MECCANICA AL FISSATO

Operazioni in $L^2(\Delta)$

- **Prodotto scalare**

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \int_\Delta \varphi^*(x)\psi(x)\,dx = \overline{\langle\psi|\varphi\rangle} \tag{1}$$

- **Normalizzazione**

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = \int_\Delta \overline{\psi(x)}\psi(x)\,dx = \int_\Delta |\psi(x)|^2\,dx = ||\psi||^2 \tag{2}$$

- **Autoaggiuntezza di un operatore**

$$\langle A\psi|\varphi\rangle = \langle\psi|A^\dagger\varphi\rangle = \langle\psi|A\varphi\rangle \tag{3}$$

- **Norma di un operatore**

$$\|A\| = \sup_{\psi\in\mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{\|A\psi\|}{\|\psi\|} = \sup_{\|\psi\|=1} \|A\psi\| \tag{4}$$

- **Operatore che è funzione di un altro operatore**

$$f(A)\psi = f(a)\psi \tag{5}$$

Vale se A è autoaggiunto e ψ autofunzione

Probabilità e statistica

- **Probabilità di una misura** La probabilità che una misura dell'osservabile A nello stato $|\psi\rangle$ sia a $\in\ \sigma_d(A)$ è :

$$\mathrm{P}_\psi(a) = \sum_{r=1}^{d(a)} \frac{|\langle a,r|\psi\rangle|^2}{\|\psi\|^2} \tag{6}$$

Mentre che sia $\in [a,\ a+\epsilon] \subseteq \sigma_c(A)$ è:

$$\int_a^{a+\epsilon} \rho_\psi\ \mathrm{d}a \qquad \text{dove} \qquad \rho_\psi = \sum_{r=1}^{d(a)} \frac{|\langle a,r|\psi\rangle|^2}{\|\psi\|^2} \tag{7}$$

- **Probabilità di trovare la particella nell'intervallo $I \subseteq \Delta$**

$$\Pr(I) = \frac{\int_I |\psi(x)|^2\,dx}{||\psi||^2} \qquad \text{dove} \qquad ||\psi||^2 = \int_\Delta |\psi|^2 dx \tag{8}$$

Vale anche per qualsiasi altra rappresentazione di ψ integrando nel corrispondente differenziale (ad esempio probabilità che la particella assuma un intervallo di momenti)

- **Teorema di Plancherel**

$$\int_\mathbb{R} |\tilde{\psi}(p)|^2 dp \ = \int_\mathbb{R} |\psi(x)|^2 dx \tag{9}$$

- **Valor medio di un operatore nello stato $|\psi\rangle$**

$$\langle A\rangle_\psi = \frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{||\psi||^2} = \sum_{a\ \in\ \sigma_d(A)} a\cdot \mathrm{P}_\psi(a) + \int_{\sigma_c(A)} a\cdot\rho_\psi\ \mathrm{d}a \tag{10}$$

- **Fluttuazione di un operatore**

$$(\Delta A)_{\hat{a},\psi} = \sqrt{\langle A^2\rangle_\psi - \langle A\rangle_\psi^2} \tag{11}$$

Operatore posizione X

$$X\psi(x) = x\psi(x) \quad X^2\psi(x) = x^2\psi(x) \quad X^{-1}\psi(x) = \frac{1}{x}\psi(x) \tag{12}$$

Operatore momento P

$$P = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \quad P^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{13}$$

Se definito in un compatto $[0,L]$, le autofunzioni sono

$$\psi(x) = C\exp\left(\frac{i\lambda x}{\hbar}\right), \quad \lambda\in\mathbb{Z} \tag{14}$$

ove si impone

$$\psi(0) = \psi(L) \tag{15}$$

In particolare, se definito su una circonferenza, allora

$$\lambda = \frac{n\hbar}{R} \tag{16}$$

dove R è il raggio e $n\in\mathbb{Z}$

equazione di Schrödinger in forma stazionaria

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right]\psi(x) = E\psi(x) \tag{17}$$

Dalla rappresentazione $\{x\}$ a $\{p\}$

Se si è in una dimensione

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_\mathbb{R} e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\psi(x)\,dx \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_\mathbb{R} e^{\frac{ipx}{\hbar}}\tilde{\psi}(p)\,dp \tag{18}$$

Se si è in tre dimensioni invece tra p e x nell'exp va fatto il prodotto scalare, i differenziali sono in tre dimensioni e $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$ diventa $\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$

Indeterminazione di Heisenberg

- **Espressione generale**

$$(\Delta A)_\psi(\Delta B)_\psi \geq \frac{1}{2}\,|\langle[A,B]\rangle_\psi| \tag{19}$$

- **Per la posizione e il momento**

$$(\Delta X)_\psi(\Delta P)_\psi \geq \frac{\hbar}{2} \tag{20}$$

Proiettori

$$\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \qquad \mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \tag{21}$$

Gli autovalori di un proiettore sono 0 e 1

- **Utilizzo dei proiettori nel caso di spettro discreto** Nel caso di $a\in\sigma_d(A)$ allora:

$$\mathcal{P}_a = \sum_{r=1}^{d(a)} |a,r\rangle\langle a,r| \tag{22}$$

$$\sum_{a\ \in\ \sigma_d(A)} \mathcal{P}_a = \sum_{a\ \in\ \sigma_d(A)}\sum_{r=1}^{d(a)} |a,r\rangle\langle a,r| = \mathbb{I} \tag{23}$$

$$\langle\mathcal{P}_a\rangle_\psi = \sum_{r=1}^{d(a)} \frac{|\langle a,r|\psi\rangle|^2}{\|\psi\|^2} = \frac{\|\mathcal{P}_a|\psi\rangle\|^2}{\|\psi\|^2} = \mathrm{P}_\psi(a) \tag{24}$$

- **Utilizzo dei proiettori nel caso di spettro generico**

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \oplus \mathcal{H}_s^\perp \tag{25}$$

$$S\subseteq\mathbb{R} \tag{26}$$

$$\mathcal{P}_s = \sum_{a\ \in\ \sigma_d(A)\ \cap\ S}\sum_{r=1}^{d(a)} |a,r\rangle\langle a,r| + \int_{\sigma_c(A)\ \cap\ S}\sum_{r=1}^{d(a)} |a,r\rangle\langle a,r|\,\mathrm{d}a \tag{27}$$

