

Appunti di Elettronica

Simone Laierno

11 aprile 2014

Indice

1	Richiami di teoria sulle reti elettriche	2
1.1	Componenti passivi e generatori	2
1.1.1	Componenti passivi	2
1.1.2	Generatori indipendenti	3
1.1.3	Generatori pilotati o dipendenti	4
1.2	Circuiti in regime sinusoidale	5
1.2.1	Metodo simbolico	5
1.2.2	Impedenze	6
1.3	Leggi e teoremi delle reti elettriche	8
1.3.1	Leggi di Kirchhoff	8
1.3.2	Serie e parallelo di impedenze	11
1.3.3	Partitore di tensione e di corrente	12
1.3.4	Trasformazioni stella-triangolo e triangolo-stella	13
1.3.5	Impedenza tra due nodi	16
1.3.6	Metodo dei potenziali ai nodi	17
1.3.7	Teoremi di Thévenin e Norton	18
1.3.8	Principio di sovrapposizione degli effetti	21
1.4	Analisi in frequenza dei circuiti	25
1.4.1	Funzione di trasferimento e comportamento in frequenza nulla	26
1.4.2	Trasformata di Laplace	26
1.4.3	Teoremi del valore iniziale e del valore finale	30
1.4.4	Diagrammi di Bode	30

Capitolo 1

Richiami di teoria sulle reti elettriche

Questo capitolo vuole essere un riassunto della teoria sulle reti elettriche per chi da molto tempo è lontano dal mondo dei circuiti elettrici o per chi vuole avere un ripasso generale di nozioni già note. Si invita quindi il lettore esperto a saltare questo capitolo ed utilizzarlo solo come «formulario» di concetti già noti.

1.1 Componenti passivi e generatori

1.1.1 Componenti passivi

I componenti passivi basilari utilizzati nelle reti elettriche sono i seguenti:

- Resistori ¹
- Condensatori
- Induttori ¹

Tali componenti mettono in relazione la differenza di potenziale V e la corrente I tramite le seguenti relazioni:

- Resistore

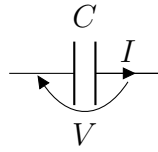
$$V = RI \quad [R] = \Omega$$



- Condensatore

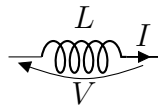
$$I = C \frac{dV}{dt} \quad [C] = F$$

¹Resistori e induttori sono comunemente detti «resistenze» e «induttanze» ma non sono da confondere con le unità di misura dei componenti stessi.



- Induttore

$$V = L \frac{dI}{dt} \quad [L] = H$$

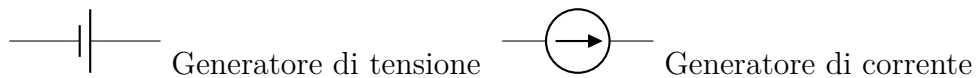


Le relazioni $V - I$ per i condensatori e gli induttori, a differenza della relazione lineare $V = RI$ ben nota come *Legge di Ohm*, sono integro-differenziali e di conseguenza più difficili da gestire matematicamente. Si vedrà tra breve come comportarsi per tali componenti in situazioni particolari ma di largo utilizzo.

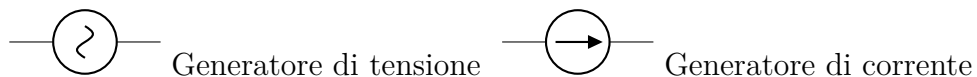
1.1.2 Generatori indipendenti

I *generatori indipendenti* sono generatori di corrente o di tensione che non dipendono da altre grandezze del circuito. Rispettivamente, generano una corrente costante in un ramo ed una differenza di potenziale costante tra due nodi. Faremo distinzione tra generatori in *DC* o *in continua*, che generano una corrente o una differenza di potenziale *costante*, e generatori *di segnale*, che generano un segnale di tensione o di corrente sinusoidale.

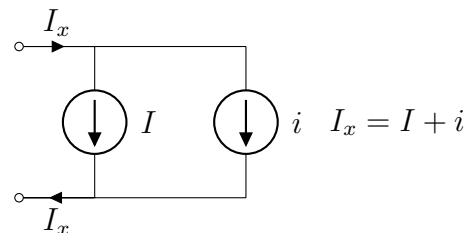
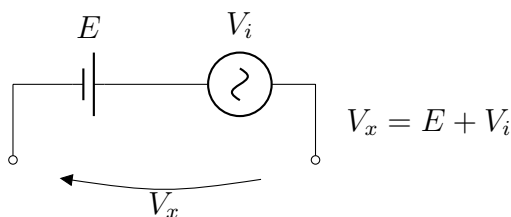
- Generatori in continua



- Generatori di segnale



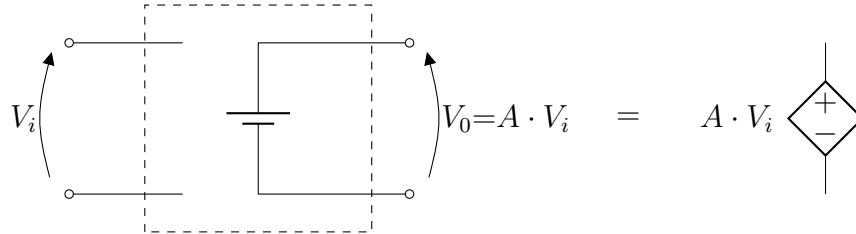
I generatori di tensione si compongono *in serie* mentre i generatori di corrente si compongono *in parallelo*:



1.1.3 Generatori pilotati o dipendenti

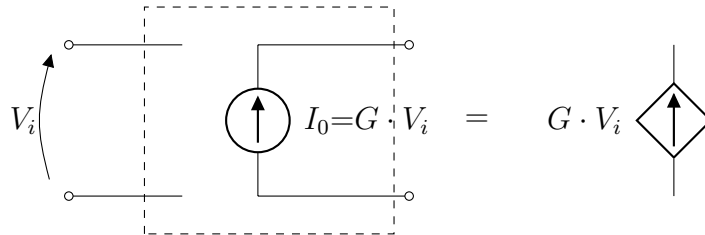
I generatori, sia di tensione che di corrente, possono non essere indipendenti ed essere in realtà dei componenti che generano una differenza di potenziale tra due nodi o una corrente in un ramo *in funzione di altre grandezze nel circuito*. Tali componenti sono detti *generatori pilotati* o *dipendenti*.

- *Generatore di tensione controllato in tensione*



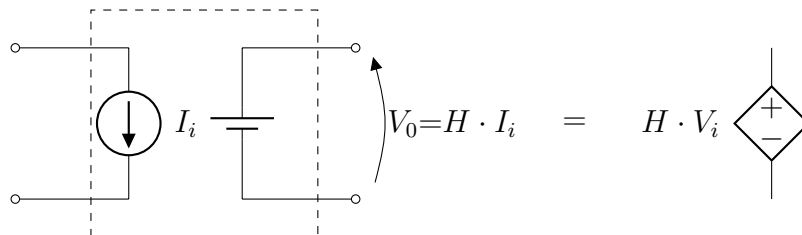
Un generatore di tensione controllato in tensione assume un *guadagno* A *adimensionale*. Questo dovuto all'ovvio fatto che trasforma una tensione in un'altra tensione, non apportando modifiche all'unità di misura.

- *Generatore di corrente controllato in tensione*



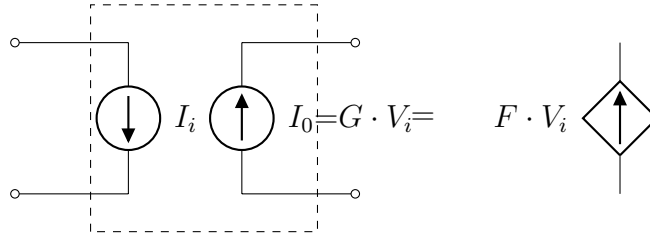
Un generatore di corrente controllato in tensione assume un *guadagno* G di *transconduttanza* $[G] = \Omega^{-1}$. La dimensione è l'inverso di una resistenza poiché, per la legge di Ohm, $I = \frac{V}{R}$, e quindi $[G] = [\frac{1}{R}]$.

- *Generatore di tensione controllato in corrente*



Un generatore di tensione controllato in corrente assume un *guadagno* H di *transresistenza* $[H] = \Omega$. La dimensione è quella di una resistenza poiché, per la legge di Ohm, $V = RI$, e quindi $[H] = [R]$.

- *Generatore di corrente controllato in corrente*



Un generatore di corrente controllato in corrente assume un *guadagno* F *adimensionale*. Come per il generatore di tensione pilotato in tensione, l'adimensionalità del guadagno è ovvia conseguenza di una trasformazione di una grandezza in una analoga (corrente \rightarrow corrente).

1.2 Circuiti in regime sinusoidale

NOTA: Questa sezione non ha pretesa di essere rigorosa né in ambito fisico né in ambito matematico. Vuole solo essere un richiamo delle conoscenze che si ritengono già acquisite dai corsi di Analisi Matematica e Fisica.

1.2.1 Metodo simbolico

Consideriamo l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti di ordine n :

$$\sum_{i=0}^n c_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = f(t) \quad (1.1)$$

A partire da questa, consideriamo la nuova equazione differenziale aggiungendo a secondo membro la funzione $yg(t)$:

$$\sum_{i=0}^n c_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = f(t) + yg(t) \quad (1.2)$$

Ove la funzione $v(t)$ è in generale complessa e diversa dalla funzione $y(t)$. Possiamo pertanto esprimerla come:

$$v(t) = a(t) + jb(t) \quad (1.3)$$

Ove:

$$a(t), b(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Risulta quindi evidente che la (1.1) può essere riscritta come:

$$\sum_{i=0}^n c_i \frac{d^i a(t)}{dt^i} + j \sum_{i=0}^n c_i \frac{d^i b(t)}{dt^i} = f(t) + yg(t) \quad (1.4)$$

Perciò, eguagliando parte reale e parte immaginaria:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n c_i \frac{d^i a(t)}{dt^i} &= f(t) \\ \sum_{i=0}^n c_i \frac{d^i b(t)}{dt^i} &= g(t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Da ciò si deduce che $a(t)$ è la $y(t)$ soluzione dell'equazione originaria (1.1) e quindi:

$$y(t) = \Re[a(t) + j b(t)] \quad (1.6)$$

Questo metodo di risoluzione delle equazioni differenziali lineari è noto con il nome di *metodo simbolico*.

Scegliendo in modo opportuno $f(t)$ e $g(t)$ si possono prendere in esame i casi di nostro interesse, quali sono i circuiti stimolati da un ingresso sinusoidale. Supponendo $f(t) = A \cos(\omega t)$, la forma analitica di $g(t)$ sarà $g(t) = A \sin(\omega t)$. In tal modo:

$$f(t) + j g(t) = A \cos(\omega t) + j A \sin(\omega t) = A e^{j \omega t} \quad (1.7)$$

A tutti gli effetti, ciò significa che per ottenere la (1.2) a partire dalla (1.1) è sufficiente sostituire al termine $\cos(\omega t)$ il termine $e^{j \omega t}$, risolvere l'equazione differenziale ed estrarne la parte reale.

NOTA: A tutti gli effetti può essere fatto il discorso analogo prendendo come riferimento $\sin(\omega t)$ ed estrarre la parte immaginaria. Si fa notare inoltre che può comunque essere risolto con la parte reale ricordando l'uguaglianza:

$$\sin(\omega t) = \cos(\pi - \omega t)$$

Per comodità considereremo gli ingressi come funzioni di seno e calcolando la parte immaginaria delle estensioni complesse, fermo restando che si può applicare ogni ragionamento anche a funzioni di coseno senza perdere generalità

1.2.2 Impedenze

L'impedenza di un componente (o eventualmente di una rete di componenti), indicata con Z è definita come:

$$Z \triangleq \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \quad (1.8)$$

Cioè quel valore (eventualmente complesso) tale per cui vale la seguente relazione, detta *Legge di Ohm generalizzata*

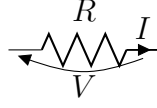
$$\bar{V} = Z \bar{I} \quad (1.9)$$

Faremo in modo, cioè, di trattare ogni componente (o rete elettrica) come fosse una resistenza a valori eventualmente complessi.

NOTA: D'ora in poi supporremo sempre che il circuito sia stimolato sinusoidalmente e portato a regime, cioè non considereremo lo stato transitorio del circuito.

