100 囚犯抽签问题

编号：2025-02

陶涛 软件学院 2022141430130

一、 问题描述

100 名囚犯编号为 1 至 100。监狱长准备一个房间，内有 100 个盒子，每个盒子内随机放入一张囚犯编号的纸条（编号不重复）。囚犯依次进入房间，每人可打开最多 50 个盒子寻找自己的编号。若所有囚犯均在 50 次尝试内找到自己的编号，则全体获释；否则全员失败。原问题出自 2003 年《AmericanMathematical Monthly》

关键点：

1. 囚犯不能交流或修改盒子内容。
2. 每个囚犯的搜索策略影响整体成功率。

二、 算法说明

1、核心算法介绍：

- 随机策略（random）

每个囚犯随机选择 K 个盒子查看。

成功率较低，因为纯随机找。

- 循环策略（loop）

利用排列的循环性质。

每个囚犯先打开编号和自己相同的盒子，再沿链条依次打开盒子。

最大尝试次数为 K，若未找到则失败。

成功率显著高于随机策略。

2、函数介绍：

函数名	参数	返回值	功能描述
simulate_one_trial	N (int): 囚犯数和盒子数 K (int): 最大尝试次数 strategy (str): 策略类型（'random'或'loop'）	(bool, int or None)是否成功，最大循环长度（仅 loop 策略有效）	模拟一次实验，根据策略判断囚犯是否全部找到编号
simulate	N=100 K=50 T=10000	(float, float, list)随机策略成功率，循环策略成功率，最大循环长度列表	重复 T 次实验，统计成功率，绘制循环策略最大循环长度分布图

三、 实验结果及扩展分析

1、实验结果

本实验对囚犯抽签问题采用随机策略和循环策略两种方案进行了模拟对比，参数设置为囚犯人数 N=100、每人最大尝试次数 K=50、单次模拟重复次数 T=10000，并进行了 5 次独立模拟以求平均。

下表为成功率对比：

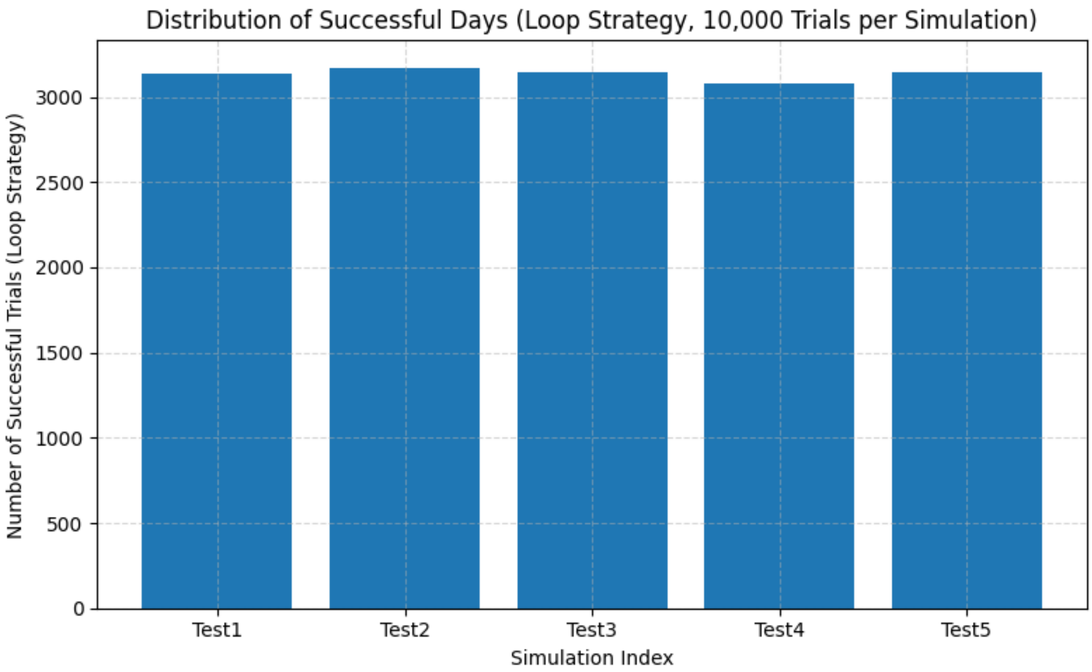
模拟次数	随机策略成功率	循环策略成功率
1	0.0000	0.3134
2	0.0000	0.3173
3	0.0000	0.3148
4	0.0000	0.3076
5	0.0000	0.3149
平均	**0.0000**	**0.3136**

