MECCANICA AL FISSATO

Operazioni in $L^2(\Delta)$

- **Prodotto scalare**

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \int_\Delta \varphi^*(x)\psi(x)\,dx = \overline{\langle\psi|\varphi\rangle} \tag{1}$$

- **Normalizzazione**

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = \int_\Delta \overline{\psi(x)}\psi(x)\,dx = \int_\Delta |\psi(x)|^2\,dx = ||\psi||^2 \tag{2}$$

- **Autoaggiuntezza di un operatore**

$$\langle A\psi|\varphi\rangle = \langle\psi|A^\dagger\varphi\rangle = \langle\psi|A\varphi\rangle \quad A^\dagger = (A^*)^T \quad (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \tag{3}$$

- **Norma di un operatore**

$$\|A\| = \sup_{\psi\in\mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{\|A\psi\|}{\|\psi\|} = \sup_{\|\psi\|=1} \|A\psi\| \tag{4}$$

- **Operatore che è funzione di un altro operatore**

$$f(A)\psi = f(a)\psi \tag{5}$$

Vale se A è autoaggiunto e ψ autofunzione

Probabilità e statistica

- **Probabilità di una misura** La probabilità che una misura dell'osservabile A nello stato $|\psi\rangle$ sia a $\in\ \sigma_d(A)$ è :

$$\mathrm{P}_\psi(a) = \sum_{r=1}^{d(a)} \frac{|\langle a,r|\psi\rangle|^2}{\|\psi\|^2} \tag{6}$$

Mentre che sia $\in [a,\ a+\epsilon] \subseteq \sigma_c(A)$ è:

$$\int_a^{a+\epsilon} \rho_\psi\ \mathrm{d}a \qquad \text{dove} \qquad \rho_\psi = \sum_{r=1}^{d(a)} \frac{|\langle a,r|\psi\rangle|^2}{\|\psi\|^2} \tag{7}$$

- **Probabilità di trovare la particella nell'intervallo $I \subseteq \Delta$**

$$\Pr(I) = \frac{\int_I |\psi(x)|^2\,dx}{||\psi||^2} \qquad \text{dove} \qquad ||\psi||^2 = \int_\Delta |\psi|^2 dx \tag{8}$$

Vale anche per qualsiasi altra rappresentazione di ψ integrando nel corrispondente differenziale (ad esempio probabilità che la particella assuma un intervallo di momenti)

- **Teorema di Plancherel**

$$\int_\mathbb{R} |\tilde{\psi}(p)|^2 dp\ = \int_\mathbb{R} |\psi(x)|^2 dx \tag{9}$$

- **Valor medio di un operatore nello stato $|\psi\rangle$**

$$\langle A\rangle_\psi = \frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{||\psi||^2} = \sum_{a\ \in\ \sigma_d(A)} a\cdot \mathrm{P}_\psi(a) + \int_{\sigma_c(A)} a\cdot\rho_\psi\ \mathrm{d}a \tag{10}$$

- **Fluttuazione di un operatore**

$$(\Delta A)_{\hat{a},\psi} = \sqrt{\langle A^2\rangle_\psi - \langle A\rangle_\psi^2} \tag{11}$$

Operatore posizione X

$$X\psi(x) = x\psi(x) \quad X^2\psi(x) = x^2\psi(x) \quad X^{-1}\psi(x) = \frac{1}{x}\psi(x) \tag{12}$$

Operatore momento P

$$P = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \quad P^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{13}$$

Se definito in un compatto $[0,L]$, le autofunzioni sono

$$\psi(x) = C\exp\left(\frac{i\lambda x}{\hbar}\right), \quad \lambda\in\mathbb{Z} \tag{14}$$

ove si impone

$$\psi(0) = \psi(L) \tag{15}$$

In particolare, se definito su una circonferenza, allora

$$\lambda = \frac{n\hbar}{R} \tag{16}$$

dove R è il raggio e $n\in\mathbb{Z}$

equazione di Schrödinger in forma stazionaria

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right]\psi(x) = E\psi(x) \tag{17}$$

Dalla rappresentazione $\{x\}$ a $\{p\}$

Se si è in una dimensione

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_\mathbb{R} e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\psi(x)\,dx \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_\mathbb{R} e^{\frac{ipx}{\hbar}}\tilde{\psi}(p)\,dp \tag{18}$$

Se si è in tre dimensioni invece tra p e x nell'exp va fatto il prodotto scalare, i differenziali sono in tre dimensioni e $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$ diventa $\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$

Indeterminazione di Heisenberg

- **Espressione generale**

$$(\Delta A)_\psi(\Delta B)_\psi \geq \frac{1}{2}\left|\langle[A,B]\rangle_\psi\right| \tag{19}$$

Valida se $\psi, A\psi, B\psi\ \in D_A\ \cap\ D_B$

- **Per la posizione e il momento**

$$(\Delta X)_\psi(\Delta P)_\psi \geq \frac{\hbar}{2} \tag{20}$$

Che è sempre valida se se si lavora con $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$

Proiettori

$$\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \qquad \mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \tag{21}$$

Gli autovalori di un proiettore sono 0 e 1

- **Utilizzo dei proiettori nel caso di spettro discreto** Nel caso di $a\in\sigma_d(A)$ allora:

$$\mathcal{P}_a = \sum_{r=1}^{d(a)} |a,r\rangle\langle a,r| \tag{22}$$

$$\sum_{a\ \in\ \sigma_d(A)} \mathcal{P}_a = \sum_{a\ \in\ \sigma_d(A)}\sum_{r=1}^{d(a)} |a,r\rangle\langle a,r| = \mathbb{I} \tag{23}$$

$$\langle\mathcal{P}_a\rangle_\psi = \sum_{r=1}^{d(a)} \frac{|\langle a,r|\psi\rangle|^2}{\|\psi\|^2} = \frac{\|\mathcal{P}_a|\psi\rangle\|^2}{\|\psi\|^2} = \mathrm{P}_\psi(a) \tag{24}$$

- **Utilizzo dei proiettori nel caso di spettro generico**

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \oplus \mathcal{H}_s^\perp \tag{25}$$

$$S\subseteq\mathbb{R} \tag{26}$$

$$\mathcal{P}_s = \sum_{a\ \in\ \sigma_d(A)\ \cap\ S}\ \sum_{r=1}^{d(a)} |a,r\rangle\langle a,r| + \int_{\sigma_c(A)\ \cap\ S}\sum_{r=1}^{d(a)} |a,r\rangle\langle a,r|\,\mathrm{d}a \tag{27}$$

$\langle\mathcal{P}_s\rangle_\psi$ è la Probabilità che una misura di A nello stato ψ dia $a\ \in\ S$

Teoria della misura

Lo stato prima della misura può essere descritto come

$$|\psi\rangle = \mathcal{P}_a|\psi\rangle + (\mathbb{I} - \mathcal{P}_a)|\psi\rangle \tag{28}$$

Dopo la misura lo stato diventa

$$|\psi\rangle = \mathcal{P}_a|\psi\rangle \tag{29}$$

- **Osservabili compatibili** Siano A e B due operatori limitati e i relativi osservabili con spettro discreto. Allora valgono e sono equivalenti le seguenti affermazioni:

$$\mathcal{A} \text{ e } \mathcal{B} \text{ sono compatibili} \tag{30}$$

$$\exists \text{ una base o.n. } \{|a,b,r\rangle\}_{\substack{a\in\sigma(A)\\ b\in\sigma(B)\\ r=1,\dots,d(a,b)}} \tag{31}$$

