大学物理(1)

云南大学

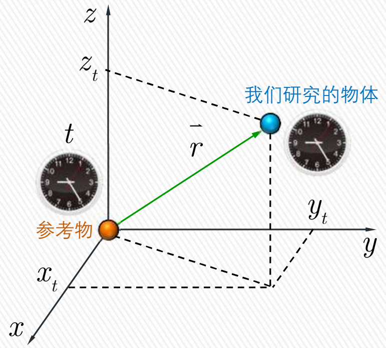
第 1 章

质点运动学

任课教师：张艳

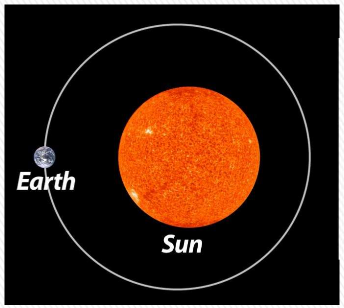
1.1 参考系

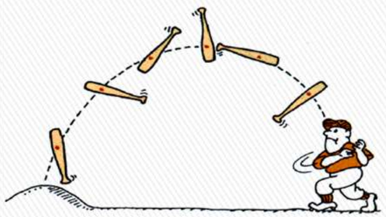
» 运动必然相对于某一参考物，固定在这一参考物上的一套坐标系（x，y，z 或 $\boldsymbol{r}$）和同步的时钟（t）就称为**参考系**。



1.2 质点的位矢、位移和速度

» **质点**：当物体尺寸与所要研究的尺寸相比小很多，或者物体形状不影响其运动性质时，我们常常将物体的真实形状忽略，将物体抽象成一个**有质量**、**无大小**的点，称为**质点**。





1.2 质点的位矢、位移和速度

» 运动函数

» 参考系确定后，一个质点的位置（x，y，z）在空间中随时间的变化就可以用时间（t）的函数来表示：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

上述函数就称为该质点的**运动函数**，或称为质点的**运动方程**。

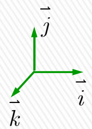
运动函数可理解为物体坐标随时间变化的函数。

1.2 质点的位矢、位移和速度

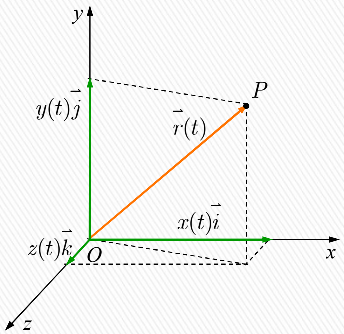
» 位矢：“位置矢量”的简称

» 习惯上，在印刷体中用粗体表示矢量，手写时则必须用带箭头符号来表示矢量，例如 $\vec{r}$ 。

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

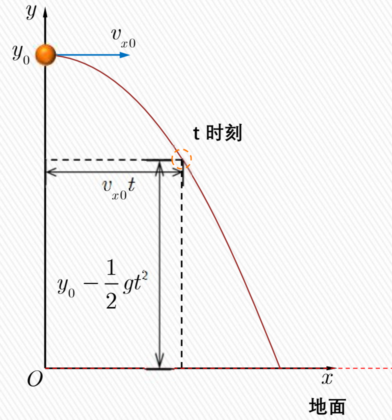


单位矢量长度为 1



1.2 质点的位矢、位移和速度

例：写出平抛运动的运动函数.



从小球抛出时开始计时，t 时刻小球的横坐标为：

$$x=v_{x0}t$$

纵坐标为：

$$y=y_0-\frac{1}{2}gt^2$$

运动函数为：

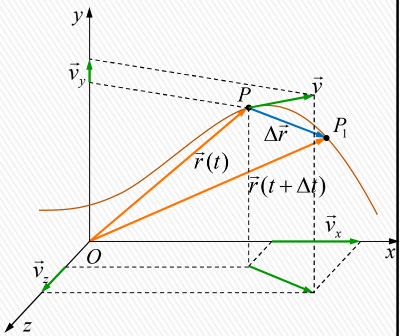
$$\begin{cases} x=v_{x0}t \\ y=y_0-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

1.2 质点的位矢、位移和速度

位移(矢量)：$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$

速度(矢量)：$\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

速率(标量)：$v=|\vec{v}|=\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$



速度 (矢量) 的合成：

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}=\vec{v}_x+\vec{v}_y+\vec{v}_z$$

速率 (标量) 的合成：

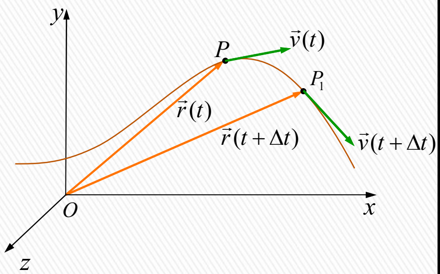
$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

SI 单位制中的速度单位：m/s (米每秒)

1.3 加速度

加速度： $\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$

$$=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$



加速度(矢量)的合成：

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}=\vec{a}_x+\vec{a}_y+\vec{a}_z$$

加速度大小(标量)的合成：

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

SI 单位制中的加速度单位：$\mathrm{m/s^2}$ (米每秒平方)

P24 例1.2 已知某质点在平面上运动，运动函数为：

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = B\sin\omega t \end{cases}$$ ，其中 A, B, ω 均为常数。

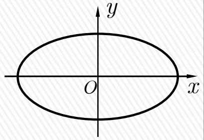
(1) 求该运动的运动轨迹方程，并指出是什么形状的方程；

(2) 求分速度、合速度、速率和加速度表达式；

(3) 从 $t=0$ 到 t_1 这段时间内，该质点走过的路程、位移和平均速率。

(1)解：轨迹方程：

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = B\sin\omega t \end{cases} \xrightarrow{\text{消除}t} \begin{cases} \dfrac{x^2}{A^2} = \cos^2\omega t \\ \dfrac{y^2}{B^2} = \sin^2\omega t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \text{ (椭圆)}$$



P24 例1.2 已知某质点在平面上运动，运动函数为：

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = B\sin\omega t \end{cases}$$ ，其中 A, B, ω 均为常数。

(2) 求分速度、合速度、速率和加速度表达式；

(2)解：

分速度：$$\begin{cases} \vec{v}_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} = -A\omega\sin(\omega t)\vec{i} \\ \vec{v}_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} = B\omega\cos(\omega t)\vec{j} \end{cases}$$

合速度：$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = -A\omega\sin(\omega t)\vec{i} + B\omega\cos(\omega t)\vec{j}$

速率： $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(A\omega\sin\omega t)^2 + (B\omega\cos\omega t)^2}$

加速度：$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\cos(\omega t)\vec{i} - B\omega^2\sin(\omega t)\vec{j}$

P24 例1.2 已知某质点在平面上运动，运动函数为：

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = B\sin\omega t \end{cases}$$ ，其中 A, B, ω 均为常数。

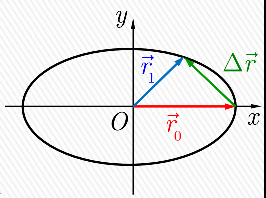
(3) 从 $t=0$ 到 t_1 这段时间内，该质点走过的路程、位移和平均速率。

(3)解：

位移：$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$

$$= \left[A\cos(\omega t_1)\vec{i} + B\sin(\omega t_1)\vec{j}\right] - A\vec{i}$$

$$= A\left[\cos(\omega t_1) - 1\right]\vec{i} + B\sin(\omega t_1)\vec{j}$$



路程：$s = \int_0^{t_1}\mathrm{d}s = \int_0^{t_1} v\,\mathrm{d}t$

$$= \int_0^{t_1}\sqrt{(A\omega\sin\omega t)^2 + (B\omega\cos\omega t)^2}\;\mathrm{d}t$$

平均速率：$v = s/t_1$

1.4 匀加速运动

» 定义：

加速度的**大小**和**方向**均不随时间改变的运动。例如：自由落体运动。

» 利用高等数学知识推导匀加速运动的速度公式。

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{a} \iff \mathrm{d}\vec{v} = \vec{a}\mathrm{d}t$$

注意积分上下限

等式两边做 $0\text{-}t$ 时刻的定积分：$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}}\mathrm{d}\vec{v} = \int_0^t \vec{a}\mathrm{d}t$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ 速度公式

分量形式

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} + a_x t \\ v_y = v_{0y} + a_y t \\ v_z = v_{0z} + a_z t \end{cases}$$

1.4 匀加速运动

» 利用高等数学知识推导匀加速运动的位矢和位置公式。

$\because\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$,

$\therefore\ \mathrm{d}\vec{r} = \left(\vec{v}_0 + \vec{a}t\right)\mathrm{d}t$

积分得：$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^t \left(\vec{v}_0 + \vec{a}t\right)\mathrm{d}t$

即： $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

位矢公式

分量形式

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2 \end{cases}$$

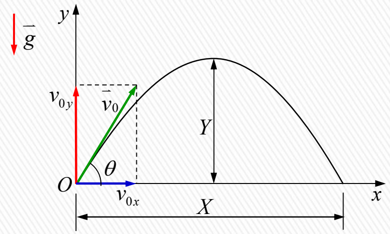
第一章 质点运动学

1.5 抛体运动

» 将抛体运动分解为水平和竖直两个方向，

» 如果不考虑空气阻力，物体在水平方向上的分运动是匀速直线运动，在竖直方向上的运动是匀加速运动，加速度为重力加速度 g。

喷泉的照片，喷泉的水流形成了类似抛物线的形状。



第一章 质点运动学

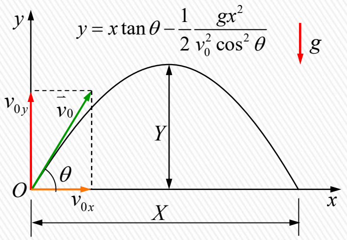
1.5 抛体运动

初速度的分量：$v_{0x} = v_0 \cos\theta$，$v_{0y} = v_0 \sin\theta$

运动函数：$x = v_0 t \cos\theta$，$y = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$

