N 皇后问题作业报告

一．问题描述：

在 N×N 的棋盘上放置 N 个皇后，使得它们互不攻击（即任意两个皇后不能在同一行、同一 列或同一对角线上）。编写程序，对给定的正整数 N（N≥4），输出所有可能的解（或至少一 个解），并分析算法效率。

二．算法说明：

最基础的算法：

遍历在棋盘上放置 N 个皇后的所有情况，对每种情况进行检验，从而得出答案。

回溯：

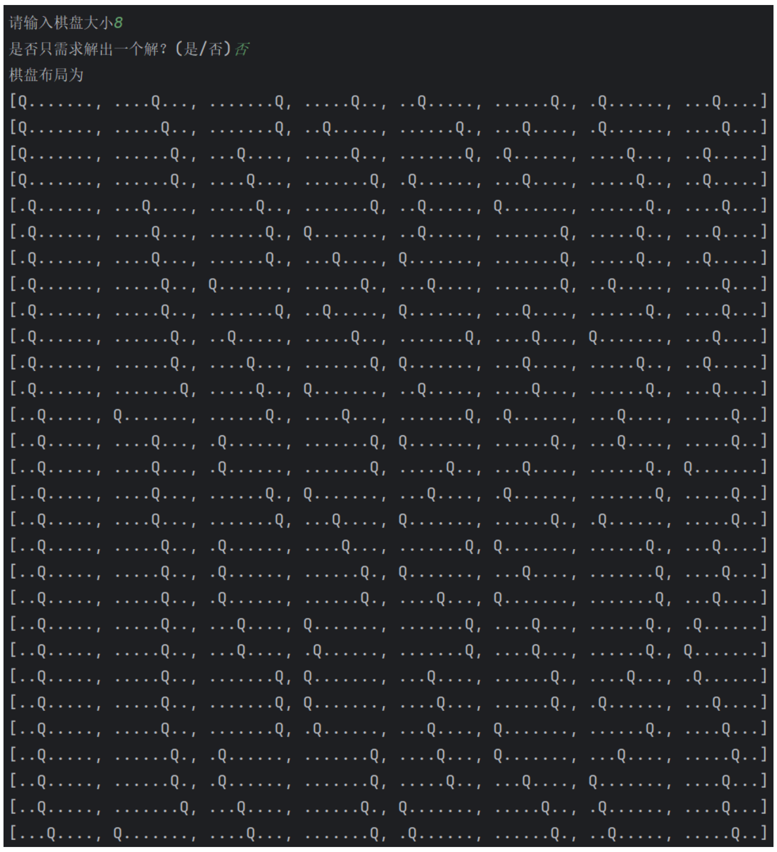
根据皇后互不攻击的要求可知，皇后不能在同一行，列，对角线上，又因为是在 N×N 大小的棋盘上放 N 个皇后，因此可得到每一行和每一列上都有且只有一个皇后。因此可以对行或者列进行遍历。

