energia . . . . .	163
2.2	Forma della lagrangiana . . . . .	164
2.3	Geodetiche . . . . .	166

---

### 2.1 Energia

Si cerca una formulazione generale dell'energia per un sistema descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{K}(q, \dot{q}, t) - \mathcal{U}(q, t) \quad (2.1)$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_2(q, \dot{q}, t) + \mathcal{K}_1(q, \dot{q}, t) + \mathcal{K}_0(q, t) \quad (2.2)$$

Riprendendo la definizione di Jacobi

$$H(q, \dot{q}, t) = p \cdot \dot{q} - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^L \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = \quad (2.3)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q} - \mathcal{L} \quad (2.4)$$

Riprendendo il teorema di Eulero per le funzioni omogenee, cioè quelle  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  tali che

$$f(\lambda x) = \lambda^s f(x) \quad \forall \lambda > 0 \quad (2.5)$$

Vale che

$$\Rightarrow x \cdot \nabla_x f(x) = s f(x) \quad (2.6)$$

Utilizzando questo risultato per la funzione di Jacobi, si ha che  $\mathcal{K}_2$  è una forma *quadratica* allora si ha che

$$H = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q} - \mathcal{L} = \quad (2.7)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{K}_2}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q} - (\mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_0 - \mathcal{U}) = \quad (2.8)$$

$$= 2\mathcal{K}_2 + \cancel{\mathcal{K}_1} - \mathcal{K}_2 - \cancel{\mathcal{K}_1} - \mathcal{K}_0 + \mathcal{U} = \boxed{\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_0 + \mathcal{U}} \quad (2.9)$$

## 2. Forma generale delle equazioni di Lagrange

---

### 2.2 Forma della lagrangiana

Nel caso n-dimensionale la lagrangiana assume la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} \quad (n = 1, \dots, L) \quad (2.10)$$

$$\iff \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} \quad (2.11)$$

Il membro di sinistra è dato da

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_n} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{K}_2}{\partial \dot{q}_n} + \frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial \dot{q}_n} \right] = \quad (2.12)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[ \sum_{\ell=1}^L A_{n\ell} \ddot{q}_\ell + B_n \right] = \quad (2.13)$$

$$= \sum_{\ell=1}^L \left( \sum_{m=1}^L \frac{\partial A_{n\ell}}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial A_{n\ell}}{\partial t} \right) \ddot{q}_\ell + \sum_{\ell=1}^L A_{n\ell} \ddot{q}_\ell + \sum_{\ell=1}^L \frac{\partial B_n}{\partial q_\ell} \dot{q}_\ell + \frac{\partial B_n}{\partial t}$$

Siccome sono presenti sia la forma quadratica, che lineare che di grado 0, si può riordinare per ordini

$$\sum_{\ell=1}^L A_{n\ell} \ddot{q}_\ell + \sum_{\ell,m=1}^L \frac{\partial A_{n\ell}}{\partial q_m} \dot{q}_m \dot{q}_\ell + \sum_{\ell=1}^L \left( \frac{\partial B_n}{\partial q_\ell} + \frac{\partial A_{n\ell}}{\partial t} \right) \dot{q}_\ell + \frac{\partial B_n}{\partial t} \quad (2.14)$$

Il mebro di destra è dato da

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} = \frac{\partial \mathcal{K}_2}{\partial q_n} + \frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial q_n} + \frac{\partial \mathcal{K}_0}{\partial q_n} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_n} = \quad (2.15)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\ell,m=1}^L \frac{\partial A_{\ell,m}}{\partial q_n} \dot{q}_\ell \dot{q}_m + \sum_{\ell=1}^L \frac{\partial B_\ell}{\partial q_n} \dot{q}_\ell + \frac{\partial \mathcal{K}_0}{\partial q_n} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_n} \quad (2.16)$$

Nell'equazione totale, portando tutto a destra si ha

$$\sum_{\ell=1}^L A_{n\ell} \ddot{q}_\ell = - \underbrace{\sum_{\ell,m=1}^L \left( \frac{\partial A_{n\ell}}{\partial q_m} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{\ell m}}{\partial q_n} \right) \dot{q}_\ell \dot{q}_m}_{:= \gamma_{n\ell}^n} + \quad (2.17)$$

$$+ \sum_{\ell=1}^L \left( \underbrace{\frac{\partial B_\ell}{\partial q_n} - \frac{\partial B_n}{\partial q_\ell}}_{:= G_{n\ell}} - \frac{\partial A_{n\ell}}{\partial t} \right) \dot{q}_\ell - \frac{\partial B_n}{\partial t} - \frac{\partial (\mathcal{U} - \mathcal{K}_0)}{\partial q_n} \quad (2.18)$$

A vista si vede che la parte  $\frac{\partial B_\ell}{\partial q_n} - \frac{\partial B_n}{\partial q_\ell}$  è antisimmetrica (scambiando gli indici si ottiene un'uguaglianza con il meno),  $G$  sarebbe quindi lo jacobiano parziale di  $B$ ,

che è un campo di vettori, e quando si traspone si ottiene appunto  $-G$ , è quindi una matrice antisimmetrica che moltiplica la velocità. È della forma *geoscopica* ed è il motivo per cui  $\mathcal{K}_1 = 0$ . Scrivendo l'espressione per l'n-esima equazione di Lagrange si vede che

$$\sum_{\ell=1}^L A_{n\ell} \ddot{q}_\ell = - \sum_{\ell,m=1}^L \gamma_{\ell,m}^n \dot{q}_\ell \dot{q}_m + \sum_{\ell=1}^L G_{n\ell} \dot{q}_\ell + \quad (2.19)$$

$$- \sum_{\ell=1}^L \frac{\partial A_{n\ell}}{\partial t} \dot{q}_\ell - \frac{\partial B_n}{\partial t} - \frac{\partial (U - \mathcal{K}_0)}{\partial t} \quad (2.20)$$

Dove  $G_{n\ell} = \frac{\partial B_\ell}{\partial q_n} - \frac{\partial B_n}{\partial q_\ell}$  e  $\gamma_{\ell,m}^n = \left( \frac{\partial A_{n\ell}}{\partial q_m} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{\ell m}}{\partial q_m} \right)$ , oppure in maniera più simmetrica si può scrivere:

$$\gamma_n(\dot{q}) = \sum_{\ell,m=1}^L \left( \frac{\partial A_{n\ell}}{\partial q_m} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{\ell m}}{\partial q_m} \right) \dot{q}_\ell \dot{q}_m = \quad (2.21)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\ell,m=1}^L \left( \frac{\partial A_{n\ell}}{\partial q_m} + \frac{\partial A_{nm}}{\partial q_\ell} - \frac{\partial A_{\ell m}}{\partial q_n} \right) \dot{q}_\ell \dot{q}_m \quad (2.22)$$

Passando ora alla forma vettoriale si ha

$$A\ddot{q} = -\gamma(\dot{q}) + G\dot{q} - \frac{\partial A}{\partial t}\dot{q} - \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial (U - \mathcal{K}_0)}{\partial q} \quad (2.23)$$

Siccome è  $A$  è una matrice definita positiva si può scrivere

$$\ddot{q} = A^{-1} \left[ -\gamma(\dot{q}) + G\dot{q} - \frac{\partial A}{\partial t}\dot{q} - \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial (U - \mathcal{K}_0)}{\partial q} \right] \quad (2.24)$$

Allora dalle equazione di Lagrange è esprimibile l'accelerazione e si possono applicare tutti i teoremi noti delle equazioni differenziali ordinarie e si potrebbero anche riscrivere come un sistema del primo ordine con la solita sotituzione nello spazio delle fasi.

### Osservazione:

Se  $\frac{\partial X}{\partial t} = 0$  e  $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$  allora  $\ddot{q} = A^{-1} \left[ -\gamma(\dot{q}) - \frac{\partial U}{\partial q} \right]$ . In questo caso la lagrangiana di partenza è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot A(q) \dot{q} - U(q, \dot{q}) \quad (2.25)$$

Un tale sistema è detto sistema meccanico naturale e conservativo (perchè  $q$  non dipende da  $t$ ). Per i moti geodetici (cioè *liberi* da forze esterne) l'equazione è  $\ddot{q} = A^{-1} \gamma(\dot{q})$  e allora  $\mathcal{L} = \mathcal{K}_2$ .

### 2.3 Geodetiche

Come osservato l'equazione della lagrangiana per le geodetiche può essere espressa in forma

$$\ddot{q} = A^{-1}\gamma(\dot{q}) \quad (2.26)$$

Per componenti si ha

$$\ddot{q}_k = \left( A^{-1}(q)\gamma(\dot{q}) \right)_k = \sum_{n=1}^L (A^{-1})_{kn} \gamma_n(\dot{q}) = \quad (2.27)$$

$$= - \sum_{\ell,m=1}^L \underbrace{\left[ \sum_{n=1}^L (A^{-1}(q))_{kn} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_{n\ell}}{\partial q_m} + \frac{\partial A_{nm}}{\partial q_\ell} - \frac{\partial A_{\ell m}}{\partial q_n} \right) \right]}_{\Gamma_{\ell m}^k(q)} \dot{q}_\ell \dot{q}_m = \quad (2.28)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{q}_k = - \sum_{\ell,m=1}^L \Gamma_{\ell m}^k \dot{q}_\ell \dot{q}_m} \quad (2.29)$$

Il coefficiente  $\Gamma_{\ell m}^k$  è detto simbolo di Christoffel o simboli di connessione associati ad  $A(q)$ .

### 3 Equilibri, stabilità e piccole oscillazioni

3.1	Introduzione . . . . .	167
3.2	Equilibri . . . . .	167
	Linearizzazione del sistema attorno al punto di equilibrio $(\bar{q} \ 0)$	168
3.3	Equilibrio stabile secondo Lyapunov . . . . .	176
3.4	Proprietà del flusso di fase . . . . .	177
	<u>3.5</u> Moto armonico smorzato . . . . .	182
3.5	Linearizzazione . . . . .	185

#### 3.1 Introduzione

Il sistema in esame è della forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{q} \cdot A(q)\dot{q} - \mathcal{U}(q) = \mathcal{K}_2 - \mathcal{U} \quad (3.1)$$

La prima cosa da ricordare è la legge di conservazione dell'energia, ovvero esiste una costante del moto che è delle forma

$$H = \mathcal{K}_2 + \mathcal{U} = E \quad (3.2)$$

Le equazioni di Lagrange in forma generale sono

$$\ddot{q} = -A^{-1}(q) \left[ \gamma(\dot{q}) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q} \right] \iff \begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = -A^{-1}(q) \left[ \gamma(\dot{q}) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q} \right] \end{cases} \quad (3.3)$$

#### 3.2 Equilibri

**Definizione 3.1 (equilibrio):** Si definiscono equilibri del sistemi lagrangiano, gli zeri del campo vettoriale

$$Y(q, v) := \begin{pmatrix} v \\ -A^{-1}(q) \left[ \gamma(\dot{q}) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q} \right] \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Cioè  $v = 0 \Rightarrow \gamma(0) = 0$  e  $A^{-1} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q}(q) = 0$  e ovvero, moltiplicando per  $A$  ambo i membri.