抛射最大高度：$Y = \dfrac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$

射程：$X = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$



第一章 质点运动学

1.6 (匀速)圆周运动

» 线速度：

$v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$,方向为该点的切线方向。

» 角速度：(SI 单位：弧度每秒，rad/s)

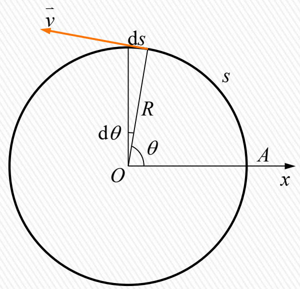
$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$,方向满足右手螺旋定则。

» 线速度与角速度的关系：

$v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{R\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R\omega$

» 加速度：

切向加速度 $a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$，法向加速度 $a_n = \dfrac{v^2}{R} = \omega^2 R$



第一章 质点运动学

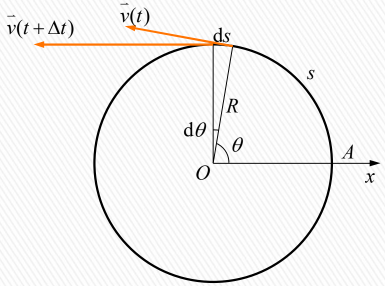
1.6 (变速)圆周运动

» 切向加速度：

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{R\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\alpha$$

其中 $\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ 称为角加速度，

表示角速度随时间的变化率。



» 法向加速度：

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

» (合)加速度：切向加速度和法向加速度的矢量和：

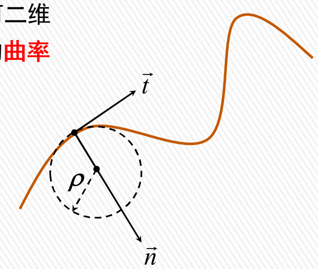
$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t \quad , \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

第一章 质点运动学

1.6 (变速)圆周运动

» 二维曲线运动

以上加速度的结论可以应用于任何二维曲线运动，但需将半径换为所研究点的**曲率半径**。



» 如果质点的运动方程为

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

» 则 t 时刻质点所处位置的曲率半径为

$$\rho = \frac{\left(f'^2 + g'^2\right)^{3/2}}{\left|f'g'' - f''g'\right|}$$

其中 f' 和 f'' 分别为 f 对时间 t 的一次导和二次导。

力学篇，第 2 章 运动与力

大学物理(1)

雲南大學

第 2 章

运动与力

这个由太阳、行星和彗星组成的最完美的体系，只能来自一个全智全能的主宰者的督促和统治。

——伊萨克·牛顿，《自然哲学的数学原理》总释

任课教师：张艳

第 2 章 运动与力

2.1 牛顿运动定律

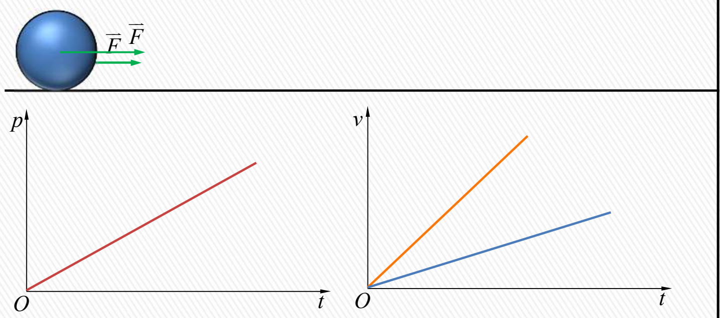
» **第一定律** 任何物体都保持静止的或沿一条直线作匀速运动的状态，除非作用在它上面的力迫使它改变这种状态。（惯性定律）

重要概念：惯性，力(F)，动量(p)：$\vec{p} = m\vec{v}$

2.1 牛顿运动定律

» **第二定律** 运动的变化与所加的力成正比，并且发生在这力所沿的直线方向上。

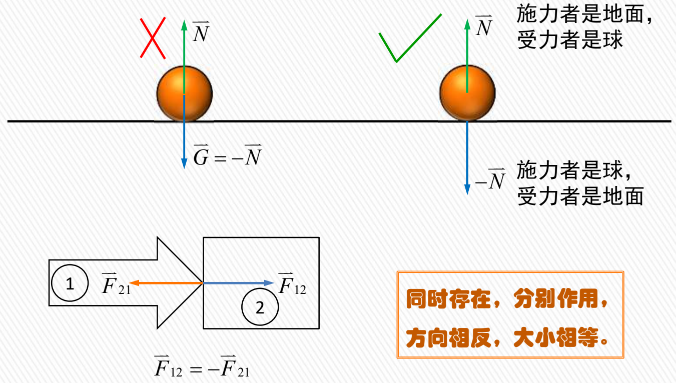
重要概念 $\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ ，力与加速度的关系：$\vec{F}=m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}$



第2章 运动与力

2.1 牛顿运动定律

» **第三定律** 对于每一个作用，总有一个相等的反作用与之相反；或者说，两个物体对各自对方的相互作用总是相等的，而且指向相反的方向。

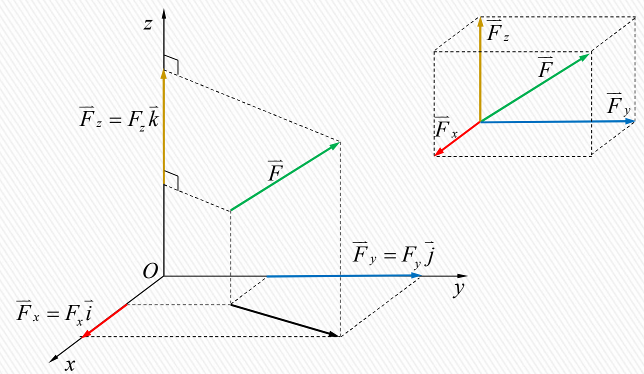


第2章 运动与力

2.1 牛顿运动定律

» 力的矢量分解与合成

力是矢量，其分解与合成遵循矢量在空间中的分解与合成规则。



第2章 运动与力

2.2 常见的几种力

1.引力和重力

任何两个有质量的物体都相互吸引，引力的大小与它们的质量的乘积成正比，与它们之间的距离的平方成反比。

$$f_{引力}=\frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

其中 G 称为万有引力常数， $G=6.67408\times10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$

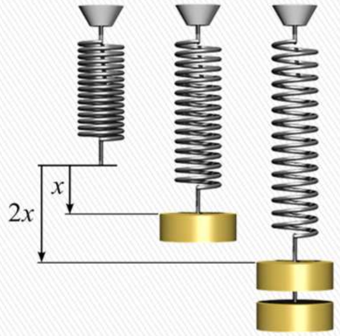
由于地球的**引力作用**而使物体受到的力称为重力。

$$W=\boxed{\frac{Gm_{地球}}{r_{地球}^2}}m=m\boxed{g}$$

2.2 常见的几种力

2.弹性力 发生形变的物体有**恢复原状的趋势**，从而对与其**接触**的物体产生的作用力称为弹性力。这种力本质上是由**电磁相互作用**引起的。

胡克定律：$f = -kx$



2.2 常见的几种力

3.摩擦力

两个相互接触的物体，沿着接触面的方向有相对滑动或滑动趋势时，在各自接触面上受到阻止这种滑动或滑动趋势的力称为摩擦力。

这是由于两个物体相互作用而产生形变，或者物体微观凹凸表面产生相互啮合，或者产生分子粘结现象。

这种力本质上也是由**电磁相互作用**引起的。

无论是**动摩擦力**还是**最大静摩擦力**，都与压力 N 有如下关系：

$$f = \mu N$$

动摩擦力 $f_k = \mu_k N$

最大静摩擦力 $f_{s\,\max.} = \mu_s N$

2.4 应用牛顿定律解题

动力学问题一般有两种类型：

1. 已知力的作用情况，求运动方程；
2. 已知运动情况，求物体所受的力。

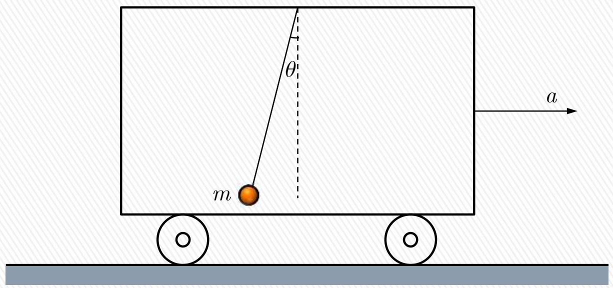
利用牛顿力学解题时，基本方法可归结为解题“三字经”：

认物体，看运动，查受力，列方程。

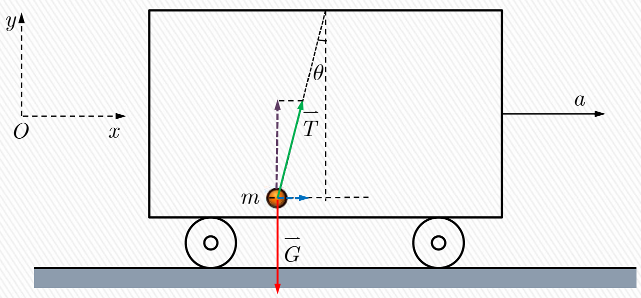
例：一辆车以加速度 a 做匀加速直线运动，一质量为 m 的小球用细绳悬挂于车厢顶部，试计算细绳与竖直方向的夹角。

1.认物体：小球

2.看运动：匀加速直线运动

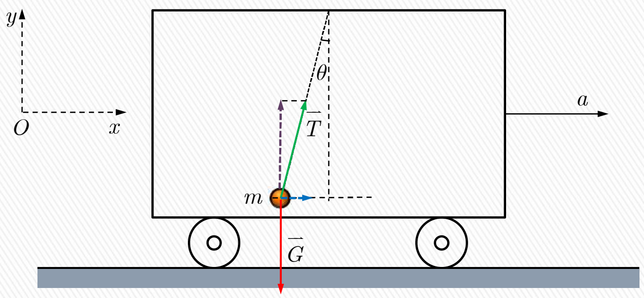


3. 查受力：绳子张力 $\vec{T}$ ，重力 $\vec{G}$



第2章 运动与力

4. 列方程，动力学基本关系：$\vec{F} = m\vec{a}$



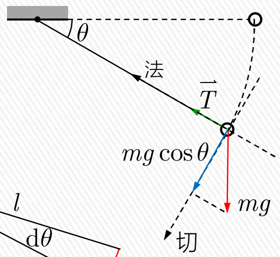
$$\begin{cases} x\text{ 方向：}\ T\sin\theta = ma \\ y\text{ 方向：}\ T\cos\theta - mg = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{解方程组}} \theta = arc\tan\frac{a}{g}$$