剪枝优化：

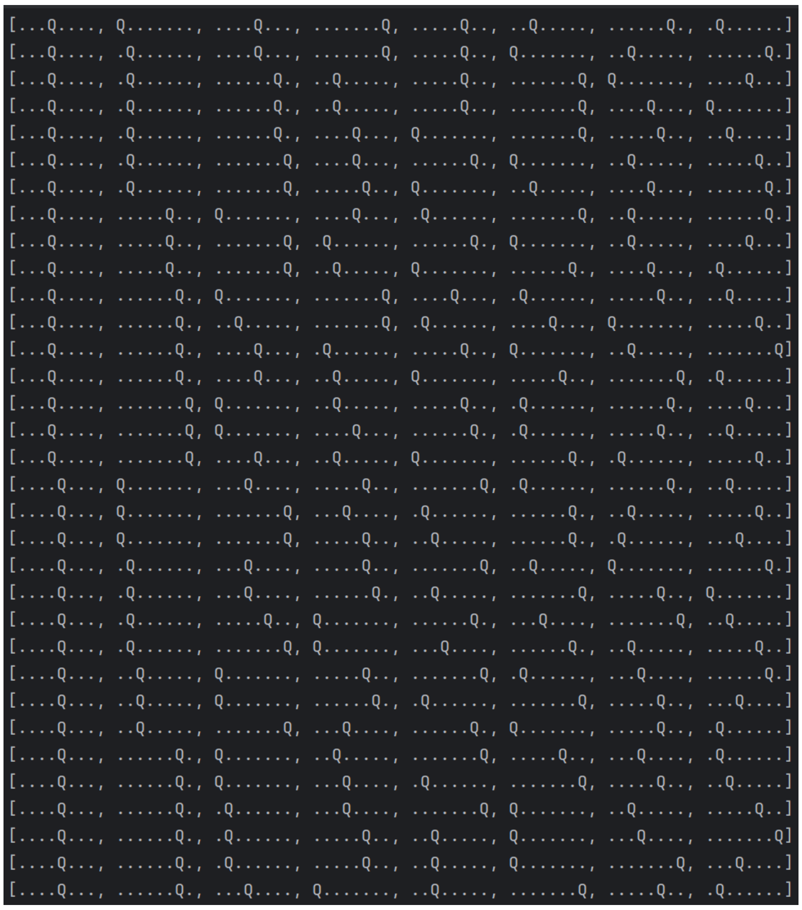
在该回溯算法中，对行进行遍历，用数组 row 来记录每行的皇后放置的列的位置。对于新放置的皇后，要求不能与之前的皇后处在同一列、主对角线和副对角线上（因为对行遍历，所以肯定不在同一行），分别用三个 boolean 数组 col、diagonal1 和 diagonal2 来对列、主对角线和副对角线进行检测：当该列、主对角线和副对角线上都没有皇后时将皇后放置在此处，并将此处对应的 col、diagonal1 和 diagonal2 数组设置为 true，递归放置下一行皇后，递归完成后取下这一位置的皇后，即将此处对应的 col、diagonal1 和 diagonal2 数组设置为 false；如果该行皇后并未找到一个合法的位置，那就直接 return。当所有皇后都按规定放完后，记录该棋盘所有皇后的位置。

三．测试结果：

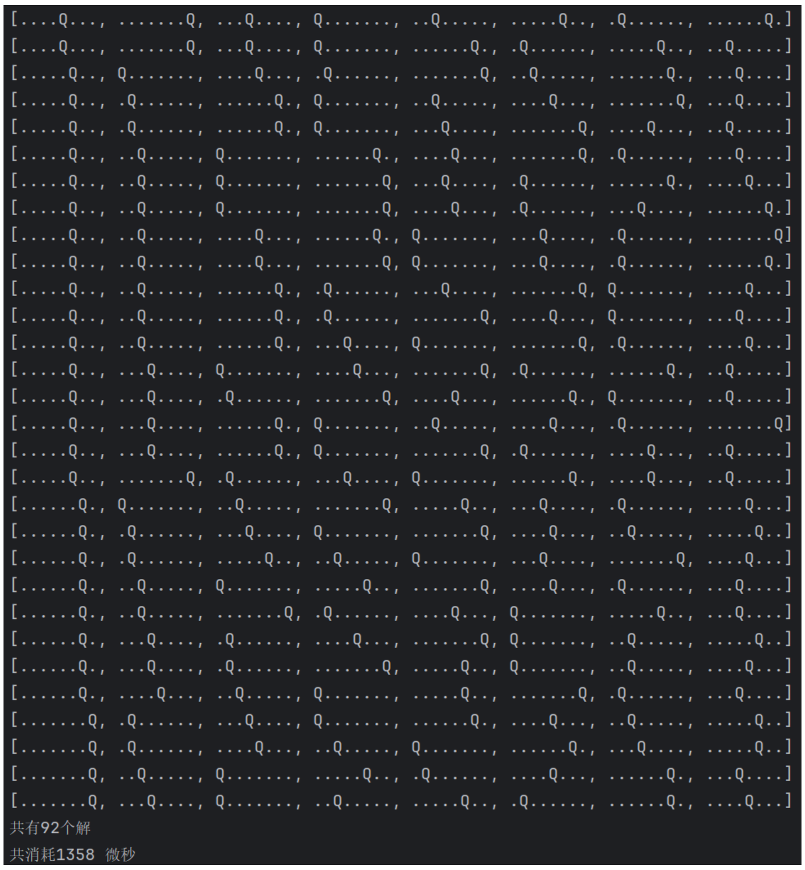
N 为 8 时：



```
请输入棋盘大小8
是否只需求解出一个解？(是/否)否
棋盘布局为
[Q......., ....Q..., .......Q, .....Q.., ..Q....., ......Q., .Q......, ...Q....]
[Q......., .....Q.., .......Q, ..Q....., ......Q., ...Q...., .Q......, ....Q...]
[Q......., ......Q., ...Q...., .....Q.., .......Q, .Q......, ....Q..., ..Q.....]
[Q......., ......Q., ....Q..., .......Q, .Q......, ...Q...., .....Q.., ..Q.....]
[.Q......, ...Q...., .....Q.., .......Q, ..Q....., Q......., ......Q., ....Q...]
[.Q......, ....Q..., ......Q., Q......., ..Q....., .......Q, .....Q.., ...Q....]
[.Q......, ....Q..., ......Q., ...Q...., Q......., .......Q, .....Q.., ..Q.....]
[.Q......, .....Q.., Q......., ......Q., ...Q...., .......Q, ..Q....., ....Q...]
[.Q......, .....Q.., .......Q, ..Q....., Q......., ...Q...., ......Q., ....Q...]
[.Q......, ......Q., ..Q....., .....Q.., .......Q, ....Q..., Q......., ...Q....]
[.Q......, ......Q., ....Q..., .......Q, Q......., ...Q...., .....Q.., ..Q.....]