$\langle\mathcal{P}_s\rangle_\psi$ è la Probabilità che una misura di A nello stato ψ dia $a\ \in\ S$

Teoria della misura

Lo stato prima della misura può essere descritto come

$$|\psi\rangle = \mathcal{P}_a|\psi\rangle + (\mathbb{I}-\mathcal{P}_a)|\psi\rangle \tag{28}$$

Dopo la misura lo stato diventa

$$|\psi\rangle = \mathcal{P}_a|\psi\rangle \tag{29}$$

- **Osservabili compatibili** Siano A e B due operatori limitati e i relativi osservabili con spettro discreto. Allora valgono e sono equivalenti le seguenti affermazioni:

$$\mathcal{A} \text{ e } \mathcal{B} \text{ sono compatibili} \tag{30}$$

$$\exists \text{ una base o.n. } \{|a,b,r\rangle\}_{\substack{a\in\sigma(A)\\ b\in\sigma(B)\\ r=1,\dots,d(a,b)}} \tag{31}$$

Vale dunque $A|a,b,r\rangle = a|a,b,r\rangle$ e $B|a,b,r\rangle = b|a,b,r\rangle$

$$[A,B] = 0 \tag{32}$$

Inoltre vale:

$$[A,B]=0 \implies [\mathcal{P}_a,\mathcal{P}_b] = 0\ \forall a,b \iff [f(A),g(B)] = 0 \tag{33}$$

- **ICOC** Si tratta di un insieme completo di osservabili compatibili, si può indicare con $\vec{A}$.

$$\vec{A}\ \text{ICOC} \iff d(\vec{a}) = 1\ \forall\vec{a}\ \in\ \sigma_{\vec{A}} \tag{34}$$

La base o.n. di un ICOC sarà $\{|\vec{a}\rangle\}_{\vec{a}\ \in\ \sigma(\vec{A})}$

Quantizzazione canonica

$$\{\,\} = \frac{1}{i\hbar}[\,,\,] \tag{35}$$

Evoluzione temporale causale

Equazione di Schrödinger in forma temporale

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = H\psi(t) \tag{36}$$

Dove $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ è l'espressione dell'operatore Energia. Una combinazione lineare di soluzioni è ancora una soluzione. Per ogni dato iniziale $|\psi(0)\rangle$ si avrà un'unica soluzione $\forall t$. Infine $\|\psi(t)\|$ si conserva nel tempo. Inoltre ψ^* è soluzione dell'equazione

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(t) = H\psi^*(t) \tag{37}$$

Equazione di continuità

$$\frac{d}{dt}\rho(\vec{x},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{x},t) = 0 \tag{38}$$

dove

$$\rho(\vec{x},t) = |\psi(\vec{x},t)|^2 \tag{39}$$

è la densità di probabilità, mentre

$$\vec{J}(\vec{x},t) = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right) \tag{40}$$

è la densità di corrente di probabilità.

Operatore di evoluzione causale

$$U^{-1}(t,t_0) = U^+(t,t_0) = U(t_0,t) \tag{41}$$

In un sistema conservativo, in cui cioè l'hamiltoniana resta invariata nel tempo, si ha

$$U(t) = \exp\left(-i\frac{t}{\hbar}H\right) \tag{42}$$

Visuale di Schroedinger

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(t_0)\rangle \tag{43}$$

Sia $|E_n,r\rangle$ l'autoket dell'autovalore E_n, allora, per quanto riguarda la parte di spettro discreto

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n\sum_{r=1}^{d(E_n)} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)\right)\langle E_n,r|\psi(t_0)\rangle\,|E_n,r\rangle \tag{44}$$

Se poi c'è anche una parte continua di spettro si aggiunge

$$\int_{\sigma_c(H)} d\mathrm{E}\sum_{r=1}^{d(E)} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E(t-t_0)\right)\langle E,r|\psi(t_0)\rangle\,|E,r\rangle \tag{45}$$

- **Stati stazionari** Un autostato dell'hamiltoniana, $|\psi_E\rangle$ viene chiamato stato stazionario ed evolve in questo modo:

$$|\psi_E(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{h}E(t-t_0)\right)|\psi_E(t_0)\rangle \tag{46}$$

il valor medio di un operatore calcolato su uno stato stazionario non varia nel tempo:

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\psi_E} = 0\ \forall A \tag{47}$$

- **Operatori** In visuale di Schroedinger gli operatori rimangono invariati:

$$A\to\ A \tag{48}$$

Visuale di Heisenberg

- **Equazione di Born-Heisenberg-Jordan**

$$\frac{d}{dt}X_h(t) = \frac{[X_h(t),H]}{i\hbar} + \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_h(t) \tag{49}$$

dove l'ultimo termine è presente solo se A dipende esplicitamente dal tempo

- **Trasformazione unitaria** In visuale di Heisenberg, la trasformazione unitaria $U(t,t_0)$ trasforma l'operatore A_s (operatore A in visuale di Schroedinger) come:

$$A\to A_h = U^\dagger(t,t_0)A_sU(t,t_0) \tag{50}$$

mentre gli stati rimangono invariati:

$$\psi\to\psi \tag{51}$$

In particolare $|\psi\rangle$ in visuale di Heisenberg sarà uguale al ket in visuale di Schroedinger all'istante iniziale:

$$|\psi_h(t)\rangle = |\psi_h(t_0)\rangle = |\psi_s(t_0)\rangle \tag{52}$$

- **Valori medi di operatori** In visuale di Heisenberg e di Schroedinger i valori medi degli operatori coincidono:

$$\langle A_s\rangle = \langle A_h\rangle \tag{53}$$

Inoltre

$$\frac{d}{dt}\langle A_h\rangle_\psi(t) = \frac{\langle\psi_h|\frac{d}{dt}A_h|\psi_h\rangle}{\|\psi_h\|^2} \tag{54}$$

$$\frac{d}{dt}A_h = 0 \implies \frac{d}{dt}\langle A_h\rangle = 0 \tag{55}$$

Teorema di Ehrenfest

$$\frac{d}{dt}\langle Q\rangle_\psi = \frac{\langle P\rangle_\psi}{m} \qquad \frac{d}{dt}\langle P\rangle_\psi = -\langle V'(Q)\rangle_\psi \tag{56}$$