第2章 运动与力

P54 例2.3 (课本解法，分解为切向和法向)

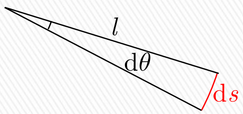
一个质量为 m 的珠子系在线的一端，线的另一端绑在墙上的钉子上，线长为 l。先拉动珠子，使线保持水平静止，然后松手使珠子下落。求线摆下至 θ 角时，珠子的速率和线的张力。

解：当线摆下至 θ 角时，对珠子进行切向受力分析得：



$$mg\cos\theta = ma_t = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \Rightarrow g\cos\theta = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

等式两边同时乘以弧微元 ds：



$$g\cos\theta\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s$$

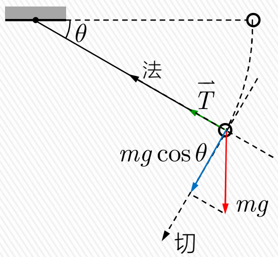
左边= $gl\cos\theta\mathrm{d}\theta$ ，右边= $v\mathrm{d}v$ ，即 $gl\cos\theta\mathrm{d}\theta = v\mathrm{d}v$ 。

第2章 运动与力

P54 例2.3 (课本解法，分解为切向和法向)

一个质量为 m 的珠子系在线的一端，线的另一端绑在墙上的钉子上，线长为 l。先拉动珠子，使线保持水平静止，然后松手使珠子下落。求线摆下至 θ 角时，珠子的速率和线的张力。

解(续)：对 $gl\cos\theta\mathrm{d}\theta = v\mathrm{d}v$ 左右两边进行积分，注意积分限保持物理上的一致：



$$\int_0^\theta gl\cos\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^{v_\theta} v\mathrm{d}v$$

积分得：

$$gl\sin\theta = \tfrac{1}{2}v_\theta^2 \Rightarrow v_\theta = \sqrt{2gl\sin\theta}$$

再对珠子进行法向受力分析得：

$$T - mg\sin\theta = m\frac{v_\theta^2}{l} \Rightarrow T = m\frac{v_\theta^2}{l} + mg\sin\theta = 3mg\sin\theta$$

大学物理(1)

云南大学

第 3 章

动量与角动量

任课教师：张艳

3.1 冲量与动量定理

» **动量**：物体的质量和速度的乘积，**矢量**，**状态量**；

» **冲量**：物体所受到外力在时间上的累积效果，**矢量**，**过程量**；

» 动量定理：在某一时间段内，物体所受合外力的冲量等于这段时间内物体动量的增量。

动量定理的微分形式： $\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}$

动量定理的积分形式： $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} \mathrm{d}\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{I}$

3.1 冲量与动量定理

» **平均冲力**：

动量定理的精确表达为：$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$

但在一些不能精确表示力随时间变化曲线的场合，例如撞击过程，可以采用近似表达，即**平均冲力**乘以时间长度等于动量变化量：

$$\bar{\vec{F}}(t_2 - t_1) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \Rightarrow \bar{\vec{F}} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1}$$

3.2 动量守恒定律

» ［物体，质点］系统的**动量定理**：

［在惯性系中］，一段时间内，系统的总动量的增量等于系统合外力的冲量。

$$\left(\sum_i \vec{F}_i\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(\sum_i \vec{p}_i\right)$$

» 系统的**动量守恒定律**：

在一段时间内，如果系统所受合外力为零，则系统的总动量保持不变。

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i m\vec{v}_i = \vec{C}$$

3.2 动量守恒定律

» 使用动量守恒定律时，应注意以下三点：

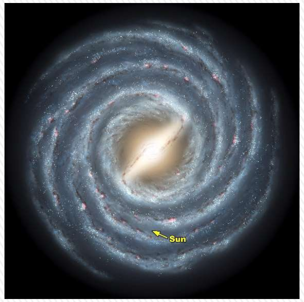
1. 外力比内力小得多时，可使用动量守恒定律。（例：爆炸）

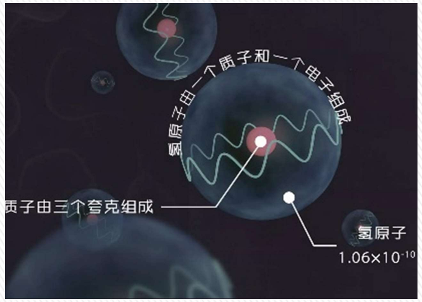
2. 在某方向所受合外力为零时，该方向的动量分量守恒。

3.2 动量守恒定律

» 使用动量守恒定律时，应注意以下三点：

3. 动量守恒律是目前已知的在各个尺度上均精确成立的基本守恒定律。





3.4 质心

» 为了使问题简化，我们有时会把多个质点组成的系统，或者将本来有形状、体积的物体简化成一个质点。

» 为此，需要把这个系统的质量集中到某个点上，这个点就是质心。

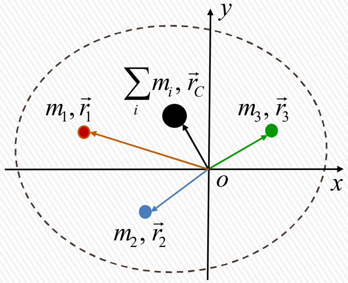
» 质量分布均匀并满足对称性的物体，其质心即它的几何中心，例如均匀细棒、均匀圆环、均匀圆盘、均匀球体。

3.4 质心

» 对于由 n 个离散质点组成的系统，其质心的位矢为：

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

其中 $\vec{r}_i$ 为质点 m_i 的位矢。



» 其分量形式为：

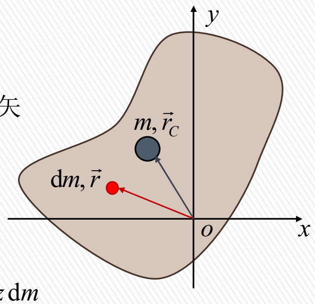
$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

3.4 质心

» 对于形状连续的物体，其质心的位矢为：

$$\vec{r}_C=\frac{\int\vec{r}\,\mathrm{d}m}{m},$$

其中 $\vec{r}$ 为质量微元 dm 的质心的位矢



» 其分量形式为：

$$x_C=\frac{\int x\,\mathrm{d}m}{m},\quad y_C=\frac{\int y\,\mathrm{d}m}{m},\quad z_C=\frac{\int z\,\mathrm{d}m}{m}$$

第3章 动量与角动量

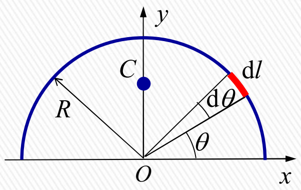
3.4 质心

P93 例3.9：一段均匀铁丝弯成半圆形，半径为 R， 求其质心。

解：建立如图坐标系，原点选用半圆的圆心。

由对称性得，质心在 y 轴上，即 $x_C=0$，只需求 y_C 即可。

设铁丝的质量线密度为 ρ，则它的质量为 $m=\rho\pi R$ 。



选取微元 dl ，则微元的质量为 $\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}l$ 。

质心在 y 轴上的坐标为：

$$y_C=\frac{\int y\,\mathrm{d}m}{m}=\frac{\int_0^{\pi}R\sin\theta\cdot\rho\cdot R\mathrm{d}\theta}{\rho\pi R}=\frac{2R}{\pi}$$

$$\boxed{\begin{cases}y=R\sin\theta\\ \mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}l\\ \mathrm{d}l=R\mathrm{d}\theta\end{cases}}$$

第3章 动量与角动量

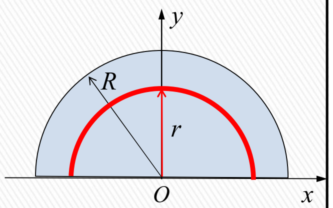
3.4 质心

P107 习题3.17：求半圆形均匀薄板的质心。

解：建立如图坐标系，原点选用半圆的圆心，半径设为 R。

由对称性得，质心在 y 轴上，即 $x_C=0$，只需求 y_C 即可。

设半圆盘的质量面密度为 ρ，则它的质量为 $m=\rho\pi R^2/2$ 。



取半径为 r 的环状微元，则该微元的质量为 $\mathrm{d}m=\rho\pi r\mathrm{d}r$，质心在 y 轴上距离圆心 $2r/\pi$ 的位置。

则半圆盘的质心在 y 轴上的位置：

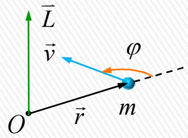
$$y_C=\frac{\int y\,\mathrm{d}m}{m}=\frac{\int_0^R\frac{2r}{\pi}\cdot\rho\pi r\mathrm{d}r}{\rho\pi R^2/2}=\frac{4R}{3\pi}$$

第3章 动量与角动量

3.6 质点的角动量和角动量定理

» 当质点绕某个原点转动时，定义其角动量：

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}=m\left(\vec{r}\times\vec{v}\right)$$



» 其大小为：

$$L=rp\sin\varphi=mrv\sin\varphi$$

» 其方向符合右手螺旋法则：

3.6 质点的角动量和角动量定理

» 力矩：与质点的动量对应，当质点的角动量发生变化时，必然伴随外界对它的作用，这一使质点角动量改变的量称为力矩。

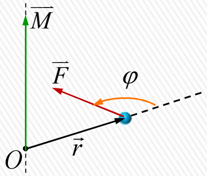
» 定义：

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (SI单位：牛·米，N·m)