Vale dunque $A|a,b,r\rangle = a|a,b,r\rangle$ e $B|a,b,r\rangle = b|a,b,r\rangle$

$$[A,B] = 0 \tag{32}$$

Inoltre valgono le seguenti due relazioni:

$$[A,B] = 0 \implies [\mathcal{P}_a,\mathcal{P}_b] = 0\ \forall a,b \iff [f(A),g(B)] = 0 \tag{33}$$

$$[A,B] = 0 \implies \forall b\ \in\sigma(B)\ \begin{cases}\forall|b\rangle\ \in\mathcal{H}_b, A|b\rangle\ \in\mathcal{H}_b\\ [A,\mathcal{P}_b] = 0\end{cases} \tag{34}$$

- **ICOC** Si tratta di un insieme completo di osservabili compatibili, si può indicare con $\vec{A}$.

$$\vec{A}\ \text{ICOC} \iff d(\vec{a}) = 1\ \forall\vec{a}\ \in\ \sigma_{\vec{A}} \tag{35}$$

La base o.n. di un ICOC sarà $\{|\vec{a}\rangle\}_{\vec{a}\ \in\ \sigma(\vec{A})}$

Quantizzazione canonica

$$\{\,\} = \frac{1}{i\hbar}[\,,\,] \tag{36}$$

Evoluzione temporale causale

Equazione di Schrödinger in forma temporale

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = H\psi(t) \tag{37}$$

Dove $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ è l'espressione dell'operatore Energia. Una combinazione lineare di soluzioni è ancora una soluzione. Per ogni dato iniziale $|\psi(0)\rangle$ si avrà un'unica soluzione $\forall t$. Infine $\|\psi(t)\|$ si conserva nel tempo. Inoltre ψ^* è soluzione dell'equazione

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(t) = H\psi^*(t) \tag{38}$$

Equazione di continuità

$$\frac{d}{dt}\rho(\vec{x},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{x},t) = 0 \tag{39}$$

dove

$$\rho(\vec{x},t) = |\psi(\vec{x},t)|^2 \tag{40}$$

è la densità di probabilità, mentre

$$\vec{J}(\vec{x},t) = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right) \tag{41}$$

è la densità di corrente di probabilità.
In una dimensione e senza dipendenza temporale essa diventa:

$$\frac{d}{dx}\left(\psi'\psi^* - (\psi^*)'\psi\right) = 0 \tag{42}$$

Operatore di evoluzione causale

$$U^{-1}(t,t_0) = U^+(t,t_0) = U(t_0,t) \tag{43}$$

In un sistema conservativo, in cui cioè l'hamiltoniana resta invariata nel tempo, si ha

$$U(t) = \exp\left(-i\frac{t}{\hbar}H\right) \tag{44}$$

Visuale di Schroedinger

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(t_0)\rangle \tag{45}$$

Sia $|E_n,r\rangle$ l'autoket dell'autovalore E_n, allora, per quanto riguarda la parte di spettro discreto

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n\sum_{r=1}^{d(E_n)} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)\right)\langle E_n,r|\psi(t_0)\rangle|E_n,r\rangle \tag{46}$$

Se poi c'è anche una parte continua di spettro si aggiunge

$$\int_{\sigma_c(H)} d\mathrm{E}\sum_{r=1}^{d(E)} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E(t-t_0)\right)\langle E,r|\psi(t_0)\rangle|E,r\rangle \tag{47}$$

- **Stati stazionari** Un autostato dell'hamiltoniana, $|\psi_E\rangle$ viene chiamato stato stazionario ed evolve in questo modo:

$$|\psi_E(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{h}E(t-t_0)\right)|\psi_E(t_0)\rangle \tag{48}$$

il valor medio e la varianza di un operatore calcolati su uno stato stazionario non variano nel tempo:

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\psi_E} = 0, \qquad \frac{d}{dt}(\Delta A)^2_{\psi_E} = 0 \quad \forall A \tag{49}$$

- **Operatori** In visuale di Schroedinger gli operatori rimangono invariati:

$$A\to\ A \tag{50}$$

Visuale di Heisenberg

- **Equazione di Born-Heisenberg-Jordan**

$$\frac{d}{dt}X_h(t) = \frac{[X_h(t),H]}{i\hbar} + \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_h(t) \tag{51}$$

dove l'ultimo termine è presente solo se A dipende esplicitamente dal tempo

- **Trasformazione unitaria** In visuale di Heisenberg, la trasformazione unitaria $U(t,t_0)$ trasforma l'operatore A_s (operatore A in visuale di Schroedinger) come:

$$A\to A_h = U^\dagger(t,t_0)A_sU(t,t_0) \tag{52}$$

mentre gli stati rimangono invariati:

$$\psi\to\psi \tag{53}$$

In particolare $|\psi\rangle$ in visuale di Heisenberg sarà uguale al ket in visuale di Schroedinger all'istante iniziale:

$$|\psi_h(t)\rangle = |\psi_h(t_0)\rangle = |\psi_s(t_0)\rangle \tag{54}$$

- **Valori medi di operatori** In visuale di Heisenberg e di Schroedinger i valori medi degli operatori coincidono:

$$\langle A_s\rangle = \langle A_h\rangle \tag{55}$$

Inoltre

$$\frac{d}{dt}\langle A_h\rangle_\psi(t) = \frac{\langle\psi_h|\frac{d}{dt}A_h|\psi_h\rangle}{\|\psi_h\|^2} \tag{56}$$

$$\frac{d}{dt}A_h = 0 \implies \frac{d}{dt}\langle A_h\rangle = 0 \tag{57}$$

Teorema di Ehrenfest

$$\frac{d}{dt}\langle Q\rangle_\psi = \frac{\langle P\rangle_\psi}{m} \qquad \frac{d}{dt}\langle P\rangle_\psi = -\langle V'(Q)\rangle_\psi \tag{58}$$

Indeterminazione tempo energia

$$(\Delta t)_\psi(\Delta E)_\psi \gtrsim \frac{\hbar}{2} \tag{59}$$

Operatori densità

Per uno stato puro si ha

$$\rho_\psi = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\|\psi\|^2} \tag{60}$$

$$\rho_{nm} = \langle n|\rho|m\rangle = \langle n|\psi\rangle\langle\psi|m\rangle = C_nC_m^* \tag{61}$$

ρ, per uno stato puro, è un proiettore per cui valgono le proprietà dei proiettori. Inoltre per uno stato puro valgono

$$\sigma(\rho)\geq 0 \qquad Tr(\rho^2) = 1 \tag{62}$$

Dove Tr è la traccia

$$\langle A\rangle_\psi = \mathrm{Tr}(\rho A) \tag{63}$$

Per uno stato misto ϵ si ha

$$\rho_\epsilon = \sum_k P_k|\psi_k\rangle\langle\psi_k| \tag{64}$$

Dove le P_k sono le probabilità associate agli stati puri ψ_k, per cui la loro somma deve essere uguale a 1. Inoltre si ha

$$\langle A\rangle_\epsilon = \sum_k P_k\langle A_k\rangle = Tr(\rho_\epsilon A) \tag{65}$$

Infine per uno stato misto si ha

$$Tr(\rho^2) < 1 \tag{66}$$

Per quanto riguarda l'evoluzione casuale si ha:

$$\rho_s(t) = \sum_k P_k|\psi_k(t)\rangle\langle\psi_k(t)| = U(t,t_0)\rho(t_0)U(t,t_0)^\dagger \tag{67}$$

$$\langle A\rangle(t) = Tr(U\rho(t_0)U^\dagger A) = Tr(\rho(t_0)U^\dagger AU) = Tr(\rho(t_0)A_h) \tag{68}$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}\rho_s(t) = [H_s(t),\rho_s(t)] \tag{69}$$