Indeterminazione tempo energia

$$(\Delta t)_\psi(\Delta E)_\psi \gtrsim \frac{\hbar}{2} \tag{57}$$

Operatori densità

Per uno stato puro si ha

$$\rho_\psi = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\|\psi\|^2} \tag{58}$$

$$\rho_{nm} = \langle n|\rho|m\rangle = \langle n|\psi\rangle\langle\psi|m\rangle = C_nC_m^* \tag{59}$$

ρ, per uno stato puro, è un proiettore per cui valgono le proprietà dei proiettori. Inoltre per uno stato puro valgono

$$\sigma(\rho)\geq 0 \qquad Tr(\rho^2) = 1 \tag{60}$$

Dove Tr è la traccia

$$\langle A\rangle_\psi = \mathrm{Tr}(\rho A) \tag{61}$$

Per uno stato misto ϵ si ha

$$\rho_\epsilon = \sum_k P_k|\psi_k\rangle\langle\psi_k| \tag{62}$$

Dove le P_k sono le probabilità associate agli stati puri ψ_k, per cui la loro somma deve essere uguale a 1. Inoltre si ha

$$\langle A\rangle_\epsilon = \sum_k P_k\langle A_k\rangle = Tr(\rho_\epsilon A) \tag{63}$$

Infine per uno stato misto si ha

$$Tr(\rho^2) < 1 \tag{64}$$

Per quanto riguarda l'evoluzione casuale si ha:

$$\langle A\rangle(t) = Tr(U\rho(t_0)U^\dagger A) = Tr(\rho(t_0)U^\dagger AU) = Tr(\rho(t_0)A_h) \tag{65}$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}\rho_s(t) = [H_s(t),\rho_s(t)] \tag{66}$$

Simmetrie

- **Teorema di Wigner**

$$\tau \text{è una trasformazione di simmetria} \iff \begin{cases}\psi' = W\psi\\ A' = WAW^\dagger\end{cases} \tag{67}$$

Con U operatore unitario o antiunitario

Traslazioni spaziali

- **Operatore di traslazione**

$$U(\varphi) = \exp\left(-i\frac{\varphi}{\hbar}P\right) \tag{68}$$

dove φ è il parametro di traslazione e P è il generatore infinitesimo di traslazione

- **Effetto sull'operatore di posizione e sul momento**

$$X' = U(\varphi)XU(\varphi)^\dagger = X-\varphi \qquad U(\varphi)^\dagger XU(\varphi) = X+\varphi \tag{69}$$

$$U(\varphi)P = P \tag{70}$$

- **Effetto sulla funzione d'onda**

$$U(\varphi)\psi(x) = \psi(x-\varphi) \tag{71}$$

- **Traslazioni in 3D** Le relazioni sono analoghe a quelle in 1D, semplicemente vanno espresse vettorialmente. Inoltre

$$U(\vec{\varphi}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\vec{\varphi}\right) \tag{72}$$

Rotazioni

- **Operatore di rotazione**

$$U(\vec{\varphi}) = \exp\left(-i\frac{\vec{\varphi}\cdot\vec{J}}{\hbar}\right) \tag{73}$$

$\vec{J}$ è dunque il generatore infinitesimo di rotazione

- **Matrice di rotazione attorno all'asse z**

$$R(\varphi,\hat{z}) = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{74}$$

- **Effetto sulle coordinate e momento**

$$X' = U^\dagger XU = R^{-1}(\vec{\varphi})X \qquad P' = U^\dagger PU = R^{-1}(\vec{\varphi})P \tag{75}$$

Simmetrie della dinamica

Sono quelle simmetrie tali per cui

$$[W,H] = 0 \iff WHW^\dagger = H \iff [W,U(t-t_0)] = 0 \tag{76}$$

dove $U(t-t_0)$ in questo caso è l'operatore di evoluzione causale definito

- **Gruppo a un parametro di simmetrie della dinamica** Definito

$$W(\varphi) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Q\varphi\right) \tag{77}$$

con $W(s)\in G_d$ (gruppo di simmetrie della dinamica) e Q generatore infinitesimo della simmetria, si ha

$$[W(s),H] = 0 \iff [Q,H] = 0 \iff \frac{d}{dt}\langle Q\rangle_\psi(t) = 0 \quad \forall\psi\in\mathcal{H} \tag{78}$$

E ciò se e solo se Q è una costante del moto

- **Esempio con Hamiltoniana in una dimensione** Ad esempio per un oscillatore armonico in direzione x, come nel caso della (110), siccome P_y e P_z commutano con H, i loro valori medi non varieranno nel tempo. Il valor medio di P_x invece non varierà nel tempo, in generale, solo se calcolato su uno stato stazionario di H (si veda la (47)).
- **Simmetrie della dinamica e autostati dell'energia** W mescola autostati di H con la stessa energia, per cui essa è una matrice a blocchi. Si ha

$$[W,H] = 0 \iff \forall|E\rangle\ \in\mathcal{H}_E,\ W|E\rangle\ \in\ \mathcal{H}_E \tag{79}$$

dove $\mathcal{H}_E$ è l'autospazio dell'hamiltoniano relativo all'autovalore E, e inoltre $H|E\rangle = E|E\rangle$

Operatore parità

- **azione dell'operatore parità sulla funzione d'onda**

$$P\psi(x) = \psi(-x) \tag{80}$$

- **Spettro e autofunzioni** Lo spettro è

$$\sigma(P) = \{\pm1\} \tag{81}$$

e la degenerazione degli autovalori è infinita.

$$\begin{cases}P\psi(x) = \psi(x) & \text{se } \psi(x) \text{ è pari}\\ P\psi(x) = -\psi(x) & \text{se dispari}\end{cases} \tag{82}$$

- **Trasformato per parità** Il trasformato per parità di un generico operatore A è

$$PAP^\dagger \tag{83}$$

Nel caso dell'oscillatore armonico, per gli operatori di distruzione e creazione:

$$PaP^\dagger = -a \qquad Pa^\dagger P^\dagger = -a^\dagger \tag{84}$$

E per gli operatori posizione e momento:

$$P\vec{X}P^\dagger = -\vec{X} \qquad P\vec{P}P^\dagger = -\vec{P} \qquad P\vec{L}P^\dagger = \vec{L} \tag{85}$$

- **Attenzione alla parità** La parità su una funzione traslata agisce solo sulla variabile indipendente e non sul fattore di traslazione. Ovvero:

$$Pf(x-2a) = f(-x-2a) \tag{86}$$

Se invece si effettua la trasformazione:

$$f(x-2a)\to f(-x+2a) \tag{87}$$

Si è effettuata una riflessione intorno all'asse $x = a$.