» 大小：

$M = rF\sin\varphi$

» 方向：符合右手螺旋法则。



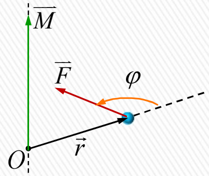
角动量、力矩必然是相对于某一固定点而言的。

3.6 质点的角动量和角动量定理

» 推导：

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r}\times\vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\times\vec{p} + \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{M}$$

质点的合外力矩等于质点角动量随时间的变化率。



$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ ⟺ 类比 ⟺ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

质点的合外力等于质点动量随时间的变化率。

3.7 角动量守恒定律

» 角动量守恒定律：

如果相对于某一固定点，质点所受的合外力矩为零，则此质点对该固定点的角动量保持不变，即角动量的大小、方向均不变。

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{r}\times\vec{P} = \vec{C}$$

» 与动量守恒定律相似，角动量守恒定律也是自然界的一条基本定律。虽然我们在牛顿力学部分学习它们，但是它们的成立条件并不依赖牛顿力学。

» 即使在目前已知的所有极端条件下，它们依然是成立的。

3.7 角动量守恒定律

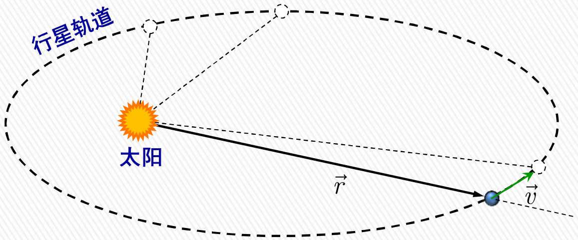
» 从力矩的定义可以看出，角动量守恒的情景有三种：

1. 质点相对于某固定点受多个力矩作用，但各个力矩的矢量和为零： $\sum_i \vec{M}_i = 0$
2. 力的作用方向通过了所选取的固定点, 即 $\vec{r} = 0$
3. 外力作用于同一点，且合外力为零，即 $\vec{F} = 0$

3.7 角动量守恒定律

P100 例3.18：证明开普勒第二定律：行星对太阳的径矢在相等的时间内扫过的面积相等。

证明：对行星进行受力分析，它受到的太阳引力始终和其径矢 $\vec{r}$ 方向反平行，也就是，太阳引力对行星的力矩为零，即，行星在运行过程中，对太阳的角动量始终保持不变。



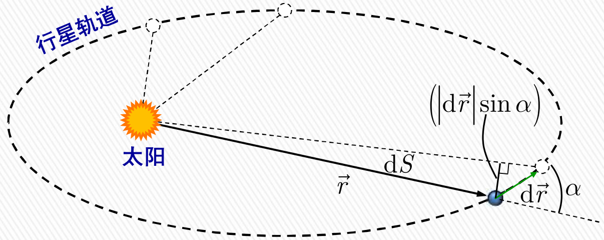
3.7 角动量守恒定律

P100 例3.18：证明开普勒第二定律：行星对太阳的径矢在相等的时间内扫过的面积相等。

证明(续)：行星对太阳的角动量大小为

$$L = mrv\sin\alpha = mr\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|\sin\alpha = m\frac{r\cdot\left(\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\sin\alpha\right)}{\mathrm{d}t} = m\frac{2\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$$

角动量不变，则 d*S*/d*t* 不变，即单位时间内扫过的面积相等。



大学物理(1)

雲南大學

第 4 章

功和能

任课教师：张艳

功和能的含义

(1) 作功会使物体具有的能量发生改变，功是**过程量**。

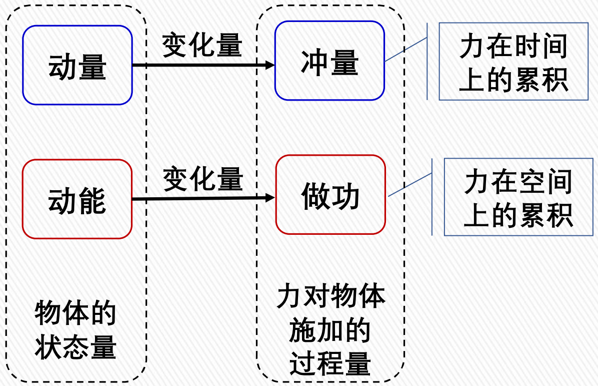
(2) 能是由物体的运动状态决定的物理量，能是**状态量**。

功

投标枪的运动员，人消耗化学能对标枪做功，使标枪获得动能。

能

一块静止的铀235，宏观上似乎不具备能量，但微观上蕴含着巨大的能量

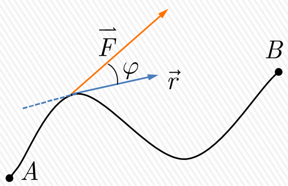


4.1 功

» 功的定义：力和位移的标量积

微分形式：

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\cdot\mathrm{d}r\cdot\cos\varphi$$



积分形式：

$$A_{AB} = \int_{L\,(A)}^{(B)} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_{L\,(A)}^{(B)} F\cos\varphi\,\mathrm{d}r$$

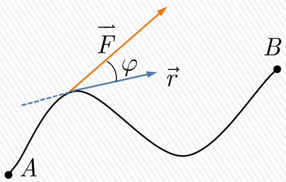
功在 SI 单位制中的单位为：焦耳(J = N·m)。

4.1 功

» 功的定义：力和位移的标量积

$$A_{AB} = \int_{L\,(A)}^{(B)} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{L\,(A)}^{(B)} F\cos\varphi\,\mathrm{d}r$$

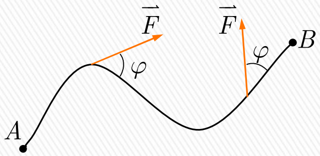


» 特例(恒力做功)：当物体运动过程中，做功的力恒定，力与运动方向的夹角始终保持不变时，不管运动轨道是直线还是曲线，上面这个积分都可简化为力和路程的乘积：(P111 例4.1 和 例4.2)

$$A_{AB} = \int_{L\,(A)}^{(B)} F\cos\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= F\cos\varphi\int_{L\,(A)}^{(B)} \mathrm{d}r$$

$$= F\cos\varphi S_{AB}$$



4.1 功

» 有一些力，它们所做的功只取决于力对物体(质点)做功初始和结束的位置，与运动轨道无关，这样的力称为保守力。

» 比如重力、库仑力、弹簧的弹力等。

» 如果这种力的作用范围分布在一个空间区域，则把这个空间称为保守力场。比如重力场、静电场等。

$$A_{\text{conservative}} = \oint_L \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 0$$

» 另一些力，它们所做的功与路径有关，这样的力称为非保守力。

» 比如摩擦力、非弹性碰撞中的冲力、爆炸的冲力等。

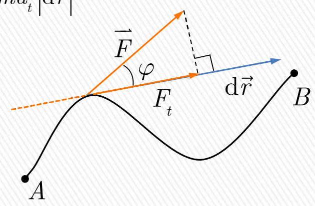
$$A_{\text{nonconservative}} = \oint_L \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \neq 0$$

4.2 动能定理

» **单个质点**的动能定理，从牛顿第二定律出发：

$$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=F\cos\varphi\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|=F_t\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|=ma_t\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|$$

$$\because \begin{cases} a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \left|\mathrm{d}\vec{r}\right|=v\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow a_t\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v\mathrm{d}t$$



$$\therefore\ \mathrm{d}A=mv\mathrm{d}v=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\mathrm{d}E_k$$

积分得：$\displaystyle\int_{(A)}^{(B)}\mathrm{d}A=\int_{v_A}^{v_B}\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\int_{E_{K_A}}^{E_{K_B}}\mathrm{d}E_k$

即： $\displaystyle A_{AB}=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2=E_{kB}-E_{kA}$

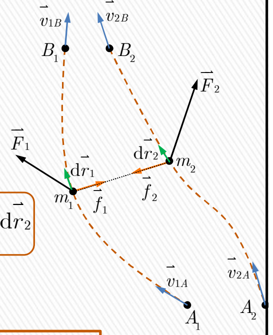
合外力对物体做功会改变物体的动能，所做功的大小等于物体动能的变化量。

4.2 动能定理

» 对于由**多个质点组成的质点系**，我们首先选取其中的两个质点来研究，其结论可以直接推广到多个质点组成的质点系。

» 根据质点的动能定理，合外力对两个质点做的功分别为：

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{A_1}^{B_1}\left(\vec{F}_1+\vec{f}_1\right)\cdot\mathrm{d}\vec{r}_1=\frac{1}{2}m_1v_{1B}^2-\frac{1}{2}m_1v_{1A}^2 \\ \displaystyle\int_{A_2}^{B_2}\left(\vec{F}_2+\vec{f}_2\right)\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2=\frac{1}{2}m_2v_{2B}^2-\frac{1}{2}m_2v_{2A}^2 \end{cases}$$



» 两式相加：

$$\boxed{\int_{A_1}^{B_1}\vec{F}_1\cdot\mathrm{d}\vec{r}_1+\int_{A_2}^{B_2}\vec{F}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2}+\boxed{\int_{A_1}^{B_1}\vec{f}_1\cdot\mathrm{d}\vec{r}_1+\int_{A_2}^{B_2}\vec{f}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2}$$

$$=\frac{1}{2}m_1v_{1B}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2B}^2-\left(\frac{1}{2}m_1v_{1A}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2A}^2\right)$$

