

■ **MECCANICA AL FISSATO**

▲ **Operazioni in *L*²(Δ)**

· **Prodotto scalare**

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int_{\Delta} \varphi^*(x) \psi(x) \, dx = \overline{\langle \psi | \varphi \rangle} \qquad (1)$$

· **Normalizzazione**

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = \int_{\Delta} \overline{\psi(x)} \psi(x) \, dx = \int_{\Delta} |\psi(x)|^2 \, dx = ||\psi||^2 \qquad (2)$$

· **Autoaggiuntezza di un operatore**

$$\langle A \psi | \varphi \rangle = \langle \psi | A^{\dagger} \varphi \rangle = \langle \psi | A \varphi \rangle \qquad (3)$$

· **Norma di un operatore**

$$||A|| = \sup_{\psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}} \frac{||A\psi||}{||\psi||} = \sup_{||\psi||=1} ||A\psi|| \qquad (4)$$

· **Operatore che è funzione di un altro operatore**

$$f(A) \psi = f(a) \psi \qquad (5)$$

Vale se A è autoaggiunto

▲ **Probabilità e statistica**

· **Probabilità di una misura** La probabilità che una misura dell'osservabile A nello stato |ψ> sia a ∈ σ_d(A) è :

$$\mathrm{P}_{\psi}(a) = \sum_{r=1}^{d(a)} \frac{|\langle a,r|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2} \qquad (6)$$

Mentre che sia ∈ [a, a + ε] ⊆ σ_c(A) è:

$$\int_a^{a+\epsilon} \rho_{\psi} \, da \qquad \text{dove} \qquad \rho_{\psi} = \sum_{r=1}^{d(a)} \frac{|\langle a,r|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2} \qquad (7)$$

· **Probabilità di trovare la particella nell'intervallo *I* ⊆ Δ**

$$\mathrm{Pr}(I) = \frac{\int_I |\psi(x)|^2 \, dx}{||\psi||^2} \qquad \text{dove} \qquad ||\psi||^2 = \int_{\Delta} |\psi|^2 dx \qquad (8)$$

Vale anche per qualsiasi altra rappresentazione di ψ integrando nel corrispondente differenziale (ad esempio probabilità che la particella assuma un intervallo di momenti)

· **Teorema di Plancherel**

$$\int_{\mathbb{R}} |\tilde{\psi}(p)|^2 dp = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx \qquad (9)$$

· **Valor medio di un operatore nello stato |ψ>**

$$\langle A \rangle_{\psi} = \frac{\langle \psi | A | \psi \rangle}{||\psi||^2} = \sum_{a \in \sigma_d(A)} a \cdot \mathrm{P}_{\psi}(a) + \int_{\sigma_c(A)} a \cdot \rho_{\psi} \, da \qquad (10)$$

· **Fluttuazione di un operatore**

$$(\Delta A)_{a,\psi} = \sqrt{\langle A^2 \rangle_{\psi} - \langle A \rangle_{\psi}^2} \qquad (11)$$

▲ **Operatore posizione X**

$$X \psi(x) = x \psi(x) \qquad X^2 \psi(x) = x^2 \psi(x) \qquad X^{-1} \psi(x) = \frac{1}{x} \psi(x) \qquad (12)$$

▲ **Operatore momento P**

$$P = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \qquad P^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad (13)$$

Se definito in un compatto [0, L], le autofunzioni sono

$$\psi(x) = C \exp\left(\frac{i\lambda x}{\hbar}\right), \quad \lambda \in \mathbb{Z} \qquad (14)$$

ove si impone

$$\psi(0) = \psi(L) \qquad (15)$$

In particolare, se definito su una circonferenza, allora

$$\lambda = \frac{n\hbar}{R} \qquad (16)$$

dove R è il raggio e n ∈ ℤ

▲ **equazione di Schrödinger in forma stazionaria**

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right] \psi(x) = E \psi(x) \qquad (17)$$

▲ **Dalla rappresentazione {*x*} a {*p*}** Se si è in una dimensione

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \psi(x) \, dx \qquad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \tilde{\psi}(p) \, dp \qquad (18)$$

Se si è in tre dimensioni invece tra *p* e *x* nell'exp va fatto il prodotto scalare, i differenziali sono in tre dimensioni e

1

2
π
ℏ

diventa

1

(
2
π
ℏ

)

3
/
2

▲ **Indeterminazione di Heisenberg**

· **Espressione generale**

$$(\Delta A)_{\psi} (\Delta B)_{\psi} \geq \frac{1}{2} | \langle [A,B] \rangle_{\psi} | \qquad (19)$$