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q}(q) = 0 \quad (3.5)$$

I punti di equilibrio nello spazio delle fasi sono della forma

$$\begin{pmatrix} \bar{q} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ con } \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \bar{q}} = 0 \quad (3.6)$$

### 3. Equilibri, stabilità e piccole oscillazioni

---

**Linearizzazione del sistema attorno al punto di equilibrio ( $\bar{q} 0$ )**

Dato  $q(t) = \bar{q} + \xi(t)$  e  $v(t) = (0+) \eta(t)$  si può scrivere il sistema

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta \\ \dot{\eta} = -A^{-1}(\bar{q} + \xi) [\gamma(\eta) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q}(\bar{q} + \xi)] \end{cases} \quad (3.7)$$

Si sta quindi espandendo per  $\xi$  e  $\eta$  piccoli attorno a un punto di equilibrio. Lo sviluppo di  $A^{-1}$  e  $\gamma$  sembra complicato, in realtà  $\gamma(\eta)$  è una forma quadratica di  $\eta$  quindi è già  $o(2)$  e quindi il prodotto  $A^{-1}(\bar{q} + \xi)\gamma(\eta)$  è trascurabile per l'ordine 1. Il termine  $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q}(\bar{q} + \xi)$  al primo ordine ha un contributo nullo in  $\bar{q}$  per definizione di  $\bar{q}$  + un termine lineare in  $\xi$ , il prodotto  $A^{-1}(\bar{q} + \xi)\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q}(\bar{q} + \xi)$  allora ha una parte quadratica in  $\xi$  e quindi anche questa parte è  $o(2)$ . L'unica cosa da sviluppare è quindi è  $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q}$ . In modo esplicito si ha:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q} = -A^{-1}(\bar{q}) \left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q}(\bar{q}) + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q^2}(\bar{q})\xi \right] + o(2) \quad (3.8)$$

in  $\xi$  e  $\eta$

Quindi il sistema linearizzato (attorno al punto di equilibrio) è

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta \\ \dot{\eta} = -A^{-1}(\bar{q}) \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q^2}(\bar{q})\xi \end{cases} \quad (3.9)$$

In particolare  $\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q^2}(\bar{q})$  è l'hessiano

$$\left( \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q^2}(\bar{q}) \right)_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q_\ell \partial q_m}(\bar{q}) \quad (3.10)$$

La matrice hessiana per costruzione è una matrice simmetrica, il segno invece dipende da  $\mathcal{U}$  ed è  $\neq 0$  se il punto di equilibrio è non degenere; nel caso in cui fosse degenere tutta la matrice sarebbe nulla e quindi bisognerebbe calcolare ordini successivi.

Rinominando  $\bar{A} := A(\bar{q})$  e  $\bar{B} := \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q^2}(\bar{q})$  si può riscrivere

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta \\ \dot{\eta} = -\bar{A}^{-1}\bar{B}\xi \end{cases} \iff \ddot{\xi} = -\bar{A}^{-1}\bar{B}\xi \iff \boxed{\bar{A}\ddot{\xi} = -\bar{B}\xi} \quad (3.11)$$

Questa equazione vettoriale per  $A$  e  $B$  positivi è l'equazione di un'oscillatore armonico con frequenza  $\nu = \sqrt{\frac{B}{A}}$ , invece è un repulsore armonico se  $\bar{B} < 0$ .  $\bar{A}$  si è già dimostrato essere definita positiva, quindi per un minimo locale non degenere dell'energia potenziale, che corrisponde al caso  $\bar{B}$  definita positiva, la (3.11)

è l'equazione dell'oscillatore armonico. Se  $\bar{B}$  è definita negativa, ovvero si ha un massimo dell'energia potenziale in  $\bar{q}$ , allora la (3.11) è quella di un repulsore armonico. Esistono inoltre situazioni in cui non tutti gli autovalori siano strettamente positivi o negativi e quindi si viola la condizione di punto critico non degenere.

Per studiare il caso di un minimo non degenere si cercano prima soluzione della forma

$$\xi(t) = u \cos(\omega t) \quad (3.12)$$

Si può mettere anche  $\sin(\omega t)$  o una combinazione lineare delle due, in questa equazione  $u \in \mathbb{R}^L$ . Se inserita dentro la (3.11) si ottiene un'equazione del tipo

$$\ddot{\xi}(t) = -\omega^2 u \cos(\omega t) = -\omega^2 \xi \quad (3.13)$$

Allora si riconoscono i termini

$$-\omega^2 (\bar{A}u) \cancel{\cos(\omega t)} = -(\bar{B}u) \cancel{(\cos \omega t)} \quad (3.14)$$

$$\rightarrow \omega^2 \bar{A}u = \bar{B}u \iff (\omega^2 \bar{A} - \bar{B})u = 0 \quad (3.15)$$

Se  $A$  fosse l'identità questa sarebbe esattamente l'equazione che definisce gli autovalori e gli autovettori di  $\bar{B}$ . Quindi è una *complicazione* rispetto al problema cosiddetto secolare, quello agli autovalori, che coinvolge due matrici invece che una sola. Questo problema è anche detto problema caratteristico per piccoli oscillazioni attorno al minimo.

### Osservazioni:

(i) Se si cerca una soluzione generica della forma

$$\xi(t) = uc(t) \quad (3.16)$$

Una volta inserita nell'equazione si ottiene

$$\bar{A}(\ddot{c}(t)u) = \bar{B}c(t)u \iff \ddot{c}(t)\bar{A}u = -c(t)\bar{B}u \quad (3.17)$$

$$\ddot{c}(t)u \cdot \bar{A}u = -c(t)u \cdot \bar{B}u \quad (3.18)$$

$$\rightarrow \frac{\ddot{c}(t)}{c(t)} = -\frac{u \cdot \bar{B}u}{u \cdot \bar{A}u} \quad (\forall u \neq 0, \text{ e } \forall t : c(t) \neq 0) \quad (3.19)$$

Questa identità implica che  $\frac{\ddot{c}(t)}{c(t)} = \text{cost} < 0$  (se  $\bar{B}$  è definita positiva) o in maniera equivalente

$$\frac{\ddot{c}(t)}{c(t)} = -\omega^2 \Rightarrow -\omega^2 = -\frac{u \cdot \bar{B}u}{u \cdot \bar{A}u} \quad (3.20)$$

$$\ddot{c} = -\omega^2 c \Rightarrow -\omega^2 \cancel{c} \bar{A}u = -\cancel{c} \bar{B}u \quad (3.21)$$

$$\Rightarrow \omega^2 \bar{A}u = \bar{B}u \quad (3.22)$$

Quindi in maniera automatica si che  $c(t)$  è una soluzione di tipo armonico.

### 3. Equilibri, stabilità e piccole oscillazioni

---

(ii) Se si trovano  $L$  corpi con  $(\omega_i^2, u_i)$ , con gli  $u_i$  linearmente indipendenti allora la soluzione generale è

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^L c_i(t) u_i \quad (3.23)$$

Con  $c_i(t) = a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t)$

(iii) La trattazione svolta fin'ora è sostanzialmente lo sviluppo della lagrangiana fino all'ordine 2:

$$\mathcal{L} = \mathcal{K}_2 - \mathcal{U} = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot A(\bar{q}) \dot{q} - \mathcal{U}(q) \quad (3.24)$$

Attorno all'equilibrio  $\begin{pmatrix} \bar{q} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} q(t) = \bar{q} + \xi(t) \\ \dot{q} = \dot{\xi}(t) \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\xi} \cdot \underbrace{A(\bar{q} + \xi)}_{A(\bar{q}) + o(1)} \dot{\xi} - \underbrace{\mathcal{U}(\bar{q} + \xi)}_{\mathcal{U}(\bar{q}) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q}(\bar{q}) \xi + \frac{1}{2} \xi \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q^2}(\bar{q}) \xi + o(3)} \quad (3.25)$$

$$\mathcal{L}_2 + o(3) \quad (3.26)$$

Dove  $\mathcal{L}_2$  è

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \dot{\xi} \cdot \bar{A} \dot{\xi} - \frac{1}{2} \xi \cdot \bar{B} \xi - \mathcal{U}(\bar{q}) \quad (3.27)$$

E poi dalle equazioni di Lagrange si è ottenuto  $\bar{A} \ddot{\xi} = -\bar{B} \xi$

**Teorema 3.1 (di Lagrange)**

*Siano  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  simmetriche e definite positive allora*

1. *L'equazione caratteristica  $\omega^2 \bar{A}u = \bar{B}u$  ammette  $L$  soluzioni  $(\omega_i^2, u_i)$ ,  $i = 1, \dots, L$  con  $u_1, \dots, u_L$  linearmente indipendenti e la soluzione generale di  $\ddot{\xi} = -\bar{B}\xi$  è data da*

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^L c_i(t)u_i \quad (3.28)$$

2. *Nelle coordinate  $c_i$  si ha che  $\mathcal{L}_2$  è diagonalizzata, o separata, in lagrangiane di oscillatore armonico*

$$\mathcal{L}_2 = \sum_{i=1}^L \left( \frac{1}{2} \dot{c}_i^2 - \frac{1}{2} \omega_i^2 c_i^2 \right) \quad (3.29)$$

**Dimostrazione:**

1. Partendo dall'equazione caratteristica

$$\omega^2 \bar{A}u = \bar{B}u \quad \left( \omega^2 = \frac{u \cdot \bar{B}u}{u \cdot \bar{A}u} > 0 \quad \forall u \neq 0 \right) \quad (3.30)$$

$$\iff (\omega^2 \bar{A} - \bar{B})u = 0 \quad (3.31)$$

Se il determinante di  $\omega^2 \bar{A} - \bar{B}$  fosse diverso da 0 allora sarebbe invertibile, si potrebbe moltiplicare per l'inversa a destra e sinistra e si ottenebbe  $u \equiv 0$  che è una soluzione banale. Allora si richiede che

$$\Rightarrow \det(\omega^2 \bar{A} - \bar{B}) = 0 \quad (3.32)$$

Cioè è l'equazione caratteristica per gli autovalori o per le frequenze caratteristiche

**Osservazione:**

Siccome è noto che  $\bar{A}$  sia simmetrica, invertibile e positiva si può scrivere

$$\det(\bar{A}(\omega^2 \mathbb{1} - \bar{A}^{-1} \bar{B})) = \quad (3.33)$$

$$= \det \bar{A} \det(\omega^2 \mathbb{1} - \bar{A}^{-1} \bar{B}) = 0 \quad (3.34)$$

### 3. Equilibri, stabilità e piccole oscillazioni

---

Quindi  $\omega^2$  sono gli autovalori della matrice  $\bar{A}^{-1}\bar{B}$ . Oppure si può scrivere

$$\begin{aligned} \det(\bar{A}\omega^2 - \bar{B}) &= \\ &= \det(\bar{A}^{1/2}(\omega^2\mathbb{1} - \bar{A}^{-1/2}\bar{B}\bar{A}^{-1/2})\bar{A}^{1/2}) = \\ &= (\det \bar{A}^{1/2})^2 \det(\omega^2\mathbb{1} - \bar{A}^{-1/2}\bar{B}\bar{A}^{-1/2}) = 0 \end{aligned}$$