» 即： $A_{\mathrm{ex}}+A_{\mathrm{in}}=E_{kB}-E_{kA}$

内力、外力都会改变质点系的总动能。

4.3 势能

» **保守力**对物体的做功多少只取决于运动始末位置。

» 因此，可以引入一个只与位置相关的量来描述物体在两个位置之间运动时，**保守力**做功引起的动能改变。

» 例如，在地球表面不太高的范围内，物体受到地球的引力作用近似在各个高度都相等，即 mg。因此，我们定义重力势能：

$$E_p\equiv\int_0^h mg\mathrm{d}s=mgh$$

» 物体在重力场中从一个高度 h_A 运动到另一个高度 h_B，重力所做的功：

$$A_g=-\Delta E_p=mgh_A-mgh_B$$

重要：只有保守力场才有势能的概念！

4.3 势能

» 此外，在使用重力势能概念时还应该注意以下四点：

» 1. 重力势能必然是相对于某一个参考高度而言的, 参考高度的选取可以是任意的，在参考高度上，物体的重力势能为零。

» 2. 高度从参考高度算起，向上为正，向下为负。

» 3. 重力势能属于地球和物体组成的系统，但通常的物体相对地球来说质量很小，因此可以忽略物体对地球的影响而只考虑地球对物体的影响。

» 4. 重力势能中的高度是相对参考高度而言的，因此，重力势能的数值与参考系无关。

4.3 势能

» 弹簧的弹力也是保守力，因此，也可以在处理弹簧及类似问题时引入弹性势能的概念。

» 定义弹性势能：

$$E_p \equiv \int_0^x kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2$$

» 当弹簧推动质量为m的物体从x_A运动到x_B位置时，弹力做的功为：

$$A_{ela} = -\Delta E_p = \frac{1}{2}k\left(x_A^2 - x_B^2\right)$$

- 弹簧的势能“零点”对应弹簧自然伸长时的位置，即弹簧未经压缩和拉伸时的长度。
- 不管拉伸和压缩弹簧都会使系统的势能增加。
- 由于弹簧的势能只取决于运动始末相对位置，因此，它的数值也与参照系无关。

4.3 势能

» 势能的一般性质：

> 1. 势能具有能量的量纲和单位。
> 2. 只有保守力才存在势能的概念，保守力对外做功会造成势能减少，即：

$$A_{\text{con.}} = -\Delta E_p = E_{pA} - E_{pB}$$

> 3. 计算势能的具体数值时，必须选取零势能参考点。
> **4. 势能只有放在两个或两个以上有保守力相互作用的物体(质点)构成的体系中时才有意义，即势能属于系统整体，而不是单独的某个物体(质点)。**
> 5. 系统的势能与所选取的参照系无关。

4.4 引力势能

» 如果将重力势能推广到其它存在万有引力相互作用的系统中，就是**引力势能**。

» 两个质量分别为 m_1 和 m_2 的物体之间的引力为：

$$f = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

» 万有引力是保守力，因此，物体(质点)在引力场中运动时，引力所做的功与物体(质点)的运动路径无关，只与运动始末位置有关。

4.4 引力势能

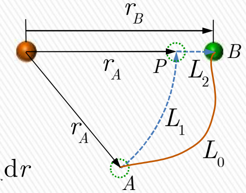
» 万有引力是保守力，因此，物体(质点)在引力场中运动时，引力所做的功与物体(质点)的运动路径无关，只与运动始末位置有关。

» 因此，在处理这类问题时，我们就可以选择容易处理的路径来计算力所做的功。

$$A_{AB} = \int_{L_0 A}^{B} \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_{L_1 A}^{P} \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r} + \int_{L_2 P}^{B} \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

在L_1段，L_1处处垂直于$\mathrm{d}\vec{r}$，

所以在L_1段$\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 0$。



$$A_{AB} = \int_{L_2 P}^{B} \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r\mathrm{d}r = \frac{Gm_1m_2}{r_B} - \frac{Gm_1m_2}{r_A}$$

4.4 引力势能

$$A_{AB} = \frac{Gm_1m_2}{r_B} - \frac{Gm_1m_2}{r_A} = -\Delta E_p = E_{pA} - E_{pB}$$

» 从势能的定义出发，通过比较上面的结果和势能的定义可以发现，引力势能的定义应为：

$$E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

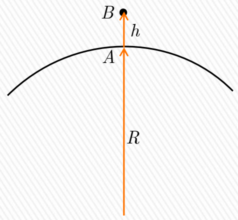
» 零势点为无穷远处。

4.4 引力势能

» 现在考察地球表面距离地表 h 的一个质点的重力势能。

» 按定义，质点的势能应等于把物体从地表移动到 h 高度重力所做的功的负值。

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = -A_{AB} = \frac{GMm}{r_A} - \frac{GMm}{r_B}$$



» 选取地表作为零势点，即 $E_{pA} = 0$：

$$E_{pB} = \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{R+h} = GMm\frac{h}{R(R+h)}$$

$$\xrightarrow{R \gg h} \approx m\frac{GM}{R^2}h = mgh$$

4.6 机械能守恒定律

» 从质点系的动能定理 $A_{ex} + A_{in} = E_{kB} - E_{kA}$ 可知，所有外力和内力对质点系做功的总和等于**系统动能**的增量。

而 $A_{in} = A_{in,cons.} + A_{in,n\text{-}cons.}$

$\therefore A_{ex} + A_{in,cons.} + A_{in,n\text{-}cons.} = E_{kB} - E_{kA}$

系统内保守力做功 $A_{in,cons.} = -\Delta E_p = E_{pA} - E_{pB}$

$\therefore A_{ex} + E_{pA} - E_{pB} + A_{in,n\text{-}cons.} = E_{kB} - E_{kA}$

$\Rightarrow A_{ex} + A_{in,n\text{-}cons.} = E_{kB} + E_{pB} - (E_{kA} + E_{pA})$

系统机械能为动能和势能的和，即：

$E \equiv E_k + E_p$

$\Rightarrow A_{ex} + A_{in,n\text{-}cons.} = E_B - E_A$

系统的机械能的增量等于外力与系统内非保守力做功的总和。

推论：保守内力做功不改变系统的机械能。

4.6 机械能守恒定律

» 对于没有非保守力的系统，非保守力做功自然为零，则机械能守恒定律简化为：

$A_{ex} = E_B - E_A$

保守系统的机械能守恒定律：

在保守系统中，所有外力做的功等于系统的机械能的增量。

» 如果一个保守系统不受外力作用，也不和外界交换物质，则机械能守恒定律进一步简化为：

$E_A = E_B$

封闭保守系统的机械能守恒定律：

在封闭保守系统中，系统的机械能保持不变。

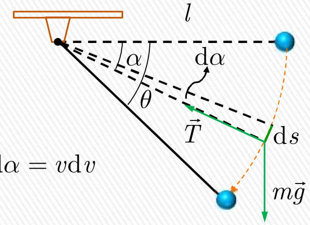
第 4 章 功和能

4.6 机械能守恒定律

P54例2.3，P114例4.5，P133 例4.9：质量为 m 的珠子系在细线的一端，线的另一端固定，线长 l。先拉动珠子使细线水平静止，然后松手使珠子下落。求细线下摆至 θ 角时，珠子的速率和细线的张力。

解法一(动力学方法)：

对珠子进行切向受力分析：



$$mg\cos\alpha = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \Rightarrow g\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow g\cos\alpha\cdot\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}s \Rightarrow gl\cos\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha = v\mathrm{d}v$$

$$\Rightarrow \int_0^{\theta} gl\cos\alpha\mathrm{d}\alpha = \int_0^{v_\theta} v\mathrm{d}v$$

$$\Rightarrow gl\sin\theta = \frac{1}{2}v_\theta^2 \Rightarrow v_\theta = \sqrt{2gl\sin\theta}$$

法向受力分析：

$$T - mg\sin\theta = m\frac{v_\theta^2}{l}$$

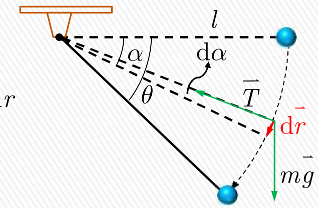
第 4 章 功和能

4.6 机械能守恒定律

P54例2.3，P114例4.5，P133 例4.9：质量为 m 的珠子系在细线的一端，线的另一端固定，线长 l。先拉动珠子使细线水平静止，然后松手使珠子下落。求细线下摆至 θ 角时，珠子的速率和细线的张力。

解法二(动能定理)：

珠子下摆过程中，只有重力做功：



$$A_\theta = \int_0^{s_\theta} m\vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{s_\theta} mg\cos\alpha\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\theta} mgl\cos\alpha\mathrm{d}\alpha = mgl\sin\theta$$

由动能定理得：

$$A_\theta = mgl\sin\theta = \frac{1}{2}mv_\theta^2 \Rightarrow v_\theta = \sqrt{2gl\sin\theta}$$

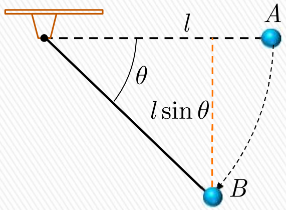
对珠子进行法向受力分析得：$T - mg\sin\theta = m\dfrac{v_\theta^2}{l}$

第 4 章 功和能

4.6 机械能守恒定律

P54例2.3，P114例4.5，P133 例4.9：质量为 m 的珠子系在细线的一端，线的另一端固定，线长 l。先拉动珠子使细线水平静止，然后松手使珠子下落。求细线下摆至 θ 角时，珠子的速率和细线的张力。

解法三(机械能守恒定律)：在珠子下摆过程中，只有保守内力——重力做功，因此机械能守恒。



以位置 A 所在的平面为零势面，则珠子下摆前后的机械能均为 0：

$$0 = \frac{1}{2}mv_\theta^2 - mgl\sin\theta \Rightarrow v_\theta = \sqrt{2gl\sin\theta}$$

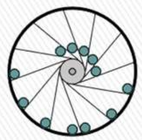
对珠子进行法向受力分析得：$T - mg\sin\theta = m\dfrac{v_\theta^2}{l}$

力学篇，第 5 章 刚体的转动

大学物理(1)

云南大学

第 5 章 刚体的转动



任课教师：张艳

5.1 刚体转动的描述

» **刚体**：受力时不改变形状和体积的物体。

» 刚体可看成是许多个质点组成的质点系，每个质点称为一个**质元**，各个质元之间的位置关系保持不变。

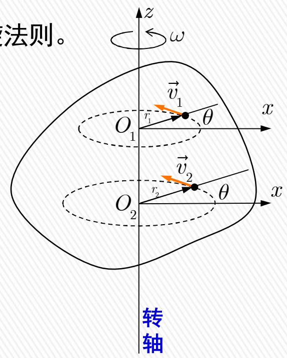
» **角速度**：$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$，方向满足右手螺旋法则。