Impedenza resistiva

Consideriamo una resistenza ai cui capi è applicata una differenza di potenziale V e nella quale scorra una corrente I :



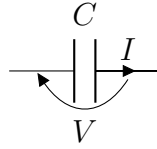
La relazione $V - I$ è, come già spiegato, definita dalla *legge di Ohm* $V = RI$, l'impedenza resistiva perciò vale:

$$Z_R = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = R \quad (1.10)$$

La resistenza non fornisce alcun problema nel caso di circuiti in regime sinusoidale, in quanto l'impedenza è il valore (reale) della resistenza del componente.

Impedenza capacitiva

Consideriamo un condensatore ai cui capi è applicata una differenza di potenziale V e nella quale scorra una corrente I :



È noto che la relazione tra la differenza di potenziale e la corrente è:

$$I = C \frac{dV}{dt}$$

Consideriamo il caso in cui l'ingresso sia sinusoidale del tipo:

$$V = V_0 \sin(\omega t)$$

E applichiamo il metodo simbolico alla relazione differenziale $I = C \frac{dV}{dt}$ imponendo le estensioni complesse:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= V_0 e^{j\omega t} & \bar{I} &= I_0 e^{j\omega t} \\ \bar{I} &= C \frac{d\bar{V}}{dt} = C \frac{d}{dt} (V_0 e^{j\omega t}) = j\omega C V_0 e^{j\omega t} = j\omega C \bar{V} \end{aligned} \quad (1.11)$$

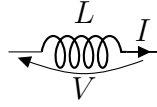
Da ciò, l'impedenza risulta:

$$Z = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \Rightarrow Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (1.12)$$

Impedenza induttiva

Consideriamo un induttore ² ai cui capi è applicata una differenza di potenziale V e nella quale scorra una corrente I

²Si farà in realtà un uso pressoché nullo delle induttanze in questa trattazione. L'argomento viene trattato solo per completezza.



Nota la relazione $I - V$ in un'induttanza:

$$V = L \frac{dI}{dt}$$

Assegnate le estensioni complesse come nei casi precedenti:

$$\bar{V} = V_0 e^{j\omega t} \quad \bar{I} = I_0 e^{j\omega t}$$

Ricaviamo in modo analogo al precedente l'impedenza di un induttore:

$$\bar{V} = L \frac{d\bar{I}}{dt} = L \frac{d}{dt} [I_0 e^{j\omega t}] = j\omega L I_0 e^{j\omega t} = j\omega L \bar{I} \quad (1.13)$$

Da ciò, l'impedenza induttiva:

$$Z = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \Rightarrow Z = j\omega L \quad (1.14)$$

Spesso, nell'utilizzo delle impedenze complesse per l'analisi in frequenza, si opera la sostituzione³

$$s = j\omega \quad (1.15)$$

E quindi le impedenze saranno espresse come:

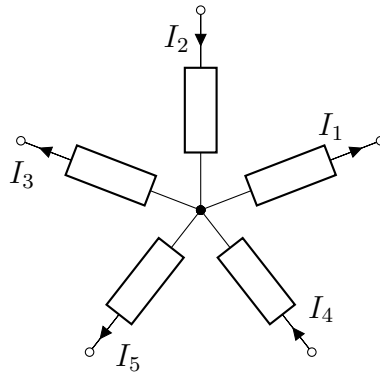
$$Z_R = R \quad Z_C = \frac{1}{sC} \quad Z_L = sL \quad (1.16)$$

1.3 Leggi e teoremi delle reti elettriche

1.3.1 Leggi di Kirchhoff

Enunciamo senza dimostrazione le due leggi basilari delle reti elettriche, le *Leggi di Kirchhoff*:

Legge di Kirchhoff per le correnti (LKC)



³Il motivo di tale sostituzione sarà accennato più avanti.

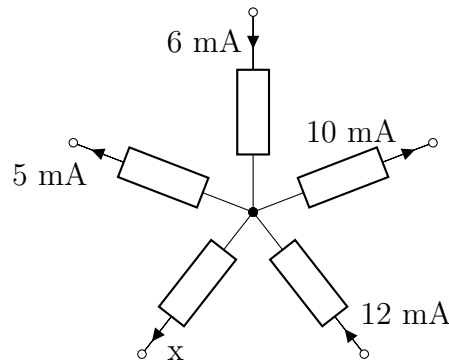
La legge di Kirchhoff per le correnti⁴ afferma che, dato un nodo in cui convergono n correnti, prese *positive* se entranti e *negative* se uscenti:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (1.17)$$

In termini più semplici:

La somma delle correnti entranti in un nodo è uguale alla somma delle correnti uscenti dal nodo.

Esempio 1.3.1. Data la seguente configurazione di circuito con le correnti indicate:

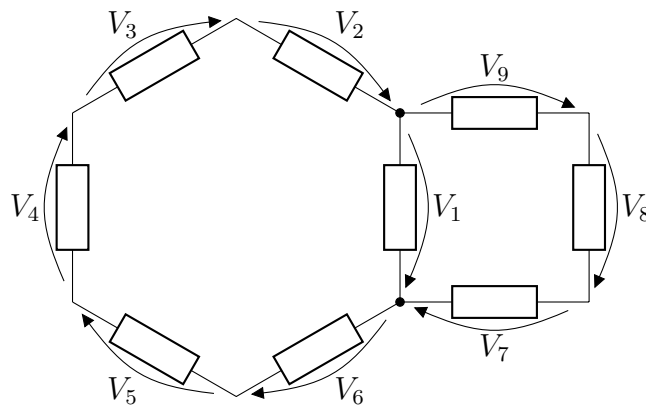


Determiniamo quindi verso e intensità della corrente x , supponendo sia uscente. Nel caso in cui si sia fatta una supposizione errata, il risultato verrà negativo e quindi sarà corretto in valore assoluto e il verso sarà l'opposto di quello supposto all'inizio. Per la prima legge di Kirchhoff la somma delle correnti uscenti è uguale alla somma delle correnti entranti. Perciò:

$$10mA + 5mA + x = 12mA + 6mA \Rightarrow x = 12mA + 6mA - 10mA - 5mA = 3mA \quad (1.18)$$

La corrente x vale quindi $3mA$ ed essendo positiva, il verso reale è quello che avevamo supposto all'inizio. ♣ ♣

Legge di Kirchhoff per le tensioni (LKT)



⁴È detta anche *Legge di Kirchhoff ai nodi* o *Prima legge di Kirchhoff*.

La legge di Kirchoff per le tensioni⁵ afferma che *in una maglia chiusa la somma algebrica delle tensioni è nulla*⁶.

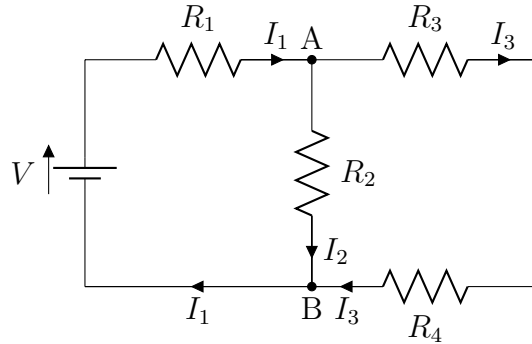
In formule:

$$\sum_{i=1}^n V_i = 0 \quad (1.19)$$

Ovvero, siano \mathcal{E}_i i generatori di forza elettromotrice presenti in una maglia, Z_j le impedenze e I_k le correnti che circolano sui rami⁷

$$\sum_{i=1}^l \mathcal{E}_i = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n Z_j I_k \quad (1.20)$$

Esempio 1.3.2. Si prenda in esame il circuito seguente:



Ove siano $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 3 \text{ k}\Omega$, $R_3 = R_4 = 2 \text{ k}\Omega$ e $V = 12 \text{ V}$. Applicando la LKC al nodo A (o al nodo B, equivalentemente) si ottiene l'equazione:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Applicando invece la LKT alle maglie $V - R_1 - R_2 - V$ e $R_3 - R_4 - R_2 - R_3$ si ottengono, rispettivamente, le equazioni:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_2 I_2 &= V \\ R_3 I_3 + R_4 I_3 &= R_2 I_2 \end{aligned}$$

Mettendo a sistema le precedenti equazioni:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 = V \\ R_3 I_3 + R_4 I_3 = R_2 I_2 \end{cases}$$

⁵È detta anche *Legge di Kirchoff alle maglie* o *Seconda legge di Kirchoff*

⁶Una tensione si considera positiva se il verso della freccia che indica la tensione ai capi di un bipolo è concorde al verso di percorrenza della maglie. Altrimenti, si considera negativa.

⁷Si fa notare che il termine $\sum_{j=1}^m Z_j I_k$ con k fissato, è la somma delle cadute di tensione provocate dalle resistenze nel ramo percorso dalla corrente I_k

Portando in forma matriciale, ciò significa risolvere il sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V \\ 0 \end{bmatrix}$$

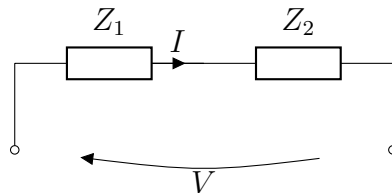
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1\text{k}\Omega & 3\text{k}\Omega & 0 \\ 0 & -3\text{k}\Omega & 3\text{k}\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12\text{V} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} I_1 = 4,42\text{mA} \\ I_2 = 2,53\text{mA} \\ I_3 = 1,89\text{mA} \end{cases}$$

Si fa notare come per la risoluzione di questo semplice circuito, oltre alle leggi di Kirchhoff, si è applicata solo la legge di Ohm. Quindi le due leggi di Kirchhoff possono essere utilizzate anche per circuiti in regime sinusoidale utilizzando la legge di Ohm generalizzata per le impedenze. ♣

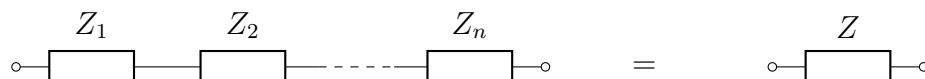
1.3.2 Serie e parallelo di impedenze

Definizione 1.3.1. Due o più impedenze si dicono *in serie* se sono attraversate dalla stessa corrente

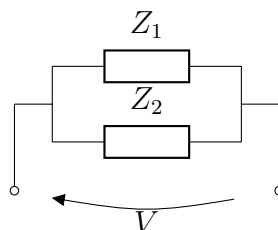


Due o più impedenze in serie possono essere sostituite da una sola resistenza, ad esse equivalente, che ha come valore Z la somma delle impedenze:

$$Z = \sum_{i=1}^n Z_i \quad (1.21)$$

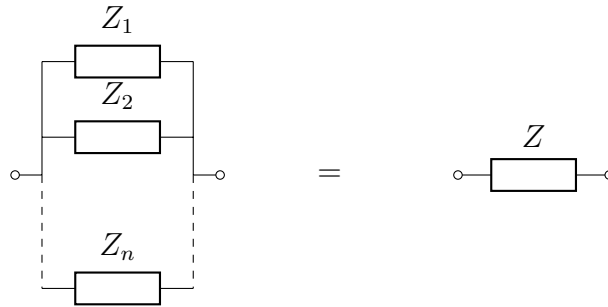


Definizione 1.3.2. Due o più impedenze si dicono *in parallelo* se ai loro capi vi è la stessa differenza di potenziale:



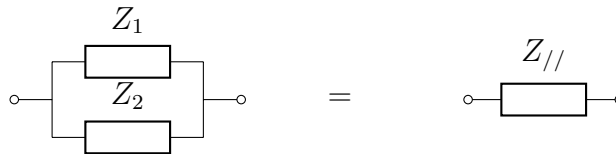
Due o più impedenze in serie possono essere sostituite da una sola resistenza, ad esse equivalente, che ha come valore Z il reciproco della somma dei reciproci delle impedenze:

$$Z = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i} \right)^{-1} \quad (1.22)$$



È di particolare interesse l'impedenza equivalente di due impedenze in parallelo poiché di frequente utilizzo pratico:

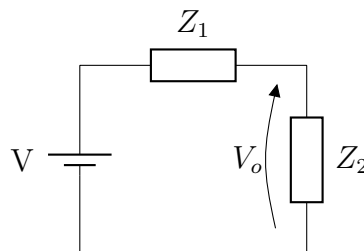
$$Z_{//} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (1.23)$$