- **Parità come simmetria della dinamica** l'Operatore parità rappresenta una simmetria della dinamica quando commuta con H. Ad esempio se per l'hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{X}) \tag{88}$$

si ha $V(\vec{X}) = V(-\vec{X})$, come nel caso dell'oscillatore armonico, allora le autofunzioni dell'hamiltoniana hanno parità definita. Esse sono anche autofunzioni della parità in quanto H e la parità saranno operatori compatibili. Ciò significa inoltre che considerato un generico stato, se questo ad esempio è pari, si può decomporre in autostati pari dell'hamiltoniana.

Inversione temporale

Essa manda t in -t

- **Azione sugli operatori**

$$\mathcal{T}\vec{X}\mathcal{T}^\dagger = \vec{X} \qquad \mathcal{T}\vec{P}\mathcal{T}^\dagger = -\vec{P} \tag{89}$$

- **Azione sulla funzione d'onda**

$$\mathcal{T}\psi(x) = \psi^*(x) \tag{90}$$

- **Inversione temporale e evoluzione causale**

$$\mathcal{T}U(t)\mathcal{T}^\dagger = U(-t) \tag{91}$$

dove $U(t)$ è l'operatore di evoluzione causale.

$$\mathcal{T}|\psi(-t)\rangle = U(t)\mathcal{T}|\psi(0)\rangle \qquad \mathcal{T}\psi(\vec{x},t) = \psi^*(\vec{x},-t) \tag{92}$$

Commutazioni generiche e altre formule

- **Commutatori di base**

$$[X_i,P_j] = i\hbar\delta_{ij} \qquad [Q,f(P)] = i\hbar f'(P) \tag{93}$$

dove Q è l'operatore di posizione generalizzata

$$[X,P^2] = 2i\hbar P \qquad [X^2,P^2] = 4i\hbar XP + 2\hbar^2 \tag{94}$$

- **Commutatori con l'operatore di traslazione**

$$[Q,U(\varphi)] = \varphi\ U(\varphi) \tag{95}$$

- **Formula di Baker-Campbell-Hausdorff**

$$e^Ae^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}([A,[A,B]]+[B,[B,A]])\ +\dots} \tag{96}$$

Formule utili da Fisica moderna

Particella libera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi_E(x) = E\varphi_E(x) \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}\varphi_E(x) + k^2\varphi_E(x) = 0 \tag{97}$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{98}$$

La soluzione è

$$\psi_s(x,t) = C_+e^{i(kx-\omega t)} + C_-e^{-i(kx-\omega t)} \tag{99}$$

dove il primo termine è un'onda che va verso dx mentre il secondo è un'onda che va verso sx.

- **Dominio dell'hamiltoniana di una particella libera**

$$D(H) = \left\{\psi(x)\in L^2(\mathbb{R},dx),\ p^2\tilde{\psi}(p)\in L^2(\mathbb{R},dp)\right\} \tag{100}$$

Quando il potenziale è C^∞ ed è limitato in tutto $\mathbb{R}$ allora il dominio dell'hamiltoniana del sistema è lo stesso di quella libera.

Energia e momento quantizzati

Per un quanto di energia si ha

$$E = \hbar\omega \qquad P = \hbar k = \hbar\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\hbar\omega}{c} \tag{101}$$

Buca infinita

- **Buca di potenziale infinitamente profonda, posta in $[-L/2,+L/2]$**
- **Equazione agli autovalori**

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi_E(x) = E\varphi_E(x) \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}\varphi_E(x) + k^2\varphi_E(x) = 0 \tag{102}$$

- **Soluzioni**

$$\varphi_n(x) = \begin{cases}\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & n>0 \text{ dispari}\\ \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & n>0 \text{ pari}\end{cases} \tag{103}$$

- **Autovalori di H**

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \tag{104}$$

- **Buca di potenziale infinitamente profonda, posta in [0,L]** L'energia rimane la stessa, mentre le autofunzioni sono

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\ \forall\ n>0 \tag{105}$$

Gradino di potenziale

Potenziale a gradino $V(x) = \bar{V}\Theta(x)$, con $\Theta(x)$ funzione di Heaviside.

- **Autofunzioni** Si pone

$$\chi = \sqrt{\frac{2m(\bar{V}-E)}{\hbar^2}} \qquad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{106}$$

- **Con energia minore di $\bar{V}$**

$$\varphi_E(x) = \begin{cases}c_+^1e^{ikx} + c_-^1e^{-ikx}, & x<0\\ c_2^-e^{-\chi x}, & x\geq 0\end{cases} \tag{107}$$

- **Con energia maggiore di $\bar{V}$**

$$\varphi_E(x) = \begin{cases}c_+^1e^{ikx} + c_-^1e^{-ikx}, & x<0\\ c_2^+e^{\chi x}, & x\geq 0\end{cases} \tag{108}$$

Oscillatore armonico

- **Pulsazione**

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{109}$$

- **Hamiltoniana**

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2X^2 + V_0 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + V_0 \tag{110}$$

- **Spettro di H**

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) + V_0, \quad n\in\mathbb{N}\ \mathrm{U}\ \{0\} \tag{111}$$

- **Commutazione con la parità**

$$[P,H] = 0 \tag{112}$$

- **Autofunzioni**

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \tag{113}$$

$$\psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \tag{114}$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{8}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)\left(4\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - 2\right) \tag{115}$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^nn!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) \tag{116}$$

Dove $H_n(y)$ sono i polinomi di Hermite:

$$H_n(y) = (-1)^ne^{y^2}\frac{d^n}{dy^n}e^{-y^2} \tag{117}$$

$$H_0(y) = 1, \quad H_1(y) = 2y, \quad H_2(y) = 4y^2 - 2 \tag{118}$$

- **Proprietà delle autofunzioni** Ortogonalità:

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn} \tag{119}$$

$$\int_\mathbb{R}\psi_i(ax)\psi_j(ax) = \frac{\delta_{ij}}{a} \tag{120}$$

Le autofunzioni sono a parità definita, ovvero sono pari per indici pari, dispari per indici dispari:

$$\psi_n(-x) = (-1)^n\psi_n(x) \tag{121}$$

$$\langle X\rangle_{\psi_n} = \langle P\rangle_{\psi_n} = 0 \qquad \langle X^2\rangle_{\psi_n} = \frac{\hbar}{m\omega}(n+\frac{1}{2}) \tag{122}$$

$$\langle P^2\rangle_{\psi_n} = \hbar\omega m(n+\frac{1}{2}) \implies \langle\frac{P^2}{2m}\rangle_{\psi_n} = \frac{E_n}{2} \tag{123}$$

Ovvero l'energia è equamente divisa, in media, tra parte cineticia e parte potenziale.