[.Q......, .......Q, .....Q.., Q......., ..Q....., ....Q..., ......Q., ...Q....]
[..Q....., Q......., ......Q., ....Q..., .......Q, .Q......, ...Q...., .....Q..]
[..Q....., ....Q..., .Q......, .......Q, Q......., ......Q., ...Q...., .....Q..]
[..Q....., ....Q..., .Q......, .......Q, .....Q.., ...Q...., ......Q., Q.......]
[..Q....., ....Q..., ......Q., Q......., ...Q...., .Q......, .......Q, .....Q..]
[..Q....., ....Q..., .......Q, ...Q...., Q......., ......Q., .Q......, .....Q..]
[..Q....., .....Q.., .Q......, ....Q..., .......Q, Q......., ......Q., ...Q....]
[..Q....., .....Q.., .Q......, ......Q., Q......., ...Q...., .......Q, ....Q...]
[..Q....., .....Q.., .Q......, ......Q., ....Q..., Q......., .......Q, ...Q....]
[..Q....., .....Q.., ...Q...., Q......., .......Q, ....Q..., ......Q., .Q......]
[..Q....., .....Q.., ...Q...., .Q......, .......Q, ....Q..., ......Q., Q.......]
[..Q....., .....Q.., .......Q, Q......., ...Q...., ......Q., ....Q..., .Q......]
[..Q....., .....Q.., .......Q, Q......., ....Q..., ......Q., .Q......, ...Q....]
[..Q....., .....Q.., .......Q, .Q......, ...Q...., Q......., ......Q., ....Q...]
[..Q....., ......Q., .Q......, .......Q, ....Q..., Q......., ...Q...., .....Q..]
[..Q....., ......Q., .Q......, .......Q, .....Q.., ...Q...., Q......., ....Q...]
[..Q....., .......Q, ...Q...., ......Q., Q......., .....Q.., .Q......, ....Q...]
[...Q...., Q......., ....Q..., .......Q, .Q......, ......Q., ..Q....., .....Q..]
```