1.3.3 Partitore di tensione e di corrente

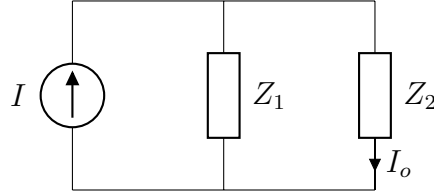
Di particolare interesse sono le configurazioni di circuito cosiddette *partitore di tensione* e *partitore di corrente* che dividono la tensione e la corrente in rapporti dettati dal valore delle impedenze. La dimostrazione (peraltro molto semplice) delle seguenti formule viene lasciata al lettore:

Partitore di tensione



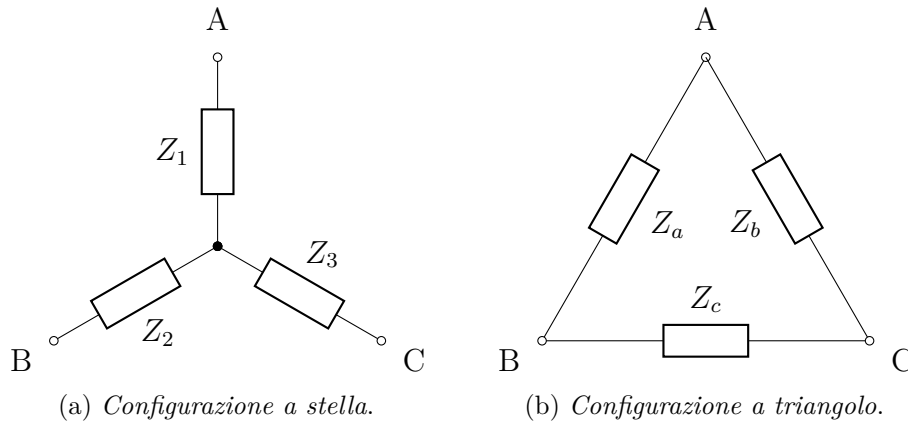
$$V_o = V \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (1.24)$$

Partitore di corrente



$$I_o = I \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (1.25)$$

1.3.4 Trasformazioni stella-triangolo e triangolo-stella



Circuito 1.1: Configurazioni a triangolo e a stella tra tre nodi A,B e C.

Spesso delle connessioni di impedenze *a stella* (1.1a) risultano problematiche poiché fanno sì che un circuito elettrico non sia composto più di sole serie e paralleli di impedenze. In tal caso può risultare utile passare alla corrispondente configurazione *a triangolo* (1.1b). Riporteremo di seguito le formule per passare da una configurazione all'altra senza dimostrazione.⁸

Siano G e H le grandezze:

$$G = \sum_{i=a}^c Z_i \quad (1.26)$$

$$H = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 \quad (1.27)$$

Cioè, rispettivamente, la somma delle impedenze del triangolo e la somma dei prodotti ciclici delle impedenze della stella. Le formule di trasformazione *stella-*

⁸Si invita eventualmente il lettore a dimostrare da se le formule di trasformazione.

triangolo sono le seguenti:

$$Z_a = \frac{H}{Z_3} \quad (1.28a)$$

$$Z_b = \frac{H}{Z_2} \quad (1.28b)$$

$$Z_c = \frac{H}{Z_1} \quad (1.28c)$$

Le formule di trasformazione *triangolo-stella* sono invece:

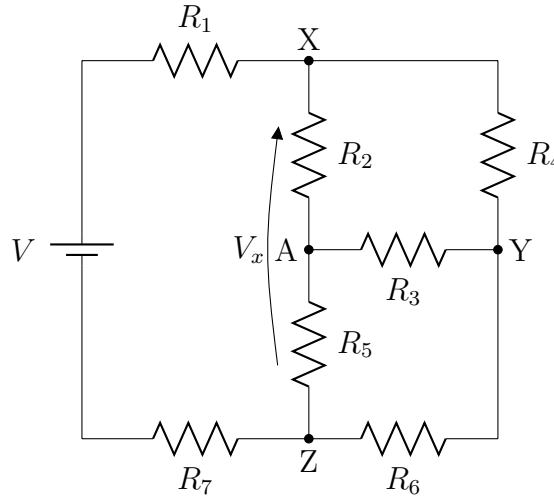
$$Z_1 = \frac{Z_a Z_b}{G} \quad (1.29a)$$

$$Z_2 = \frac{Z_a Z_c}{G} \quad (1.29b)$$

$$Z_3 = \frac{Z_b Z_c}{G} \quad (1.29c)$$

Per capire l'utilità delle trasformazioni si faccia riferimento al seguente esempio.

Esempio 1.3.3. Si consideri il seguente circuito:



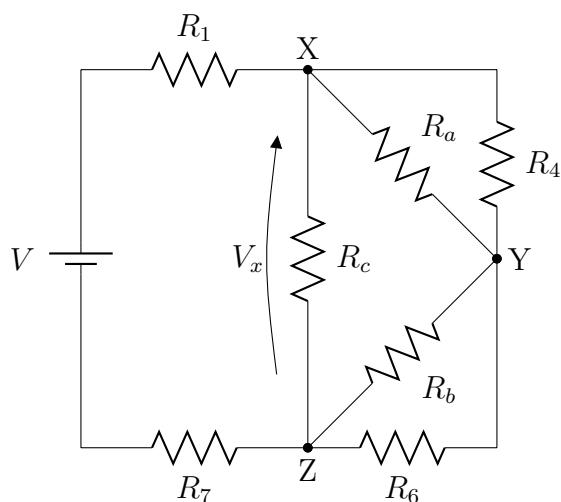
- $V = 10V$
- $R_1 = 5k\Omega$, $R_2 = 1k\Omega$, $R_3 = 3k\Omega$, $R_4 = 11k\Omega$, $R_5 = 2k\Omega$, $R_6 = 22k\Omega$, $R_7 = 6k\Omega$

Si voglia quindi calcolare la differenza di potenziale V_x .

L'analisi del circuito in esame non è delle più semplici poiché non è composto solo da serie e paralleli di resistenze, ma al nodo A converge una stella di resistenze formata da R_2 , R_3 ed R_5 avente per vertici i nodi X , Y e Z . Trasformiamo la suddetta stella in un triangolo applicando le formule di trasformazione e ridisegniamo il circuito:

$$H = R_2 R_3 + R_2 R_5 + R_3 R_5$$

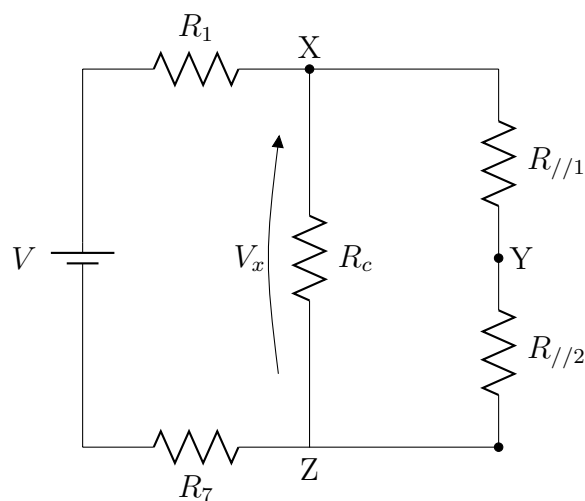
$$R_a = \frac{H}{R_5} = 5,5 k\Omega \quad R_b = \frac{H}{R_2} = 11 k\Omega \quad R_c = \frac{H}{R_3} = 3,67 k\Omega$$



La trasformazione è stata conveniente perché ora $R_a // R_4$ e $R_b // R_6$. Le sostituiamo quindi con i loro equivalenti in parallelo:

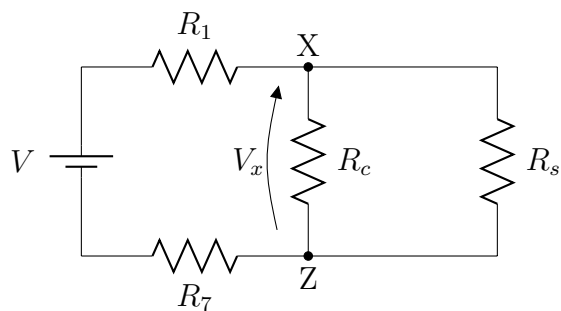
$$R_{//1} = R_a // R_4 = 3,67 \text{ k}\Omega$$

$$R_{//2} = R_b // R_6 = 7,33 \text{ k}\Omega$$



$R_{//1}$ ed $R_{//2}$ sono in serie, quindi verranno sostituiti con la loro resistenza equivalente:

$$R_s = R_{//1} + R_{//2} = 11 \text{ k}\Omega$$



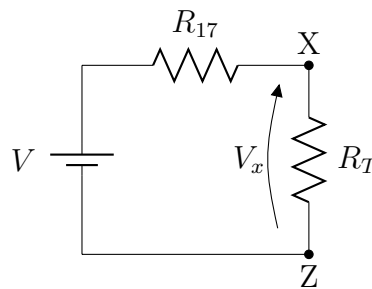
È evidente che tra le resistenze R_c ed R_s vi è la stessa differenza di potenziale V_x e quindi sono in parallelo. A tal ragione, sostituiamo anche in questo caso con la rispettiva resistenza equivalente:

$$R_T = R_c // R_s = 2,75 \text{ k}\Omega$$

Osserviamo inoltre che R_1 ed R_7 sono attraversate dalla stessa corrente poiché appartengono allo stesso ramo, ed è quindi possibile sostituirle con la resistenza equivalente:

$$R_{17} = R_1 + R_7 = 11 \text{ k}\Omega$$

Il circuito ora risulta enormemente semplificato rispetto all'originale



Ora la tensione V_x può essere facilmente calcolata con il partitore di tensione tra le resistenze R_{17} ed R_T :

$$V_x = V \frac{R_T}{R_{17} + R_T} = 10 \text{ V} \frac{2,75 \text{ k}\Omega}{2,75 \text{ k}\Omega + 11 \text{ k}\Omega} = 2 \text{ V}$$

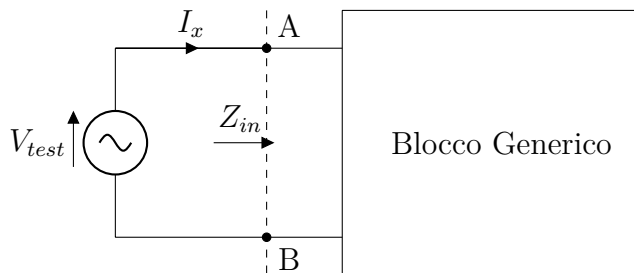


1.3.5 Impedenza tra due nodi

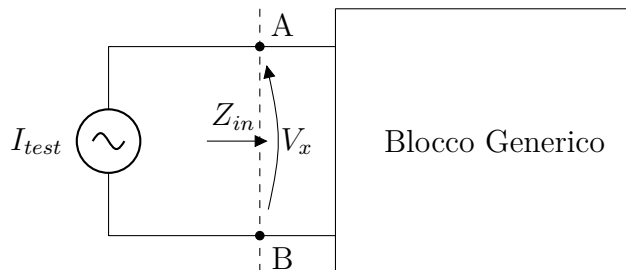
È di notevole utilità spesso calcolare l'impedenza «vista» tra due nodi di una generica rete elettrica. I metodi possibili sono due e sono analoghi e perfettamente equivalenti. La scelta di utilizzare uno o l'altro metodo è legata a quale risulti più comoda nella particolare configurazione di circuito da prendere in esame (o semplicemente alla propria preferenza personale).

*N.B.: si ricorda che un generatore di tensione spento è un **circuito chiuso**, mentre un generatore di corrente spento è un **circuito aperto**. Ciò deriva dall'ovvio fatto che corrisponderebbero a dei generatori che imporrebbero, rispettivamente, una differenza di potenziale nulla tra due nodi e una corrente nulla in un ramo.*

1. (a) Si spengono tutti i generatori *indipendenti* della rete in esame;
- (b) Si applica una tensione di segnale di test V_{test} tra i nodi (A e B in figura) e si legge la corrente di segnale I_x generata.