- **Teorema di Ehrenfest per l'oscillatore armonico** Le soluzioni delle due equazioni differenziali per l'oscillatore armonico sono

$$\langle X\rangle_\psi = A\cos(\omega t+\delta) \quad \langle P\rangle_\psi = -mA\omega\sin(\omega t+\delta) \tag{124}$$

- **Evoluzione temporale oscillatore armonico** $|\psi(t)\rangle$ nel caso dell'oscillatore armonico è periodica con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{125}$$

▲ Operatori di creazione e distruzione

- **Operatori definiti**

$$X' = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X, \quad P' = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}P \tag{126}$$

$$a = \frac{X' + iP'}{\sqrt{2}}, \quad a^\dagger = \frac{X' - iP'}{\sqrt{2}} \tag{127}$$

- **Relazioni di commutazione**

$$[a, a^\dagger] = 1 \tag{128}$$

- **Espressioni per X e P**

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \qquad P = \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(a^\dagger - a) \tag{129}$$

- **Azioni degli operatori**

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \tag{130}$$

$$(a^\dagger)^2|n\rangle = \sqrt{(n+1)(n+2)}|n+2\rangle \quad a^2|n\rangle = \sqrt{n(n-1)}|n-2\rangle \tag{131}$$

$$aa^\dagger|n\rangle = (n+1)|n\rangle, \quad a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle \tag{132}$$

$$P|n\rangle = (-1)^n|n\rangle = (-1)^N|n\rangle \tag{133}$$

Autofunzioni:

$$\psi_n(x) = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\psi_0(x) \tag{134}$$

▲ Operatore numero

$$N = a^\dagger a \qquad N\,|n\rangle = n\,|n\rangle \qquad Na\,|n\rangle = (n-1)a\,|n\rangle \tag{135}$$

- **Relazioni di commutazione**

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger \tag{136}$$

■ Momento angolare

▲ Momento angolare totale

Il momento angolare totale è

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \tag{137}$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare orbitale, mentre $\vec{S}$ è lo spin

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \tag{138}$$

- **Autovalori di J^2 e J_z**

$$J^2|l,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle \qquad L_z|j,m\rangle = \hbar m|j,m\rangle \tag{139}$$

con $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ e $m \in \{-j, -j+1, \ldots, +j\}$.

▲ Momento angolare orbitale

$$\vec{L} = \vec{X} \times \vec{P} \qquad L_k = \sum_{i,j}\epsilon_{kij}X_iP_j \tag{140}$$

$$L_x = YP_z - ZP_y \quad L_y = ZP_x - XP_z \quad L_z = XP_y - YP_x \tag{141}$$

- **Autovalori di L^2 e L_z**

$$L^2|l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l,m\rangle \qquad L_z|l,m\rangle = \hbar m|l,m\rangle \tag{142}$$

- **Espressione di L^2**

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right] \tag{143}$$

▲ Operatori di abbassamento e innalzamento

$$L_\pm = \hbar e^{\pm i\varphi}\left[i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi} \pm \frac{\partial}{\partial\theta}\right] \tag{144}$$

$$J_\pm = J_x \pm iJ_y, \quad J_- = (J_+)^\dagger \tag{145}$$

$$J_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}|j, m\pm 1\rangle \tag{146}$$

Nella base $|j,m\rangle$, con m che va in ordine da j a $-j$, J_z risulta diagonalizzata, J_+ ha valori non nulli solo nella diagonale sopra quella principale, J_- ha valori non nulli solo nella diagonale sotto quella principale.

$$J_zJ_\pm|\lambda,m\rangle = \hbar(m\pm 1)J_\pm|\lambda,m\rangle \tag{147}$$

$$J_+J_- = J^2 - J_z\left(J_z - \hbar\right) \qquad J_-J_+ = J^2 - J_z\left(J_z + \hbar\right) \tag{148}$$

- **Espressione di J_x e J_y**

$$J_x = \frac{J_+ + J_-}{2} \qquad J_y = \frac{J_+ - J_-}{2i} \tag{149}$$

▲ Relazioni di commutazione

$$[J_i, L_j] = [L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \quad [L^2, L_j] = 0 \quad [J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k \tag{150}$$

$$[L_i, X_j] = [J_i, X_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}X_k \quad [L_i, P_j] = [J_i, P_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}P_k \tag{151}$$

$$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm \qquad [J_+, J_-] = 2\hbar J_z \tag{152}$$

▲ Autofunzioni simultanee di L^2 e L_z

La forma generica è data da

$$\psi_l^m = f_l^m(r)Y_l^m(r,\theta,\varphi) \tag{153}$$

dove

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \tag{154}$$

vengono dette armoniche sferiche. In termini di polinomi di Legendre, si ha:

$$P_l^m(x) = (-1)^m\frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l \tag{155}$$

Le armoniche sferiche sono ortonormali:

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\sin(\theta)\overline{Y_l^m(\theta,\varphi)}Y_{l'}^{m'}(\theta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{156}$$

Inoltre valgono le seguenti proprietà:

$$Y_l^m(\pi-\theta, \varphi+\pi) = (-1)^l Y_l^m(\theta,\varphi) \tag{157}$$

$$\overline{Y_l^m(\theta,\varphi)} = (-1)^m Y_l^{-m}(\theta,\varphi) \tag{158}$$

Per la funzione radiale bisogna imporre la normalizzazione seguente:

$$\int_0^{+\infty}r^2|f_l^m(r)|^2\mathrm{d}r = 1 \tag{159}$$

- **Armoniche sferiche: Primi valori** Le armoniche sferiche sono pari se l è pari, dispari altrimenti.
- **Per $l = 0$**

$$Y_0^0(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{160}$$

- **Per $l = 1$**

$$Y_1^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{z}{r} \tag{161}$$

$$Y_1^{\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x \pm iy}{r} \tag{162}$$