Simmetrie

- **Teorema di Wigner**

$$\tau \text{ è una trasformazione di simmetria} \iff \begin{cases}\psi' = W\psi\\ A' = WAW^\dagger\end{cases} \tag{70}$$

Con U operatore unitario o antiunitario

Traslazioni spaziali

- **Operatore di traslazione**

$$U(\varphi) = \exp\left(-i\frac{\varphi}{\hbar}P\right) \tag{71}$$

dove φ è il parametro di traslazione e P è il generatore infinitesimo di traslazione

- **Effetto sull'operatore di posizione e sul momento**

$$X' = U(\varphi)XU(\varphi)^\dagger = X - \varphi \qquad U(\varphi)^\dagger XU(\varphi) = X + \varphi \tag{72}$$

$$U(\varphi)P = P \tag{73}$$

- **Effetto sulla funzione d'onda**

$$U(\varphi)\psi(x) = \psi(x-\varphi) \tag{74}$$

- **Traslazioni in 3D** Le relazioni sono analoghe a quelle in 1D, semplicemente vanno espresse vettorialmente. Inoltre

$$U(\vec{\varphi}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\vec{\varphi}\right) \tag{75}$$

Rotazioni

- **Operatore di rotazione**

$$U(\vec{\varphi}) = \exp\left(-i\frac{\vec{\varphi}\cdot\vec{J}}{\hbar}\right) \tag{76}$$

$\vec{J}$ è dunque il generatore infinitesimo di rotazione

- **Matrice di rotazione attorno all'asse z**

$$R(\varphi,\hat{z}) = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{77}$$

- **Effetto sulle coordinate e momento**

$$X' = U^\dagger XU = R^{-1}(\vec{\varphi})X \qquad P' = U^\dagger PU = R^{-1}(\vec{\varphi})P \tag{78}$$

Simmetrie della dinamica

Sono quelle simmetrie tali per cui

$$[W,H] = 0 \iff WHW^\dagger = H \iff [W,U(t-t_0)] = 0 \tag{79}$$

dove $U(t-t_0)$ in questo caso è l'operatore di evoluzione causale. Da questa relazione si ricava banalmente la validità della seguente relazione:

$$\langle H\rangle_{\psi(t)} = 0 \quad \forall|\psi(t)\rangle \tag{80}$$

se H non dipende dal tempo

- **Gruppo a un parametro di simmetrie della dinamica** Definito

$$W(\varphi) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Q\varphi\right) \tag{81}$$

con $W(s)\in G_d$ (gruppo di simmetrie della dinamica) e Q generatore infinitesimo della simmetria, si ha

$$[W(s),H] = 0 \iff [Q,H] = 0 \quad \iff \frac{d}{dt}\langle Q\rangle_\psi(t) = 0 \quad \forall\psi\in\mathcal{H} \tag{82}$$

E ciò se e solo se Q è una costante del moto. Si noti inoltre che non si conserva solo il valor medio di Q ma anche tutte le probabilità associate agli autovalori di Q, per via della (34) e della (24).

- **Esempio con Hamiltoniana in una dimensione** Ad esempio per un oscillatore armonico in direzione x, come nel caso della (115), siccome P_y e P_z commutano con H, i loro valori medi non varieranno nel tempo. Il valor medio di P_x invece non varierà nel tempo, in generale, solo se calcolato su uno stato stazionario di H (si veda la (49)).
- **Simmetrie della dinamica e autostati dell'energia** W mescola autostati di H con la stessa energia, per cui essa è una matrice a blocchi. Si ha

$$[W,H] = 0 \iff \forall|E\rangle\ \in\mathcal{H}_E,\ W|E\rangle\ \in\ \mathcal{H}_E \tag{83}$$

dove $\mathcal{H}_E$ è l'autospazio dell'hamiltoniano relativo all'autovalore E, e inoltre $H|E\rangle = E|E\rangle$

Operatore parità

- **azione dell'operatore parità sulla funzione d'onda**

$$P\psi(x) = \psi(-x) \tag{84}$$

- **Spettro e autofunzioni** Lo spettro è

$$\sigma(P) = \{\pm 1\} \tag{85}$$

e la degenerazione degli autovalori è infinita.

$$\begin{cases}P\psi(x) = \psi(x) & \text{se } \psi(x) \text{ è pari}\\ P\psi(x) = -\psi(x) & \text{se dispari}\end{cases} \tag{86}$$

- **Trasformato per parità** Il trasformato per parità di un generico operatore A è

$$PAP^\dagger \tag{87}$$

Nel caso dell'oscillatore armonico, per gli operatori di distruzione e creazione:

$$PaP^\dagger = -a \qquad Pa^\dagger P^\dagger = -a^\dagger \tag{88}$$

E per gli operatori posizione e momento:

$$P\vec{X}P^\dagger = -\vec{X} \qquad P\vec{P}P^\dagger = -\vec{P} \qquad P\vec{L}P^\dagger = \vec{L} \tag{89}$$

- **Attenzione alla parità** La parità su una funzione traslata agisce solo sulla variabile indipendente e non sul fattore di traslazione. Ovvero:

$$Pf(x-2a) = f(-x-2a) \tag{90}$$

Se invece si effettua la trasformazione:

$$f(x-2a)\to f(-x+2a) \tag{91}$$

Si è effettuata una riflessione intorno all'asse $x = a$.

- **Parità come simmetria della dinamica** l'Operatore parità rappresenta una simmetria della dinamica quando commuta con H. Ad esempio se per l'hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{X}) \tag{92}$$

si ha $V(\vec{X}) = V(-\vec{X})$, come nel caso dell'oscillatore armonico, allora le autofunzioni dell'hamiltoniana hanno parità definita. Esse sono anche autofunzioni della parità in quanto H e la parità saranno operatori compatibili. Ciò significa inoltre che considerato un generico stato, se questo ad esempio è pari, si può decomporre in autostati pari dell'hamiltoniana.

Inversione temporale

Essa manda t in -t

- **Azione sugli operatori**

$$\mathcal{T}\vec{X}\mathcal{T}^\dagger = \vec{X} \qquad \mathcal{T}\vec{P}\mathcal{T}^\dagger = -\vec{P} \tag{93}$$

- **Azione sulla funzione d'onda**

$$\mathcal{T}\psi(x) = \psi^*(x) \tag{94}$$

- **Inversione temporale e evoluzione causale**

$$\mathcal{T}U(t)\mathcal{T}^\dagger = U(-t) \tag{95}$$

dove $U(t)$ è l'operatore di evoluzione causale.

$$\mathcal{T}|\psi(-t)\rangle = U(t)\mathcal{T}|\psi(0)\rangle \qquad \mathcal{T}\psi(\vec{x},t) = \psi^*(\vec{x},-t) \tag{96}$$

Commutazioni generiche e altre formule

- **Commutatori di base**

$$[X_i,P_j] = i\hbar\delta_{ij} \qquad [\vec{X},\vec{P}] = i\hbar\ \mathbb{I} \qquad [Q,f(P)] = i\hbar f'(P) \tag{97}$$

$$[A,B] = 0 \implies [f(A),B] = 0 \qquad [A,f(A)] = 0 \tag{98}$$

dove Q è l'operatore di posizione generalizzata

$$[X,P^2] = 2i\hbar P \qquad [X^2,P^2] = 4i\hbar XP + 2\hbar^2 \tag{99}$$

- **Commutatori con l'operatore di traslazione**

$$[Q,U(\varphi)] = \varphi\ U(\varphi) \tag{100}$$

- **Formula di Baker-Campbell-Hausdorff**

$$e^Ae^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}([A,[A,B]]+[B,[B,A]])\ +\dots} \tag{101}$$

Formule utili da Fisica moderna

Particella libera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi_E(x) = E\varphi_E(x) \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}\varphi_E(x) + k^2\varphi_E(x) = 0 \tag{102}$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{103}$$

La soluzione è

$$\psi_s(x,t) = C_+e^{i(kx-\omega t)} + C_-e^{-i(kx-\omega t)} \tag{104}$$

dove il primo termine è un'onda che va verso dx mentre il secondo è un'onda che va verso sx.