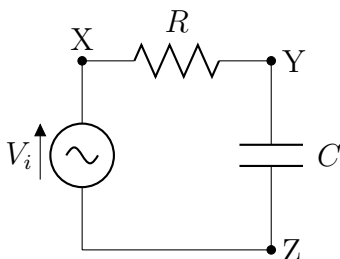
- (c) L'impedenza sarà $Z_{in} = \frac{V_{test}}{I_x}$
2.
 - (a) Si spengono tutti i generatori *indipendenti* della rete in esame;
 - (b) Si applica una corrente di segnale di test I_{test} tra i nodi (A e B in figura) e si legge la tensione di segnale V_x generata.




- (c) L'impedenza sarà $Z_{in} = \frac{V_x}{I_{test}}$

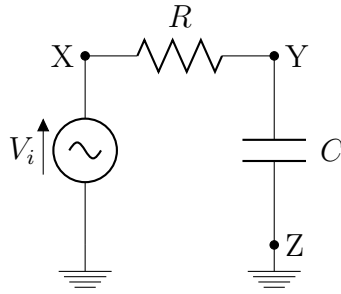
1.3.6 Metodo dei potenziali ai nodi

Di comune e comodo utilizzo in elettronico è il *metodo dei potenziali ai nodi*. Si prenda in considerazione il seguente circuito (noto spesso come *filtro RC* o *filtro passa-basso*):



Si voglia calcolare quindi la differenza di potenziale ai capi del condensatore C e quindi tra i nodi Y e Z . Questa volta invece di operare i calcoli utilizzando le leggi di Kirchhoff, poniamo il polo negativo del generatore di tensione come **massa**, ovvero a potenziale nullo. Questa è solo una *convenzione* che non farà perdere la generalità del nostro procedimento. Il simbolo che indicherà la massa sarà: 

Applicando questa convenzione, ridisegniamo il circuito:



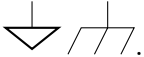
Applicando questo tipo di riferimento, possiamo riferirci al *potenziale* dei nodi X , Y e Z senza passare dallo scomodo espediente matematico della *differenza di potenziale*. Nel caso in esame avremo quindi:

- $V_X = V_i$
- $V_Z = 0$

La soluzione del circuito può essere fatta quindi in modo semplice osservando che è interamente attraversato dalla stessa corrente I e che calcolare la differenza di potenziale tra i nodi Y e Z equivale ora a calcolare il solo potenziale del nodo Y , essendo Z collegato a massa e quindi a potenziale nullo.

$$\begin{cases} V_i - V_Y = RI \\ V_Y = \frac{1}{sC}I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_i - V_Y = RV_Y sC \\ V_Y sC = I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_Y(1 + sRC) = V_i \\ V_Y sC = I \end{cases}$$

$$V_Y = \frac{V_i}{1 + sRC} \quad (1.30)$$

Oltre al simbolo utilizzato in questa trattazione, vengono spesso utilizzati anche i simboli: .

1.3.7 Teoremi di Thévenin e Norton

Enunciamo, senza dimostrazioni, i due più utilizzati teoremi sull'analisi delle reti elettriche: il *teorema di Norton* e il *teorema di Thévenin*.

Teorema 1.3.1 (di Thévenin). *Data una rete di componenti attivi e passivi compresa tra due nodi, questa può essere sostituita con un circuito equivalente costituito dalla serie di un generatore di tensione di Thévenin V_{TH} e un'impedenza di Thévenin Z_{TH} , ove:*

V_{TH} è la tensione rilevata tra i nodi «a vuoto», cioè senza alcun carico.

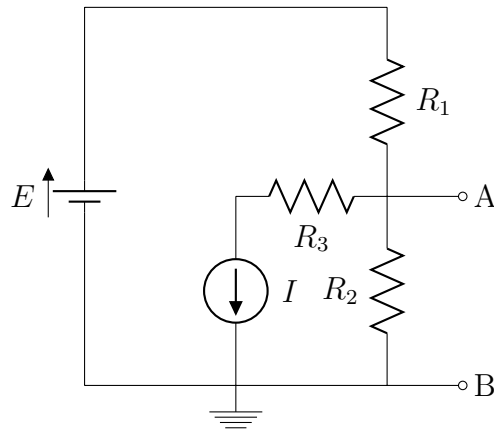
Z_{TH} è l'impedenza tra i due nodi (dopo aver spento tutti i generatori indipendenti)

Teorema 1.3.2 (di Norton). *Data una rete di componenti attivi e passivi compresa tra due nodi, questa può essere sostituita con un circuito equivalente costituito dal parallelo di un generatore di corrente di Norton I_{NO} e un'impedenza di Norton Z_{NO} , ove:*

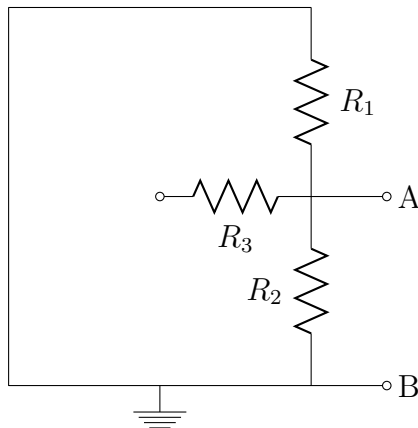
I_{NO} è la corrente che viene forzata tra i due nodi chiudendoli con un corto circuito.

Z_{NO} è l'impedenza tra i due nodi (dopo aver spento tutti i generatori indipendenti)

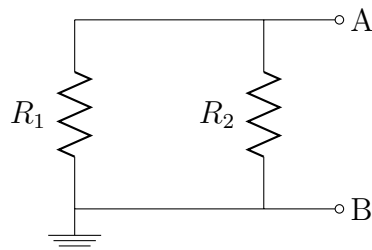
Esempio 1.3.4. Si consideri il circuito seguente:



Vogliamo calcolarne gli equivalenti di Thévenin e di Norton ai nodi A e B . Procediamo innanzitutto col calcolo della resistenza tra i due nodi. Essa sarà utilizzabile sia per l'equivalente di Thévenin che per l'equivalente di Norton. Spegnendo i generatori indipendenti, cioè cortocircuitando il generatore di tensione e trasformando in un circuito aperto il generatore di corrente, ridisegniamo il circuito:



Essendo R_3 collegato ad un circuito aperto, la corrente che la attraversa è nulla ed è ininfluenza nel circuito. Quindi il circuito diventa, semplicemente, il seguente:



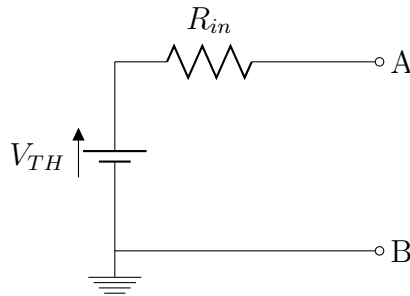
Risulta evidente che l'impedenza tra i nodi A e B è il parallelo delle resistenze R_1 ed R_2 :

$$R_{in} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

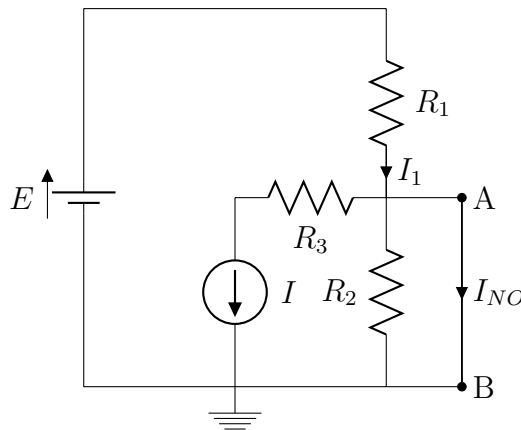
Calcoliamo ora la differenza di potenziale ai capi dei nodi A e B , cioè il potenziale del nodo A , essendo nullo quello del nodo B , per ottenere quindi la differenza di potenziale del generatore di tensione di Thévenin. Applichiamo la LKT al nodo A e da questa ricaviamo il valore di V_A

$$\begin{aligned} \frac{E - V_{TH}}{R_1} &= I + \frac{V_A}{R_2} \Rightarrow \frac{E}{R_1} - I = V_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\ \frac{E}{R_1} - I &= V_A \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) \Rightarrow V_A = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} - I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \\ V_{TH} &= E \frac{R_2}{R_1 + R_2} - I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

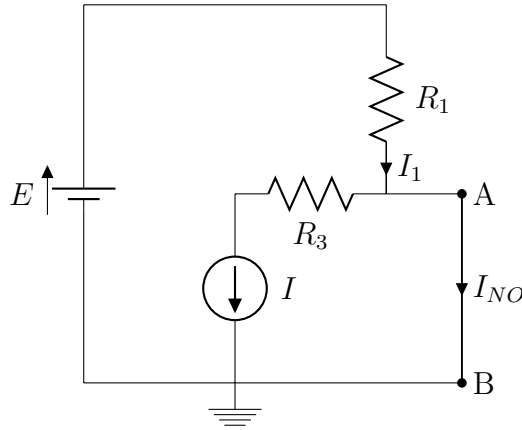
Il circuito equivalente di Thévenin è quindi il seguente:



Calcoliamo ora l'equivalente di Norton dello stesso circuito. L'impedenza d'ingresso è la stessa del caso precedente, perciò procederemo cortocircuitando i nodi A e B e valutando la corrente che scorrerà in tale cortocircuito:



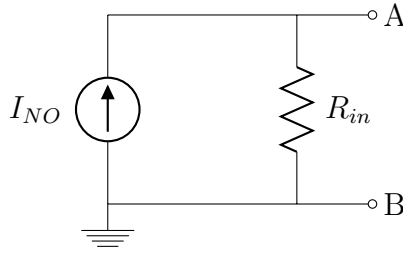
Eseguendo il cortocircuito, si ha che $V_A = V_B = 0 \text{ V}$, e di conseguenza è nulla anche la differenza di potenziale ai capi di R_2 . Perciò in essa non scorrerà alcuna corrente e possiamo eliminarla dal circuito in quanto inutile ai fini dei nostri calcoli.



Applicando la legge di Ohm su R_1 e la LKC al nodo A :

$$\begin{cases} I_1 = \frac{E}{R_1} \\ I_1 = I + I_{NO} \end{cases} \Rightarrow I_{NO} = \frac{E}{R_1} - I$$

Il circuito equivalente di Norton è quindi il seguente:



Si fa notare che in questo caso ricavare l'equivalente di Norton è stato molto più semplice che ricavare l'equivalente di Thévenin.

Si osservi, inoltre, che è possibile passare dall'equivalente di Norton a quello di Thévenin e viceversa applicando rispettivamente il teorema di Thévenin o quello di Norton al circuito equivalente già calcolato.

Cortocircuitando i nodi A e B nel circuito equivalente di Thévenin si ottiene:

$$I_{NO} = \frac{V_{TH}}{R_{in}} = V_{TH} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) = \frac{E}{R_1} - I$$

Misurando invece la differenza di potenziale tra A e B (posto $V_B = 0$) nel circuito equivalente di Norton si ottiene:

$$V_{TH} = R_{in} I_{NO} = I_{NO} \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} - I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Questo dovrebbe convincere il lettore dell'equivalenza dei due teoremi. ♣

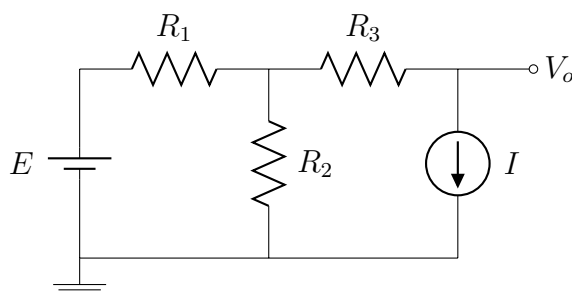
1.3.8 Principio di sovrapposizione degli effetti

Definizione 1.3.3. Una rete si dice *lineare* se le sue grandezze interne sono tutte definibili tramite equazioni differenziali lineari.