Così si sta cercando gli autovalori per una matrice  $\bar{A}^{-1/2}\bar{B}\bar{A}^{-1/2}$  simmetrica reale ( $A$  e  $B$  sono reali) e definita positiva. Per il teorema spettrale i suoi autovalori sono anch'essi reali. Per convincersi della simmetria si fa la trasposta

$$(\bar{A}^{-1/2}\bar{B}\bar{A}^{-1/2})^T = \quad (3.35)$$

$$= (\bar{A}^{-1/2})^T(\bar{B})^T(\bar{A}^{-1/2})^T = \bar{A}^{-1/2}\bar{B}\bar{A}^{-1/2} \quad (3.36)$$

Per convincersi del segno si fa

$$\begin{aligned} u \cdot (\bar{A}^{-1/2}\bar{B}\bar{A}^{-1/2})u &= (\underbrace{\bar{A}^{-1/2}u}_v) \cdot (B(\underbrace{\bar{A}^{-1/2}u}_v)) = \\ v \cdot \bar{B}v &\begin{cases} > 0 \ \forall v \neq 0 \\ = 0 \text{ se } v = 0 \end{cases} \iff \bar{A}^{-1/2}u = 0 \iff u = 0 \end{aligned}$$

Quindi le  $\omega_i^2$  sono gli autovalori (positivi) di  $\bar{A}^{-1/2}\bar{B}\bar{A}^{-1/2}$

Il problema è della forma

$$\omega^2 \bar{A}u = \bar{B}u \quad (3.37)$$

$$\iff \omega^2 u = \bar{A}^{-1}\bar{B}u \quad (3.38)$$

$$\iff \omega^2 u = \bar{A}^{-1/2}\bar{A}^{-1/2}\bar{B}\bar{A}^{-1/2}(\bar{A}^{1/2}u) \quad (3.39)$$

$$\iff \bar{A}^{1/2}\omega^2 u = \bar{A}^{-1/2}\bar{B}\bar{A}^{-1/2}(\bar{A}^{1/2}u) \quad (3.40)$$

$$\iff \omega^2(\bar{A}^{1/2}u) = \bar{A}^{-1/2}\bar{B}\bar{A}^{-1/2}(\bar{A}^{1/2}u) \quad (3.41)$$

Definendo  $w = \bar{A}^{1/2}u$

$$\omega^2 w = (\bar{A}^{-1/2}\bar{B}\bar{A}^{-1/2})w \quad (3.42)$$

Quindi i vettori  $w_i$ , che sono soluzioni dell'equazione caratteristica e corrispondono agli autovalori  $\omega_i^2$ , sono tra loro mutuamente ortogonali, il che implica che sono linearmente indipendenti. Di conseguenza, i corrispondenti vettori  $u_i$  sono anche mutuamente ortogonali e

linearmente indipendenti. Questa proprietà deriva dalla invertibilità della matrice  $A$ . Pertanto, è possibile affermare che i vettori  $u_i$  soddisfano entrambe le condizioni di ortogonalità e indipendenza lineare.

$$\sum_{i=1}^L \alpha_i w_i = \sum_{i=1}^L \alpha_i \bar{A}^{-1/2} u_i = \quad (3.43)$$

$$= \bar{A}^{1/2} \left( \sum_{i=1}^L \alpha_i u_i \right) \quad (3.44)$$

$$\stackrel{\bar{A}^{1/2}}{\iff} \sum_{i=1}^L \alpha_i u_i = 0 \quad (3.45)$$

Allora si è trasferita la proprietà di indipendenza lineare da  $w_i$  alle  $u_i$ .

2.

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{i=1}^L c_i u_i = \sum_{i=1}^L c_i \bar{A}^{1/2} w_i \\ \Rightarrow \mathcal{L}_2(\xi, \dot{\xi}) &= \frac{1}{2} \dot{\xi} \cdot \bar{A} \dot{\xi} - \frac{1}{2} \xi \cdot \bar{B} \xi = \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_i \dot{c}_i \bar{A}^{-1/2} w_i \right) \cdot \bar{A} \left( \sum_j \dot{c}_j \bar{A}^{-1/2} w_i \right) - \frac{1}{2} \left( \sum_i c_i \bar{A}^{-1/2} w_i \right) \cdot \bar{B} \left( \sum_j c_j \bar{A}^{-1/2} w_i \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{c}_i \dot{c}_j (\bar{A}^{-1/2} w_i) \cdot \bar{A} (\bar{A}^{-1/2} w_i) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_i c_j (\bar{A}^{-1/2} w_i) \cdot \bar{B} (\bar{A}^{-1/2} w_j) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{c}_i \dot{c}_j \underbrace{w_i \cdot w_j}_{\delta_{ij}} - \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_i c_j w_i \cdot \underbrace{(\bar{A}^{-1/2} \bar{B} \bar{A}^{-1/2}) w_j}_{\omega_j^2 w_j} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i (\dot{c}_i^2 - \omega_i^2 c_i^2) \quad (3.46) \end{aligned}$$

La trasformazione  $\xi(t) = \sum_i^L c_i(t) u_i$  letta come trasformazione lineare di coordinate  $\xi \mapsto c$  diagonalizza la  $\mathcal{L}_2$  nella forma (3.46). La soluzione  $c_i(t)u_i$  è detta  $i$ -esimo modo normale di oscillazione, le  $\omega_i$  sono dette frequenze proprie (o normali) di oscillazione,  $u_i$  sono i vettori propri (o normali) di oscillazione e le  $c_i$  sono dette coordinate

### 3. Equilibri, stabilità e piccole oscillazioni

---

normali. La procedura adottata si chiama riduzione ai modi normali di oscillazione.

**Osservazione:**

$A$  è simmetrica e definita positiva quindi per  $A$  vale il teorema spettrale, in particolare esiste una matrice  $R$  tale che

$$R^T R = \mathbb{1} \quad \text{e} \quad R^T A R = \text{diag}(a_1, \dots, a_L) \quad (3.47)$$

con  $a_1, \dots, a_L$  autovalori di  $A$ . E segue che la forma di  $R$  è

$$Aw_i = a_i w_i \implies R = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ w_1 & \dots & w_L \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Sempre per il teorema spettrale la matrice  $A$  ammette una decomposizione nella forma  $A = \sum_i a_i P_i$  dove  $P_i$  sono i proiettori sull'autospazio  $i$ -esimo. Se  $a_i$  è semplice (cioè non degenere ovvero l'autospazio corrispondente ha dimensione 1) allora

$$P_i = w_i w_i^T \quad (3.49)$$

$$P_i u = w_i (w_i^T u) = (w_i \cdot u) w_i \quad (3.50)$$

In generale i proiettori sono ortogonali

$$P_i P_j = w_i \underbrace{w_i^T w_j}_{\delta_{ij}} w_j^T = \delta_{ij} w_i w_i^T = \delta_{ij} P_i \quad (3.51)$$

E si vede anche che il quadrato di un proiettore è il proiettore stesso.

Detto questo si può giustificare la potenza  $1/2$  di  $A$  introdotta nella dimostrazione, in particolare

$$A^S := \sum_i^L A_i^S P_i \quad \forall s \in \mathbb{R} \text{ e } a_i > 0 \ \forall i \quad (3.52)$$

Allora segue anche che

$$A^S A^{S'} = \sum_{i,j} a_i^S a_j^{S'} P_i P_j = \sum_i a_i^{S+S'} P_i = A^{S+S'} \quad (3.53)$$

E allora segue anche

$$f(A) := \sum_i^L f(a_i) P_i \quad (3.54)$$

□

**Osservazioni:**

- (i) Dalla lagrangiana fino all'ordine 2

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \dots = \sum_{i=1}^L \frac{\dot{c}_1^2}{2} + \frac{\omega_i^2}{2} c_i^2 \quad (3.55)$$

Si può scrivere la formulazione dell'energia, che è del tipo

$$H = \frac{\mathcal{L}}{\dot{\xi}} \cdot \dot{\xi} - \mathcal{L} = H_2 + \dots = \sum_i^L \left( \frac{\dot{c}_1^2}{2} + \frac{\omega_i^2}{2} c_i^2 \right) \quad (3.56)$$

Ogni  $H_{2,i} = \frac{\dot{c}_1^2}{2} - \frac{\omega_i^2}{2} c_i^2$  è una costante del moto *del problema linearizzato*.

- (ii) C'è una generalizzazione del caso già studiato di analisi qualitativa per i moti unidimensionali attorno a punti di equilibrio. In particolare si era dimostrato che per valori di energia vicino al minimo, nello spazio delle fasi, le orbite sono hanno la forma di ellissi. Questa è una generalizzazione perché  $H_2 = E$  è anch'essa l'equazione di una ellisse, o meglio elissoidi visto che lo spazio non ha dimensione 1 ma  $L$ .

### 3.3 Equilibrio stabile secondo Lyapunov

**Definizione 3.2 (Equilibrio stabile):** Il punto di equilibrio lagrangiano  $(\bar{q}, 0)$  si dice stabile secondo Lyapunov se, per ogni intorno<sup>3</sup>  $J$  di  $(\bar{q}, 0)$  esiste un intorno  $I$  di  $(\bar{q}, 0)$ ,  $I \subseteq J$ , tale che se il dato iniziale  $(q_0, v_0) \in I$  la soluzione corrispondente  $(q(t), \dot{q}(t)) \in J \forall t$ .

La soluzione  $(q(t), \dot{q}(t))$  corrispondente al dato iniziale  $(q(0), \dot{q}(0))$  si indica con

$$(q(t), \dot{q}(t)) = \Phi^t(q_0, v_0) \quad (3.57)$$

Con  $\Phi^0(q_0, v_0) = (q_0, v_0)$ .

**Definizione 3.3 (Equilibrio asintoticamente stabile):**  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile secondo Lyapunov (o "attrattivo") se è stabile e  $\exists$  un intorno  $B$  di  $\bar{x}$  tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi^t(\xi) = \bar{x} \quad \forall \xi \in B$$

$B$  si chiama "bacino di attrazione".

**Definizione 3.4 (Flusso di fase):** L'applicazione  $\Phi^t : \mathbb{R}^{2L} \times \mathbb{R}^{2L}$ , cioè che a partire dal punto di equilibrio lo trasla al tempo  $t$ , si chiama flusso di fase o semplicemente flusso al tempo  $t$ . La famiglia di applicazioni  $\{\Phi^t\}$  si chiama flusso, o flusso di fase, del sistema.