- **Dominio dell'hamiltoniana di una particella libera**

$$D(H) = \left\{\psi(x)\in L^2(\mathbb{R},dx),\ p^2\tilde{\psi}(p)\in L^2(\mathbb{R},dp)\right\} \tag{105}$$

Quando il potenziale è C^∞ ed è limitato in tutto $\mathbb{R}$ allora il dominio dell'hamiltoniana del sistema è lo stesso di quella libera.

Energia e momento quantizzati

Per un quanto di energia si ha

$$E = \hbar\omega \qquad P = \hbar k = \hbar\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\hbar\omega}{c} \tag{106}$$

Buca infinita

- **Buca di potenziale infinitamente profonda, posta in $[-L/2,+L/2]$**
- **Equazione agli autovalori**

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi_E(x) = E\varphi_E(x) \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}\varphi_E(x) + k^2\varphi_E(x) = 0 \tag{107}$$

- **Soluzioni**

$$\varphi_n(x) = \begin{cases}\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & n>0 \text{ dispari}\\ \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & n>0 \text{ pari}\end{cases} \tag{108}$$

- **Autovalori di H**

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \tag{109}$$

- **Buca di potenziale infinitamente profonda, posta in [0,L]** L'energia rimane la stessa, mentre le autofunzioni sono

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\ \forall\ n>0 \tag{110}$$

Gradino di potenziale

Potenziale a gradino $V(x) = \bar{V}\Theta(x)$, con $\Theta(x)$ funzione di Heaviside.

- **Autofunzioni** Si pone

$$\chi = \sqrt{\frac{2m(\bar{V}-E)}{\hbar^2}} \qquad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{111}$$

- **Con energia minore di $\bar{V}$**

$$\varphi_E(x) = \begin{cases}c_+^1e^{ikx} + c_-^1e^{-ikx}, & x<0\\ c_2^-e^{-\chi x}, & x\geq 0\end{cases} \tag{112}$$

- **Con energia maggiore di $\bar{V}$**

$$\varphi_E(x) = \begin{cases}c_+^1e^{ikx} + c_-^1e^{-ikx}, & x<0\\ c_2^+e^{\chi x}, & x\geq 0\end{cases} \tag{113}$$

Oscillatore armonico

- **Pulsazione**

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{114}$$

- **Hamiltoniana**

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2X^2 + V_0 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + V_0 \tag{115}$$

- **Spettro di H**

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + V_0, \quad n\in\mathbb{N}\ \mathrm{U}\ \{0\} \tag{116}$$

- **Commutazione con la parità**

$$[P,H] = 0 \tag{117}$$

- **Autofunzioni**

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \tag{118}$$

$$\psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \tag{119}$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{8}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)\left(4\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - 2\right) \tag{120}$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^nn!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) \tag{121}$$

Dove $H_n(y)$ sono i polinomi di Hermite:

$$H_n(y) = (-1)^ne^{y^2}\frac{d^n}{dy^n}e^{-y^2} \tag{122}$$

$$H_0(y) = 1, \quad H_1(y) = 2y, \quad H_2(y) = 4y^2 - 2 \tag{123}$$

- **Proprietà delle autofunzioni** Ortogonalità:

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn} \tag{124}$$

$$\int_\mathbb{R}\psi_i(ax)\psi_j(ax) = \frac{\delta_{ij}}{a} \tag{125}$$

Le autofunzioni sono a parità definita, ovvero sono pari per indici pari, dispari per indici dispari:

$$\psi_n(-x) = (-1)^n\psi_n(x) \tag{126}$$

$$\langle X\rangle_{\psi_n} = \langle P\rangle_{\psi_n} = 0 \qquad \langle X^2\rangle_{\psi_n} = \frac{\hbar}{m\omega}(n + \frac{1}{2}) \tag{127}$$

In generale il valor medio di X su domini simmetrici e su stati $|\psi\rangle$ a parità definita è nullo.

$$\langle P^2\rangle_{\psi_n} = \hbar\omega m(n + \frac{1}{2}) \implies \langle\frac{P^2}{2m}\rangle_{\psi_n} = \frac{E_n}{2} \tag{128}$$

Ovvero l'energia è equamente divisa, in media, tra parte cineticia e parte potenziale.

- **Teorema di Ehrenfest per l'oscillatore armonico** Le soluzioni delle due equazioni differenziali per l'oscillatore armonico sono

$$\langle X\rangle_\psi = A\cos(\omega t + \delta) \quad \langle P\rangle_\psi = -mA\omega\sin(\omega t + \delta) \tag{129}$$

- **Evoluzione temporale oscillatore armonico** $|\psi(t)\rangle$ nel caso dell'oscillatore armonico è periodica con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{130}$$

Operatori di creazione e distruzione

- **Operatori definiti**

$$X' = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X, \quad P' = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}P \tag{131}$$

$$a = \frac{X' + iP'}{\sqrt{2}}, \quad a^\dagger = \frac{X' - iP'}{\sqrt{2}} \tag{132}$$

- **Relazioni di commutazione**

$$[a,a^\dagger] = 1 \tag{133}$$

- **Espressioni per X e P**

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \qquad P = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a^\dagger - a) \tag{134}$$

- **Azioni degli operatori**

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \tag{135}$$

$$(a^\dagger)^2|n\rangle = \sqrt{(n+1)(n+2)}|n+2\rangle \tag{136}$$

$$a^2|n\rangle = \sqrt{n(n-1)}|n-2\rangle \tag{137}$$

$$aa^\dagger|n\rangle = (n+1)|n\rangle, \quad a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle \tag{138}$$

$$P|n\rangle = (-1)^n|n\rangle = (-1)^N|n\rangle \tag{139}$$

$$\psi_n(x) = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\psi_0(x) \qquad |n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \tag{140}$$

Operatore numero

$$N = a^\dagger a \qquad N|n\rangle = n|n\rangle \qquad Na|n\rangle = (n-1)a|n\rangle \tag{141}$$

- **Relazioni di commutazione**

$$[N,a] = -a, \quad [N,a^\dagger] = a^\dagger \tag{142}$$

Momento angolare

▲ **Momento angolare totale** Il momento angolare totale è

$$\vec{J}=\vec{L}+\vec{S} \tag{143}$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare orbitale, mentre $\vec{S}$ è lo spin

$$J^2=J_x^2+J_y^2+J_z^2 \tag{144}$$

Formule analoghe per L^2 e S^2

· **Autovalori di J^2 e J_z**

$$J^2|l,m\rangle=\hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle \qquad L_z|j,m\rangle=\hbar m|j,m\rangle \tag{145}$$

con $j\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$ e $m\in\{-j,-j+1,\dots,+j\}$.