» **角速度和线速度的关系**：$v = r\omega$

» **角加速度**：$\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

» **切向加速度、法向加速度和它们的关系**：

$a_t = r\alpha$ ， $a_n = r\omega^2$



* 转动与平动的类比

平动

名称	符号
位矢	$\vec{r}$
速度	$\vec{v}$
加速度	$\vec{a}$
质量	m
力	$\vec{F}$
动量	$\vec{p} = m\vec{v}$

$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$, $\vec{a}_t = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$

转动

名称	符号
角度	$\vec{\theta}$
角速度	$\vec{\omega}$
角加速度	$\vec{\alpha}$
转动惯量	J
力矩	$\vec{M}$
角动量	$\vec{L} = J\vec{\omega}$

$\vec{\omega} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\theta}}{\mathrm{d}t}$, $\vec{\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$

注：刚体的定轴旋转只有正反两个方向。

线量和角量的关系：$v = r\omega$, $a_t = r\alpha$

转动和平动的关系：$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

* 转动与平动的定理对照

平动

运动规律：

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \dfrac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \end{cases}$$

牛顿第二定律：

$\vec{F} = m\vec{a}$

动量定理：

$\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ ⇨ 动量守恒定律

转动

运动规律：

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \end{cases}$$

刚体定轴转动定理：

$M = J\alpha$

角动量定理：

$\vec{M} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ ⇨ 角动量守恒定律

5.3 转动惯量的计算

» 在上一节中，我们定义了转动惯量

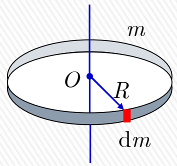
$$J_z \equiv \sum_i m_i r_i^2$$

对于质量连续分布的刚体，上式中的求和需要换成积分，即：

$$J_z \equiv \int_V r^2 \mathrm{d}m$$

5.3 转动惯量的计算

P159 例 5.2：求质量为 m，半径为 R 的均匀薄**圆环**的转动惯量，转轴如图所示。



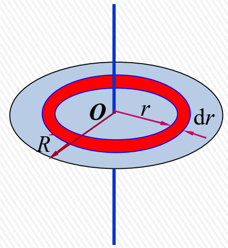
解：如图所示，在圆环上取微元 dm，可知无论微元取在什么位置，它距离转轴的距离均为 R 。

则该圆环转动惯量为：

$$J=\int R^2\mathrm{d}m=R^2\int\mathrm{d}m=mR^2$$

5.3 转动惯量的计算

P159 例 5.3：求质量为 m，半径为 R 的均匀**圆盘**的转动惯量，转轴如图所示。



解：如图所示，在圆盘上取半径为 r 的环状微元 dm。

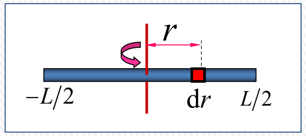
设圆盘的质量面密度为 ρ ，则圆盘的质量为 $\rho\pi R^2$，微元的质量为 $\rho 2\pi r\mathrm{d}r$ 。

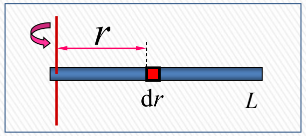
则该圆盘的转动惯量为

$$J=\int r^2\mathrm{d}m=\int_0^R r^2\cdot\rho 2\pi r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\rho\pi R^4=\frac{1}{2}mR^2$$

5.3 转动惯量的计算

P160 例 5.4：求质量为 m，长度 L 的均匀细棒分别绕中心和一端旋转的转动惯量。





解：令棒的质量线密度为 ρ，则细棒的质量为 ρL；如图所示，取一距离 r 处的微元 dm，则 d$m=\rho$dr。

如左图所示的转动惯量为：$J=\int r^2\mathrm{d}m=2\int_0^{L/2}r^2\rho\mathrm{d}r=\frac{1}{12}\rho L^3=\frac{1}{12}mL^2$

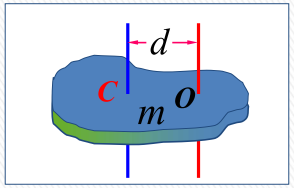
如右图所示的转动惯量为：$J=\int r^2\mathrm{d}m=\int_0^{L}r^2\rho\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\rho L^3=\frac{1}{3}mL^2$

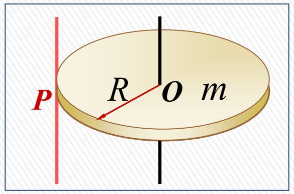
5.3 转动惯量的计算

» **平行轴定理**：

» 质量为 m 的刚体，如果对其质心轴的转动惯量为 J_C，则对任一与该轴平行、相距为 d 的转轴的转动惯量为：

$$J=J_C+md^2$$



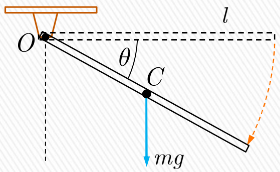


5.4 转动定律的应用

P163 例 5.7：一根长 l，质量 m 的均匀细棒，其一端有一固定的、可旋转的光滑水平轴。最初棒静止在水平位置，求它下摆 θ 角时的角速度和角加速度。

解：刚体运动的基础方程为

$$M = J\alpha$$



转动惯量 J 已知，需要求力矩 M。只有重力对细棒产生力矩，根据质心运动原理，重力相对于 O 点对细棒的力矩为：

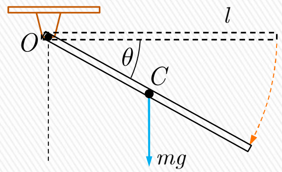
$$M = \frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

则棒的角加速度为 $\alpha = \dfrac{M}{J} = \dfrac{\frac{1}{2}mgl\cos\theta}{\frac{1}{3}ml^2} = \dfrac{3g\cos\theta}{2l}$

5.4 转动定律的应用

P163 例 5.7：一根长 l，质量 m 的均匀细棒，其一端有一固定的、可旋转的光滑水平轴。最初棒静止在水平位置，求它下摆 θ 角时的角速度和角加速度，以及此时棒所受轴的力的大小和方向。

解(续)：棒的角加速度为 $\alpha = \dfrac{3g\cos\theta}{2l}$



代数变换得：

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

即：$\dfrac{3g\cos\theta}{2l} = \omega\dfrac{d\omega}{d\theta} \Rightarrow \dfrac{3g}{2l}\cos\theta d\theta = \omega d\omega$

积分得：$\displaystyle\int_0^\theta \frac{3g\cos\theta}{2l}d\theta = \int_0^\omega \omega d\omega \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$

5.5（相对固定轴的）角动量守恒

» 质点系(刚体)相对于定点的角动量定理为：

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

» 质点系(刚体)的角动量守恒定律为：质点系所受合外力矩为 0 时，它将维持转速和转轴方向不变。

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{C}$$

5.6 转动中的功和能

» 质点的**平动动能**：

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

提问：二者的量纲是否一致？

» 刚体的**转动动能**：

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$$

» **平动动能、转动动能、重力势能、弹力势能，都属于机械能。**

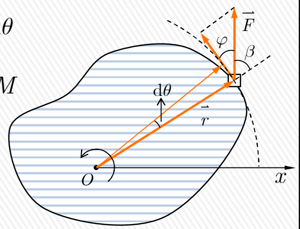
5.6 转动中的功和能

» 刚体受外力 $\vec{F}$ 作用，绕过 O 点垂直于板面的轴，转过了 $\mathrm{d}\theta$ 的角度，在这一过程中，力所做的功为：

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\cos\varphi\left|\mathrm{d}r\right| = F\cos\varphi r\mathrm{d}\theta$$

其中 $F\cos\varphi r = \left|\vec{r}\times\vec{F}\right| = rF\sin\beta = M$

$\therefore\ \mathrm{d}A = M\mathrm{d}\theta$



从角度 θ_1 转到角度 θ_2 所做的功为：

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} J\alpha\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\omega$$

$$= \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2 = E_{k2} - E_{k1}$$

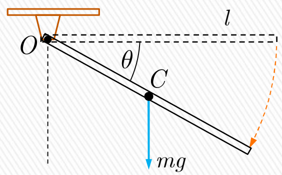
定轴转动的动能定理

合外力矩对一个绕固定轴转动的刚体所做的功等于它的**转动动能**的增量。

5.4 转动定律的应用

P163 例 5.7：一根长 l，质量 m 的均匀细棒，其一端有一固定的、可旋转的光滑水平轴。最初棒静止在水平位置，求它下摆 θ 角时的角速度。

解法二(刚体的转动动能定理)：棒下摆的过程中，只有重力力矩做功。



重力矩为： $M = mg\cdot\frac{1}{2}l\cdot\cos\theta$

重力矩做功：

$$A = \int_0^{\theta} M\mathrm{d}\theta = \int_0^{\theta} mg\cdot\frac{1}{2}l\cdot\cos\theta\cdot\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}mgl\sin\theta$$

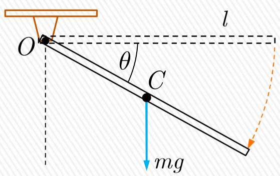
根据**转动动能定理**： $\frac{1}{2}mgl\sin\theta = \frac{1}{2}J\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$

5.4 转动定律的应用

P163 例 5.7：一根长 l，质量 m 的均匀细棒，其一端有一固定的、可旋转的光滑水平轴。最初棒静止在水平位置，求它下摆 θ 角时的角速度。

解法三(机械能守恒)：棒下摆的过程中，只有重力矩做功，机械能守恒。

以棒的初始位置为重力势能的零势面，列机械能守恒方程得：



$$0 = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}mgl\sin\theta$$

$$\Rightarrow\ \omega = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$

* 转动与平动的类比

平动

名称	符号
位矢	$\vec{r}$
速度	$\vec{v}$
加速度	$\vec{a}$
质量	m
力	$\vec{F}$
动量	$\vec{p} = m\vec{v}$
动能	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$

$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t},\ \vec{a}_t = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$