**Definizione 3.5 (Funzione di Lyapnov):** Una funzione continua  $W : B \rightarrow \mathbb{R}$  è detta funzione di Lyapnov per il sistema  $\dot{Y} = U(Y)$  se:

1.  $W(Y) > 0 \forall Y \in B \setminus \{\bar{Y}\}$  e  $W(\bar{Y}) = 0$  cioè  $W$  ha minimo locale stretto in  $\bar{Y}$
2.  $W(\Phi^t(x)) \leq W(x) \forall t \geq 0 \forall x \in B$

---

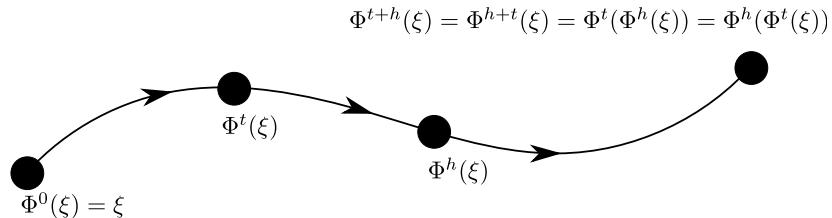
<sup>3</sup>Sufficientemente piccolo

### 3.4 Proprietà del flusso di fase

Il flusso  $\Phi^t$  soddisfa le seguenti proprietà:

- $\Phi^0(\xi) = \xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ , cioè  $\Phi^0$  è l'identità.
- $\Phi^{t+h}(\xi) = \Phi^{h+t}(\xi) = \Phi^h(\Phi^t(\xi)) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^L$  e  $\forall t, h$  tali che i 3 membri esistano.  
Cioè

$$\Phi^{t+h} = \Phi^t \circ \Phi^h = \Phi^h \circ \Phi^t \quad (3.58)$$



#### Osservazione:

$\Phi^{t_1} \circ (\Phi^{t_2} \circ \Phi^{t_3}) = (\Phi^{t_1} \circ \Phi^{t_2}) \circ \Phi^{t_3}$ , cioè " $\circ$ " è associativa.

- $\forall t$ : se  $\Phi^t$  esiste, allora esiste  $(\Phi^t)^{-1} := \Phi^{-t}$ . ( $x = \Phi^t(\xi) \Rightarrow \xi = (\Phi^t)^{-1}(x)$ ). Per dire ciò si è sfruttato il teorema di esistenza e unicità locale di Cauchy, da cui segue che  $\Phi^t$  ha proprietà di gruppo (locale). In particolare il flusso di fase è un *gruppo a un parametro* di applicazioni dello spazio delle fasi in sè ( $\mathbb{R}^n$ , o  $M$ ).

#### Nota matematica

Cos'è un gruppo? → Dato un insieme  $G$ , con elementi  $g \in G$ , e una operazione binaria " $\circ$ " (cioè l'operazione va da  $G \times G$  a  $G$ ) che gode delle seguenti proprietà:

- $g_1 \circ g_2 \in G \quad \forall g_1, g_2 \in G$
- $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3, \forall g_1, g_2, g_3 \in G$  (cioè " $\circ$ " è associativa).
- $\exists e \in G : g \circ e = e \circ g = g \quad \forall g \in G$  (esistenza dell'identità).
- $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G : g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$  (esistenza dell'inverso per ogni elemento).

La coppia  $(G, \circ)$  si chiama gruppo (astratto).

### 3. Equilibri, stabilità e piccole oscillazioni

---

#### **Osservazione:**

In generale non si richiede  $g_1 \circ g_2$ . se questo accade ( $\forall g_1, g_2 \in G$ ) allora il gruppo  $(G, \circ)$  si dice commutativo o "Abeliano".

#### **Esempio:**

Spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$ , con " $\circ$ " = +, infatti:  $e = 0(\in \mathbb{R}^n)$ ,  $x^{-1} = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ , e ovviamente la somma definita al solito modo (componente per componente) è associativa.

#### **Esempio:**

L'insieme  $G$  delle matrici  $n \times n$  non singolari con prodotto · righe per colonne  $(AB)$  è un esempio di gruppo non commutativo.

#### **Esempio:**

Le matrici ortogonali  $R^T R = RR^T = \mathbb{1}$  sono un sottogruppo di  $GL(n, \mathbb{R})$  che si indica con  $O(n)$  (gruppo ortogonale). Se si fissa  $\det(R) = +1$ , si ottiene  $SO(n)$  (dove "S" sta per speciale).

Un elemento  $R \in SO(n)$  è individuato da  $\frac{n(n-1)}{2}$  parametri.

**Teorema 3.2 (Lyapunov)**

Sia  $\bar{x}$  punto di equilibrio isolato di  $\dot{x} = u(x)$ . Supponiamo che esista una funzione  $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  continua in  $K \setminus \{\bar{x}\}$  tale che:

- $W(x) > 0 \quad \forall x \in K \setminus \{\bar{x}\}$ , e  $W(\bar{x}) = 0$ . Cioè  $W$  ha un minimo locale stretto in  $\bar{x}$ .
- $W(\Phi^t(\xi))$  è monotona non crescente  $\forall \xi \in K \setminus \{\bar{x}\}$

Ovvero una funzione di Lyapunov. Allora  $\bar{x}$  è stabile.

Se inoltre  $W(\phi^t(\xi))$  è monotona strettamente decrescente, allora  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile.

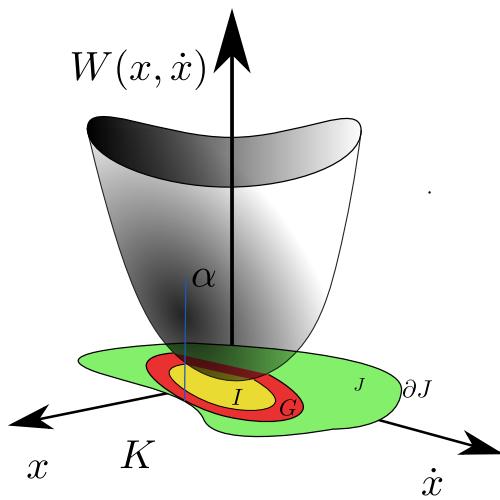
**Osservazione:**

Nei sistemi meccanici spesso/quasi sempre, la funzione  $W$  è l'integrale di Jacobi/energia del sistema. Infatti  $H$  ha un minimo nei punti di equilibrio stabili, invece quando si ha l'attrito, gli stessi equilibri stabili si trasformano in asintoticamente stabili, infatti  $H$  diminuisce monotonamente lungo il moto. Per avere un'intuizione basta pensare al caso dell'oscillatore semplice con e senza attrito, nel primo caso attorno all'equilibrio si aprono delle ellissi, nel secondo caso delle spirali che tendono al punto  $(0, 0)$ . Nei casi non meccanici l'idea è comunque quella di cercare un integrale primo del sistema e valgono praticamente le stesse considerazioni.

**Dimostrazione:**

Sia  $J \subset K$  intorno di  $\bar{x}$  e sia  $\alpha := \min_{x \in \partial J} W(x) > 0$ . Si definisce l'insieme l'insieme

$$G := \{x \in J : W(x) < \alpha\} \quad (3.59)$$



### 3. Equilibri, stabilità e piccole oscillazioni

---

Intanto  $G$  non è vuoto perché

$$\bar{x} \in G : W(\bar{x}) = 0 < \alpha$$

La funzione  $\alpha - W(x)$  è **continua ed è  $> 0$  in  $\bar{x}$**

$\Rightarrow$  [Teorema permanenza del segno] cioè  $\exists I$  di  $\bar{x}$  tale che  $\alpha - W(x) > 0$  con  $I \subseteq G$ .

L'insieme  $G$  è  $\Phi^t$ -invariante: preso  $\xi \in G \Rightarrow \Phi^t(\xi) \in G \ \forall t \geq 0$ . Infatti se  $W(\xi) < \alpha$  ( $\xi \in G$ ) (definizione di  $G$ ), allora  $W(\Phi^t(\xi)) \leq W(\xi) < \alpha$ , dove la prima disequazione è la seconda ipotesi del teorema. Ma allora  $\forall \xi \in I \subseteq G \subseteq J \Rightarrow \Phi^t(\xi)$  non esce da  $G$  e quindi da  $J$ . E quindi  $\bar{x}$  è stabile.

Segue ora la seconda parte del teorema. Quindi sfruttando la terza ipotesi ovvero che  $W(\Phi^t(\xi))$  sia monotona decrescente  $\forall t \geq 0, \forall \xi \in K \setminus \{\bar{x}\}$ . Dato  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi^t(\xi) = \bar{x}$ , per la definizione di limite si ha  $\forall t > t_L$  tale che  $t$  appartiene ad un intorno di  $t_L$ ,  $\exists \hat{L}$ , intorno di  $\bar{x}$ , tale che vale  $\Phi^t(\xi) \in \hat{L}$ . Quindi la funzione è inferiormente limitata.

Supponendo ora per assurdo che  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi^t(\xi) \neq \bar{x}$ , ovvero si nega la definizione precedente:  $\Phi^t(\xi) \notin \hat{L} \ \forall t > t_L$ .

È noto che  $W|_{\partial \hat{L}}$  assume max e min (teorema di Weierstrass). Chiamando  $\beta = \min_{x \in \partial \hat{L}} W(x)$ .

Poiché  $W(\Phi^t(\xi)) \rightarrow 0$ , esiste  $T_\beta$  tale che  $W(\Phi^t(\xi)) < \beta$  per  $t > T_\beta$ .

Ma dall'altra parte  $\exists t_L^* > T_\beta$  tale che a  $t = t_L^*$ ,  $\Phi^t(\xi) \in \partial \hat{L} \Rightarrow W(\Phi^{t_L^*}(\xi)) \geq \beta$ .

Questa è la contraddizione cercata, cioè non esiste nessun  $\hat{L}$  con la proprietà cercata e quindi  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile.  $\square$

Per sistemi meccanici naturali conservativi la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \mathcal{K}_2 - \mathcal{U} = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot A(q) \dot{q} - \mathcal{U}(q) \quad (3.60)$$

Si conserva  $H = \mathcal{K}_2 + \mathcal{U}(q)$ . Sia  $\bar{q}$  un punto di minimo locale stretto  $\mathcal{U}(q)$ , definendo  $W(q, v) := H(q, v) - H(\bar{q}, 0)$  la funzione di Lyapnov, tale per cui è 0 nel punto di equilibrio, esplicitamente si ha

$$W(q, v) := H(q, v) - H(\bar{q}, 0) = \frac{1}{2} v \cdot A(q) v + \mathcal{U}(q) - \mathcal{U}(\bar{q}) \quad (3.61)$$

**Osservazioni:**

(i) Si può notare che

$$W(q, v) \begin{cases} = 0 & \text{in } \begin{pmatrix} \bar{q} \\ 0 \end{pmatrix} \\ > 0 & \forall \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \bar{q} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ in un opportuno intorno } B \text{ di } \begin{pmatrix} \bar{q} \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(ii)

$$W(\Phi^t(q, v)) = H(\Phi^t(q, v)) - H(\bar{q}, 0) = \quad (3.62)$$

$$= H(q, v) - H(\bar{q}, 0) = W(q, v) \quad (3.63)$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{q} \\ 0 \end{pmatrix}$  è stabile secondo Lyapnov

(iii) In generale se  $W$  è di classe  $C^1(K \setminus \{\bar{x}\})$  la seconda proprietà del teorema è soddisfatta se  $\dot{W} = \frac{d}{dt}W(\Phi^t(\xi)) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall \xi \in K \setminus \{\bar{x}\}$ .

$$\frac{d}{dt}W(\phi^t(\xi)) = \frac{d}{dt}(W(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \quad (3.64)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial W}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_j \frac{\partial W}{\partial x_j} u_j(x) = \quad (3.65)$$

$$= (u \cdot \nabla W)(\Phi^t(\xi)) = u(\Phi^t(\xi)) \cdot \nabla W(\Phi^t(\xi)) \quad (3.66)$$

Dove  $u \cdot \nabla W$  è la derivata nella direzione di  $u$  o anche derivata di Lie di  $W$  lungo il flusso del campo vettoriale  $u$ .