▲ **Momento angolare orbitale**

$$\vec{L}=\vec{X}\times\vec{P} \qquad L_k=\sum_{i,j}\epsilon_{kij}X_iP_j \tag{146}$$

$$L_x=YP_z-ZP_y \quad L_y=ZP_x-XP_z \quad L_z=XP_y-YP_x \tag{147}$$

· **Autovalori di L^2 e L_z**

$$L^2|l,m\rangle=\hbar^2 l(l+1)|l,m\rangle \qquad L_z|l,m\rangle=\hbar m|l,m\rangle \tag{148}$$

· **Espressioni di L^2, L_x, L_y e L_z**

$$L^2=-\hbar^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\tan(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \tag{149}$$

$$L_x=i\hbar\left[\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\theta}+\cos(\varphi)\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] \tag{150}$$

$$L_y=i\hbar\left[-\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\theta}+\sin(\varphi)\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] \tag{151}$$

$$L_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{152}$$

▲ **Operatori di abbassamento e innalzamento**

$$L_\pm=\hbar e^{\pm i\varphi}\left[i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\pm\frac{\partial}{\partial\theta}\right] \tag{153}$$

$$J_\pm=J_x\pm iJ_y, \quad J_-=(J_+)^\dagger \tag{154}$$

$$J_\pm|j,m\rangle=\hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}|j,m\pm1\rangle \tag{155}$$

Nella base $|j,m\rangle$, con m che va in ordine da j a $-j$, J_z risulta diagonalizzata, J_+ ha valori non nulli solo nella diagonale sopra quella principale, J_- ha valori non nulli solo nella diagonale sotto quella principale. Per costruire $L_\pm$, L_x e L_y le formule sono analoghe a queste ma con l al posto di j.

$$J_zJ_\pm|j,m\rangle=\hbar(m\pm1)J_\pm|j,m\rangle \tag{156}$$

$$J_+J_-=J^2-J_z\left(J_z-\hbar\right) \qquad J_-J_+=J^2-J_z\left(J_z+\hbar\right) \tag{157}$$

Valgono formule analoghe per L_+, L_- e S_+, S_-

· **Espressione di J_x e J_y**

$$J_x=\frac{J_++J_-}{2} \qquad J_y=\frac{J_+-J_-}{2i} \tag{158}$$

▲ **Relazioni di commutazione**

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}+1 & \text{se } (i,j,k) \text{ è una permutazione pari di } (1,2,3)\\ -1 & \text{se } (i,j,k) \text{ è una permutazione dispari di } (1,2,3)\\ 0 & \text{se due indici sono uguali}\end{cases} \tag{159}$$

$$[J_i,L_j]=[L_i,L_j]=i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \quad [L^2,L_j]=0 \quad [J_i,J_j]=i\hbar\epsilon_{ijk}J_k \tag{160}$$

$$[L_i,X_j]=[J_i,X_j]=i\hbar\epsilon_{ijk}X_k \quad [L_i,P_j]=[J_i,P_j]=i\hbar\epsilon_{ijk}P_k \tag{161}$$

$$[J_z,J_\pm]=\pm\hbar J_\pm \qquad [J_+,J_-]=2\hbar J_z \tag{162}$$

▲ **Autofunzioni simultanee di L^2 e L_z** La forma generica è data da

$$\psi_l^m=f_l^m(r)Y_l^m(r,\theta,\varphi) \tag{163}$$

dove

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=\frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}e^{im\varphi}P_l^m(\cos(\theta),\sin(\theta)) \tag{164}$$

vengono dette armoniche sferiche. $P_l^m(\cos(\theta),\sin(\theta))$ è un polinomio in $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$. In termini di polinomi di Legendre, si ha:

$$P_l^m(x)=(-1)^m\frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l \tag{165}$$

Le armoniche sferiche sono ortonormali:

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\sin(\theta)\overline{Y_l^m(\theta,\varphi)}Y_{l'}^{m'}(\theta,\varphi)=\delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{166}$$

dove $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\sin(\theta)=\int\mathrm{d}\Omega$

Inoltre valgono le seguenti proprietà:

$$Y_l^m(\pi-\theta,\varphi+\pi)=(-1)^lY_l^m(\theta,\varphi) \tag{167}$$

$$\overline{Y_l^m(\theta,\varphi)}=(-1)^mY_l^{-m}(\theta,\varphi) \tag{168}$$

Per la funzione radiale bisogna imporre la normalizzazione seguente:

$$\int_0^{+\infty}r^2|f_l^m(r)|^2\mathrm{d}r=1 \tag{169}$$

· **Armoniche sferiche: Primi valori** Le armoniche sferiche sono pari se l è pari, dispari altrimenti.

· **Per $l=0$**

$$Y_0^0(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{170}$$

· **Per $l=1$**

$$Y_1^0(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{z}{r} \tag{171}$$

$$Y_1^{\pm1}(\theta,\varphi)=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x\pm iy}{r} \tag{172}$$

· **Per $l=2$**

$$Y_2^0(\theta,\varphi)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(3\cos^2\theta-1)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\frac{(2z^2-x^2-y^2)}{r^2} \tag{173}$$

$$Y_2^{\pm1}(\theta,\varphi)=\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}e^{\pm i\varphi}\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{z(x\pm iy)}{r^2} \tag{174}$$

$$Y_2^{\pm2}(\theta,\varphi)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}e^{\pm2i\varphi}\sin^2\theta=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{(x\pm iy)^2}{r^2} \tag{175}$$

■ **Prodotto tensore**

$$\lambda|\psi_1\rangle\otimes|\psi_2\rangle=\lambda(|\psi_1\rangle+|\psi_2\rangle)\ \forall\lambda\in\mathbb{C} \tag{176}$$

$$|\psi_1\rangle\otimes(|\chi_2\rangle+|\psi_2\rangle)=|\psi_1\rangle\otimes|\chi_2\rangle+|\psi_1\rangle\otimes|\psi_2\rangle \tag{177}$$

$$\{|e_{1,n}\rangle\otimes|e_{2,m}\rangle\}_{\substack{n=1,\dots,d_1\\m=1,\dots,d_2}} \tag{178}$$

è una base o.n. di $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$, dove

$$\dim(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2)=(\dim\mathcal{H}_1)(\dim\mathcal{H}_2) \tag{179}$$

▲ **Prodotto scalare**

$$\langle\psi|\psi'\rangle=\left(\sum_{n,m}c_{n,m}^*\langle e_{1,n}|\otimes\langle e_{2,m}|\right)\left(\sum_{n',m'}d_{n',m'}|e_{1,n'}\rangle\otimes|e_{2,m'}\rangle\right) \tag{180}$$

$$=\sum_{n,n',m,m'}c_{n.m}^*d_{n',m'}\delta_{n,n'}\delta_{m.m'}=\sum_{n,m}c_{n.m}^*d_{n,m} \tag{181}$$

Tra due vettori fattorizzati si ha

$$(\langle\psi_1|\otimes\langle\psi_2|)(|\chi_1\rangle\otimes|\chi_2\rangle)=\langle\psi_1|\chi_1\rangle_{\mathcal{H}_1}\langle\psi_2|\chi_2\rangle_{\mathcal{H}_2} \tag{182}$$

▲ **Norma**

$$\|\psi\|^2=\sum_{n,m}|c_{n,m}|^2 \tag{183}$$

▲ **Operatori e prodotto tensore**

$$(A_1\otimes B_2)\left(\sum_{n,m}C_{n,m}|e_{1,n}\rangle\otimes|e_{2,m}\rangle\right)= \tag{184}$$

$$=\sum_{n,m}C_{n,m}(A_1|e_{1,n}\rangle)\otimes(B_2|e_{2,m}\rangle) \tag{185}$$

$$(A_1\otimes\mathbb{I}_{\mathcal{H}_2})(\mathbb{I}_{\mathcal{H}_1}\otimes B_2)=A_1\otimes B_2=(\mathbb{I}_{\mathcal{H}_1}\otimes B_2)(A_1\otimes\mathbb{I}_{\mathcal{H}_2}) \tag{186}$$

$$A_1 \text{ a.a e } \{|a_{1,r}\rangle\}_{\substack{a_1\in\sigma(A_1)\\r=1,\dots,d(a1)}} \text{ base o.n. di } \mathcal{H}_1 \tag{187}$$

$$B_2 \text{ a.a e } \{|b_{2,s}\rangle\}_{\substack{b2\in\sigma(B2)\\s=1,\dots,d(b2)}} \text{ base o.n. di } \mathcal{H}_2 \tag{188}$$

$$(187) \text{ e } (188) \implies \{|a_{1,r}\rangle\otimes|b_{2,s}\rangle\}_{\substack{a1\in\sigma(A1),r=1,\dots,d(a1)\\b2\in\sigma(B2),s=1,\dots,d(b2)}} \tag{189}$$