转动

名称	符号
角度	$\vec{\theta}$
角速度	$\vec{\omega}$
角加速度	$\vec{\alpha}$
转动惯量	J
力矩	$\vec{M}$
角动量	$\vec{L} = J\vec{\omega}$
转动动能	$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$

$\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\theta}}{\mathrm{d}t},\ \vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$

* 转动与平动的定理对应

平动

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}t$

牛顿第二定律：

$\vec{F} = m\vec{a}$

动量定理：

$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ ⇨ 动量守恒定律

质心系的动量定理：

$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}_c$

平动动能：$E_k = \frac{1}{2}mv^2$

转动

$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$\omega = \omega_0 + \alpha t$

刚体定轴转动定理：

$M = J\alpha$

角动量定理：

$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ ⇨ 角动量守恒定律

质心系的角动量定理：

$M_c = \frac{\mathrm{d}L_c}{\mathrm{d}t} = J_c\alpha$

转动动能：$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$

大学物理(1)

云南大学 YUNNAN UNIVERSITY

第 7 章 静电场

任课教师：张艳

7.1 电荷

» **1. 电荷的种类**

1733年，查尔斯·杜费(Charles Francois du Fay)将电分为两种，玻璃电和琥珀电。这两种电会彼此相互抵销。当玻璃与丝巾相摩擦时，玻璃会生成**玻璃电**；当琥珀与毛皮相摩擦时，琥珀会生成**琥珀电**。

1747年，本杰明·富兰克林(Benjamin Franklin, 1706—1790)首次将这两种电荷称为**正电荷(Positive charges)**和**负电荷(Negative charges)**。

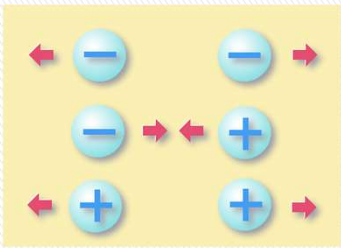
一般的说，**质子**所带的那种电荷称为**正电荷**，**电子**所带的那种电荷称为**负电荷**。

电荷的 SI 单位为库仑(Coulomb)。

7.1 电荷

» 两种电荷之间会通过电场产生相互作用，**同种电荷相互排斥**，**异种电荷相互吸引**。

» 如果一个宏观物体中带有同等数量的正负电荷，从而使这个物体不表现处带电特征的现象称为**中和**。



7.1 电荷

» **2. 电荷的量子性**

自然界中的电荷总是以某个最小单元的整数倍出现。一般认为，这个最小单元是一个电子所带的电荷量，即：

$$e = 1.602\ 176\ 620\ 8(98)\times 10^{-19}\text{库伦}(C)$$

» **3.电荷守恒[定律]**：一个不和外界交换物质的孤立系统，其正负电荷的代数和维持不变。

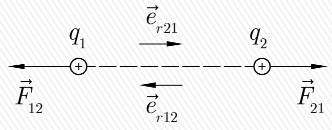
» 规定：正电荷多少用正数表示，负电荷多少用负数表示。

7.2 库仑定律与叠加原理

» 库仑定律：

相对惯性参照系观察，自由空间中两个静止点电荷之间的作用力与这两个电荷所带电量成正比，与它们的距离**平方**成**反比**，作用力的方向沿着这两个点电荷的连线。

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r$$



式中 k 为常数，

$$k = 8.99\times 10^{9} N\cdot m^2\cdot C^{-2}$$

有时也写成 $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

ε_0 称为 真空电容率，

$$\varepsilon_0 = 8.85\times 10^{-12} C^2\cdot N^{-1}\cdot m^{-2}$$

7.2 库仑定律与叠加原理

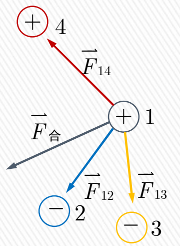
[电力的]叠加原理：

当空间中有两个以上点电荷时，作用于每一个点电荷上的总静电力等于其他点电荷单独存在时作用于该电荷的静电力的**矢量和**。

$$\vec{F}_{合} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \cdots + \vec{F}_{1n}$$

$$= \sum_{i=2}^{n}\vec{F}_{1i}$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=2}^{n}\frac{q_i}{r_{1i}^2}\vec{e}_{r1i}$$



原则上，只需使用库仑定律和叠加原理，就可以解决静电学中有关带电体受力的所有问题。

7.3 电场和电场强度

» 相对观察者静止的电荷激发出的电场称为**静电场**。

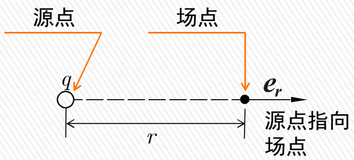
» 电场对处于其中的电荷会产生作用力，是传递电荷相互作用的介质。

» **电场是一种物质**，它无色无味无形，但具有质量、能量和动量，传播速度是光速。

7.4 静止的点电荷的电场及其叠加

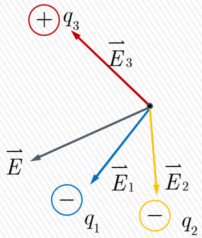
» 点电荷在某一点的电场强度：

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$$



» 多个点电荷在空间中某点产生的电场强度为：

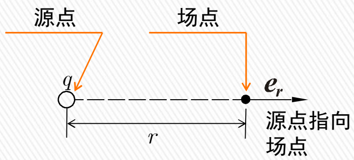
$$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{q_i}{r_i^2}\vec{e}_{ri}$$



7.4 静止的点电荷的电场及其叠加

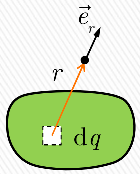
» 点电荷在某一点的电场强度：

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$$



» 连续分布的电荷的电场强度为：

$$\vec{E}=\int \mathrm{d}\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{e}_r$$



7.4 静止的点电荷的电场及其叠加

P247 例 7.3：相隔一定距离的等量异号点电荷 $+q$ 和 $-q$，当它们之间的距离 l 远小于它们到场点的距离 r 时，被称为电偶极子。求电偶极子中垂线上任一点的电场强度。

解：如图，两个点电荷在 P 点的场强分别为：

$$\vec{E}_+=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+^2}\vec{e}_{r_+}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_+}{r_+^3}$$

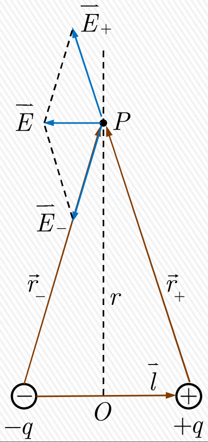
$$\vec{E}_-=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r_-^2}\vec{e}_{r_-}=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_-}{r_-^3}$$

当 $r>>l$ 时，可认为 $r_+=r_-=r$，则

$$\vec{E}=\vec{E}_++\vec{E}_-=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(\vec{r}_+-\vec{r}_-)$$

$$=\frac{-q\vec{l}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{-\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$\vec{p}$ 电矩



7.4 静止的点电荷的电场及其叠加

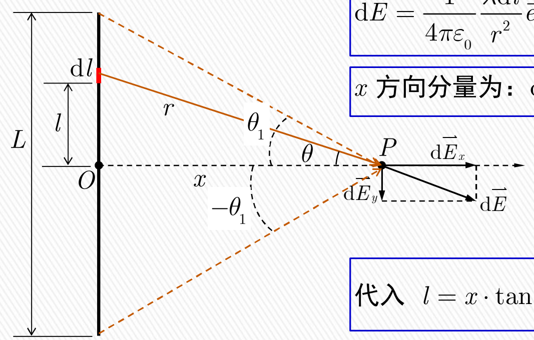
P248 例 7.4：均匀带电直线棒，长为 L，电荷线密度为 λ，求直线中垂线上一点的场强。

解：如图，由于对称性的存在，只需计算场点 P 在 x 方向的场强即可。

在直线棒上取微元 $\mathrm{d}l$，该微元的电量为 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}l$，所产生的的场强：

$$\mathrm{d}\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\mathrm{d}l}{r^2}\vec{e}_r$$

x 方向分量为：$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\cdot\cos\theta$

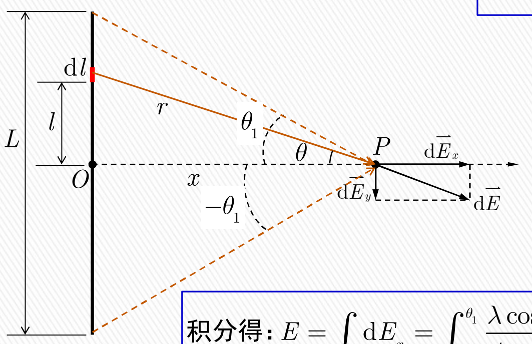


代入 $l=x\cdot\tan\theta,\ r=\dfrac{x}{\cos\theta}$ 得：

7.4 静止的点电荷的电场及其叠加

P248 例 7.4：均匀带电直线棒，长为 L，电荷线密度为 λ，求直线中垂线上一点的场强。

解(续)：代入 $l = x\cdot\tan\theta,\ r = x/\cos\theta$ 得：$\boxed{\mathrm{d}E_x = \dfrac{\lambda\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 x}\mathrm{d}\theta}$

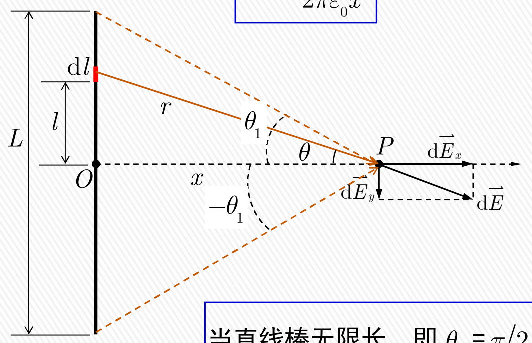


积分得：$E = \int_q \mathrm{d}E_x = \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \dfrac{\lambda\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 x}\mathrm{d}\theta = \dfrac{\lambda\sin\theta_1}{2\pi\varepsilon_0 x}$