Se  $\dot{W} = \frac{d}{dt}W(\Phi^t(\xi)) < 0$  segue la terza proprietà del teorema cioè la stabilità asintotica.

### Tema ( $\mathcal{L}.5$ ): Moto armonico smorzato

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} \quad (\mathcal{L}.5 - 1)$$

Definisco  $\omega^2 := \frac{k}{m}$  e  $2\mu := \frac{\gamma}{m} > 0$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\mu\dot{x}$$

$$\iff \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 x - 2\mu v \end{cases}$$

Quindi la parte di destra è  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  soltanto per l'equilibrio  $(x, v) = (0, 0)$ .

Essendo l'equazione originale un'equazione diff. scalare lineare di secondo ordine a coefficienti costanti, possiamo usare i metodi di analisi 3 per la soluzione esplicita: sostituiamo  $x(t) = e^{\lambda t}$  nell'equazione di partenza per trovare gli autovalori della matrice  $A$  dell'equazione differenziale messa al primo ordine. Vediamone una breve dimostrazione. Vogliamo mostrare che si  $\lambda$  ottengono così

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = 0 = e^{\lambda t} \underbrace{(\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega^2)}_{=0}$$

sono proprio gli autovalori di  $A$  dove  $A$  è:  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 - 2\mu & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} =$

$A \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$  E se è verificata la condizione che abbiamo scritto sopra, cioè prendiamo le soluzioni del tipo esponenziale con esponente ottenuto nel modo indicato abbiamo:

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = ue^{\lambda t} \quad u \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \lambda e^{\lambda t} = Au e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow Au = \lambda u$$

$$Au = \lambda u \iff (A - \lambda \mathbb{1})u = 0$$

soltanto se la matrice di sinistra è non invertibile (cioè rango non massimo) che esistono  $u(\neq 0)$  che risolvono l'equazione appena scritta. Ed è soltanto in questo caso che ha senso cercare soluzione del tipo  $ue^{\lambda t}$ . Infatti se la matrice di sinistra fosse invertibile:

$$\text{se } \det(A - \lambda \mathbb{1}) \neq 0 \Rightarrow \cancel{(A - \lambda \mathbb{1})^{-1}}(A - \lambda \mathbb{1})u = 0$$

$$\Rightarrow u \equiv 0$$

Quindi imponiamo che la matrice sia di rango non massimo:

$$\exists u \neq 0 \iff \det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

Da cui sviluppando l'ultimo determinante abbiamo:

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega^2 = 0$$

che è quello che volevamo mostrare.

In questo caso i due autovalori risultano:

$$\lambda_{\pm} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$$

Possiamo fare una classificazione in base alla natura di tali autovalori: x

1. **Autovalori reali:**  $\mu > \omega \Rightarrow \lambda_- < \lambda_+ < 0$  caso "sovramorzato", in questo caso l'agente dissipativo fa sì che non avvengano oscillazioni, infatti le soluzioni, come detto prima, sono combinazioni lineari di  $e^{\lambda_+ t}$  e  $e^{\lambda_- t}$ :

$$x(t) = ae^{\lambda_+ t} + be^{\lambda_- t}$$

che per  $\lambda$  reali (negativi) è evidentemente monotona e decresce esponenzialmente:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$  ( $\forall a, b$ , cioè  $\forall$  dato iniziale con  $(a, b) \neq 0$ ).

x

2.  $\mu = \omega \Rightarrow \lambda := \lambda_- = \lambda_+ = -\mu$  caso con smorzamento critico

Sebbene il sistema sia in grado di dare inizio alla prima oscillazione, la vede smorzarsi completandola solo all'infinito. Le soluzioni generali sono combinazioni lineari di  $e^{\lambda t}$  e  $te^{\lambda t}$ . x

3.  $\mu < \omega \Rightarrow \bar{\lambda}_- = \lambda_+ = -\mu + i\sqrt{\omega^2 - \mu^2}$  caso "sotto smorzato"

La soluzione generale è come prima la combinazione lineare di  $e^{\lambda_+ t}$  e  $e^{\lambda_- t}$  e dalla formula di Eulero si deduce che è ora presente una componente ondulatoria. Siamo interessati soltanto alla parte reale/fisica della soluzione che si scrive decomponendo in parte reale e in parte immaginaria e prendendo quella reale:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_+ e^{\lambda_+ t} + a_- e^{\lambda_- t}, \quad \bar{a}_- = a_+ \\ &= a_+ e^{\lambda_+ t} + \bar{a}_+ e^{\bar{\lambda}_+ t} = a_+ e^{\lambda_+ t} + (\overline{a_+ e^{\lambda_+ t}}) \\ &= (a'_+ + ia''_+) e^{(-\mu+i\sqrt{\omega^2-\mu^2})t} + (a'_+ - ia''_+) e^{(-\mu-i\sqrt{\omega^2-\mu^2})t} \\ &= e^{-\mu t} [a'_+ (e^{i\sqrt{\omega^2-\mu^2}t} + e^{-i\sqrt{\omega^2-\mu^2}t}) + a''_+ i (e^{i\sqrt{\omega^2-\mu^2}t} - e^{-i\sqrt{\omega^2-\mu^2}t})] \end{aligned}$$

### 3. Equilibri, stabilità e piccole oscillazioni

---

Usando le formule di Eulero:  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ .

$$\begin{aligned} &= e^{-\mu t} \left[ \underbrace{2a_+}_{a} \cos \left( \sqrt{\omega^2 - \mu^2} t \right) - \underbrace{2a''_+}_{b} \sin \left( \sqrt{\omega^2 - \mu^2} t \right) \right] \\ &= e^{-\mu t} [a \cos \left( \sqrt{\omega^2 - \mu^2} t \right) + b \sin \left( \sqrt{\omega^2 - \mu^2} t \right)] \end{aligned}$$

Studiando il comportamento per  $t \rightarrow +\infty$  trovo  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$  ( $\forall a, b$ , cioè  $\forall$  dato iniziale con  $(a, b) \neq 0$ ).

x

Dopo vedremo una generalizzazione di questo procedimento con autovalori per decidere la natura di un punto di equilibrio.

Qual è invece la funzione di Lyapunov del sistema? Nonostante non sia conservativo è ancora l'energia totale del sistema (con una piccola precisazione), infatti presenta un minimo locale stretto nel punto di equilibrio  $(x, v) = (0, 0)$  e lungo il flusso non solo è non crescente, ma è addirittura strettamente decrescente:

$$H(x, v) := \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \quad (\mathcal{L}.5 - 2)$$

$$\frac{d}{dt} H(\underbrace{x(t), v(t)}_{\Phi^t(x_0, v_0)}) = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial v} \dot{v} = \quad (\mathcal{L}.5 - 3)$$

$$= kxv + mv \left( -\frac{kx}{m} - \frac{\gamma v}{m} \right) = \quad (\mathcal{L}.5 - 4)$$

$$= -\gamma v^2 \quad (\mathcal{L}.5 - 5)$$

di conseguenza  $H$  è non crescente lungo il flusso (quindi  $(0, 0)$  è stabile), ma siccome non è vero che  $H$  è strettamente decrescente si può concludere immediatamente che il punto in questione sia anche asintoticamente stabile. Però nonostante la derivata di  $H$  si annulli in punti del tipo  $(x, 0)$ , ma sono soltanto delle valli (lungo il flusso) per la funzione  $H$ . Infatti il campo di velocità nel piano delle fasi  $(x, v)$  calcolato nei punti  $(x, 0)$  risulta trasversale alla varietà  $v = 0$ , e quindi il moto nel piano delle fasi non si ferma mai: se si raggiunge in un punto del tipo  $(x, 0)$  si viene spinti via cosicchè il moto tende comunque nel punto  $(0, 0)$ . più rigorosamente il campo vettoriale del sistema è:

$$\left( \begin{array}{c} v \\ -\frac{k}{m}x - \frac{\gamma}{m}v \end{array} \right) \Big|_{\substack{\text{asse } v \\ v=0}} = \left( \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{k}{m}x \end{array} \right) \quad (\mathcal{L}.5 - 6)$$

Quello che si vuole mostrare è che, anche se  $\dot{H} = 0$  sull'asse  $x$ , il moto non resta poi "intrappolato" sull'asse  $x$ , bensì  $H$  ricomincia a diminuire fino a far spiraleggiare  $x$  sull'origine. A quel punto è eliminato il dubbio sul moto introdotto da  $\dot{H} = 0$  e si può concludere che  $(0, 0)$  è equilibrio asintoticamente stabile. Infatti studiando la struttura del campo vettoriale, si vede che se  $x > 0$ , i vettori ortogonali all'asse  $x$  rimpiccioliscono, fino a diventare uguali a 0 sull'origine; stesso ragionamento per  $x < 0$ .

### 3.5 Linearizzazione

$$H = \mathcal{K}_2 + \mathcal{U}(q) + \mathcal{U}(\bar{q}) \quad (3.67)$$

Sviluppando  $H(q, v)$  attorno a  $(\bar{q}, 0)$  secondo Taylor fino all'ordine sue con  $q = \bar{q} + \xi$  si ha

$$H(\bar{q} + \xi, v) = \frac{1}{2}v \cdot A(\bar{q})v + \frac{1}{2}\xi \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q^2}(\bar{q})\xi + o(3) \quad (3.68)$$

Intro a  $(\bar{q}, 0)$ , passando dalle coordinate  $\xi$  a  $c$ , cioè quelle per cui  $\xi = \sum_i c_i u_i$ , l'espansione diventa

$$H = \sum_i^L \left( \frac{\dot{c}_i^2}{2} + \frac{\omega_i^2}{2} c_i^2 \right) + o(3) = \Delta E \quad (3.69)$$

Questa è l'energia di scarto rispetto al minimo, perché il minimo è stato sottratto. Se non si considera il resto si ha l'equazione di un ellissoide immerso in uno spazio di dimensione  $2L$ :

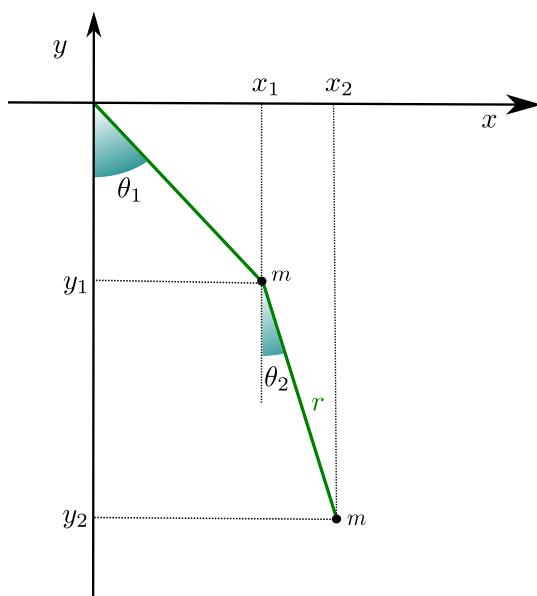
$$\sum_i^L \left( \frac{c_i^2}{2\Delta E/\omega_i^2} + \frac{\dot{c}_i^2}{2\Delta E} \right) = 1 \quad (3.70)$$