è base o.n. di $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$. Dati due autovalori a_1 e b_2 fissati, la degenerazione della coppia su $\mathcal{H}$ sarà

$$d(a_1,b_2)=d(a_1)d(b_2) \tag{190}$$

■ **Spin**

· **Hamiltoniana di interazione con $\vec{B}$**

$$H=-\vec{\mu}\cdot\vec{B} \qquad \vec{\mu}=\mu_0\vec{S} \tag{191}$$

· **Relazioni di commutazione**

$$[S_i,S_j]=i\hbar\epsilon_{ijk}S_k \qquad [S_i,X_j]=[S_i,P_j]=[S_i,L_j]=0 \tag{192}$$

$$[L^2,S^2]=0 \qquad [J^2,S^2]=0 \qquad [J^2,L^2]=0 \qquad [S^2,S_z]=0 \tag{193}$$

· **Spettro di (S^2,S_z)**

$$\sigma(S^2;S_z)=\{\hbar^2s(s+1),\hbar m\} \tag{194}$$

con $s\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$ e $m\in\{-s,-s+1,\dots,+s\}$.

▲ **Prodotto $L\cdot S$**

$$L\cdot S=\frac{1}{2}\left(J^2-L^2-S^2\right) \tag{195}$$

$$L\cdot S=L_zS_z+\frac{1}{2}(L_+S_-+L_-S_+) \tag{196}$$

▲ **Spin 1/2**

· **Operatori di abbassamento e innalzamento** Per $S\pm$ vale l'analogo della (155) con s al posto di j, per S_x e S_y vale l'analogo della (158) cutilizzando $S_\pm$

· **Matrici di Pauli**

$$S=\frac{\hbar}{2}\sigma \tag{197}$$

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} \quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{198}$$

$$\sigma_z|+\rangle=|+\rangle \qquad \sigma_z|-\rangle=-|-\rangle \tag{199}$$

$$[\sigma_i,\sigma_j]=2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \qquad \{\sigma_i,\sigma_j\}=2\delta_{ij} \tag{200}$$

$$\sigma_i\sigma_j=\frac{1}{2}\left([\sigma_i,\sigma_j]+\{\sigma_i,\sigma_j\}\right) \tag{201}$$

· **Composizione di spin di due particelle**

$$S^{(1)}\cdot S^{(2)}=\frac{1}{2}\left(S_+^{(1)}S_-^{(2)}+S_-^{(1)}S_+^{(2)}\right)+S_z^{(1)}S_z^{(2)} \tag{202}$$

· **Spin in direzione $\hat{n}$** Sia $\hat{n}$ il versore in $\mathbb{R}^3$:

$$\hat{n}=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta) \tag{203}$$

$$S\cdot\hat{n}=\frac{\hbar}{2}\sigma\cdot\hat{n}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi}\\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix} \tag{204}$$

$$\sigma(S_n)=\left\{-\frac{\hbar}{2},+\frac{\hbar}{2}\right\} \tag{205}$$

Gli autostati sono:

$$|+\rangle_{\hat{n}}=\cos\frac{\theta}{2}|+\rangle+\sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|-\rangle \tag{206}$$

$$|-\rangle_{\hat{n}}=\sin\frac{\theta}{2}|+\rangle-\cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|-\rangle \tag{207}$$

in forma matriciale gli autostati lungo una generica direzione $\hat{n}$ sono:

$$\left|\frac{\hbar}{2}\right\rangle_{\hat{n}}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}\end{pmatrix} \qquad \left|-\frac{\hbar}{2}\right\rangle_{\hat{n}}=\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\\ -\cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}\end{pmatrix} \tag{208}$$

· **Spin in direzione x**

$$|+\rangle_x=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle+|-\rangle) \qquad |-\rangle_x=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle-|-\rangle) \tag{209}$$

$$|+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_x-|-\rangle_x) \qquad |-\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_x+|-\rangle_x) \tag{210}$$

· **Spin in direzione y**

$$|+\rangle_y=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle+i|-\rangle) \quad |-\rangle_y=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle-i|-\rangle) \tag{211}$$

$$|+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_y+|-\rangle_y) \quad |-\rangle=-\frac{i}{\sqrt{2}}(|+\rangle_y-|-\rangle_y) \tag{212}$$

· **Spinore di Pauli** Considerando gli spazi di posizione e di spin assieme, ovvero $\mathcal{H}=\mathcal{H}_{\vec{x}}\otimes\mathcal{H}_{\vec{s}}$ lo stato della particella di spin 1/2 è descritto dallo spinore di Pauli:

$$|\psi\rangle=\begin{pmatrix}\psi_+(\vec{x})\\ \psi_-(\vec{x})\end{pmatrix}=[\psi](\vec{x})=\psi_+(\vec{x})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\psi_-(\vec{x})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{213}$$

$$\psi_+(\vec{x})=\langle\vec{x},+|\psi\rangle \qquad \psi_-(\vec{x})=\langle\vec{x},-|\psi\rangle \tag{214}$$

$$\|\psi\|^2=\int\mathrm{d}x^3\left(|\psi_+(\vec{x})|^2+|\psi_-(\vec{x})|^2\right) \tag{215}$$

$$(\vec{X}[\psi])(\vec{x})=\begin{pmatrix}\vec{x}\psi_+(\vec{x})\\ \vec{x}\psi_-(\vec{x})\end{pmatrix} \quad (\vec{P}[\psi])(\vec{x})=-i\hbar\begin{pmatrix}\vec{\nabla}\psi_+(\vec{x})\\ \vec{\nabla}\psi_-(\vec{x})\end{pmatrix} \tag{216}$$

$$(\vec{S}[\psi])(\vec{x})=\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\begin{pmatrix}\psi_+(\vec{x})\\ \psi_-(\vec{x})\end{pmatrix} \tag{217}$$

■ **Composizione dei momenti angolari**

· **Generalità**

$$J=J^{(1)}\otimes I+I\otimes J^{(2)} \tag{218}$$

dove ad esempio per una particella con spin $J^{(1)}=L$ e $J^{(2)}=S$, mentre per due particelle senza spin $J^{(1)}=L^{(1)}$ e $J^{(2)}=L^{(2)}$. Possiamo diagonalizzare simultaneamente $\{J^{2\,(1)},J_z^{(1)},J^{2\,(2)},J_z^{(2)}\}$ oppure $\{J^{2\,(1)},J^{2\,(2)},J^2,J_z\}$ per cui si può scrivere

$$|j1,j2,j,m\rangle\equiv|j,m\rangle=\sum_{m1,m2}|m1,m2\rangle\langle m1,m2|j,m\rangle \tag{219}$$

dove $\langle m1,m2|j,m\rangle$ vengono detti coefficienti di Clebsch Gordan. Si noti inoltre, che siccome essi possono essere scelti reali, si ha anche

$$|j1,j2,m1,m2\rangle\equiv|m1,m2\rangle=\sum_{j,m}|j,m\rangle\langle m1,m2|j,m\rangle \tag{220}$$