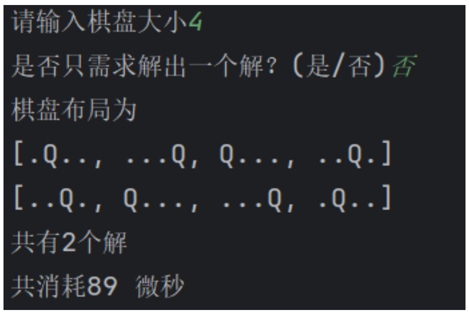


```
[...Q...., Q......., ....Q..., .......Q, .....Q.., ..Q....., ......Q., .Q......]
[...Q...., .Q......, ....Q..., .......Q, .....Q.., Q......., ..Q....., ......Q.]
[...Q...., .Q......, ......Q., ..Q....., .....Q.., .......Q, Q......., ....Q...]
[...Q...., .Q......, ......Q., ..Q....., .....Q.., .......Q, ....Q..., Q.......]
[...Q...., .Q......, ......Q., ....Q..., Q......., .......Q, .....Q.., ..Q.....]
[...Q...., .Q......, .......Q, ....Q..., ......Q., Q......., ..Q....., .....Q..]
[...Q...., .Q......, .......Q, .....Q.., Q......., ..Q....., ....Q..., ......Q.]
[...Q...., .....Q.., Q......., ....Q..., .Q......, .......Q, ..Q....., ......Q.]
[...Q...., .....Q.., .......Q, .Q......, ......Q., Q......., ..Q....., ....Q...]
[...Q...., .....Q.., .......Q, ..Q....., Q......., ......Q., ....Q..., .Q......]
[...Q...., ......Q., Q......., .......Q, ....Q..., .Q......, .....Q.., ..Q.....]
[...Q...., ......Q., ..Q....., .......Q, .Q......, ....Q..., Q......., .....Q..]
[...Q...., ......Q., ....Q..., .Q......, .....Q.., Q......., ..Q....., .......Q]
[...Q...., ......Q., ....Q..., ..Q....., Q......., .....Q.., .......Q, .Q......]
[...Q...., .......Q, Q......., ..Q....., .....Q.., .Q......, ......Q., ....Q...]
[...Q...., .......Q, Q......., ....Q..., ......Q., .Q......, .....Q.., ..Q.....]
[...Q...., .......Q, ....Q..., ..Q....., Q......., ......Q., .Q......, .....Q..]
[....Q..., Q......., ...Q...., .....Q.., .......Q, .Q......, ......Q., ..Q.....]
[....Q..., Q......., .......Q, ...Q...., .Q......, ......Q., ..Q....., .....Q..]
[....Q..., Q......., .......Q, .....Q.., ..Q....., ......Q., .Q......, ...Q....]
[....Q..., .Q......, ...Q...., .....Q.., .......Q, ..Q....., Q......., ......Q.]
[....Q..., .Q......, ...Q...., ......Q., ..Q....., .......Q, .....Q.., Q.......]
[....Q..., .Q......, .....Q.., Q......., ......Q., ...Q...., .......Q, ..Q.....]
[....Q..., .Q......, .......Q, Q......., ...Q...., ......Q., ..Q....., .....Q..]
[....Q..., ..Q....., Q......., .....Q.., .......Q, .Q......, ...Q...., ......Q.]
[....Q..., ..Q....., Q......., ......Q., .Q......, .......Q, .....Q.., ...Q....]
[....Q..., ..Q....., .......Q, ...Q...., ......Q., Q......., .....Q.., .Q......]
[....Q..., ......Q., Q......., ..Q....., .......Q, .....Q.., ...Q...., .Q......]
[....Q..., ......Q., Q......., ...Q...., .Q......, .......Q, .....Q.., ..Q.....]
[....Q..., ......Q., .Q......, ...Q...., .......Q, Q......., ..Q....., .....Q..]
[....Q..., ......Q., .Q......, .....Q.., ..Q....., Q......., ...Q...., .......Q]
[....Q..., ......Q., .Q......, .....Q.., ..Q....., Q......., .......Q, ...Q....]
[....Q..., ......Q., ...Q...., Q......., ..Q....., .......Q, .....Q.., .Q......]
```



```
[....Q..., .......Q, ...Q...., Q......., ..Q....., .....Q.., .Q......, ......Q.]
[....Q..., .......Q, ...Q...., Q......., ......Q., .Q......, .....Q.., ..Q.....]
[.....Q.., Q......., ....Q..., .Q......, .......Q, ..Q....., ......Q., ...Q....]
[.....Q.., .Q......, ......Q., Q......., ..Q....., ....Q..., .......Q, ...Q....]
[.....Q.., .Q......, ......Q., Q......., ...Q...., .......Q, ....Q..., ..Q.....]
[.....Q.., ..Q....., Q......., ......Q., ....Q..., .......Q, .Q......, ...Q....]
[.....Q.., ..Q....., Q......., .......Q, ...Q...., .Q......, ......Q., ....Q...]
[.....Q.., ..Q....., Q......., .......Q, ....Q..., .Q......, ...Q...., ......Q.]
[.....Q.., ..Q....., ....Q..., ......Q., Q......., ...Q...., .Q......, .......Q]
[.....Q.., ..Q....., ....Q..., .......Q, Q......., ...Q...., .Q......, ......Q.]
[.....Q.., ..Q....., ......Q., .Q......, ...Q...., .......Q, Q......., ....Q...]
[.....Q.., ..Q....., ......Q., .Q......, .......Q, ....Q..., Q......., ...Q....]
[.....Q.., ..Q....., ......Q., ...Q...., Q......., .......Q, .Q......, ....Q...]
[.....Q.., ...Q...., Q......., ....Q..., .......Q, .Q......, ......Q., ..Q.....]
[.....Q.., ...Q...., .Q......, .......Q, ....Q..., ......Q., Q......., ..Q.....]
[.....Q.., ...Q...., ......Q., Q......., ..Q....., ....Q..., .Q......, .......Q]
[.....Q.., ...Q...., ......Q., Q......., .......Q, .Q......, ....Q..., ..Q.....]
[.....Q.., .......Q, .Q......, ...Q...., Q......., ......Q., ....Q..., ..Q.....]
[......Q., Q......., ..Q....., .......Q, .....Q.., ...Q...., .Q......, ....Q...]
[......Q., .Q......, ...Q...., Q......., .......Q, ....Q..., ..Q....., .....Q..]
[......Q., .Q......, .....Q.., ..Q....., Q......., ...Q...., .......Q, ....Q...]
[......Q., ..Q....., Q......., .....Q.., .......Q, ....Q..., .Q......, ...Q....]
[......Q., ..Q....., .......Q, .Q......, ....Q..., Q......., .....Q.., ...Q....]
[......Q., ...Q...., .Q......, ....Q..., .......Q, Q......., ..Q....., .....Q..]
[......Q., ...Q...., .Q......, .......Q, .....Q.., Q......., ..Q....., ....Q...]
[......Q., ....Q..., ..Q....., Q......., .....Q.., .......Q, .Q......, ...Q....]
[.......Q, .Q......, ...Q...., Q......., ......Q., ....Q..., ..Q....., .....Q..]
[.......Q, .Q......, ....Q..., ..Q....., Q......., ......Q., ...Q...., .....Q..]
[.......Q, ..Q....., Q......., .....Q.., .Q......, ....Q..., ......Q., ...Q....]
[.......Q, ...Q...., Q......., ..Q....., .....Q.., .Q......, ......Q., ....Q...]
共有92个解
共消耗1358  微秒
```