## 4 Esercizi

<u>L.6</u>	Pendolo doppio . . . . .	186
<u>L.7</u>	Pallina che rotola sul fondo . . . . .	191
<u>L.8</u>	Pallina su anello rotante . . . . .	194
<u>L.9</u>	Moto geodetico su un solido di rotazione . . . . .	196
<u>L.10</u>	Doppio pendolo legato da molla . . . . .	198

### Tema (L.6): Pendolo doppio

L'idea grafica del problema è:



La condizione del perno è

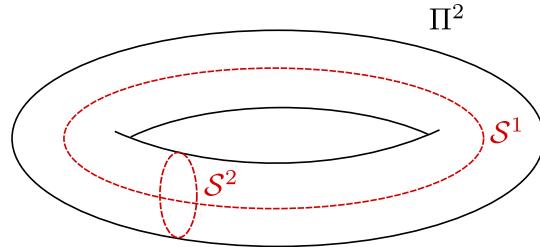
$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \quad (\text{L.6 - 1})$$

Per quanto riguarda il punto alla fine del pendolo esso si può muovere lungo una circonferenza di raggio  $r$  centrata sul perno, quindi:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = r^2 \quad (\text{L.6 - 2})$$

### Parametrizzazione

Ci si aspetta che la varietà vincolare  $\mathcal{M}$  sia una varietà prodotto di due cerchi. Questo vuol dire che  $\mathcal{M} = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 := \Pi^2$ . Per definizione il prodotto di due cerchi è un toro.



Allora le coordinate libere, lagrangiane, sono  $\theta_1$  e  $\theta_2$  e si può quindi scrivere

$$x_1 = r \sin \theta_1 \quad (\mathcal{L}.6 - 3)$$

$$y_1 = -r \cos \theta_1 \quad (\mathcal{L}.6 - 4)$$

$$x_2 = x_1 + r \sin \theta_2 = r(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \quad (\mathcal{L}.6 - 5)$$

$$y_2 = x_2 - r \sin \cos \theta_2 = -r(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (\mathcal{L}.6 - 6)$$

### Forma della lagrangiana

L'energia cinetica  $\mathcal{K}$  si calcola come

$$\mathcal{K} = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \Big|_{\mathcal{M}} = \quad (\mathcal{L}.6 - 7)$$

$$= \frac{mr^2}{2} [\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1^2 + (\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2] = \quad (\mathcal{L}.6 - 8)$$

$$= \frac{mr^2}{2} [\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)] = \quad (\mathcal{L}.6 - 9)$$

$$= \frac{mr^2}{2} [2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] = \quad (\mathcal{L}.6 - 10)$$

$$= mr^2 \underbrace{\frac{1}{2}(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \begin{pmatrix} 2 & \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \cos(\theta_1 - \theta_2) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}}_{A(\theta)} \quad (\mathcal{L}.6 - 11)$$

L'energia potenziale è della forma

$$\mathcal{U}(\theta) = U|_{\mathcal{M}} = mgy_1 + mgy_2|_{\mathcal{M}} = \quad (\mathcal{L}.6 - 12)$$

$$= -mgr \cos \theta_1 - mgr(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) = \quad (\mathcal{L}.6 - 13)$$

$$= -mgr(2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (\mathcal{L}.6 - 14)$$

## 4. Esercizi

---

Allora la lagrangiana è della forma

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \mathcal{K} - \mathcal{U} = \quad (\mathcal{L}.6 - 15)$$

$$= \frac{mr^2}{2} \dot{\theta} \cdot A(\theta) \dot{\theta} + mgr(2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (\mathcal{L}.6 - 16)$$

Le equazioni del moto saranno date da

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = 0 \quad (\mathcal{L}.6 - 17)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = 0 \quad (\mathcal{L}.6 - 18)$$

Si può ridurre la scrittura della lagrangiana nel seguente modo

$$mr^2 \mathcal{L}' = mr^2 \left[ \frac{1}{2} \dot{\theta} \cdot A(\theta) \dot{\theta} + \omega_0^2 (2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2) \right], \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{r}} \quad (\mathcal{L}.6 - 19)$$

L'energia del sistema è

$$H(\theta, \dot{\theta}) = \mathcal{K}' + \mathcal{U}' = \frac{1}{2} \dot{\theta} \cdot A(\theta) \dot{\theta} - \omega_0^2 (2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (\mathcal{L}.6 - 20)$$

### Equilibri

$$\nabla_{\theta} \mathcal{U}'(\theta) = 0 \quad (\mathcal{L}.6 - 21)$$

Che è equivalente al sistema

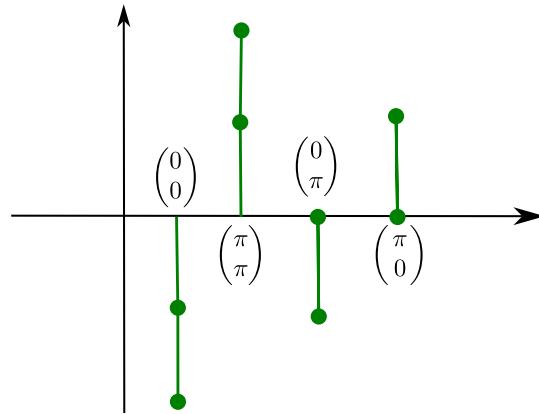
$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{U}'}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{U}'}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\omega_0^2 \sin \theta_1 = 0 \\ \omega_0^2 \sin \theta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = 0, \pm \pi \\ \theta_2 = 0, \pm \pi \end{cases} \quad (\mathcal{L}.6 - 22)$$

Avendo definito la varietà  $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{S}$  non tutti questi valori sono ammessi, bensì

$$\theta_1 \in ]-\pi, \pi], \quad \theta_2 \in ]\pi, \pi] \quad (\mathcal{L}.6 - 23)$$

Ci sono allora 4 equilibri

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_1, \underbrace{\begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix}}_2, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}}_3, \underbrace{\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}}_4 \quad (\mathcal{L}.6 - 24)$$



### Stabilità

Si calcola l'hessiano

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{U}'}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{U}'}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{U}'}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{U}'}{\partial \theta_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad (\mathcal{L}.6 - 25)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(0, 0) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{pmatrix}}_B \quad (\mathcal{L}.6 - 26)$$

Che è definita positiva e quindi è un punto di minimo non degenere e, siccome l'energia è una funzione di Lyapnov, è anche stabile secondo Lyapnov. Gli altri punti invece sono instabili.

Adesso si diagonalizzano simultaneamente la matrice cinetica (di massa) e potenziale nei punti di equilibrio:

$$\bar{A} := A(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \cos(\theta_1 - \theta_2) & 1 \end{pmatrix} \Big|_{\theta_1 = \theta_2 = 0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\mathcal{L}.6 - 27)$$

$$\bar{B} := \frac{\partial^2 \mathcal{U}'}{\partial \theta^2}(0, 0) = \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{pmatrix} \quad (\mathcal{L}.6 - 28)$$

Si può ora calcolare la lagrangiana espansa all'ordine 2 attorno al punto di

## 4. Esercizi

---

equilibrio nello spazio delle fasi

$$\Rightarrow \mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \dot{\theta} \cdot \bar{A} \dot{\theta} - \frac{1}{2} \theta \cdot \bar{B} \theta = \quad (\mathcal{L}.6 - 29)$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (\theta_1, \theta_2) \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \quad (\mathcal{L}.6 - 30)$$

$$= \frac{1}{2} (2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) - \frac{\omega_0^2}{2} (2\theta_1^2 + \theta_2^2) \quad (\mathcal{L}.6 - 31)$$

### Frequenze proprie

Sono date dalla soluzione di

$$\det(\omega^2 \bar{A} - \bar{B}) = 0 \quad (\mathcal{L}.6 - 32)$$

$$\det \left[ \begin{pmatrix} 2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{pmatrix} \right] = \quad (\mathcal{L}.6 - 33)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2(\omega^2 - \omega_0^2) & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 - \omega_0^2 \end{pmatrix} = \quad (\mathcal{L}.6 - 34)$$

$$= 2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \omega^4 = \omega^4 - 4\omega_0^2\omega^2 + 2\omega_0^4 = \quad (\mathcal{L}.6 - 35)$$

$$\omega_{\pm}^2 = 2\omega_0^2 \pm \sqrt{4\omega_0^4 - 2\omega_0^4} = \omega_0^2 (2 \pm \sqrt{2}) \quad (\mathcal{L}.6 - 36)$$

$$(\mathcal{L}.6 - 37)$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{\pm} = \omega_0 \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}} \quad (\mathcal{L}.6 - 38)$$

### Vettori propri

Si cercano adesso i vettori propri  $u^+$  e  $u^-$  che soddisfano

$$(\omega_+^2 \bar{A} - \bar{B}) u^+ = 0 \iff \begin{pmatrix} 2(\omega_+^2 - \omega_0^2) & \omega_+^2 \\ \omega_+^2 & \omega_+^2 - \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^+ \\ u_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{1 \text{ eq}}{\rightarrow} 2\omega_0^2(1 + \sqrt{2})u_1^+ + \omega_0^2(2 + \sqrt{2})u_2^+ = 0 \quad (\mathcal{L}.6 - 39)$$

$$2(1 + \sqrt{2})u_1^+ \sqrt{2}(1 + \sqrt{2})u_2^+ = 0 \quad (\mathcal{L}.6 - 40)$$

$$\boxed{\sqrt{2}u_1^+ + u_2^+ = 0} \quad (\mathcal{L}.6 - 41)$$

Per l'altro vettore si ha

$$(\omega_+^2 \bar{A} - \bar{B}) u^- = 0 \iff \begin{pmatrix} 2(\omega_-^2 - \omega_0^2) & \omega_-^2 \\ \omega_-^2 & \omega_-^2 - \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^- \\ u_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2\varphi_0^2(1 - \sqrt{2})u_1^- + \varphi_0^2(2 - \sqrt{2})u_2^- = 0 \quad (\mathcal{L}.6 - 42)$$

$$\sqrt{2}u_1^- - u_2^- = 0 \quad (\mathcal{L}.6 - 43)$$

Allora come vettori propri, fissando per ogni vettore una componente, si ha

$$u^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad u^- = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (\mathcal{L}.6 - 44)$$

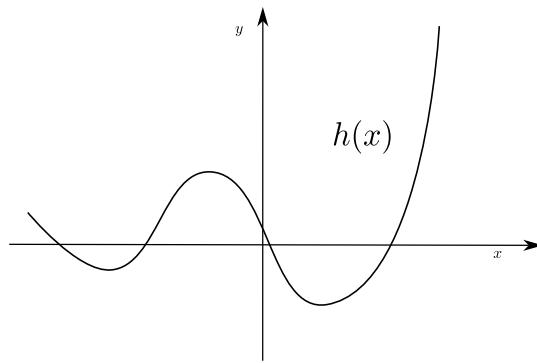
### Esercizio 4.0.1

Ripetere il tema del pendolo doppio imponendo  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

1. Scrivere la lagrangiana
2. Determinare le posizioni di equilibrio
3. Studiare le piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile, in particolare la loro frequenza

### Tema ( $\mathcal{L}.7$ ): Pallina che rotola sul fondo

Lo schema mentale che si fa quando si pensa a un minimo di potenziale è una pallina che rotola in fondo a una buca, in questo esempio si verificherà se l'idea generalizzata è fondata per una dimensione. Quindi si studia una massa  $m$ , pesante, vincolata su una curva piana. La quota è assegnata da una funzione delle coordinate  $x$ ,  $y = h(x)$ .