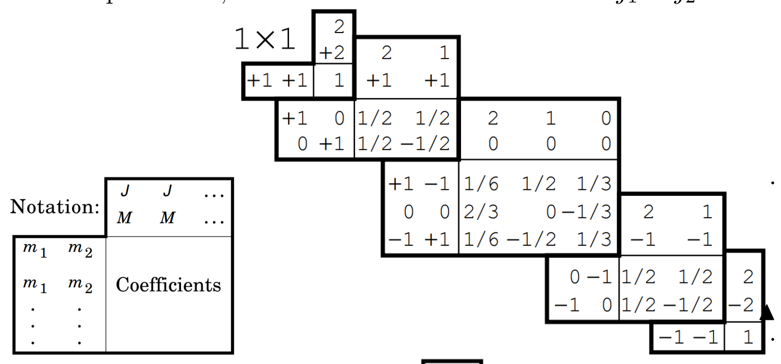
$$j\in\{j_1+j_2,j_1+j_2-1,\dots,|j_1-j_2|\} \tag{221}$$

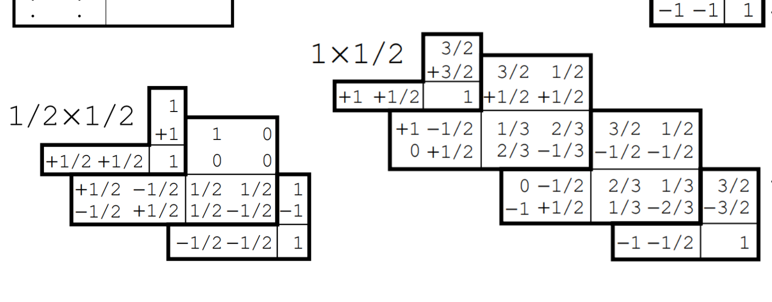
$$J_z|j,m\rangle=\hbar m|j,m\rangle \qquad J_z|m1,m2\rangle=(m1+m2)\hbar|m1,m2\rangle \tag{222}$$

· **Relazioni di commutazione**

$$[J^2,J^{(1)}]=0 \qquad [J^2,J^{(2)}]=0 \qquad [J^2,J_i^{(1,2)}]\neq0 \tag{223}$$

· **Coefficienti di Clebsch-Gordan** Ogni coefficiente, ad esempio $-3/2$, va letto come se ci fosse una radice. In questo caso quindi $-\sqrt{3/2}$. I numeri in alto, ad esempio 1×1, indicano nell'ordine i valori di j_1 e j_2





■ **Particelle identiche** I bosoni hanno spin intero, ovvero $s\in\mathbb{Z}$ mentre i fermioni semi intero, ovvero $s\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$. Sotto lo scambio di etichette la funzione d'onda complessiva dei bosoni deve essere simmetrica, quella dei fermioni antisimmetrica (ovvero deve acquistare un segno - nel caso di due particelle).

▲ **Due particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$** Considerato lo spazio di Hilbert

$$\mathcal{H}^{\otimes2}=\mathcal{H}_{\vec{X_1},\vec{X_2}}\otimes\mathcal{H}_{\vec{S_1},\vec{S_2}} \tag{224}$$

Si possono diagonalizzare simultaneamente $\{\vec{X}_1,\vec{X}_2,S_{1,z},S_{2,z}\}$ oppure $\{\vec{X}_1,\vec{X}_2,S^2,S_z\}$. Espandendo quest'ultima base data da $\{|s,m\rangle\}$ nella base della prima, data da $\{|m1,m2\rangle\}$, tramite i coefficienti di Clebsch-Gordan, si ottiene:

$$|1,1\rangle=|+,+\rangle \quad |1,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle+|-+\rangle\right) \quad |1,-1\rangle=|--\rangle \tag{225}$$

che vengono detti stati di tripletto e sono simmetrici

$$|s=0,m=0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle-|-+\rangle\right) \tag{226}$$

che viene detto stato di singoletto ed è asimmetrico. Per quanto detto sopra allora le parti di posizione per tali particelle dovranno essere antisimmetriche nel caso degli stati di tripletto e simmetriche nel caso del singoletto.

■ **Atomo di Idrogeno** $\{H,L^2,L_z\}$ è un ICOC

▲ **Hamiltoniana separata in due parti**

$$H=H_{CM}+H_r \quad M=m_a+m_b \tag{227}$$

$$\vec{X}_{CM}=\frac{m_a}{M}\vec{X}_a+\frac{m_b}{M}\vec{X}_b \quad \vec{P}_{CM}=\vec{P}_a+\vec{P}_b \tag{228}$$

$$\vec{X}_r=\vec{X}_a-\vec{X}_b \quad \vec{P}_r=\frac{m_b}{M}\vec{P}_a-\frac{\vec{m_a}}{M}\vec{P}_b \tag{229}$$

$$H_r=\frac{\vec{P}_r^2}{2\mu}-\frac{e^2}{r} \qquad \mu=\frac{m_em_p}{M} \tag{230}$$

▲ **Autofunzioni e autovalori per stati legati** Le autofunzioni sono del tipo della (163). Gli autovalori E_n, con n=1 stato fondamentale, hanno degenerazione n^2. In particolare per ogni livello n si hanno autofunzioni per tutti i valori di l e m che rispettano tali condizioni:

$$0\le l\le n-1 \qquad -l\le m\le l \tag{231}$$

Gli autovalori hanno energia pari a

$$E_n=-\frac{E_I}{n^2} \tag{232}$$

■ **Teoria delle perturbazioni**

· **Hamiltoniana perturbata**

$$H=H_0+\lambda V=H_0+W \tag{233}$$

· **Equazioni agli autovalori**

$$H_0|E_n^0\rangle=E_n^0|E_n^0\rangle, \quad H|E_n\rangle=E_n|E_n\rangle \tag{234}$$

▲ **Risoluzione nei casi senza degenerazione**

$$E_n^\lambda=E_n^0+\lambda E_n^1+\lambda^2E_n^2+\dots \tag{235}$$

$$\left|E_n^\lambda\right\rangle=\left|E_n^0\right\rangle+\lambda\left|E_n^1\right\rangle+\lambda^2\left|E_n^2\right\rangle+\dots \tag{236}$$

· **Primo e secondo ordine**

$$E_n^1=\langle E_n^0|V|E_n^0\rangle \qquad E_n^2=\sum_{m\ne n}\frac{|\langle E_n^0|V|E_m^0\rangle|^2}{E_n^0-E_m^0} \tag{237}$$

$$\left|E_n^1\right\rangle=\sum_{m\ne n}\left|E_m^0\right\rangle\frac{\langle E_m^0|V|E_n^0\rangle}{E_n^0-E_m^0} \tag{238}$$

▲ **Risoluzione nei casi con degenerazione** Si costruisce la matrice V con dimensione pari al valore della degenerazione. Per trovarne gli elementi si usa

$$\langle\psi_r|V|\psi_s\rangle \tag{239}$$

dove $|\psi_r\rangle$ e $|\psi_s\rangle$ sono autovettori degeneri relativi allo stesso autovalore. Diagonalizzando V si trovano le correzioni $E_{n,1}^k$ relative agli sviluppi

$$E^k=E_{n,0}^k+\lambda E_{n,1}^k+\dots \tag{240}$$

Gli autovettori della matrice V sono invece gli autovettori all'ordine 0 espressi nella base degli autovettori degeneri.