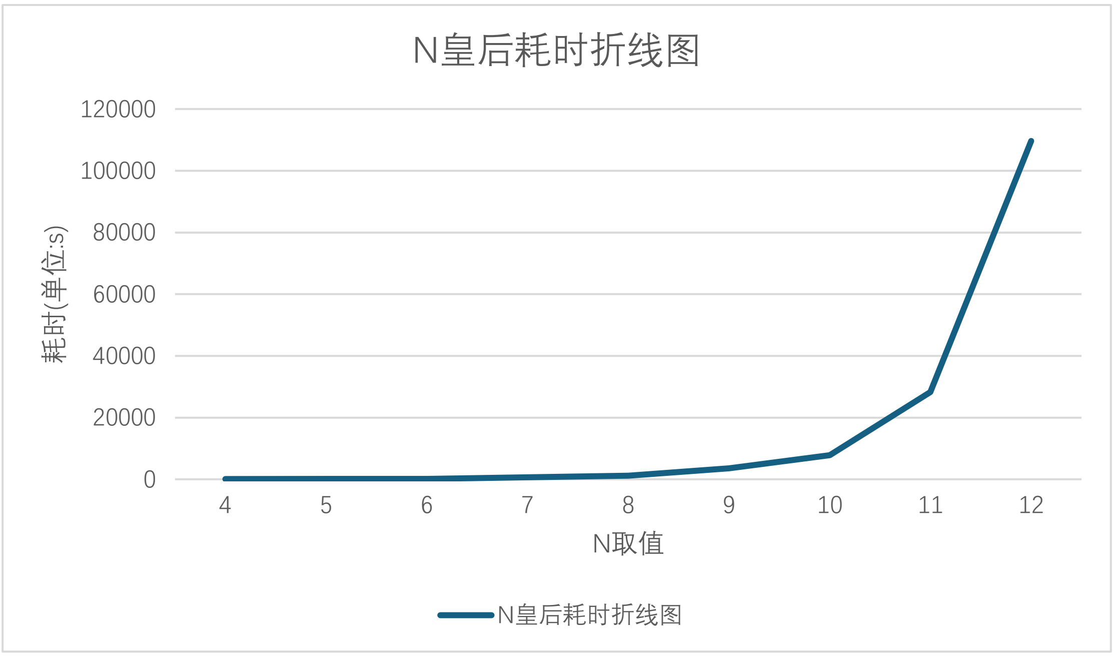
N 为 4 时:



```
请输入棋盘大小4
是否只需求解出一个解？(是/否)否
棋盘布局为
[.Q.., ...Q, Q..., ..Q.]
[..Q., Q..., ...Q, .Q..]
共有2个解
共消耗89  微秒
```

四．实验分析:

时间增长曲线:



算法理论时间复杂度:

对第 i 个皇后而言，还有最多 n-i 列可以选择，且每次判断是否可放置皇后的时间复杂度为常数时间，因此时间复杂度为 O(N!)。

算法实际时间复杂度:

根据 N = 4 到 12 的情况进行拟合得出该算法的实际时间复杂度为 O(N! / 2^N)，这表明剪枝将回溯的时间复杂度降低了指数级。