

一、问题描述

100 名囚犯（编号 1 - 100）在房间中有 100 个盒子，盒内随机放置 1 - 100 的编号纸条。每位囚犯只能进入房间一次，最多打开 K 个盒子寻找自己的编号；若所有囚犯均在各自的 K 次尝试内找到编号，则全体获释，否则全体失败。本实验比较了两种搜索策略——随机搜索和循环策略——在不同参数设置下的全体成功率及囚犯个体成功分布。

二、实验方法

1. 随机搜索策略

每位囚犯随机选取 K 个不同的盒子打开，若盒内编号等于自身编号则视为成功。

2. 循环策略

每位囚犯先打开编号与自身相同的盒子（位置 $\text{prisoner} - 1$ ），获取盒内纸条编号 m 后打开第 m 个盒子，依此类推，直至找到自身编号或达到 K 次尝试上限。

3. 仿真流程

- (1) 随机打乱 $1 \cdots N$ 的排列，生成盒子内容；
- (2) 按策略对每位囚犯进行 K 次尝试，统计当轮找到编号的囚犯人数；
- (3) 若该人数等于 N ，则记为一次“全体成功”；
- (4) 重复 $T=10000$ 轮，记录每轮囚犯个体成功人数分布及全体成功次数。

4. 扩展及参数扫描

扩展场景： $N=50$ 、 $K=25$ ， $T=10000$ ；
参数扫描：固定 $N=100$ ，令 $K=10, 20, \cdots, 100$ ，统计各 K 下两种策略的全体成功率。

三、实验结果

1. 默认场景（ $N=100$ 、 $K=50$ ）

随机搜索策略全体成功率约 0.01% 以下；循环策略全体成功率约 31%，大幅优于随机搜索。

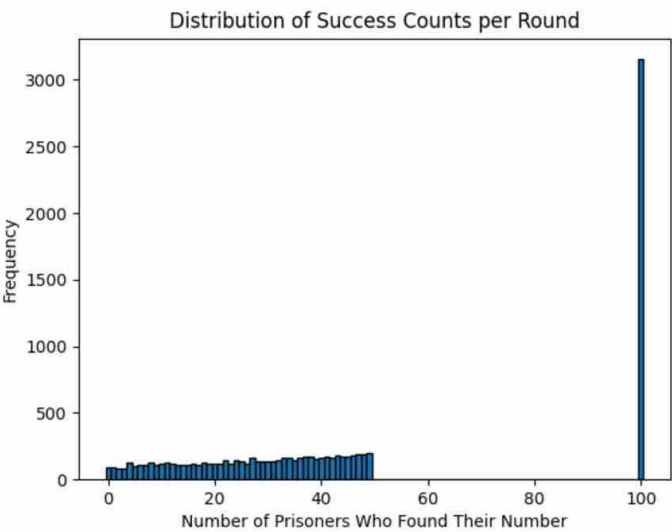
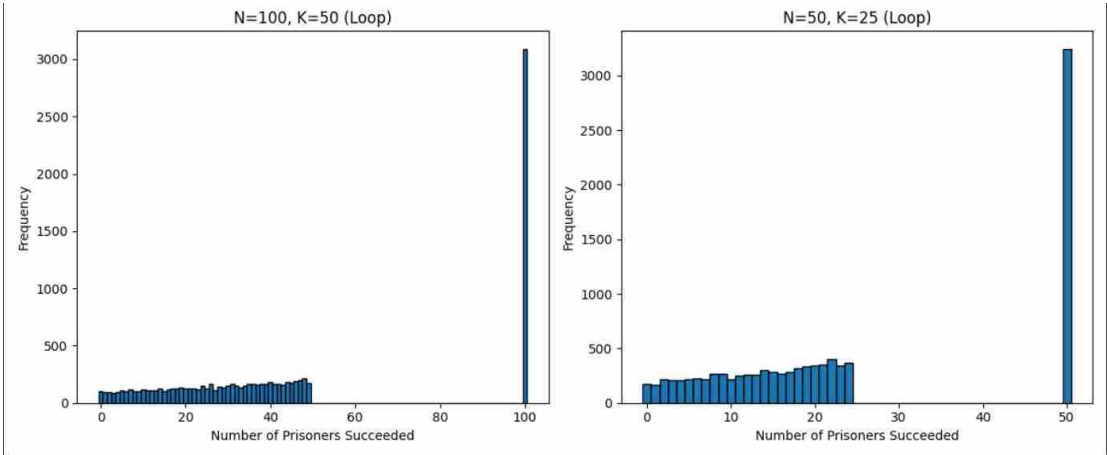