## 4. Esercizi

---

Innanzitutto l'energia potenziale è data da

$$\mathcal{U} = mgy|_{\mathcal{M}} = mgh(x) \quad (\mathcal{L.7 - 1})$$

Invece l'energia cinetica è data da

$$\mathcal{K} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)|_{\mathcal{M}} = \quad (\mathcal{L.7 - 2})$$

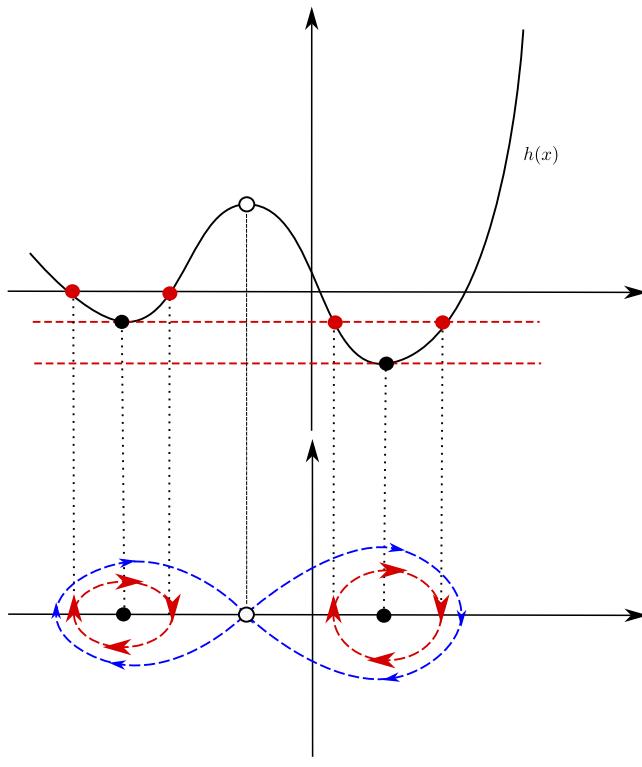
$$= \frac{m}{2} (1 + (h'(x))^2) \dot{x}^2 \quad (\mathcal{L.7 - 3})$$

La lagrangiana e l'energia sono allora

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U} = \frac{m}{2} (1 + (h'(x))^2) \dot{x}^2 - mgh(x) \quad (\mathcal{L.7 - 4})$$

$$H(x, \dot{x}) = \mathcal{K} + \mathcal{U} = \frac{m}{2} (1 + (h'(x))^2) \dot{x}^2 + mgh(x) \quad (\mathcal{L.7 - 5})$$

Vale la conservazione dell'energia  $\mathcal{K} + \mathcal{U} = E \rightarrow \mathcal{K} = E - \mathcal{U}(x) \geq 0$ . In generale si può vedere che a meno del fattore  $h'(x)$  vale che l'approssimazione di una funzione qualsiasi come una pallina che scorre vicino a un minimo è vera, la  $\mathcal{U}$  invece agisce solo come un riscalamento dell'energia.



Studiando le piccole oscillazioni attorno a un punto di minimo locale non degenero bisogna determinare

$$\bar{x} : \mathcal{U}'(\bar{x}) = 0 \iff h'(\bar{x}) = 0 \quad (\mathcal{L}.7 - 6)$$

$$\mathcal{U}''(\bar{x}) = mgh''(\bar{x}) > 0 \quad (\mathcal{L}.7 - 7)$$

La lagrangiana espansa fino all'ordine 2 è allora

$$\mathcal{L}_2 = \frac{m}{2}(1 + (h'(\bar{x}))^2)\dot{\xi}^2 - mg \left( h(\bar{x}) + h'(\bar{x})\xi + \frac{1}{2}h''(\bar{x})\xi^2 \right) \quad (\mathcal{L}.7 - 8)$$

$$\boxed{h'(\bar{x}) = 0} \Leftarrow \text{condizione di minimo} \quad (\mathcal{L}.7 - 9)$$

$$= \frac{m}{2}\dot{\xi}^2 - \frac{mg}{2}h''(\bar{x})\xi^2 \xrightarrow{\text{è un riscalamento}} = \quad (\mathcal{L}.7 - 10)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \xi} \iff m\ddot{\xi} = -mgh''(\bar{x})\xi \Rightarrow \omega := \sqrt{gh''(\bar{x})}} \quad (\mathcal{L}.7 - 11)$$

La forma della lunghezza di un tratto della curva  $h(x)$  è dato da

$$s(x) = \int_{\bar{x}}^x \sqrt{1 + (h'(x))^2} dx \quad (\mathcal{L}.7 - 12)$$

$$\dot{s}(x(t)) = \sqrt{1 + (h'(x))^2} \dot{x} \quad (\mathcal{L}.7 - 13)$$

È possibile esprimere la lagrangiana come funzione di  $s$  e  $\dot{s}$  ovvero

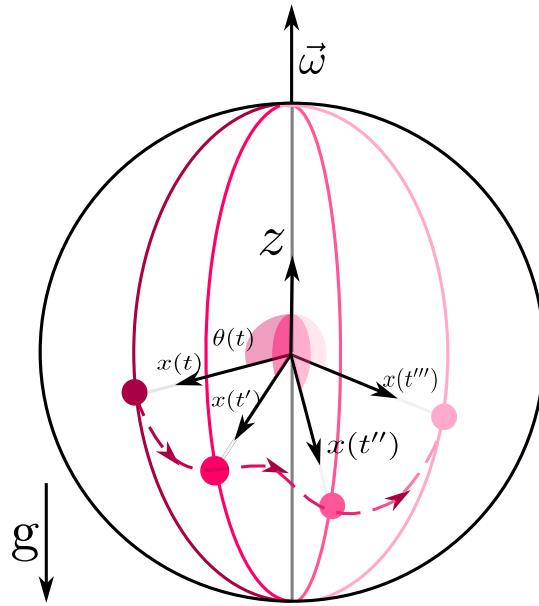
$$\mathcal{L}(s, \dot{s}) = \frac{m\dot{s}^2}{2} - mg \underbrace{h(x(s))}_{\tilde{h}(s)} \stackrel{\text{invertendo}}{=} \quad (\mathcal{L}.7 - 14)$$

$$= \frac{m\dot{s}^2}{2} - mg\tilde{h}(s) \quad (\mathcal{L}.7 - 15)$$

In questo modo si è ottenuto un'espressione facile per l'energia cinetica ma difficile per il potenziale sfruttando l'invarianza della lagrangiana per qualsiasi cambio di coordinate.

### Tema ( $\mathcal{L}.8$ ): Pallina su anello rotante

Il sistema è costituito da una massa vincolata a muoversi su un cerchio rotante.



L'equazione della varietà vincolare si può trovare in diversi modi, eccone tre

1. Si nota innanzitutto che l'asse  $\hat{z}$  rimane lo stesso quando l'anello ruota.  
Le posizioni allora sono

$$x(t) = X(t) \cos \omega t \quad (\mathcal{L}.8 - 1)$$

$$y(t) = X(t) \sin \omega t \quad (\mathcal{L}.8 - 2)$$

Dove  $X(t)$  è la posizione dell'asse X solidale all'anello ad ogni tempo t che sarà legato alla forma dell'anello come  $X(t) = R \sin \theta(t)$ . Quindi

$$\begin{cases} x(t) = R \sin \theta(t) \cos \omega t \\ y(t) = R \sin \theta(t) \sin \omega t \\ z(t) = R \cos \theta(t) \end{cases} \quad (\mathcal{L}.8 - 3)$$

2. Si deduce che tale trasformazione di coordinate fare una rotazione del tipo

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} \quad (\mathcal{L}.8 - 4)$$

3. Si può immaginare, grazie alla simmetria sferica del problema, che il punto sia descrivibile con coordinate sferiche di angolo polare  $\varphi(t) = \omega t$ .

Allora si ha che

$$\dot{x} = R\dot{\theta} \cos \theta \cos \omega t - R\omega \sin \theta \sin \omega t \quad (\mathcal{L}.8 - 5)$$

$$\dot{y} = R\dot{\theta} \cos \theta \sin \omega t + R\omega \sin \theta \cos \omega t \quad (\mathcal{L}.8 - 6)$$

$$\dot{z} = R\dot{\theta} \sin \theta \quad (\mathcal{L}.8 - 7)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \quad (\mathcal{L}.8 - 8)$$

$$= R^2\dot{\theta}^2 + R^2\omega^2 \sin^2 \theta \quad (\mathcal{L}.8 - 9)$$

Un approccio geometrico sigeriva invece che i due spostamenti possibili sono lungo il meridiano e lungo il parallelo cioè

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + (R \sin \theta)^2 d\varphi^2 = \quad (\mathcal{L}.8 - 10)$$

$$= R^2 d\theta^2 + (R \sin \theta)^2 \omega^2 dt^2 \quad (\mathcal{L}.8 - 11)$$

Segue subito la scrittura della lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\omega^2 \sin^2 \theta) - (-mgR \cos \theta) = \quad (\mathcal{L}.8 - 12)$$

$$= mR^2 \left[ \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} \sin^2 \theta + \underbrace{\frac{g}{R}}_{\omega_0^2} \cos \theta \right] \quad (\mathcal{L}.8 - 13)$$

Eliminando il termine fuori dalla parentesi perchè è un riscalamento si ottiene la lagrangiana

$$\mathcal{L}' = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \underbrace{\mathcal{U}_e(\theta)}_{-\frac{\omega^2}{2} \sin^2 \theta - \omega_0^2 \cos \theta} \quad (\mathcal{L}.8 - 14)$$

Usando le equazioni di lagrange si ottiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \theta} \iff \ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta + \omega^2 \sin \theta \cos \theta \quad (\mathcal{L}.8 - 15)$$

Il  $\cos \theta$  nella forza centrifuga è già la componente tangenziale della forza centrifuga che è conseguenza della parametrizzazione iniziale.