- **Per $l = 2$**

$$Y_2^0(\theta,\varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(3\cos^2\theta - 1) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\frac{(2z^2 - x^2 - y^2)}{r^2} \tag{163}$$

$$Y_2^{\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}e^{\pm i\varphi}\sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{z(x\pm iy)}{r^2} \tag{164}$$

$$Y_2^{\pm2}(\theta,\varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}e^{\pm 2i\varphi}\sin^2\theta = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{(x\pm iy)^2}{r^2} \tag{165}$$

■ Prodotto tensore

$$\lambda\,|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \lambda(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle)\ \forall\lambda\ \in\ \mathbb{C} \tag{166}$$

$$|\psi_1\rangle \otimes (|\chi_2\rangle + |\psi_2\rangle) = |\psi_1\rangle \otimes |\chi_2\rangle + |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \tag{167}$$

$$\{|e_{1,n}\rangle \otimes |e_{2,m}\rangle\}_{\substack{n=1,\ldots,d_1\\ m=1,\ldots,d_2}} \tag{168}$$

è una base o.n. di $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, dove

$$\dim(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) = (\dim\mathcal{H}_1)(\dim\mathcal{H}_2) \tag{169}$$

▲ Prodotto scalare

$$\langle\psi|\psi'\rangle = \left(\sum_{n,m}c_{n,m}^*\,\langle e_{1,n}| \otimes \langle e_{2,m}|\right)\left(\sum_{n',m'}d_{n',m'}\,|e_{1,n'}\rangle \otimes |e_{2,m'}\rangle\right) \tag{170}$$

$$= \sum_{n,n',m,m'}c_{n.m}^*d_{n',m'}\delta_{n,n'}\delta_{m.m'} = \sum_{n,m}c_{n.m}^*d_{n,m} \tag{171}$$

Tra due vettori fattorizzati si ha

$$(\langle\psi_1| \otimes \langle\psi_2|)(|\chi_1\rangle \otimes |\chi_2\rangle) = \langle\psi_1|\chi_1\rangle_{\mathcal{H}_1}\,\langle\psi_2|\chi_2\rangle_{\mathcal{H}_2} \tag{172}$$

▲ Norma

$$\|\psi\|^2 = \sum_{n,m}|c_{n,m}|^2 \tag{173}$$

▲ Operatori e prodotto tensore

$$(A_1 \otimes B_2)\left(\sum_{n,m}C_{n,m}\,|e_{1,n}\rangle \otimes |e_{2,m}\rangle\right) = \tag{174}$$

$$= \sum_{n,m}C_{n,m}\,(A_1\,|e_{1,n}\rangle) \otimes (B_2\,|e_{2,m}\rangle) \tag{175}$$

$$(A_1 \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{H}_2})(\mathbb{I}_{\mathcal{H}_1} \otimes B_2) = A_1 \otimes B_2 = (\mathbb{I}_{\mathcal{H}_1} \otimes B_2)(A_1 \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{H}_2}) \tag{176}$$

$$A_1 \text{ a.a e } \{|a_{1,r}\rangle\}_{\substack{a_1\ \in\sigma(A_1)\\ r=1,\ldots,d(a1)}} \text{ base o.n. di } \mathcal{H}_1 \tag{177}$$

$$B_2 \text{ a.a e } \{|b_{2,s}\rangle\}_{\substack{b2\ \in\sigma(B2)\\ s=1,\ldots,d(b2)}} \text{ base o.n. di } \mathcal{H}_2 \tag{178}$$

$$(177) \text{ e } (178) \implies \{|a_{1,r}\rangle \otimes |b_{2,s}\rangle\}_{\substack{a1\ \in\sigma(A1), r=1,\ldots,d(a1)\\ b2\ \in\ \sigma(B2), s=1,\ldots,d(b2)}} \tag{179}$$

è base o.n. di $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Dati due autovalori a_1 e b_2 fissati, la degenerazione della coppia su $\mathcal{H}$ sarà

$$d(a_1, b_2) = d(a_1)d(b_2) \tag{180}$$

■ Spin

- **Relazioni di commutazione**

$$[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k \qquad [S_i, X_j] = [S_i, P_j] = [S_i, L_j] = 0 \tag{181}$$

- **Spettro di (S^2, S_z)**

$$\sigma(S^2; S_z) = \{\hbar^2 s(s+1), \hbar m\} \tag{182}$$

con $s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ e $m \in \{-s, -s+1, \ldots, +s\}$.

▲ Prodotto $L \cdot S$

$$L \cdot S = \frac{1}{2}\left(J^2 - L^2 - S^2\right) \tag{183}$$

▲ Spin $1/2$

- **Spettro**

$$\sigma(S_z) = \left\{-\frac{\hbar}{2}, +\frac{\hbar}{2}\right\} \tag{184}$$

- **Operatori di abbassamento e innalzamento** Per $S\pm$ vale l'analogo della (146) con s al posto di j, per S_x e S_y vale l'analogo della (149) cutilizzando $S_\pm$
- **Matrici di Pauli**

$$S = \frac{\hbar}{2}\sigma \tag{185}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{186}$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \qquad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \tag{187}$$

$$\sigma_i\sigma_j = \frac{1}{2}\left([\sigma_i, \sigma_j] + \{\sigma_i, \sigma_j\}\right) \tag{188}$$

- **Composizione di spin di due particelle**

$$S^{(1)} \cdot S^{(2)} = \frac{1}{2}\left(S_+^{(1)}S_-^{(2)} + S_-^{(1)}S_+^{(2)}\right) + S_z^{(1)}S_z^{(2)} \tag{189}$$

- **Spin in direzione $\hat{n}$** Sia $\hat{n}$ il versore in $\mathbb{R}^3$:

$$\hat{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \tag{190}$$

$$S \cdot \hat{n} = \frac{\hbar}{2}\sigma \cdot \hat{n} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi}\\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix} \tag{191}$$

Gli autostati sono:

$$|+\rangle_{\hat{n}} = \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}|-\rangle \tag{192}$$

$$|-\rangle_{\hat{n}} = -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}|+\rangle + \cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}|-\rangle \tag{193}$$

in forma matriciale gli autostati lungo una generica direzione $\hat{n}$ sono:

$$\left|\frac{\hbar}{2}\right\rangle_{\hat{n}} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}\end{pmatrix} \qquad \left|-\frac{\hbar}{2}\right\rangle_{\hat{n}} = \begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}\\ \cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}\end{pmatrix} \tag{194}$$

- **Spin in direzione x**

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \qquad |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) \tag{195}$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_x - |-\rangle_x) \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_x + |-\rangle_x) \tag{196}$$