从表中可以明显看出：

随机策略的成功率极低，5 次模拟均为 0，说明随机查看 50 个盒子几乎无法保证所有囚犯找到对应编号；

循环策略的成功率稳定在约 31%，远高于随机策略，体现了其基于排列循环结构的高效性。

策略 2（循环策略）具有较高的成功性，通过大量模拟，最终的到成功天数的分布，我绘制了直方图，如下图所示：



2、扩展分析

① 调整 N 和 K（N=50, K=25），观察成功率变化。

模拟次数	随机策略成功率	循环策略成功率
第 1 次	0.0000	0.3191
第 2 次	0.0000	0.3082
第 3 次	0.0000	0.3203
第 4 次	0.0000	0.3183
第 5 次	0.0000	0.3110
平均	**0.0000**	**0.3154**

通过分析得:

随机策略成功率始终为 0.0000。由于随机策略不具备系统性，只是纯粹地随机挑选盒子。每个囚犯从 100 个盒子中随机选择 50 个，成功依赖于极小概率事件（100 人全部在各自选择的盒子中找到自己的编号）。实际上，这种情况下任意一人失败就导致整体失败，导致总成功率几乎恒为零。

循环策略的成功率稳定在约 31%，与 N=100、K=50 的结果基本一致。这是因为当 K=N/2 时，循环策略的成功概率在理论上大约为 31%。这一结果与 N 的具体值无关，只要满足 K=N/2 的条件，成功率就会趋向于这个稳定值。

② 理论计算最优策略的成功率

当采用循环策略（Loop Strategy）时，囚犯问题中全体成功的概率具有明确的理论依据。该策略的核心思想是每位囚犯从编号对应的盒子开始查找，并根据盒中标签依次跳转，最多进行 N/2 次尝试。如果所有囚犯都能在规定次数内找到自己的编号，则认为本轮实验成功。

数学理论表明，只要囚犯数量为 N，且每人最多打开 K=N/2 个盒子时，成功的概率主要取决于排列中最长循环的长度是否超过 N/2。一旦存在超过 N/2 的循环链，就会导致全体失败。

这一策略的理论成功率已被严格推导，当 N 趋近于无穷大时，其极限成功率趋近于：P=1−ln2≈0.30685

也就是说，不论囚犯人数是多少，使用循环策略时全体成功的概率大约是 30.685%，远高于随机策略接近于零的成功率。这种概率上的稳定性和可解释性使得循环策略成为解决该问题的最优策略之一。

四、 优化思路

在经典的囚犯问题中，循环策略（loop strategy）已被广泛证明是最优策略之一，其成功率在理论上稳定在约 30.685%，即 1−ln2。尽管如此，这一策略仍存在大约 70% 的失败概率。为了进一步提升成功率或加深对问题的理解，可以从以下几个方向进行优化探索：

首先，可以考虑**放宽每位囚犯只能查看一半盒子（K=N/2）这一限制**，适当增加可打开盒子的数量。例如，将 K 提高到 N 的 60%、70%，能够显著提升成功率，甚至趋近于 100%。但这类优化违反了原始问题的基本设定，通常用于扩展问题或模拟分析中。

其次，可以尝试**多组囚犯分批尝试循环策略**，即将囚犯划分为若干组，依次使用循环策略尝试，若前一组失败则由后一组接替。这种方法理论上可能提高整体成功概率，但实际操作中面临信息隔离和尝试次数受限的问题。

另外，在理论研究中也有人提出是否能通过某种方式**提前判断一个排列中是否存在长度大于 N/2 的循环**，从而跳过这类“注定失败”的排列。但由于囚犯之间不能共享信息，这种识别方法目前仅适用于模拟与理论分析中。

还有一种思路是对**循环策略本身进行改进**，比如更改初始查找盒子的编号，或采用特定的跳转规则，如固定间隔、映射函数等，从而改变循环结构。尽管这些变种未必优于经典循环策略，但具有一定的探索价值。

最后，借助现代技术，可以尝试引入**机器学习或强化学习等方法**，通过大量模拟数据训练模型，识别哪些排列更容易成功，或帮助生成更优的初始分布。尽管这偏离了原问题的设定，但对于研究该问题的近似解法具有启发意义。

综上所述，尽管循环策略已近最优，但通过放宽限制、结构优化或算法辅助等手段，仍有探索和提升空间，尤其在应用模拟和扩展问题中更具实践价值。