100 囚犯问题作业报告

一．问题描述：

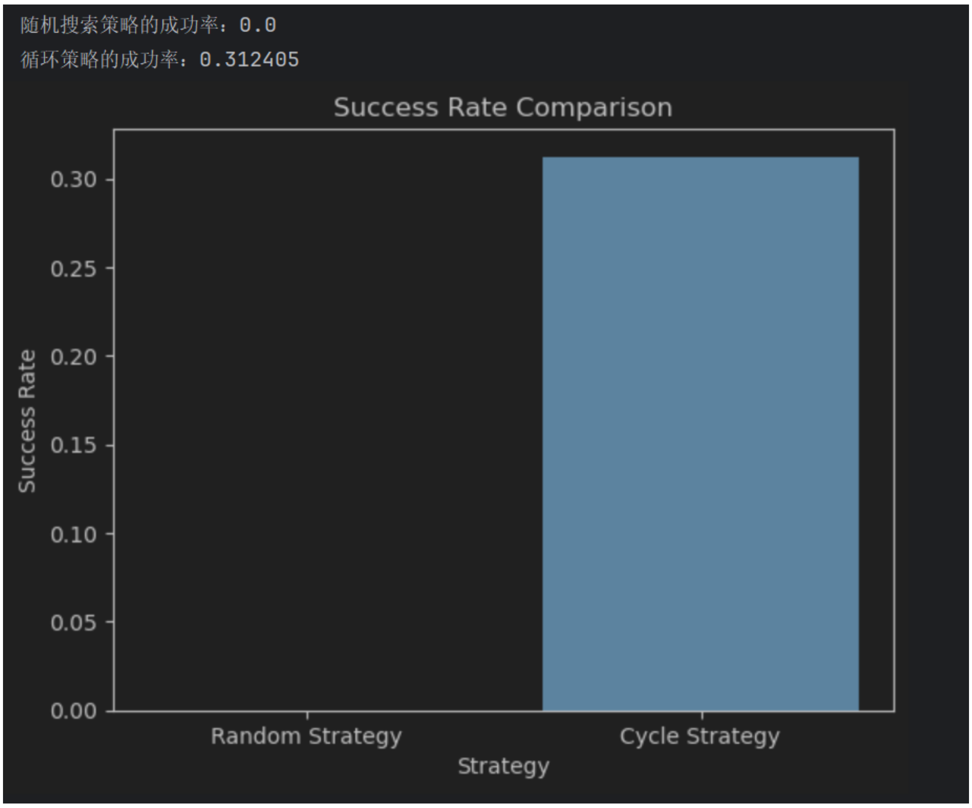
100 名囚犯编号为 1 至 100。监狱长准备一个房间，内有 100 个盒子，每个盒子内随机放入 一张囚犯编号的纸条（编号不重复）。囚犯依次进入房间，每人可打开最多 50 个盒子寻找自 己的编号。若所有囚犯均在 50 次尝试内找到自己的编号，则全体获释；否则全员失败。

二．算法说明：

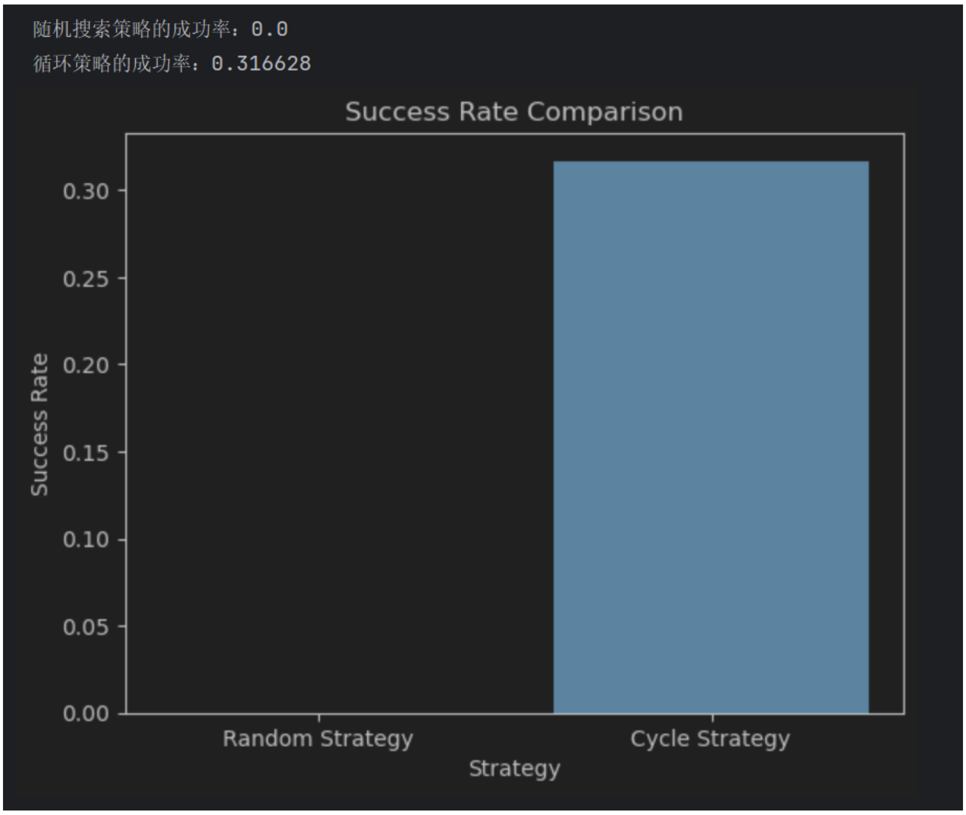
随机搜索：随机生成 0 到 99 的编号到一个数组中，从 0 到 99 遍历每个囚犯：让囚犯随机开一个盒子，并将其开过的盒子记录到 set 中以防止重复开一个，直到囚犯找到自己的编号，或开完 50 个为止（即失败）。一人失败，便全员失败，无需再遍历其他囚犯。