- **Spin in direzione y**

$$|+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + i\,|-\rangle) \quad |-\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - i|-\rangle) \tag{197}$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_y + |-\rangle_y) \quad |-\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}(|+\rangle_y - |-\rangle_y) \tag{198}$$

■ Composizione dei momenti angolari

- **Generalità**

$$J = J^{(1)} \otimes I + I \otimes J^{(2)} \tag{199}$$

dove ad esempio per una particella con spin $J^{(1)} = L$ e $J^{(2)} = S$, mentre per due particelle senza spin $J^{(1)} = L^{(1)}$ e $J^{(2)} = L^{(2)}$. Possiamo diagonalizzare simultaneamente $\{J^{2\ (1)}, J_z^{(1)}, J^{2\ (2)}, J_z^{(2)}\}$ oppure $\{J^{2\ (1)}, J^{2\ (2)}, J^2, J_z\}$ per cui si può scrivere

$$|j1, j2, j, m\rangle \equiv |j,m\rangle = \sum_{m1,m2}|m1,m2\rangle\,\langle m1,m2|j,m\rangle \tag{200}$$

dove $\langle m1,m2|j,m\rangle$ vengono detti coefficienti di Clebsch Gordan. Si noti inoltre, che siccome essi possono essere scelti reali, si ha anche

$$|j1, j2, m1, m2\rangle \equiv |m1,m2\rangle = \sum_{j,m}|j,m\rangle\,\langle m1,m2|j,m\rangle \tag{201}$$

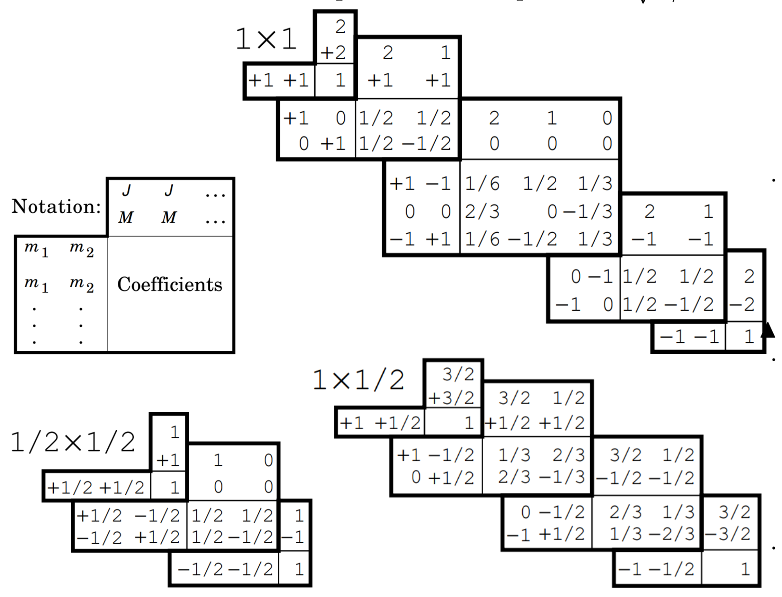
$$j\ \in \{j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \ldots, |j_1 - j_2|\} \tag{202}$$

$$J_z\,|j,m\rangle = \hbar m\,|j,m\rangle \qquad J_z\,|m1,m2\rangle = (m1+m2)\hbar\,|m1,m2\rangle \tag{203}$$

- **Relazioni di commutazione**

$$[J^2, J^{(1)}] = 0 \qquad [J^2, J^{(2)}] = 0 \qquad [J^2, J_i^{(1,2)}] \neq 0 \tag{204}$$

- **Coefficienti di Clebsch-Gordan** Ogni coefficiente, ad esempio $-3/2$, va letto come se ci fosse una radice. In questo caso quindi $-\sqrt{3/2}$



■ Particelle identiche

I bosoni hanno spin intero, ovvero $s\ \in \mathbb{Z}$ mentre i fermioni semi intero, ovvero $s\ \in\ \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Sotto lo scambio di etichette la funzione d'onda complessiva dei bosoni deve essere simmetrica, quella dei fermioni antisimmetrica (ovvero deve acquistare un segno - nel caso di due particelle).

▲ Due particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$

Considerato lo spazio di Hilbert

$$\mathcal{H}^{\otimes 2} = \mathcal{H}_{\vec{X_1},\vec{X_2}} \otimes \mathcal{H}_{\vec{S_1},\vec{S_2}} \tag{205}$$

Si possono diagonalizzare simultaneamente $\{\vec{X}_1, \vec{X}_2, S_{1,z}, S_{2,z}\}$ oppure $\{\vec{X}_1, \vec{X}_2, S^2, S_z\}$. Espandendo quest'ultima base data da $\{|s,m\rangle\}$ nella base della prima, data da $\{|m1,m2\rangle\}$, tramite i coefficienti di Clebsch-Gordan, si ottiene:

$$|1{,}1\rangle = |+,+\rangle \quad |1{,}0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right) \quad |1,-1\rangle = |--\rangle \tag{206}$$

che vengono detti stati di tripletto e sono simmetrici

$$|s=0, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right) \tag{207}$$

che viene detto stato di singoletto ed è asimmetrico. Per quanto detto sopra allora le parti di posizione per tali particelle dovranno essere antisimmetriche nel caso degli stati di tripletto e simmetriche nel caso del singoletto.

■ Atomo di Idrogeno

▲ Hamiltoniana separata in due parti

$$H = H_{CM} + H_r \quad M = m_a + m_b \tag{208}$$

$$\vec{X}_{CM} = \frac{m_a}{M}\vec{X}_a + \frac{m_b}{M}\vec{X}_b \quad \vec{P}_{CM} = \vec{P}_a + \vec{P}_b \tag{209}$$

$$\vec{X}_r = \vec{X}_a - \vec{X}_b \quad \vec{P}_r = \frac{m_b}{M}\vec{P}_a - \frac{\vec{m_a}}{M}\vec{P}_b \tag{210}$$

$$H_r = \frac{\vec{P}_r^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r} \qquad \mu = \frac{m_e m_p}{M} \tag{211}$$