· **Per la posizione e il momento**

$$(\Delta X)_{\psi} (\Delta P)_{\psi} \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (20)$$

▲ **Proiettori**

$$\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \qquad \mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \qquad (21)$$

Gli autovalori di un proiettore sono 0 e 1

· **Utilizzo dei proiettori nel caso di spettro discreto** Nel caso di a ∈ σ_d(A) allora:

$$\mathcal{P}_a = \sum_{r=1}^{d(a)} |a,r\rangle \langle a,r| \qquad (22)$$

$$\sum_{a \in \sigma_d(A)} \mathcal{P}_a = \sum_{a \in \sigma_d(A)} \sum_{r=1}^{d(a)} |a,r\rangle \langle a,r| = \mathbb{I} \qquad (23)$$

$$\langle \mathcal{P}_a \rangle_{\psi} = \sum_{r=1}^{d(a)} \frac{|\langle a,r|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2} = \frac{||\mathcal{P}_a|\psi\rangle||^2}{||\psi||^2} = \mathrm{P}_{\psi}(a) \qquad (24)$$

· **Utilizzo dei proiettori nel caso di spettro generico**

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \oplus \mathcal{H}_s^{\perp} \qquad (25)$$

$$S \subseteq \mathbb{R} \qquad (26)$$

$$\mathcal{P}_s = \sum_{a \in \sigma_d(A) \cap S} \sum_{r=1}^{d(a)} |a,r\rangle \langle a,r| + \int_{\sigma_c(A) \cap S} \sum_{r=1}^{d(a)} |a,r\rangle \langle a,r| \, da \qquad (27)$$

⟨*P_s*⟩_ψ è la Probabilità che una misura di A nello stato ψ dia a ∈ *S*

▲ **Teoria della misura** Lo stato prima della misura può essere descritto come

$$|\psi\rangle = \mathcal{P}_a |\psi\rangle + (\mathbb{I} - \mathcal{P}_a) |\psi\rangle \qquad (28)$$

Dopo la misura lo stato diventa

$$|\psi\rangle = \mathcal{P}_a |\psi\rangle \qquad (29)$$

· **Osservabili compatibili** Siano A e B due operatori limitati e i relativi osservabili con spettro discreto. Allora valgono e sono equivalenti le seguenti affermazioni:

$$\mathcal{A} \text{ e } \mathcal{B} \text{ sono compatibili} \qquad (30)$$

$$\exists \text{ una base o.n. } \{ |a,b,r\rangle \} \qquad \begin{matrix} a \in \sigma(A) \\ b \in \sigma(B) \\ r=1,\dots,d(a,b) \end{matrix} \qquad (31)$$

Vale dunque *A* |*a*, *b*, *r*> = *a* |*a*, *b*, *r*> e *B* |*a*, *b*, *r*> = *b* |*a*, *b*, *r*>

$$[A,B] = 0 \qquad (32)$$

Inoltre vale:

$$[A,B] = 0 \implies [\mathcal{P}_a, \mathcal{P}_b] = 0 \, \forall a,b \iff [f(A), g(B)] = 0 \qquad (33)$$

· **ICOC** Si tratta di un insieme completo di osservabili compatibili, si può indicare con

A
¯
.

$$\vec{A} \text{ ICOC} \iff d(\vec{a}) = 1 \, \forall \vec{a} \in \sigma_{\vec{A}} \qquad (34)$$

La base o.n. di un ICOC sarà { |

a
¯
⟩ }

▲ **Quantizzazione canonica**

$$\{ \, \} = \frac{1}{i\hbar} \, [\, , \,] \qquad (35)$$

■ **Evoluzione temporale causale**

▲ **Equazione di Schrödinger in forma temporale**

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = H \psi(t) \qquad (36)$$

Dove *i*ℏ

∂

∂
t

{\displaystyle {\frac{\partial }{\partial t}}}

 è l'espressione dell'operatore Energia. Una combinazione lineare di soluzioni è ancora una soluzione. Per ogni dato iniziale |ψ(0)> si avrà un'unica soluzione ∀*t*. Infine ||ψ(*t*)|| si conserva nel tempo. Inoltre ψ* è soluzione dell'equazione

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(t) = H \psi^*(t) \qquad (37)$$

▲ **Equazione di continuità**

$$\frac{d}{dt} \rho(\vec{x},t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x},t) = 0 \qquad (38)$$

dove

$$\rho(\vec{x},t) = |\psi(\vec{x},t)|^2 \qquad (39)$$

è la densità di probabilità, mentre

$$\vec{J}(\vec{x},t) = -\frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right) \qquad (40)$$

è la densità di corrente di probabilità.