Quasi tutti i modelli concreti, in prima approssimazione, possono essere considerati lineari. Ciò rende di rilevante importanza il seguente:

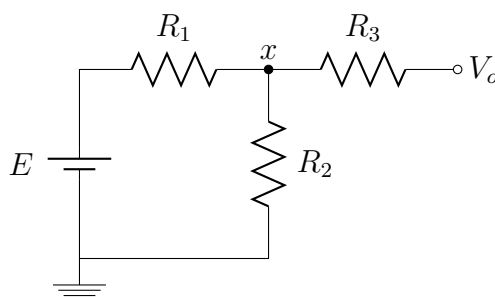
Teorema 1.3.3 (Principio di sovrapposizione degli effetti). *Data una rete lineare con n ingressi, la tensione in ogni nodo e la corrente in ogni ramo è esprimibile come somma delle correnti e delle tensioni ottenute nei corrispondenti nodi e rami considerando attivo un ingresso alla volta e disattivando tutti gli altri.*

Esempio 1.3.5. Calcoliamo la tensione al nodo V_o del seguente circuito:



$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega \quad R_2 = 3 \text{ k}\Omega \quad R_3 = 4 \text{ k}\Omega \quad E = 10 \text{ V} \quad I = 2 \text{ mA}$$

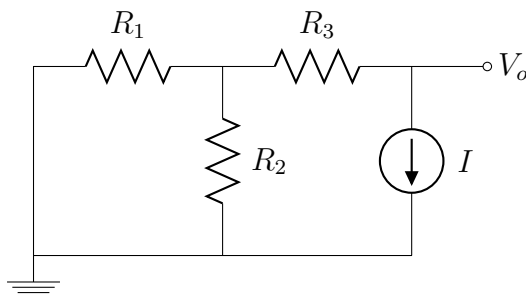
Utilizziamo il principio di sovrapposizione degli effetti, perciò spegniamo il generatore di corrente I , sostituendolo con un circuito aperto:



Essendo R_3 collegata ad un circuito aperto, per essa non scorre alcuna corrente e quindi il potenziale al nodo V_o è lo stesso al nodo x . Il potenziale al nodo x può essere facilmente calcolato utilizzando il partitore di tensione:

$$V_{o-E} = V_x = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 10 \text{ V} \frac{3 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega + 3 \text{ k}\Omega} = 7,5 \text{ V}$$

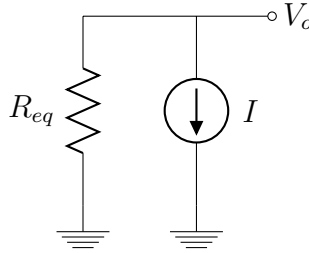
Calcoliamo ora il potenziale del nodo V_o spegnendo il generatore di tensione E , sostituendolo con un cortocircuito.



Essendo $R_1 // R_2$ e questo parallelo in serie con R_3 , sostituiamo queste tre resistenze con la loro equivalente:

$$R_{eq} = R_1 // R_2 + R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = 4,75 \text{ k}\Omega$$

Il circuito è così notevolmente semplificato:



Applicando la legge di Ohm alla resistenza R_{eq} :

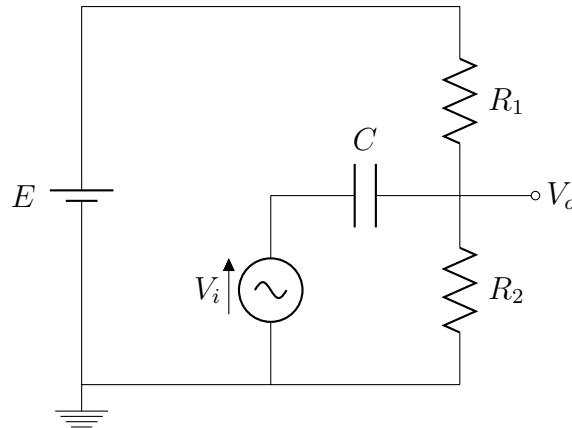
$$(0 - V_{o-I}) = R_{eq}I \Rightarrow V_{o-I} = -4,75 \text{ k}\Omega \cdot 2 \text{ mA} = -9,5 \text{ V}$$

Il potenziale del nodo V_o del circuito originale, quindi, è data dalla somma dei due risultati ottenuti:

$$V_o = V_{o-E} + V_{o-I} = -2 \text{ V}$$



Esempio 1.3.6 (Accoppiamento in AC). Talvolta può non essere possibile collegare un generatore di segnale (V_i) in serie ad un generatore di tensione continua (E) e si è costretti a collegarlo alla massa del circuito. Il seguente circuito, come vedremo dalla sua analisi, risolve il problema:



Circuito 1.2: Circuito per l'accoppiamento AC

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti spegniamo il generatore di segnale V_i cortocircuitandolo e calcoliamo la tensione V_o . Applicando la LKC al nodo otteniamo l'equazione differenziale:

$$\frac{E - V_o}{R_1} = C \frac{dV_o}{dt} + \frac{V_o}{R_2}$$

Svolgendo alcuni semplici passaggi algebrici si giunge alla forma:

$$\frac{dV_o}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} V_o = \frac{E}{R_1 C}$$

L'integrale di un'equazione di primo grado lineare è noto a meno di una costante k determinata dalle condizioni iniziali ⁹. Posto $\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$, l'integrale è:

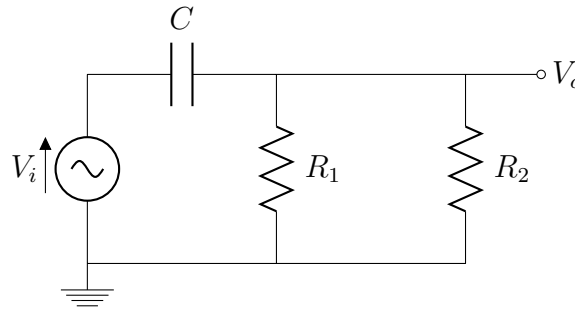
$$V_C(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \left[k + \int \frac{E}{R_1 C} e^{\frac{t}{\tau}} dt \right] = k e^{-\frac{t}{\tau}} + E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Considerando il circuito a regime, ovvero al limite per $t \rightarrow \infty$ si ha:

$$V_{o-E} = V_C = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Si fa notare che il risultato è lo stesso che si sarebbe ottenuto considerando il condensatore un circuito aperto, il che avrebbe portato alla soluzione del circuito con un semplice partitore di tensione. Quest'ultima considerazione è sensata anche dal punto di vista fisico. Quando il condensatore è carico si crea una situazione di equilibrio elettrostatico in cui vale la relazione $Q = CV$. Poiché $I = \frac{dq}{dt}$, nel momento in cui la carica diventa costante, la corrente diventa nulla. Ciò corrisponde, a tutti gli effetti, ad avere un circuito aperto nel circuito.

Analizziamo ora il comportamento del circuito spegnendo il generatore di tensione E . Il circuito può essere ridisegnato come segue:



Risulta evidente che V_{o-C} può essere calcolata usando il partitore di tensione tra il condensatore C e il parallelo delle resistenze R_1 ed R_2 . Definite quindi:

$$R_{//} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$Z_C = \frac{1}{sC}$$

⁹ Si ricorda che l'integrale generale di un'equazione lineare del tipo:

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = \phi(t)$$

è il seguente:

$$y(t) = e^{-A(t)} \left[k + \int e^{A(t)} \phi(t) dt \right]$$

Ove $A(t)$ è la primitiva di $a(t)$ e $k \in \mathbb{R}$ una costante determinata dalle condizioni iniziali

Calcoliamo la tensione al nodo V_o :

$$V_{o-C} = V_i \frac{R_{//}}{Z_C + R_{//}} = V_i \frac{R_{//}}{\frac{1}{sC} + R_{//}} = V_i \frac{sR_{//}C}{1 + sR_{//}C}$$

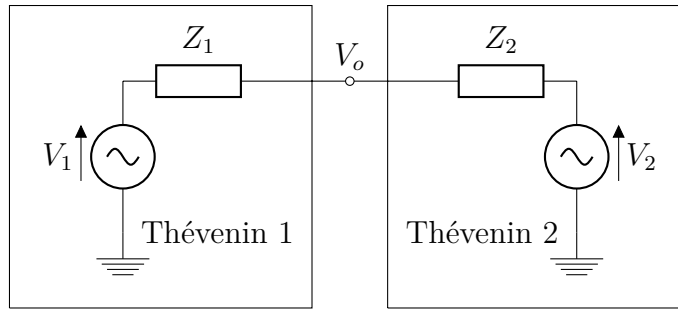
Sommando infine con l'uscita ottenuta spegnendo il generatore di segnale si ha:

$$V_o = V_{o-E} + V_{o-C} = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} + V_i \frac{sR_{//}C}{1 + sR_{//}C}$$

Che, come sarà più chiaro in seguito, è la somma di un contributo in continua con un contributo in regime sinusoidale. ♣

Combinazione di circuiti equivalenti

Supponiamo di voler calcolare la tensione in un nodo all'interno di un circuito. Per comodità sintetizziamo la rete con due circuiti equivalenti di Thévenin connessi al nodo, come in figura:



Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, la tensione al nodo V_o è data dalla somma dei contributi dei generatori di tensione di Thévenin V_1 e V_2 spegnendo rispettivamente il generatore restante. In entrambi i casi il calcolo si riduce ad un partitore di tensione e quindi:

$$V_o = V_1 \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} + V_2 \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Risulta quindi evidente che:

$$V_o \approx \begin{cases} V_1 & \text{se } Z_2 \gg Z_1 \\ V_2 & \text{se } Z_1 \gg Z_2 \end{cases}$$

Ciò significa, in termini pratici, che *la tensione ad un nodo è fissata dal circuito a impedenza minore*.

1.4 Analisi in frequenza dei circuiti

Anche questa sezione mancherà volutamente di rigore matematico. Per un'analisi approfondita degli argomenti trattati in seguito si faccia riferimento ai corsi di Analisi Complessa, Teoria dei Segnali e Teoria dei Sistemi.

1.4.1 Funzione di trasferimento e comportamento in frequenza nulla

Data una rete generica *lineare* stimolata sinusoidalmente da un ingresso V_i con un uscita V_o si definisce funzione di trasferimento (brevemente *FdT*):

$$H(s) \triangleq \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \quad s = j\omega \quad (1.31)$$

Si fa notare che per $\omega \rightarrow 0$, che corrisponde a uno stimolo di ingresso a pulsazione nulla, cioè in continua, si ha $s \rightarrow 0$. Calcolando il limite per $s \rightarrow 0$ delle impedenze si ottiene il comportamento in continua (pulsazione nulla) di questi componenti a regime.

•

$$\lim_{s \rightarrow 0} Z_R = R$$

Una resistenza si comporta sempre allo stesso modo con qualsiasi frequenza, come già verificato in precedenza.

•

$$\lim_{s \rightarrow 0} Z_C = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sC} = \infty$$

Un condensatore assume impedenza infinita per pulsazioni nulle, comportandosi come un circuito aperto (come analizzato nell'Esempio 1.3.6).

•

$$\lim_{s \rightarrow 0} Z_L = \lim_{s \rightarrow 0} sL = 0$$

Un'induttanza assume impedenza nulla per pulsazioni nulle, comportandosi come un cortocircuito.

Queste considerazioni saranno di rilevante importanza quando si analizzerà il *punto di lavoro* dei circuiti.

1.4.2 Trasformata di Laplace

I circuiti elettronici si comportano diversamente a seconda della frequenza del segnale di ingresso. Questo risulta evidente già dal fatto che le impedenze sono funzioni complesse che dipendono dalla pulsazione ω del segnale di ingresso. La relazione tra la risposta in frequenza (in funzione di della pulsazione e quindi di $s = j\omega$) del circuito e la risposta in transitorio (in funzione del tempo t) è data dalla *trasformata di Laplace*, che matematicamente è così definita:

Definizione 1.4.1. Si definisce *trasformata di Laplace (unilatera)* della funzione $f(t)$ la seguente funzione complessa:

$$F(s) \triangleq \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1.32)$$

Si impone come condizione di trasformabilità che $\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid f_\lambda(t) \triangleq f(t)e^{-\lambda t}$ sia sommabile.

In questa trattazione daremo per scontata la condizione di sommabilità della funzione $f(t)$, poiché sarà sempre verificata per i segnali utilizzati. Inoltre avremo a che fare sempre con segnali definiti in \mathbb{R}^+ , quindi nulli per $t < 0$. Per tale motivo si fa uso della trasformata di Laplace unilatera.

Sotto opportune condizioni (che tralascieremo) sarà possibile invertire il procedimento di trasformazione, per tornare alla funzione nel dominio del tempo.

Definizione 1.4.2. Si definisce *antitrasformata di Laplace* della funzione $F(s)$ la funzione reale:

$$f(t) \triangleq \frac{1}{2\pi j} (v.p.) \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (1.33)$$

Questa definizione è fornita solo per completezza di esposizione ma non sarà mai effettivamente utilizzata.