循环策略：随机生成 0 到 99 的编号到一个数组中，从 0 到 99 遍历每个囚犯：让囚犯随机开自己编号对应的盒子，如果未找到自己的编号，就再去找盒子中的编号对应的盒子，直到囚犯找到自己的编号，或开完 50 个为止（即失败）。一人失败，便全员失败，无需再遍历其他囚犯。

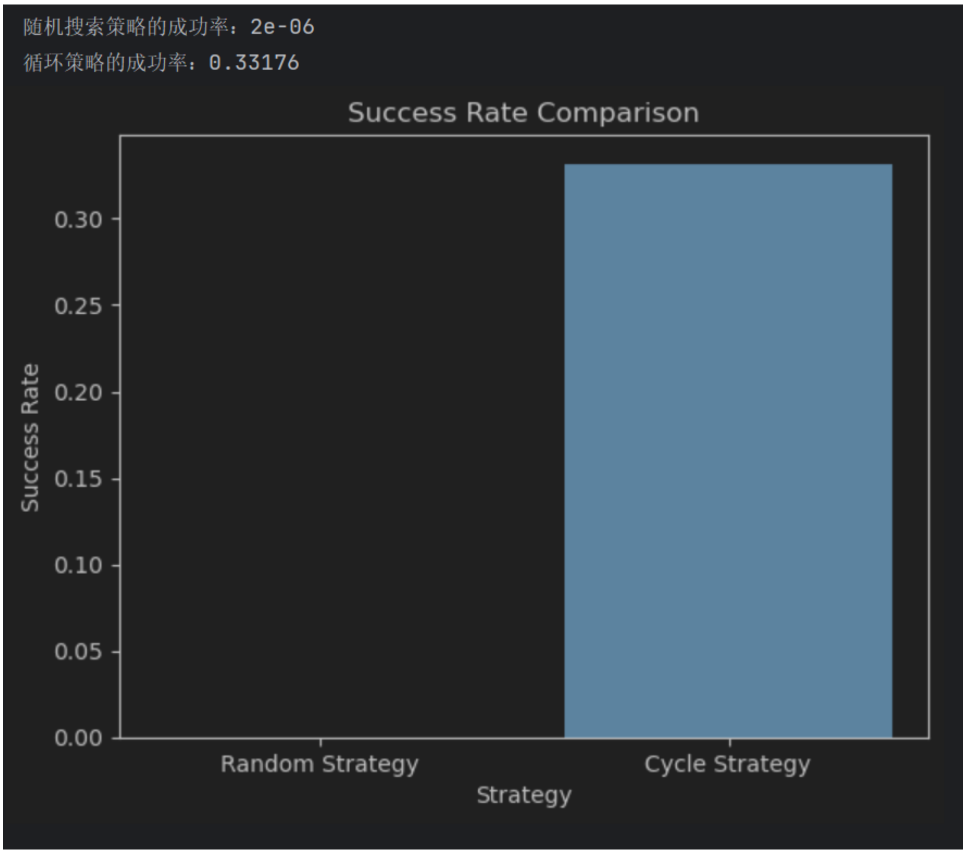
三．实验结果：



随机搜索的成功率几乎为 0，而循环策略的成功率为 31.2%左右



当 N=50，K=25 时，随机搜索的成功率几乎为 0，而循环策略的成功率为 31.7%左右



当 N=20，K=10 时，随机搜索的成功率为2×10^{-6}，而循环策略的成功率为 33.2%左右

四．结果分析：

随机搜索策略理论成功率:

从 100 个盒子里打开 50 个，找到自己的编号的概率为 0.5，因此成功率为:

$$(0.5)^{100} = 8 \times 10^{-31}$$

循环策略理论成功率:

在 100 个盒子中放入 100 个编号，其实就是这 100 个数的置换，只要这一次的置换中存在大于 50 的轮换就会失败，否则一定成功。理论成功率变为了计算 100!种置换中有多少种不存在长度大于 50 的轮换，也就是用 100!减去存在长度大于 50 的轮换的个数:

最长轮换为 K 的情况的个数为:

$$C_{100}^{K}(K\text{-}1)!\,(100\text{-}K)!$$

最长轮换为 K 的情况的概率为:

$$P = \frac{C_{100}^{K}(K\text{-}1)!\,(100\text{-}K)!}{100!} = \frac{1}{K}$$

用 1 减去 K 大于等于 50 的情况的概率，得到成功率为:

$$P = 1\text{-}\frac{1}{100}\text{-}\frac{1}{99}\text{-}\dots\text{-}\frac{1}{51} = 0.3118$$

可见，循环策略的理论成功率远大于随机搜索策略，与实际测试结果相符。以上理论成功率的算法也解释了为什么当 N 和 K 变小时，成功率会变大。