### Equilibri

$$\mathcal{U}'_e(\theta) = 0 \quad (\mathcal{L}.8 - 16)$$

$$\iff \omega_0^2 \sin \theta - \omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (\mathcal{L}.8 - 17)$$

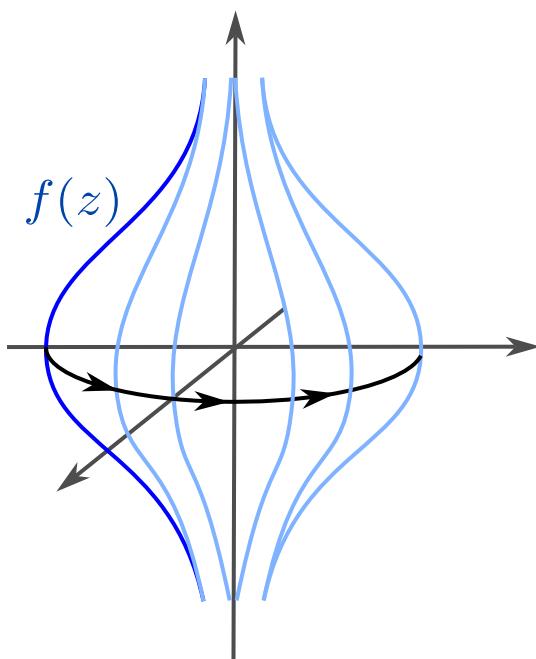
$$\sin \theta (\omega_0^2 - \omega^2 \cos \theta) = 0 \quad (\mathcal{L}.8 - 18)$$

Ovvero quota minima  $\theta = 0$  e quota massima  $\theta = \pi$  e quando  $\cos \theta = \omega_0^2 / \omega^2$  vuol dire che la frequenza di rotazione si confronta con la frequenza delle piccole oscillazioni del pendolo:

### Stabilità

### Tema ( $\mathcal{L}.9$ ): Moto geodetico su un solido di rotazione

Definendo la terna di assi  $x, y, z$  si considera una funzione simmetrica  $x = f(z)$  della forma



Un esempio della funzione in esame potrebbe essere  $f(z) = c \cdot e^{-z^2}$  oppure  $\frac{c}{1+z^2}$  purchè la funzione vada a 0 per  $|z| \rightarrow +\infty$  e il massimo sia centrato in 0.

## Parametrizzazione

Il problema gode di simmetria cilindrica il cui raggio è  $f(z)$  ed è tale che  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  e l'angolo di rotazione rispetto all'asse  $x$ . In particolare le coordinate sono funzioni  $r, \theta, z$ ,

$$\begin{cases} x = f(z) \cos \theta \\ y = f(z) \sin \theta \end{cases} \quad (\mathcal{L}.9 - 1)$$

## Forma della lagrangiana

Innanzitutto si trova l'energia cinetica

$$\mathcal{K} = \frac{m}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \quad (\mathcal{L}.9 - 2)$$

$$ds^2|_{\mathcal{M}} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2|_{\mathcal{M}} = \quad (\mathcal{L}.9 - 3)$$

$$= (f'(z)dz)^2 + f^2(z)d\theta^2 + dz^2 = \quad (\mathcal{L}.9 - 4)$$

$$= (1 + f'^2(z))dz^2 + f^2(z)d\theta^2 \quad (\mathcal{L}.9 - 5)$$

Adesso si può scrivere la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} = \frac{m}{2} \left[ (1 + f'(z)) \dot{z}^2 + f^2(z) \dot{\theta}^2 \right] \quad (\mathcal{L}.9 - 6)$$

Si vede subito che  $\theta$  è ciclica  $\Rightarrow p_\theta := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m f^2(z) \dot{\theta} = \ell_z \text{ cost}$

## Energia

Sostituendo  $\dot{\theta} = \frac{\ell_z}{m f^2(z)}$  in  $H = \mathcal{K}$  si ha

$$H = \frac{m}{2} (1 + f'^2(z)) \dot{z}^2 + \frac{\ell_z^2}{2m f^2(z)} = E \quad (\mathcal{L}.9 - 7)$$

$$\Rightarrow E - \frac{\ell_z^2}{2m f^2(z)} \geq 0 \quad (\mathcal{L}.9 - 8)$$

Dato un valore di energia si ha che il raggio, cioè  $f(z)$

$$f(z) = \sqrt{\frac{\ell_z^2}{2mE}} \rightarrow r_{min} = \frac{|\ell_z|}{\sqrt{2mE}} \quad (\mathcal{L}.9 - 9)$$

### Tema ( $\mathcal{L}.10$ ): Doppio pendolo legato da molla

Siano due pendoli di lunghezza  $r$  con masse appese uguali unite da una molla. La posizione di equilibrio è la configurazione in cui i due pendoli sono verticali, ovvero la distanza a riposo della molla è  $d$ . Quindi l'energia cinetica avrà una forma meno banale di quella che scrivere la forza elastica di una molla con lunghezza a riposo nulla.

In generale varrà che  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{int}$  dove la lagrangiana di interazione è il contributo della molla.

#### Parametrizzazione

Per il pendolo 1

$$\mathcal{M}_1 = \begin{cases} x_1 = l \sin \theta_1 \\ y_1 = -l \cos \theta_1 \end{cases} \quad (\mathcal{L}.10 - 1)$$

Per il pendolo 2

$$\mathcal{M}_2 = \begin{cases} x_2 = d + l \sin \theta_2 \\ y_2 = -l \cos \theta_2 \end{cases} \quad (\mathcal{L}.10 - 2)$$

#### Energia potenziale di interazione

$$U_{int} = U(|x_1 - x_2|) \quad (\mathcal{L}.10 - 3)$$

Dove si richiede che sia una funzione della sola distanza tra i due corpi e che per la distanza  $d$  sia nulla.

$$U(r) : U'(d) = 0; U''(d) > 0 \quad (\mathcal{L}.10 - 4)$$

Dove l'ultima richiesta è per avere una costante elastica positiva e quindi la forza è attrattiva e non repulsiva. Attorno all'equilibrio  $r = d$  si può espandere

$$U(r) = U(d) + U'(d)(r - d) + \frac{1}{2}U''(d)(r - d)^2 + \dots \quad (\mathcal{L}.10 - 5)$$

Pezzo per pezzo si completa, prima si definisce  $U''(d) := k$ , poi

$$\begin{aligned} r^2 &= |x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \\ &= (d + l(\sin \theta_2 - \sin \theta_1))^2 + l^2(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)^2 = \\ &= d^2 + l^2(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)^2 + 2dl(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) + l^2(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)^2 = \\ &= d^2 + 2l^2 - 2l^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + 2dl(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \end{aligned}$$

Adesso si assume  $\theta_1$  e  $\theta_2$  piccoli (attorno allo zero) così si può espandere come

$$r^2 = d^2 + 2l^2 - 2l^2 \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{2}\right) + 2dl\Delta\theta + o(\Delta\theta)^3 = \quad (\mathcal{L}.10 - 6)$$

$$= d^2 + l^2\Delta\theta^2 + 2dl\Delta\theta + o(\Delta\theta^3) = \quad (\mathcal{L}.10 - 7)$$

$$= (d + l\Delta\theta)^2 + o(\Delta\theta^3) \quad (\mathcal{L}.10 - 8)$$

$$\Rightarrow \boxed{r = d + l\Delta\theta + o(\Delta\theta^{3/2})} \quad (\mathcal{L}.10 - 9)$$

E segue anche che  $r - d = d\Delta\theta + o(\Delta\theta)$

$$U_{int} = \text{cost} + \frac{kl^2}{2}\Delta\theta^2 + \dots \quad (\mathcal{L}.10 - 10)$$

### Forma della lagrangiana

I due pendoli, per piccole oscillazioni, hanno lagrangiana all'ordine due della forma

$$\mathcal{L}_1 = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}_1^2 + mgl \cos \theta_1 \approx \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}_1^2 - \frac{mgl}{2}\theta_1^2 \quad (\mathcal{L}.10 - 11)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}_2^2 + mgl \cos \theta_2 \approx \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}_2^2 - \frac{mgl}{2}\theta_2^2 \quad (\mathcal{L}.10 - 12)$$

La lagrangiana totale è

$$\mathcal{L}_{p.o.} = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{mgl}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{kl^2}{2}(\theta_2 - \theta_1)^2 \quad (\mathcal{L}.10 - 13)$$

L'accoppiamento degli angoli tramite il potenziale di interazione suggerisce la definizione dell'angolo differenza e somma, opportunamente definiti anche per rimuovere alcune costanti

$$\mathcal{L}_{po} = ml^2\mathcal{L}'_{po} \quad (\mathcal{L}.10 - 14)$$

$$\mathcal{L}'_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{\omega_0^2}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{\omega_e^2}{2}(\theta_2 - \theta_1)^2 \quad (\mathcal{L}.10 - 15)$$

$$\boxed{\theta_+ = \frac{\theta_2 + \theta_1}{\sqrt{2}}} \quad \boxed{\theta_- = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\sqrt{2}}} \quad (\mathcal{L}.10 - 16)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}'_{po}(\dot{\theta}_+^2 + \dot{\theta}_-^2) - \frac{\omega_0^2}{2}(\theta_+^2 + \theta_-^2) - \omega_e^2\theta_-^2 \quad (\mathcal{L}.10 - 17)$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{\theta}_+^2 - \omega_0^2\theta_+^2) + \frac{1}{2}(\dot{\theta}_-^2 - (\omega_0^2 + 2\omega_e^2)\theta_-^2) \quad (\mathcal{L}.10 - 18)$$

### Equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'_{po}}{\partial \dot{\theta}_+} = \frac{\partial \mathcal{L}'_{po}}{\partial \theta_+} \iff \ddot{\theta}_+ = -\omega_0^2 \theta_+ \quad (\mathcal{L}.10 - 19)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'_{po}}{\partial \dot{\theta}_-} = \frac{\partial \mathcal{L}'_{po}}{\partial \theta_-} \iff \ddot{\theta}_- = -(\omega_0^2 + 2\omega_e^2) \theta_- \quad (\mathcal{L}.10 - 20)$$

Quindi sono due equazioni di un oscillatore armonico. In forma vettoriale i due vettori sono della forma

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\theta_+ + \theta_-}{\sqrt{2}} \\ \frac{\theta_+ - \theta_-}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \theta_+ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \theta_- \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (\mathcal{L}.10 - 21)$$

Per dati iniziali tali che  $\theta_-(t) \equiv 0$

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}(t) = \theta_+ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (\mathcal{L}.10 - 22)$$

Cioè il modo normale di oscillazione a frequenza  $\omega_0$  e implica che il moto è sincrono e in fase cioè  $\theta_1(t) = \theta_2(t) = \theta_+(t)/\sqrt{2} \forall t$ .

Se invece  $\theta_+ \equiv 0 \forall t$  si ha che

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \theta_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (\mathcal{L}.10 - 23)$$

Cioè  $\theta_2(t) = -\theta_1(t) = \theta_-/\sqrt{2}$ , ovvero i moti sono in opposizione di fase con frequenza di normale  $\sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_e^2}$ .

In generale i due moti sono sovrapposti, tuttavia le situazioni limite interessanti sono quando l'interazione è molto debole  $\omega_e \ll \omega_0$  oppure molto forte quindi la molla si comporta come un asta.