La trasformata di Laplace di un segnale nel dominio del tempo restituisce la sua funzione nel dominio di Laplace (frequenza). Spesso operare nel dominio di Laplace è molto più semplice (ad esempio utilizzando i fasori e le impedenze) e quindi preferibile. A volte non sarà nemmeno necessario operare l'antitrasformazione, in quanto saremo interessati solo al comportamento del circuito al variare della frequenza del segnale d'ingresso.

Per indicare le trasformate e le antitrasformate si faccia riferimento anche alla seguente notazione:

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] \\ f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \end{aligned}$$

Dalla definizione della funzione di trasferimento (1.31), si ricava la seguente relazione:

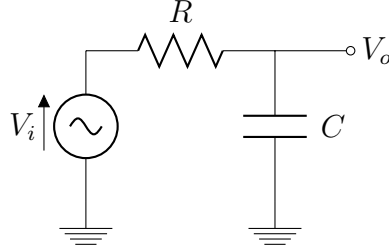
$$v_o(t) = \mathcal{L}^{-1}[V_o(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)V_i(s)] \quad (1.34)$$

Di seguito vengono elencate alcune trasformate di Laplace fondamentali:

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{1}{\tau_p} e^{-\frac{t}{\tau_p}}$	$\frac{1}{1 + s\tau_p}$
$1 - e^{-\frac{t}{\tau_p}}$	$\frac{1}{s(1 + s\tau_p)}$
$1 - \left(1 - \frac{\tau_z}{\tau_p}\right) e^{-\frac{t}{\tau_p}}$	$\frac{1 + s\tau_z}{s(1 + s\tau_p)}$

Filtro RC

Consideriamo il circuito in figura, già incontrato in precedenza:



Applicando il partitore di tensione la tensione del nodo V_o può essere calcolata analogamente all'equazione 1.30:

$$V_o = \frac{V_i}{1 + sRC} \quad (1.35)$$

Da questa possiamo quindi ricavare la FdT di un filtro RC:

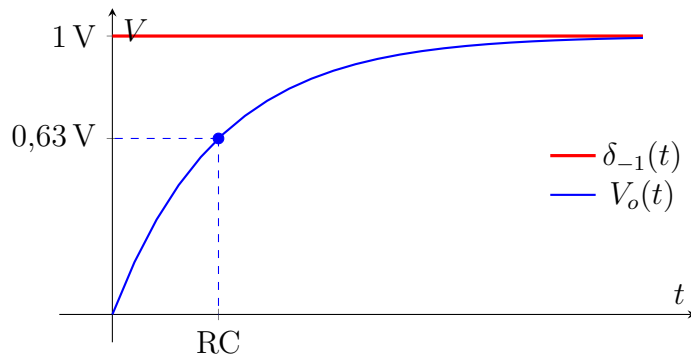
$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + sRC} \quad (1.36)$$

Supponendo ora che l'ingresso V_i sia un segnale gradino unitario $\delta_{-1}(t)$ la cui trasformata di Laplace è $\frac{1}{s}$, calcoliamo l'uscita nel dominio di Laplace:

$$V_o(s) = H(s)V_i(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{s(1 + sRC)} \quad (1.37)$$

Dalla 1.37 ricaviamo quindi la risposta in transitorio dell'uscita $V_o(t)$:

$$V_o(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(1 + sRC)} \right] = 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \quad (1.38)$$



Il motivo per cui tale circuito è anche detto *filtro passa-basso* può essere facilmente intuito analizzando la risposta in frequenza $H(s)$, infatti:

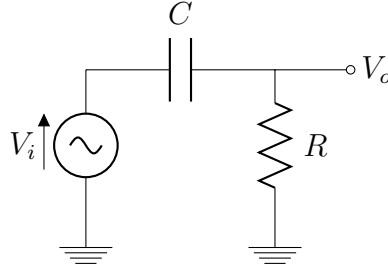
$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + sRC} = 1 \quad (1.39)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + sRC} = 0 \quad (1.40)$$

Cioè il circuito non altera (a regime) il segnale in entrata per frequenze nulle e lo annulla per frequenze infinitamente alte.

Filtro CR

Consideriamo ora il seguente circuito:



Applicando ancora una volta il partitore di tensione la tensione del nodo V_o può essere così calcolata:

$$V_o = V_i \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = V_i \frac{sRC}{1 + sRC} \quad (1.41)$$

Ricaviamo quindi la FdT di un filtro CR:

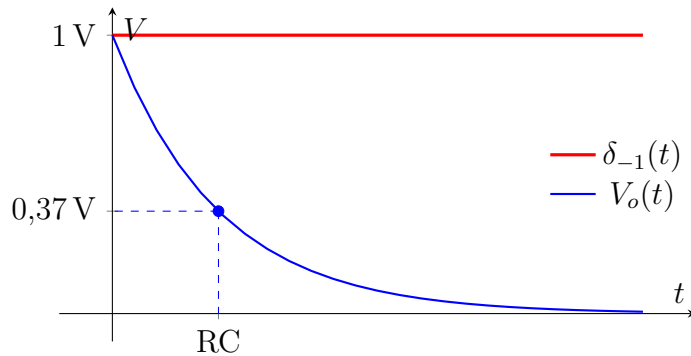
$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{sRC}{1 + sRC} \quad (1.42)$$

Supponendo ora che l'ingresso V_i sia un segnale gradino unitario $\delta_{-1}(t)$ la cui trasformata di Laplace è $\frac{1}{s}$, calcoliamo l'uscita nel dominio di Laplace:

$$V_o(s) = H(s)V_i(s) = \frac{1}{s} \frac{sRC}{1 + sRC} = \frac{RC}{1 + sRC} \quad (1.43)$$

Dalla 1.43 ricaviamo la risposta in transitorio dell'uscita $V_o(t)$:

$$V_o(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{RC}{1 + sRC} \right] = e^{-\frac{t}{RC}} \quad (1.44)$$



Il motivo per cui tale circuito è anche detto *filtro passa-alto* può essere facilmente dedotto come nel caso del filtro RC:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{sRC}{1 + sRC} = 0 \quad (1.45)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sRC}{1 + sRC} = 1 \quad (1.46)$$

Viceversa rispetto al filtro passa-basso, il filtro passa-alto annulla segnali a frequenza nulla e lascia inalterati quelli a frequenza infinita.

1.4.3 Teoremi del valore iniziale e del valore finale

Di notevole importanza e utilizzo sono i due seguenti teoremi (enunciati senza dimostrazione):

Teorema 1.4.1 (del valore iniziale). *Dato un circuito con FdT $H(s)$ stimolato con un segnale in ingresso avente trasformata di Laplace $V_i(s)$, il valore iniziale nel dominio del tempo dell'uscita $V_o(t)$ è dato da:*

$$V_o(t)|_{t \rightarrow 0^+} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot H(s) \cdot V_i(s) \quad (1.47)$$

Esempio 1.4.1. In un circuito RC con FdT 1.36 stimolato da un gradino unitario, il valore iniziale della risposta in transitorio sarà:

$$V_o(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1}{1 + sRC} \frac{1}{s} = 0 \text{ V}$$

In un circuito CR con FdT 1.42 il valore iniziale della risposta in transitorio, dato in ingresso il gradino unitario, sarà:

$$V_o(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{sRC}{1 + sRC} \frac{1}{s} = 1 \text{ V}$$



Teorema 1.4.2 (del valore finale). *Dato un circuito con FdT $H(s)$ stimolato con un segnale in ingresso avente trasformata di Laplace $V_i(s)$, il valore finale nel dominio del tempo dell'uscita $V_o(t)$ è dato da:*

$$V_o(t)|_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot H(s) \cdot V_i(s) \quad (1.48)$$

Esempio 1.4.2. In un circuito RC con FdT 1.36 stimolato da un gradino unitario, il valore finale della risposta in transitorio sarà:

$$V_o(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \frac{1}{1 + sRC} \frac{1}{s} = 1 \text{ V}$$

In un circuito CR con FdT 1.42 il valore iniziale della risposta in transitorio, dato in ingresso il gradino unitario, sarà:

$$V_o(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \frac{sRC}{1 + sRC} \frac{1}{s} = 0 \text{ V}$$



1.4.4 Diagrammi di Bode

Analizzare un circuito al variare della frequenza con cui viene stimolato risulta semplice ed efficace tramite i *diagrammi di Bode*. Tali diagrammi ci permetteranno di analizzare come un circuito altera l'*ampiezza* e la *fase* del segnale periodico in ingresso.

Per il *teorema di Fourier* ogni segnale periodico di periodo T_0 e quindi frequenza $f_0 = \frac{1}{T_0}$ può essere espresso tramite somma (eventualmente infinita) di segnali sinusoidali (anche complessi) di ampiezza opportuna e frequenza multipla di f_0 detta *frequenza fondamentale*. Questo giustifica il fatto che i diagrammi di Bode valgono per qualsiasi segnale periodico.

A tal scopo, perciò, studieremo la funzione di trasferimento, che mette in relazione il segnale d'uscita con quello d'entrata.

Per una rete lineare, la FdT è una funzione razionale fratta complessa (che supporremo rappresentata irriducibilmente, cioè senza fattori uguali tra numeratore e denominatore):

$$H(s) = K \frac{\sum_{i=0}^n a_i s^i}{\sum_{j=0}^m b_j s^j} = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s^2 + \frac{\omega_{z_1}}{Q_{z_1}} s + \omega_{z_1}^2) \dots}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s^2 + \frac{\omega_{p_1}}{Q_{p_1}} s + \omega_{p_1}^2) \dots} \quad (1.49)$$

Ove tutti i coefficienti sono reali e inoltre:

$$|Q_{z_i}|, |Q_{p_j}| > \frac{1}{2} \quad \forall i, j$$

Il che spiega perché esistano dei termini del second'ordine, che rappresentano le radici complesse coniugate dei polinomi. Se le condizioni sui termini Q non fossero rispettate, si fa notare che le radici sarebbero reali e quindi si otterrebbero due termini del prim'ordine (si lascia al lettore la dimostrazione). La forma con cui è stata espressa la FdT è detta *forma di Evans*.

Definizione 1.4.3. Si definiscono *zeri* i valori per i quali si annulla il numeratore della FdT $H(s)$. Essi sono detti *zeri destri* se sono a parte reale positiva, *zeri sinistri* se sono a parte reale negativa.

Definizione 1.4.4. Si definiscono *poli* i valori per i quali si annulla il denominatore della FdT $H(s)$. Essi sono detti *poli destri* se sono a parte reale positiva, *poli sinistra* se sono a parte reale negativa.

Osservazione 1.4.1. Si fa osservare che un *sistema reale* deve avere necessariamente il numero di poli maggiore o uguale a quello degli zeri.

Una FdT razionale fratta può essere espressa anche nel seguente modo, che risulterà più funzionale per i nostri scopi.

Definizione 1.4.5. Una FdT è detta in *forma di Bode* se è così rappresentata:

$$H(s) = K_B \frac{(1 + s\tau_{z_1})(1 + s\tau_{z_2}) \dots \left(\left(\frac{s}{\omega_{z_1}} \right)^2 + \frac{s}{Q_{z_1}\omega_{z_1}} + 1 \right) \dots}{(1 + s\tau_{p_1})(1 + s\tau_{p_2}) \dots \left(\left(\frac{s}{\omega_{p_1}} \right)^2 + \frac{s}{Q_{p_1}\omega_{p_1}} + 1 \right) \dots} \quad (1.50)$$

Per passare dalla 1.49 alla 1.50 è sufficiente osservare che:

$$\begin{aligned}
\tau_z &= \frac{1}{z}; \\
(s + z) &= z(1 + s\tau_z); \\
(s^2 + \frac{\omega_z}{Q_z}s + \omega_z^2) &= \omega_z^2 \left(\left(\frac{s}{\omega_z} \right)^2 + \frac{s}{Q_z\omega_z} + 1 \right); \\
\tau_p &= \frac{1}{p}; \\
(s + p) &= p(1 + s\tau_p); \\
(s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p}s + \omega_p^2) &= \omega_p^2 \left(\left(\frac{s}{\omega_p} \right)^2 + \frac{s}{Q_p\omega_p} + 1 \right);
\end{aligned}$$

E di conseguenza:

$$K_B = K \frac{\prod_i z_i \omega_{z_i}^2}{\prod_j p_j \omega_{p_j}^2}$$

La FdT $H(s)$ è una funzione complessa nella variabile s e noi saremo interessati al suo *modulo* e al suo *argomento* o *fase*. Il *diagramma di Bode* servirà a fornirci queste informazioni al variare della frequenza del circuito.