▲ **Operatore di evoluzione causale**

$$U^{-1}(t,t_0) = U^{+}(t,t_0) = U(t_0,t) \qquad (41)$$

In un sistema conservativo, in cui cioè l'hamiltoniana resta invariata nel tempo, si ha

$$U(t) = \exp\left(-i\frac{t}{\hbar} H\right) \qquad (42)$$

▲ **Visuale di Schroedinger**

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(t_0)\rangle \qquad (43)$$

Sia |*E_n*, *r*> l'autoket dell'autovalore *E_n*, allora, per quanto riguarda la parte di spettro discreto

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \sum_{r=1}^{d(E_n)} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n(t-t_0)\right) \langle E_n,r|\psi(t_0)\rangle \, |E_n,r\rangle \qquad (44)$$

Se poi c'è anche una parte continua di spettro si aggiunge

$$\int_{\sigma_c(H)} dE \sum_{r=1}^{d(E)} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E(t-t_0)\right) \langle E,r|\psi(t_0)\rangle \, |E,r\rangle \qquad (45)$$

· **Stati stazionari** Un autostato dell'hamiltoniana, |ψ_{*E*}> viene chiamato stato stazionario ed evolve in questo modo:

$$|\psi_E(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E(t-t_0)\right) |\psi_E(t_0)\rangle \qquad (46)$$

il valor medio di un operatore calcolato su uno stato stazionario non varia nel tempo:

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_{\psi_E} = 0 \, \forall A \qquad (47)$$

· **Operatori** In visuale di Schroedinger gli operatori rimangono invariati:

$$A \rightarrow A \qquad (48)$$

▲ **Visuale di Heisenberg**

· **Equazione di Born-Heisenberg-Jordan**

$$\frac{d}{dt} X_h(t) = \frac{[X_h(t),H]}{i\hbar} + \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_h(t) \qquad (49)$$

dove l'ultimo termine è presente solo se A dipende esplicitamente dal tempo

· **Trasformazione unitaria** In visuale di Heisenberg, la trasformazione unitaria *U*(*t*,*t*₀) trasforma l'operatore *A_s* (operatore A in visuale di Schroedinger) come:

$$A \rightarrow A_h = U^{\dagger}(t,t_0) A_s U(t,t_0) \qquad (50)$$

mentre gli stati rimangono invariati:

$$\psi \rightarrow \psi \qquad (51)$$

In particolare |ψ> in visuale di Heisenberg sarà uguale al ket in visuale di Schroedinger all'istante iniziale:

$$|\psi_h(t)\rangle = |\psi_h(t_0)\rangle = |\psi_s(t_0)\rangle \qquad (52)$$

· **Valori medi di operatori** In visuale di Heisenberg e di Schroedinger i valori medi degli operatori coincidono:

$$\langle A_s \rangle = \langle A_h \rangle \qquad (53)$$

Inoltre

$$\frac{d}{dt} \langle A_h \rangle_{\psi}(t) = \frac{\langle \psi_h | \frac{d}{dt} A_h | \psi_h \rangle}{||\psi_h||^2} \qquad (54)$$

$$\frac{d}{dt} A_h = 0 \implies \frac{d}{dt} \langle A_h \rangle = 0 \qquad (55)$$

▲ **Teorema di Ehrenfest**

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle_{\psi} = \frac{\langle P \rangle_{\psi}}{m} \qquad \frac{d}{dt} \langle P \rangle_{\psi} = -\langle V'(Q) \rangle_{\psi} \qquad (56)$$

▲ **Indeterminazione tempo energia**

$$(\Delta t)_{\psi} (\Delta E)_{\psi} \gtrsim \frac{\hbar}{2} \qquad (57)$$

▲ **Operatori densità** Per uno stato puro si ha

$$\rho_{\psi} = \frac{|\psi\rangle \langle \psi|}{||\psi||^2} \qquad (58)$$

$$\rho_{nm} = \langle n|\rho|m\rangle = \langle n|\psi\rangle \langle \psi|m\rangle = C_n C_m^* \qquad (59)$$

ρ, per uno stato puro, è un proiettore per cui valgono le proprietà dei proiettori. Inoltre per uno stato puro valgono

$$\sigma(\rho) \geq 0 \qquad \mathrm{Tr}(\rho^2) = 1 \qquad (60)$$

Dove Tr è la traccia

$$\langle A \rangle_{\psi} = \mathrm{Tr}(\rho A) \qquad (61)$$

Per uno stato misto ε si ha

$$\rho_{\epsilon} = \sum_k P_k \, |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \qquad (62)$$