■ **Dimensioni fisiche**

$$[\,\hbar\,]=[\,E\,][\,T\,] \qquad [\,\omega\,]=[\,T\,]^{-1} \tag{241}$$

$$\text{In 3D } [\,|\psi|\,]=[\,L\,]^{-3/2}, \quad \text{In 1D } [\,|\psi|\,]=[\,L\,]^{-1/2} \tag{242}$$

$$\text{In 2D } [\,|\psi|\,]=[\,L\,]^{-1} \tag{243}$$

$$\left[\,\vec{E}\,\right]=\frac{[\,E\,]}{[\,L\,][\,Q\,]} \qquad \left[\,\vec{B}\,\right]=\frac{[\,E\,][\,T\,]}{[\,Q\,][\,L\,]^2} \tag{244}$$

■ **Matematica utile**

▲ **Identità trigonometriche**

$$\cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}, \quad \sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} \tag{245}$$

$$\cosh(\alpha)=\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2} \qquad \sinh(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2} \tag{246}$$

· **Formule di duplicazione**

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha \quad \tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \tag{247}$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1 \tag{248}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}, \quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \tag{249}$$

· **Formule di bisezione**

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad \sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \tag{250}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \tag{251}$$

· **Formule parametriche** Sia $t=\tan\frac{\alpha}{2}$ con $\alpha\neq(2k+1)\pi$, allora:

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{252}$$

· **Formule di prostaferesi**

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{253}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{254}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \tag{255}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \tag{256}$$

· **Formule di Werner**

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] \tag{257}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \tag{258}$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \tag{259}$$

· **Somme di argomenti dentro coseni e seni**

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \tag{260}$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta \tag{261}$$

▲ **Integrali**

· **Coordinate polari**

$$(x,y)\to(r\cos(\varphi),r\sin(\varphi)) \qquad \int r\mathrm{d}r\int\mathrm{d}\varphi \tag{262}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=r \tag{263}$$

· **Coordinate cilindriche**

$$(x,y,z)\to(r\cos(\varphi),r\sin(\varphi),z) \qquad \int r\mathrm{d}r\int\mathrm{d}\varphi\int\mathrm{d}z \tag{264}$$

· **Coordinate sferiche**

$$(x,y,z)\to(r\cos(\varphi)\sin(\theta),r\sin(\varphi)\sin(\theta),r\cos(\theta)) \tag{265}$$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r \tag{266}$$

$$\int r^2\mathrm{d}r\int\mathrm{d}\varphi\int\sin(\theta)\mathrm{d}\theta \quad \varphi\in(0,2\pi) \quad \theta\in(0,\pi) \tag{267}$$

· **Alcuni integrali notevoli**

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,dx=1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-x_0)\,dx=f(x_0) \tag{268}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(g(x))\,dx=\sum_i\frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}, \tag{269}$$

$$\int\sin^2x\,dx=\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x) \tag{270}$$

$$\int\cos^2x\,dx=\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x) \tag{271}$$

$$\int\sin x\cos x\,dx=-\frac{1}{2}\cos^2x \qquad \int\cos^3x\,dx=\sin x-\frac{\sin^3x}{3} \tag{272}$$

$$\int\sin^3x\,dx=-\cos x+\frac{\cos^3x}{3} \tag{273}$$

$$\int\sin^2x\cos x\,dx=\frac{1}{3}\sin^3x \qquad \int\sin x\cos^2x\,dx=-\frac{1}{3}\cos^3x \tag{274}$$

$$\int\sin^4x\,dx=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{32}\sin(4x) \tag{275}$$

$$\int\cos^4x\,dx=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{32}\sin(4x) \tag{276}$$

$$\int\sin^5x\,dx=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3x-\frac{1}{5}\cos^5x \tag{277}$$

$$\int\cos^5x\,dx=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3x+\frac{1}{5}\sin^5x \tag{278}$$

$$\int xe^{-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2} \qquad \int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\sqrt{\pi} \tag{279}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2},dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha^3}} \tag{280}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2+\beta x}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \qquad \int_0^{2\pi}e^{i\alpha\varphi}\mathrm{d}\varphi=0\ \forall\alpha\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \tag{281}$$

▲ **Numeri complessi**

$$z=a+ib=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))=re^{i\theta} \quad \overline{z}=z^*=a-ib \tag{282}$$

$$\alpha^*\beta+\alpha\beta^*=z+z^*=2\mathrm{Re}(z)=2\mathrm{Re}(\alpha^*\beta) \tag{283}$$

dove

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2} \tag{284}$$

$$z^n=r^n\left[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right] \tag{285}$$

▲ **Vettori complessi**

$$\langle\mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle=\sum_{j=1}^nu_j^*v_j \quad \|\mathbf{u}\|=\sqrt{\langle\mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle}=\sqrt{\sum_{j=1}^n|u_j|^2} \tag{286}$$

▲ **Gradiente e laplaciano**

$$\nabla f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \tag{287}$$

$$\nabla f(r,\theta,\varphi)=\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial f}{\partial r}+\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi} \tag{288}$$

$$\nabla^2f(x,y,z)=\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2f}{\partial z^2} \tag{289}$$

$$\nabla^2f(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+ \tag{290}$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2f}{\partial\varphi^2} \tag{291}$$

▲ **Matrici**

$$e^A=\sum_0^\infty\frac{A^n}{n!}=Ue^{A_d}U^\dagger \tag{292}$$

Dove A_d è la matrice A diagonalizzata e U è la matrice che ha come colonne gli autovettori normalizzati di A, nell'ordine in cui compaiono gli autovalori in A_d

$$\det(A)=\sum_{k=1}^na_{ik}(-1)^{i+k}M_{i+k} \tag{293}$$

$$A^2=\mathbb{I}\implies\sigma(A)=\pm1 \tag{294}$$

▲ **Serie geometrica**

$$\sum_{i=0}^Nq^i=\frac{1-q^{N+1}}{1-q} \tag{295}$$

La serie converge per $|q|<1$ e in tal caso:

$$\sum_{i=0}^\infty q^i=\frac{1}{1-q} \tag{296}$$

▲ **Sviluppi in serie**

· **Formula generale e formule principali**

$$f(x)=f(a)+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots \tag{297}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5) \quad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4) \tag{298}$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+2\frac{x^5}{15}+o(x^6) \tag{299}$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \tag{300}$$

▲ **Equazioni differenziali (ODE)**

· **Forma generale del primo ordine**

$$\dot{y}(t)+a(t)y(t)=b(t) \tag{301}$$

La soluzione è:

$$y(t)=e^{-A(t)}\left[c+\int b(t)e^{A(t)}dt\right] \tag{302}$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$.

· **Forma generale del secondo ordine (omogenea)**

$$\ddot{y}+a\dot{y}+by=0, \quad a,b\in\mathbb{R} \tag{303}$$

Le soluzioni dell'equazione associata dipendono da Δ:

· **Se $\Delta>0$:**

$$y(t)=c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t} \tag{304}$$

· **Se $\Delta=0$:**

$$y(t)=c_1e^{\lambda_1t}+tc_2e^{\lambda_1t} \tag{305}$$

· **Se $\Delta<0$:**

$$y(t)=c_1e^{\alpha t}\cos(\beta t)+c_2e^{\alpha t}\sin(\beta t) \tag{306}$$

con $\alpha=\mathrm{Re}(\lambda)$, $\beta=\mathrm{Im}(\lambda)$.

▲ **Proprietà del commutatore**

$$[A,B]=-[B,A] \qquad [A+B,C]=[A,C]+[B,C] \tag{307}$$

$$[A,B+C]=[A,B]+[A,C] \tag{308}$$

$$[A,BC]=[A,B]C+B[A,C] \tag{309}$$

$$[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B \tag{310}$$