Dato un numero complesso $z = a + jb$, il suo modulo e il suo argomento valgono:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1.51)$$

$$\angle(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{se } a > 0 \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(b) & \text{se } a = 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \operatorname{sgn}(b) & \text{se } a < 0 \end{cases} \quad (1.52)$$

Per $s = j\omega$ il modulo e la fase della risposta in frequenza al variare della pulsazione ω saranno così indicati:

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= |H(j\omega)| \\
\Phi(\omega) &= \angle(H(j\omega))
\end{aligned}$$

Spesso ci riferiremo, per comodità di calcolo e utilità di rappresentazione, all'ampiezza

con il suo valore in *decibel*¹⁰:

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log_{10}(|H(j\omega)|)$$

Se esprimiamo la FdT $H(s)$ come prodotto di singoli fattori $H_1(s), H_2(s), \dots$, valgono le seguenti proprietà (derivanti dalle proprietà dei logaritmi e della funzione arcotangente):

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{\text{dB}} &= \sum_i |H_i(j\omega)|_{\text{dB}} \\ \angle(H(j\omega)) &= \sum_i \angle(H_i(j\omega)) \end{aligned}$$

Ovvero l'ampiezza (in decibel) e la fase della FdT sono date dalla somma delle ampiezze e delle fasi dei singoli fattori elementari. Questo ci permette quindi di studiare il comportamento delle FdT dei singoli fattori elementari $(1 + s\tau)$, $\frac{1}{1+s\tau}$ e dei corrispettivi fattori del second'ordine e di tracciare successivamente il diagramma di Bode come somma dei grafici di ogni contributo.

D'ora in poi supporremo che i termini τ siano positivi ed esplicheremo il segno meno nella FdT così da distinguere facilmente i casi di poli o zeri destri e sinistri.

I diagrammi di Bode

I diagrammi di Bode sfruttano quella che è detta *scala semilogaritmica*, cioè che è logaritmica sulle ascisse e lineare sulle ordinate. Il diagramma di Bode si divide in due grafici semilogaritmici, il *diagramma delle ampiezze* e il *diagramma delle fasi* che indicano, ovviamente, l'ampiezza e la fase della FdT. Un diagramma di Bode vuoto si presenta in questo modo come in figura 1.1.

Funzione costante

La funzione più semplice da analizzare è la funzione costante:

$$H(s) = K_B$$

¹⁰Il decibel è in realtà definito come dieci volte il logaritmo di una rapporto tra grandezze omogenee (ed è quindi adimensionato):

$$G_{\text{dB}} \triangleq 10\log_{10}\left(\frac{N_1}{N_2}\right)$$

Nelle applicazioni a cui faremo riferimento utilizzeremo un fattore 20 anziché un fattore 10 poiché in realtà ci si riferisce, tradizionalmente, al rapporto tra le potenze W e non al rapporto tra le tensioni V . In questo modo infatti:

$$G_{\text{dB}} = 10\log_{10}\left(\frac{W_1}{W_2}\right) = 10\log_{10}\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2\right] = 20\log_{10}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

Analogo discorso può essere fatto per il rapporto tra due intensità di corrente I_1 e I_2

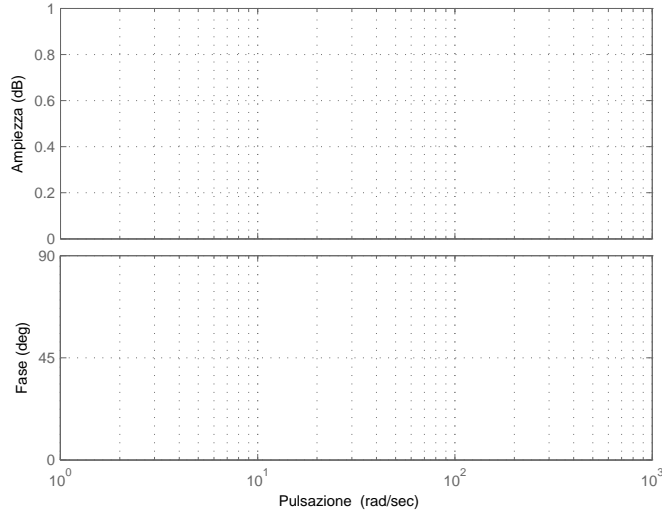


Figura 1.1: Diagramma di Bode vuoto

Il modulo e la fase saranno:

$$A(\omega) = 20\log_{10}|K_B|$$

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } K_B > 0 \\ 180^\circ & \text{se } K_B < 0 \end{cases}$$

In figura 1.2 è rappresentato un esempio per costante positiva e in figura 1.3 per costante negativa.

Poli e zeri nell'origine

Può capitare che in una FdT alcuni termini $(s - z)$ o $(s - p)$ abbiano rispettivamente $z = 0$ e $p = 0$ (da qui il nome di zero e polo *nell'origine*) e quindi nel passare alla forma di Bode restano invariati e i loro contributi saranno rispettivamente s e $\frac{1}{s}$. Analizzeremo insieme questi due casi. Le loro FdT saranno:

$$H_z(s) = s \quad H_p(s) = \frac{1}{s} \quad (1.53)$$

Il modulo delle FdT sarà rispettivamente:

$$A_z(\omega) = |H_z(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log_{10}|j\omega| = 20\log_{10}(\omega)$$

$$A_p(\omega) = |H_p(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log_{10}\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log_{10}|j\omega| = -20\log_{10}(\omega)$$

È facile notare che uno zero nell'origine farà guadagnare 20 dB mentre un polo nell'origine ne farà perdere. In un grafico semilogaritmico si avranno delle rette con pendenza, rispettivamente, +20 dB/dec e -20 dB/dec. Analogamente si può

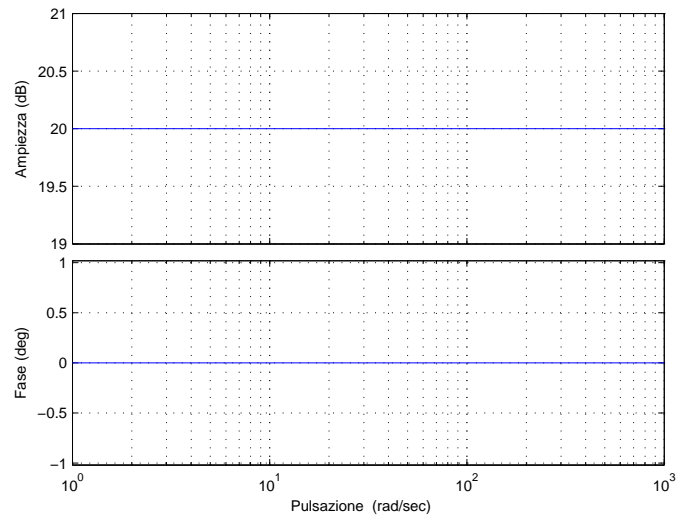


Figura 1.2: Diagrammi di Bode di $H(j\omega) = 10$

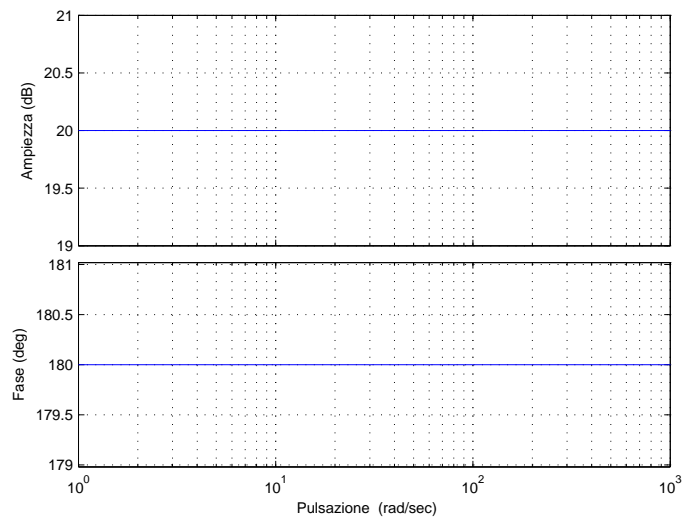


Figura 1.3: Diagrammi di Bode di $H(j\omega) = -10$

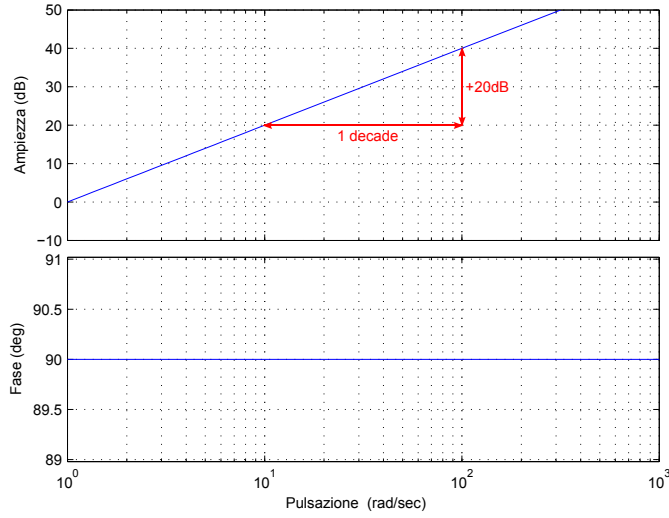


Figura 1.4: Diagrammi di Bode di $H(j\omega) = j\omega$

calcolare l'argomento delle due FdT:

$$\Phi_z(\omega) = \angle(H_z(j\omega)) = \angle(j\omega) = \angle(j) + \angle(\omega) = 90^\circ + 0^\circ = 90^\circ$$

$$\Phi_p(\omega) = \angle(H_p(j\omega)) = \angle\left(\frac{1}{j\omega}\right) = \angle\left(\frac{-j}{\omega}\right) = \angle(-j) - \angle(\omega) = -90^\circ - 0^\circ = -90^\circ$$

Ciò significa che uno zero e un polo nell'origine danno un contributo costante, rispettivamente, di $+90^\circ$ e -90° . I diagrammi di Bode di un polo e di uno zero nell'origine si presentano quindi come nelle figure 1.4 e 1.5.

Zeri destri e sinistri

Analizziamo il caso in cui la FdT sia del tipo:

$$H(s) = 1 \pm s\tau$$

Il modulo sarà uguale sia per zeri destri che sinistri poiché le due FdT sono l'una il complesso coniugato dell'altra:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log_{10}|1 \pm j\omega\tau| = \\ &= 20\log_{10}\left(\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}\right) = \begin{cases} 0 \text{ dB} & \text{se } \omega\tau \ll 1 \\ +3 \text{ dB} & \text{se } \omega = \frac{1}{\tau} \\ 20\log_{10}(\omega\tau) & \text{se } \omega\tau \gg 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Cioè uno zero non altera il modulo per pulsazioni molto minori di $\frac{1}{\tau}$ e aumenta di 20 dB per ogni aumento di una decade della pulsazione (pendenza $+20 \text{ dB/dec}$) per pulsazioni molto maggiori di $\frac{1}{\tau}$. La pulsazione $\omega_t = \frac{1}{\tau}$ viene detta *pulsazione di*

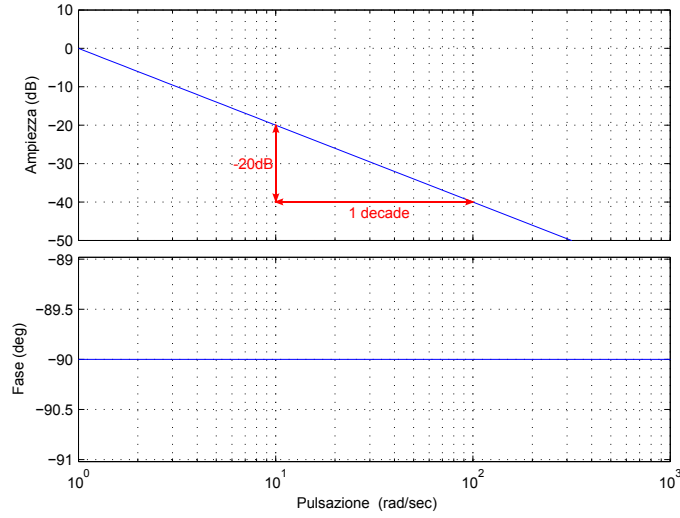


Figura 1.5: Diagrammi di Bode di $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

taglio. In questa pulsazione, il guadagno vale 3 dB. La fase di uno zero può essere così ricavata:

$$\Phi(\omega) = \angle(H(j\omega)) = \angle(1 \pm j\omega) = \arctan(\pm j\omega) = \pm \arctan(j\omega)$$

Distinguendo con $\Phi_-(\omega)$ l'argomento del polo sinistro ($1 + s\tau$) e con $\Phi_+(\omega)$ l'argomento del polo destro ($1 - s\tau$):

$$\Phi_+(\omega) = -\arctan(\omega\tau) = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } \omega \rightarrow 0 \\ -45^\circ & \text{se } \omega = \frac{1}{\tau} \\ -90^\circ & \text{se } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\Phi_-(\omega) = \arctan(\omega\tau) = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } \omega \rightarrow 0 \\ +45^\circ & \text{se } \omega = \frac{1}{\tau} \\ +90^\circ & \text{se } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

In figura 1.6 sono mostrati i diagrammi di Bode di entrambe le funzioni, lo zero sinistro in blu e quello destro in verde. Le linee tratteggiate sono i diagrammi *reali* mentre quelle continue sono i diagrammi *asintotici*. Faremo più spesso utilizzo di questi ultimi, affidabili però solo per *pulsazioni lontane da quelle di taglio*. In particolare si fa notare che nella pulsazione di taglio l'errore tra il grafico asintotico e quello reale vale 3 dB.