Dove le *P_k* sono le probabilità associate agli stati puri *ψ_k*, per cui la loro somma deve essere uguale a 1. Inoltre si ha

$$\langle A \rangle_{\epsilon} = \sum_k P_k \langle A_k \rangle = \mathrm{Tr}(\rho_{\epsilon} A) \qquad (63)$$

Infine per uno stato misto si ha

$$\mathrm{Tr}(\rho^2) < 1 \qquad (64)$$

Per quanto riguarda l'evoluzione casuale si ha:

$$\langle A \rangle(t) = \mathrm{Tr}(U \rho(t_0) U^{\dagger} A) = \mathrm{Tr}(\rho(t_0) U^{\dagger} A U) = \mathrm{Tr}(\rho(t_0) A_h) \qquad (65)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_s(t) = [H_s(t), \rho_s(t)] \qquad (66)$$

■ **Simmetrie**

· **Teorema di Wigner**

$$\tau \text{ è una trasformazione di simmetria} \iff \begin{cases} \psi' = W \psi \\ A' = W A W^{\dagger} \end{cases} \qquad (67)$$

Con U operatore unitario o antiunitario

▲ **Traslazioni spaziali**

· **Operatore di traslazione**

$$U(\varphi) = \exp\left(-i\frac{\varphi}{\hbar} P\right) \qquad (68)$$

dove φ è il parametro di traslazione e P è il generatore infinitesimo di traslazione

· **Effetto sull'operatore di posizione e sul momento**

$$X = U(\varphi) X U(\varphi)^{\dagger} = X - \varphi \qquad U(\varphi) P = P \qquad (69)$$

· **Effetto sulla funzione d'onda**

$$U(\varphi) \psi(x) = \psi(x - \varphi) \qquad (70)$$

· **Traslazioni in 3D** Le relazioni sono analoghe a quelle in 1D, semplicemente vanno espresse vettorialmente. Inoltre

$$U(\vec{\varphi}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \vec{P} \cdot \vec{\varphi}\right) \qquad (71)$$

▲ **Rotazioni**

· **Operatore di rotazione**

$$U(\vec{\varphi}) = \exp\left(-i\frac{\vec{\varphi} \cdot \vec{J}}{\hbar}\right) \qquad (72)$$

J
¯
 è dunque il generatore infinitesimo di rotazione

· **Matrice di rotazione attorno all'asse *z***

$$R(\varphi, \hat{z}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (73)$$

· **Effetto sulle coordinate e momento**

$$X' = U^{\dagger} X U = R^{-1}(\vec{\varphi}) X \qquad P' = U^{\dagger} P U = R^{-1}(\vec{\varphi}) P \qquad (74)$$

▲ **Simmetrie della dinamica** Sono quelle simmetrie tali per cui

$$[W,H] = 0 \iff W H W^{\dagger} = H \iff [W,U(t-t_0)] = 0 \qquad (75)$$

dove *U*(*t* − *t*₀) in questo caso è l'operatore di evoluzione causale definito

· **Gruppo a un parametro di simmetrie della dinamica** Definito

$$W(\varphi) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Q \varphi\right) \qquad (76)$$

con *W*(*s*) ∈ *G_d* (gruppo di simmetrie della dinamica) e Q generatore infinitesimo della simmetria, si ha

$$[W(s),H] = 0 \iff [Q,H] = 0 \iff \frac{d}{dt} \langle Q \rangle_{\psi}(t) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H} \qquad (77)$$

E ciò se e solo se Q è una costante del moto

· **Esempio con Hamiltoniana in una dimensione** Ad esempio per un oscillatore armonico in direzione x, come nel caso della (110), siccome *P_y* e *P_z* commutano con H, i loro valori medi non varieranno nel tempo. Il valor medio di *P_x* invece non varierà nel tempo, in generale, solo se calcolato su uno stato stazionario di H (si veda la (47)).

· **Simmetrie della dinamica e autostati dell'energia** W mescola autostati di H con la stessa energia, per cui essa è una matrice a blocchi. Si ha

$$[W,H] = 0 \iff \forall |E\rangle \in \mathcal{H}_E, \, W |E\rangle \in \mathcal{H}_E \qquad (78)$$

dove

H

E

{\displaystyle {\mathcal {H}}_E}

 è l'autospazio dell'hamiltoniano relativo all'autovalore E, e inoltre *H* |*E*> = *E* |*E*>

▲ **Operatore parità**

· **azione dell'operatore parità sulla funzione d'onda**