图 1 展示了循环策略下 10000 轮中每轮找到编号囚犯人数的直方分布,可见全体成功(100人)出现约 3100 次左右。

2. 扩展场景 (N=50、K=25)



随机搜索策略成功率极低,几乎为零;循环策略成功率约 31% 左右,与默认场景相当。

图 2 为扩展场景循环策略下的囚犯成功人数分布,分布形态与默认场景相似,但横轴范围缩短至 50。

3. 参数扫描 (N=100, K 从 10 到 100)

随机搜索全体成功率在所有 K 下均低于 1%;

循环策略成功率随 K 增大单调上升:

K=10 时成功率约 0%;

K=50 时约 31%;

K=100 时必定成功 (100%)。

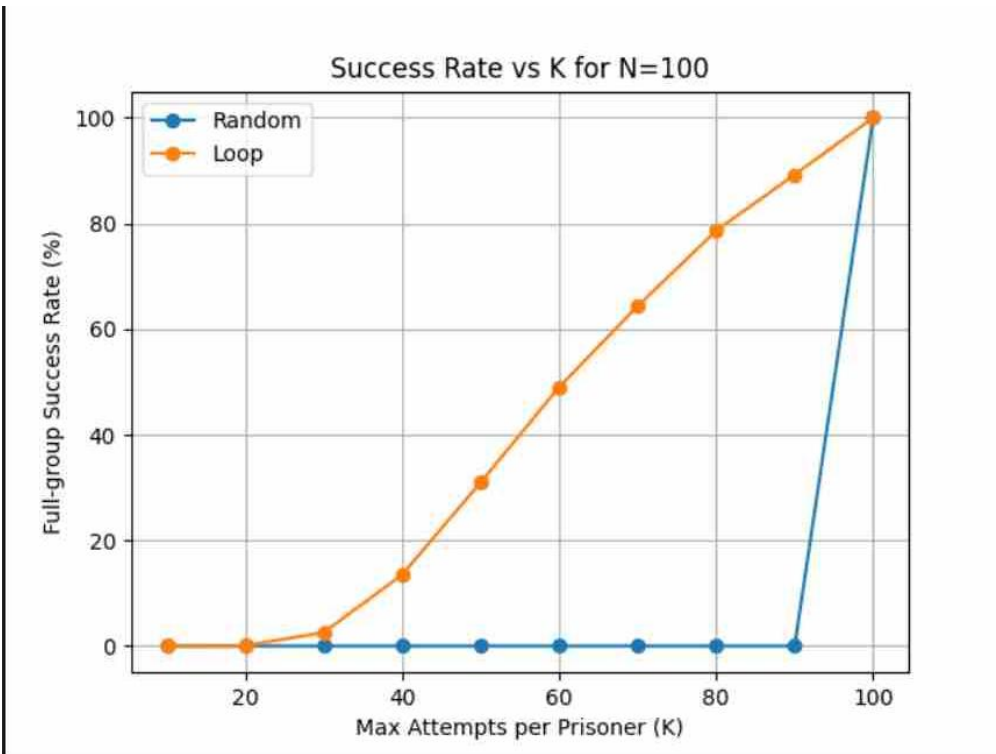


图 3 给出了两种策略在不同 K 下的全体成功率折线图，循环策略曲线在 $K \geq 30$ 后快速攀升，随机策略始终接近 0。

六、结果分析

1. 循环策略利用了随机排列的循环结构：若所有循环长度均 $\leq K$ ，则全体必定成功；对应理论上当 $K=N/2$ 时成功概率约 $1-\ln 2 \approx 31\%$ 。
2. 随机搜索完全无结构信息，整体成功概率仅为 $(K/N)^N$ ，随 N 增大急剧衰减。
3. 扩展场景 $N=50$ 、 $K=25$ 下循环策略成功概率仍约 31%，与理论一致。
4. 参数扫描验证了循环策略随 K/N 上升成功率近似一个阈值函数，当 $K/N \approx 0.5$ 时概率跃升至 0.31。