Poli destri e sinistri

Si prenda ora in esame il caso, simile al precedente, in cui:

$$H(s) = \frac{1}{1 \pm s\tau}$$

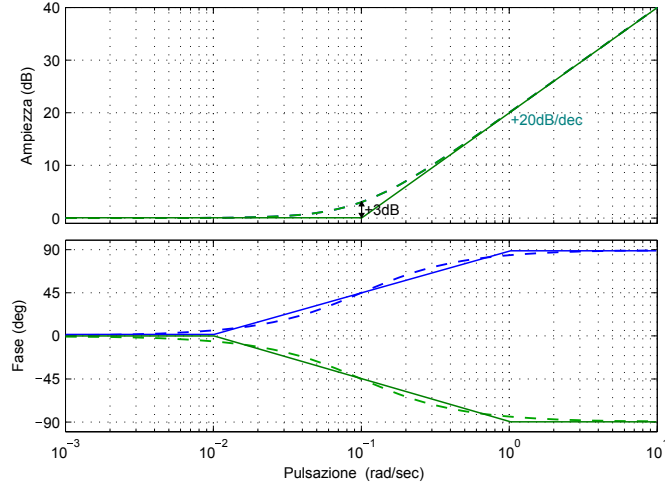


Figura 1.6: Diagrammi di Bode di $H(j\omega) = 1 \pm j10\omega$

Calcoliamo analogamente il modulo della funzione, osservando che anche in questo caso è indifferente che si tratti di un polo destro o sinistro.

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 \pm j\omega\tau} \right| = \\
 &= 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \right) = \begin{cases} 0 \text{ dB} & \text{se } \omega\tau \ll 1 \\ -3 \text{ dB} & \text{se } \omega = \frac{1}{\tau} \\ -20 \log_{10}(\omega\tau) & \text{se } \omega\tau \gg 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Il comportamento del modulo di un polo, che sia destro o sinistro, è l'opposto di quello di uno zero, procedendo per pulsazioni più grandi di quella di taglio con un pendenza di -20 dB/dec . Con le stesse convenzioni del caso precedente, calcoliamo le fasi nei due casi.

$$\begin{aligned}
 \Phi(\omega) &= \angle(H(j\omega)) = \angle\left(\frac{1}{1 \pm j\omega\tau}\right) = \angle(1) - \angle(1 \pm j\omega\tau) = -\angle(1 \pm j\omega\tau) \\
 \Phi_+(\omega) &= \arctan(\omega\tau) = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } \omega \rightarrow 0 \\ +45^\circ & \text{se } \omega = \frac{1}{\tau} \\ +90^\circ & \text{se } \omega \rightarrow \infty \end{cases} \\
 \Phi_-(\omega) &= -\arctan(\omega\tau) = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } \omega \rightarrow 0 \\ -45^\circ & \text{se } \omega = \frac{1}{\tau} \\ -90^\circ & \text{se } \omega \rightarrow \infty \end{cases}
 \end{aligned}$$

In figura 1.7 sono mostrati i diagrammi di Bode del polo sinistro (in blu) e del polo destro (in verde). Le linee tratteggiate sono i diagrammi *reali* mentre quelle continue sono i diagrammi *asintotici*. Si fa notare che nella pulsazione di taglio l'errore tra il grafico asintotico e quello reale vale -3 dB .

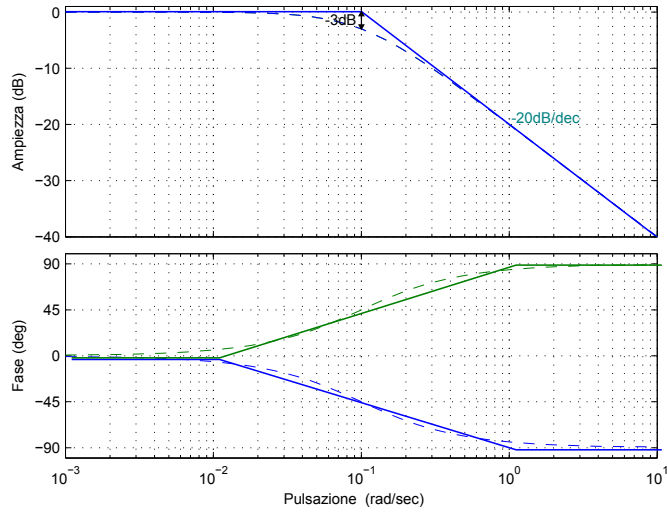


Figura 1.7: Diagrammi di Bode di $H(j\omega) = \frac{1}{1 \pm j10\omega}$

Poli e zeri del second'ordine

I termini del second'ordine sono analiticamente più laboriosi da trattare. Tratteremo con precisione solo il caso dello zero del second'ordine mentre il polo del second'ordine sarà dedotto semplicemente dalle seguenti considerazioni (derivate dalle proprietà dei logaritmi e dell'arcotangente):

$$\left| \frac{1}{H(j\omega)} \right|_{\text{dB}} = -|H(j\omega)|_{\text{dB}}$$

$$\angle \left(\frac{1}{H(j\omega)} \right) = -\angle (H(j\omega))$$

Consideriamo ora la FdT con un polo del second'ordine:

$$H(s) = \left(\frac{s}{\omega_z} \right)^2 + \frac{s}{Q_z \omega_z} + 1$$

Ci occuperemo separatamente del calcolo del modulo della FdT. Operando la sostituzione $s = j\omega$ si ottiene la risposta in frequenza:

$$H(j\omega) = -\left(\frac{\omega}{\omega_z} \right)^2 + j \frac{\omega}{Q_z \omega_z} + 1$$

Calcoliamo quindi il modulo in decibel della risposta in frequenza:

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log_{10} \left| \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_z^2} \right) + j \frac{\omega}{Q_z \omega_z} \right| = \\ &= 10 \log_{10} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_z^2} \right)^2 + \frac{\omega^2}{Q_z^2 \omega_z^2} \right] = \begin{cases} 0 \text{ dB} & \text{se } \omega \rightarrow 0 \\ -20 \log_{10} |Q_z| & \text{se } \omega = \omega_z \\ 40 \log_{10}(\omega) & \text{se } \omega \rightarrow \infty \end{cases} \end{aligned}$$

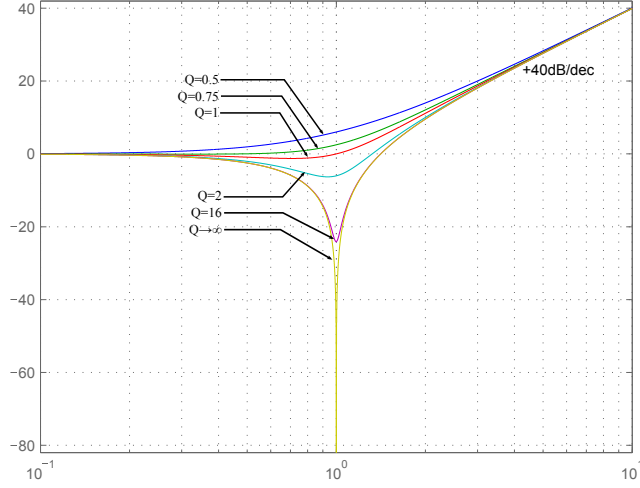


Figura 1.8: Diagrammi di Bode di $H(j\omega) = s^2 + 2s + 1$, con $\omega_z = 1$

Per frequenze lontane dalla *pulsazione di risonanza* ω_z il comportamento è quello che si avrebbe sovrapponendo due zeri del primo ordine: non vi sono cambiamenti di modulo prima della pulsazione di risonanza e a pulsazioni maggiori di essa si perdono 40 dB ogni decade. Il comportamento singolare avviene a frequenze prossime ad ω_z , dove il modulo dipende fortemente dal valore di Q_z . Si fa notare che nel caso in cui:

$$Q_z = \frac{1}{2}$$

Si hanno due zeri reali e la FdT potrebbe essere riscritta come:

$$H(s) = \left(\frac{s}{\omega_z}\right)^2 + 2\frac{2}{\omega_z} + 1 = \left(\frac{s}{\omega_z} + 4\right)^2$$

Il grafico in blu in figura 1.8 mostra come l'errore nella pulsazione di risonanza è di +6 dB, cioè la sovrapposizione di due errori di +3 dB dovuti ai due poli coincidenti. Per valori maggiori del parametro Q_z si ha un *picco di risonanza* in prossimità di ω_z , più vicino a questa frequenza quanto più è alto il valore di Q_z .

La pulsazione ω_{max} in cui si ha il picco maggiore (in valore assoluto) si può calcolare derivando $|H(j\omega)|$ lungo la variabile ω e il suo valore assoluto e si può quindi trovare il suo valore $A_{max} = |H(j\omega_{max})|$ ¹¹:

$$\omega_{max} = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^+ \left| \frac{d}{d\omega} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_z^2}\right) + \frac{\omega}{\omega_z^2 Q_z^2} \right] = 0 \right. \right\} = \omega_z \sqrt{\frac{2Q_z^2 - 1}{2Q_z^2}}$$

$$A_{max} = |H(j\omega_{max})|_{dB} = -10 \log_{10} \left(\frac{4Q_z^2 - 1}{4Q_z^2} \right)$$

Si noti inoltre che per $Q_z \gg 1$ si ha:

$$\omega_{max} \approx \omega_z \quad A_{max} \approx -20 \log_{10} |Q_z|$$

¹¹Verranno omessi i calcoli intermedi che, seppur semplici, sono alquanto laboriosi

In figura 1.8 sono mostrati i comportamenti per differenti valori di Q_z .

Per quanto riguarda il calcolo della fase della funzione, il procedimento è più complesso. Ricordando la definizione di fase 1.52, vedremo che sarà importante tener conto del segno della parte reale e immaginaria della FdT.

$$\begin{aligned}\Re[H(j\omega)] &= 1 - \frac{\omega^2}{\omega_z^2} \\ \Im[H(j\omega)] &= \frac{\omega}{Q_z \omega_z} \\ \Re[H(j\omega)] &\geq 0 \Rightarrow \omega < \omega_z \\ \Im[H(j\omega)] &> 0 \Rightarrow Q_z > 0\end{aligned}$$

Possiamo quindi osservare che:

$$\text{sgn}(\Im[H(j\omega)]) = \text{sgn}(Q_z)$$

E inoltre sarà utile calcolare l'arcotangente del rapporto tra parte immaginaria e parte reale:

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{\Im[H(j\omega)]}{\Re[H(j\omega)]}\right) &= \arctan\left(\frac{\frac{\omega}{Q_z \omega_z}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_z^2}}\right) = \arctan\left(\frac{\omega}{Q_z \omega_z} \frac{\omega_z^2}{\omega_z^2 - \omega^2}\right) = \\ &= \arctan\left(\frac{\omega \omega_z}{Q_z(\omega_z^2 - \omega^2)}\right)\end{aligned}$$