▲ Autofunzioni e autovalori per stati legati

Le autofunzioni sono del tipo della (153). Gli autovalori E_n, con n=1 stato fondamentale, hanno degenerazione n^2. In particolare per ogni livello n si hanno autofunzioni per tutti i valori di l e m che rispettano tali condizioni:

$$0 \leq l < n \qquad -l \leq m \leq l \tag{212}$$

Gli autovalori hanno energia pari a

$$E_n = -\frac{E_I}{n^2} \tag{213}$$

■ Teoria delle perturbazioni

- **Hamiltoniana perturbata**

$$H = H_0 + \lambda V = H_0 + W \tag{214}$$

- **Equazioni agli autovalori**

$$H_0|E_n^0\rangle = E_n^0|E_n^0\rangle, \quad H|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle \tag{215}$$

▲ Risoluzione nei casi senza degenerazione

$$E_n^\lambda = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \ldots \tag{216}$$

$$\left|E_n^\lambda\right\rangle = \left|E_n^0\right\rangle + \lambda\left|E_n^1\right\rangle + \lambda^2\left|E_n^2\right\rangle + \ldots \tag{217}$$

- **Primo e secondo ordine**

$$E_n^1 = \langle E_n^0|V|E_n^0\rangle \qquad E_n^2 = \sum_{m\neq n}\frac{|\langle E_n^0|V|E_m^0\rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0} \tag{218}$$

$$\left|E_n^1\right\rangle = \sum_{m\neq n}\left|E_m^0\right\rangle\frac{\langle E_m^0|V|E_n^0\rangle}{E_n^0 - E_m^0} \tag{219}$$

▲ Risoluzione nei casi con degenerazione

Si costruisce la matrice W con dimensione pari al valore della degenerazione. Per trovarne gli elementi si usa

$$\langle\psi_r|V|\psi_s\rangle \tag{220}$$

dove $|\psi_r\rangle$ e $|\psi_s\rangle$ sono autovettori degeneri relativi allo stesso autovalore oppure no. Diagonalizzando V si trovano le correzioni $E_{n,1}^k$ relative agli sviluppi

$$E^k = E_{n,0}^k + \lambda E_{n,1}^k + \ldots \tag{221}$$

Gli autovettori della matrice V sono invece gli autovettori all'ordine 0 espressi nella base degli autovettori degeneri.

■ Matematica utile

▲ Identità trigonometriche

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \tag{222}$$

- **Formule di duplicazione**

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \tag{223}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \tag{224}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \tag{225}$$

- **Formule di bisezione**

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \tag{226}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} \tag{227}$$

- **Formule parametriche** Sia $t = \tan\frac{\alpha}{2}$ con $\alpha \neq (2k+1)\pi$, allora:

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos\alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \tag{228}$$

- **Formule di prostaferesi**

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{229}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{230}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \tag{231}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \tag{232}$$

- **Formule di Werner**

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \tag{233}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] \tag{234}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)] \tag{235}$$

- **Somme di argomenti dentro coseni e seni**

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \tag{236}$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \tag{237}$$

▲ Integrali

- **Coordinate polari**

$$(x,y) \to (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \qquad \int r\mathrm{d}r\int\mathrm{d}\varphi \tag{238}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \tag{239}$$

- **Coordinate cilindriche**

$$(x,y,z) \to (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) \qquad \int r\mathrm{d}r\int\mathrm{d}\varphi\int\mathrm{d}z \tag{240}$$

- **Coordinate sferiche**

$$(x,y,z) \to (r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta)) \tag{241}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r \tag{242}$$

$$\int r^2\mathrm{d}r\int\mathrm{d}\varphi\int\sin(\theta)\mathrm{d}\theta \quad \varphi \in (0{,}2\pi) \quad \theta \in (0,\pi) \tag{243}$$

- **Alcuni integrali notevoli**

$$\int\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) \tag{244}$$

$$\int\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) \tag{245}$$

$$\int\sin x\cos x\,dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x \tag{246}$$

$$\int\cos^3 x\,dx = \frac{1}{12}(9\sin x + \sin 3x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} \tag{247}$$

$$\int\sin^3 x\,dx = \frac{1}{12}(\cos 3x - 9\cos x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} \tag{248}$$

$$\int\sin^2 x\cos x\,dx = \frac{1}{3}\sin^3 x \qquad \int\sin x\cos^2 x\,dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x \tag{249}$$

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \qquad \int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} \tag{250}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha^3}} \tag{251}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2 + \beta x}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \tag{252}$$

▲ Numeri complessi

$$z = a + ib = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = re^{i\theta} \quad \overline{z} = z^* = a - ib \tag{253}$$

dove

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{254}$$

$$z^n = r^n\left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right] \tag{255}$$

▲ Vettori complessi

$$\langle\mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle = \sum_{j=1}^n u_j^*v_j \tag{256}$$

$$\||\mathbf{u}\rangle\| = \sqrt{\langle\mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^n|u_j|^2} \tag{257}$$

▲ Serie e somme di Gauss

- **Somma di Gauss**

$$\sum_{i=0}^N i = \frac{N(N+1)}{2} \tag{258}$$

- **Serie geometrica**

$$\sum_{i=0}^N q^i = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \tag{259}$$

La serie converge per $|q| < 1$ e in tal caso:

$$\sum_{i=0}^\infty q^i = \frac{1}{1 - q} \tag{260}$$

▲ Sviluppi in serie

- **Formula generale e formule principali**

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \cdots \tag{261}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \tag{262}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{15} + o(x^6) \tag{263}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{264}$$

▲ Equazioni differenziali (ODE)

- **Forma generale del primo ordine**

$$\dot{y}(t) + a(t)y(t) = b(t) \tag{265}$$

La soluzione è:

$$y(t) = e^{-A(t)}\left[c + \int b(t)e^{A(t)}dt\right] \tag{266}$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$.

- **Forma generale del secondo ordine (omogenea)**

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{267}$$

Le soluzioni dell'equazione associata dipendono da Δ:

- **Se $\Delta > 0$:**

$$y(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} \tag{268}$$

- **Se $\Delta = 0$:**

$$y(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + tc_2e^{\lambda_1 t} \tag{269}$$

- **Se $\Delta < 0$:**

$$y(t) = c_1e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2e^{\alpha t}\sin(\beta t) \tag{270}$$

con $\alpha = \mathrm{Re}(\lambda)$, $\beta = \mathrm{Im}(\lambda)$.

▲ Proprietà del commutatore

$$[A, B] = -[B, A] \qquad [A + B, C] = [A, C] + [B, C] \tag{271}$$

$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C] \tag{272}$$

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \tag{273}$$

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \tag{274}$$