7.4 静止的点电荷的电场及其叠加

P248 例 7.4：均匀带电直线棒，长为 L，电荷线密度为 λ，求直线中垂线上一点的场强。

解(续)：前述分析得：$\boxed{E = \dfrac{\lambda\sin\theta_1}{2\pi\varepsilon_0 x}}$



当直线棒无限长，即 $\theta_1 = \pi/2$ 时，$E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$

7.5 电场线和电通量

(1) 我们为什么画电场线？

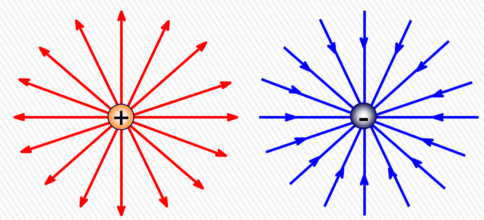
用电场强度 E 的函数形式来描述电场是精确的，但不直观。

(2) 什么是电场线？

如果在电场中作出许多曲线，使这些曲线上每一点的切线方向和该点场强方向一致，而且电场线在空间上的密度正比于电场强度，那么所有这些曲线就称为电场线。

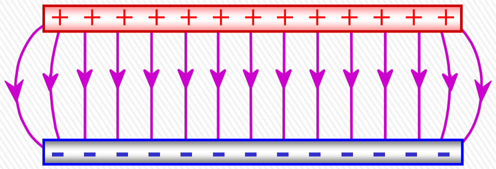
7.5 电场线和电通量

正点电荷与负点电荷的电场线

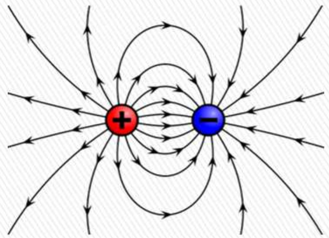


7.5 电场线和电通量

带电平行板电容器的电场线



7.5 电场线和电通量



» 电场线的规定：

- 切线方向为电场强度的方向，
- 疏密程度表示电场强度的大小。

» 电场线的特点：

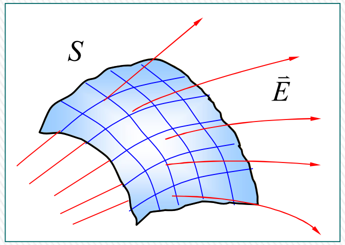
- 任意两条电场线不相交；
- 有始有终，非闭合曲线，始于正电荷（或无穷远），终于负电荷（或无穷远）。

» 从电场线的方向上看，正电荷似乎在发出电场线；相反的，负电荷却在吸收电场线。

7.5 电场线和电通量

» 电通量

定义：通过电场中某个面的电场线数量。

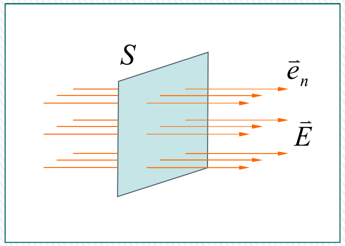


7.5 电通量的求法

◆ 均匀电场，

$\vec{E}$ 垂直于平面时，

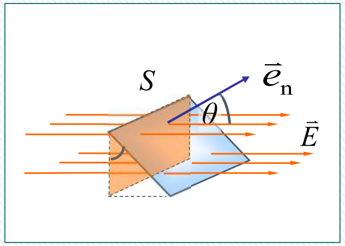
$$\Phi_e = \vec{E}\cdot\vec{S} = ES$$



◆ 均匀电场，

$\vec{E}$ 与平面夹角 θ，

$$\Phi_e = \vec{E}\cdot\vec{S} = ES\cos\ \theta$$

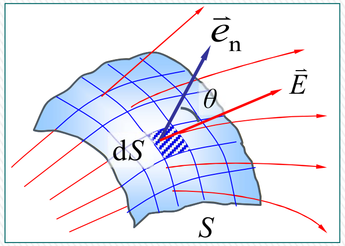


7.5 电通量的求法

◆ 非均匀电场，曲面 S，

$$\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

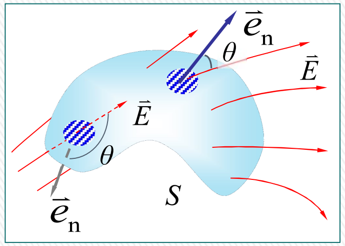
$$\Phi_e = \int_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$



◆ 非均匀电场，闭合曲面 S，

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

“穿出”为正，
“穿进”为负。



7.6 高斯定律

高斯面

» 在真空中的静电场，穿过**任一闭合曲面**的电场强度通量，等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以**真空电容率** ε_0 .

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i^{\mathrm{in}}$$

7.6 高斯定律

» 关于高斯定律：

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i^{\mathrm{in}}$$

> 只有闭合曲面内部的电荷对曲面的电通量有贡献。

> 虽然只有闭曲面内的电荷对闭曲面的电通量有贡献，但高斯定律公式中的电场强度 $\vec{E}$ 是空间中所有电荷所产生的合场强，不仅仅是曲面内部的电荷产生的。

> 在运动电场和时变电场中，库仑定律不再适用，但高斯定律依然成立。它是关于电磁场的基本规律之一，也是麦克斯韦方程组的其中一个方程。

> 高斯定理的物理含义为：静电场是有源场。

7.7 利用高斯定律求静电场的分布

» 在系统具有**高度对称性**时，使用高斯定律求电场比库伦定理方便，例如：

> 点电荷(球对称)

> 均匀带电球体(球对称)

> 无限长带电导线(轴对称)

> 无限长带电圆柱和圆筒(轴对称)

> 无限大带电平板(两边对称)

7.7 利用高斯定律求静电场的分布

» 利用高斯定理求电场强度的一般步骤：

> 对称性分析；

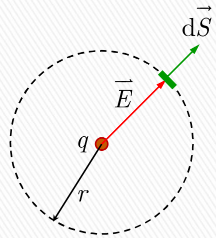
> 根据对称性选择合适的高斯面；

> 应用高斯定理进行计算。

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i^{\mathrm{in}}$$

7.7 利用高斯定律求静电场的分布

P255 例 7.8：求点电荷 q 周围的电场分布。



解：点电荷的场强是球面对称的，以点电荷为球心，作一个半径为 r 的球面高斯面：

根据高斯定理，$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$ (1)

根据对称性，球面上每一个面积微元 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的方向都和它所在位置的场强 $\vec{E}$ 的方向一致，则 (1) 式的左边可写为：$\oint_S E\cdot \mathrm{d}S$

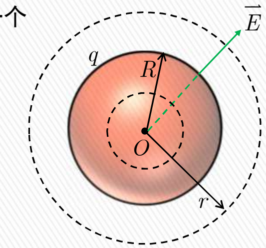
根据对称性，球面上每一处的场强大小 E 相等，即 E 是一个常量，可以提到积分符号外面来，即 $\oint_S E\cdot \mathrm{d}S = E\cdot\oint_S \mathrm{d}S = E\cdot 4\pi r^2$

代入 (1) 式得：$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$

7.7 利用高斯定律求静电场的分布

P255 例 7.9：求半径为 R、带电量为 q 的均匀带电球面的电场分布。

解：球面电荷的场强是球面对称的，作一个和球面同心的、半径为 r 的球面高斯面：



高斯定理：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i^{\mathrm{in}} \quad (1)$$

根据对称性对 (1) 式左边进行化简：

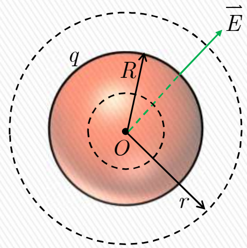
$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\cdot \mathrm{d}S = E\cdot\oint_S \mathrm{d}S = E\cdot 4\pi r^2$$

(1) 式右边有两种情况：$\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i^{\mathrm{in}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\begin{cases} 0, & r<R \\ q, & r\geq R\end{cases}$

7.7 利用高斯定律求静电场的分布

P255 例 7.9：求半径为 R、带电量为 q 的均匀带电球面的电场分布。

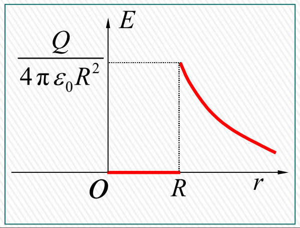
解(续)：$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i^{\mathrm{in}}$ (1)



化简为：

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\begin{cases} 0, & r<R \\ q, & r\geq R\end{cases}$$

$$\Rightarrow E = \begin{cases} 0 & , \quad r<R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} & , \quad r\geq R\end{cases}$$



7.7 利用高斯定律求静电场的分布

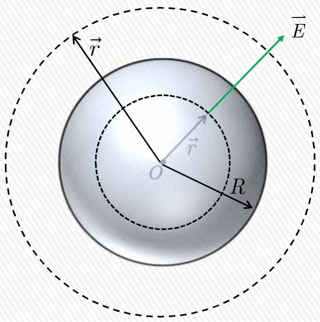
P256 例 7.10：求均匀带电球体的电场分布，已知球半径为 R，所带总电荷为 q。

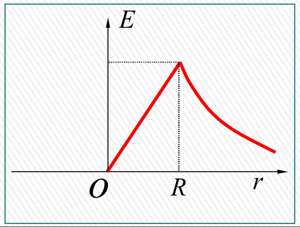
解：该场强是球面对称的，作一个和球面同心的、半径为 r 的球面高斯面：

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} \overset{\text{对称性分析}}{=} E\cdot 4\pi r^2$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i^{\text{in}}=\frac{1}{\varepsilon_0}\begin{cases} q\dfrac{r^3}{R^3}, & r<R \\ q, & r\geq R\end{cases}$$

$$E=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3}, & r<R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, & r\geq R\end{cases}$$





7.7 利用高斯定律求静电场的分布

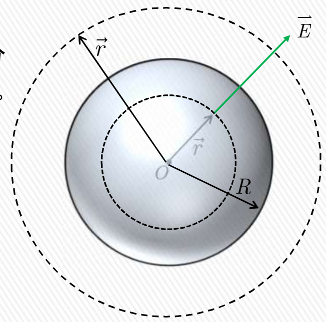
P256 例 7.10：求均匀带电球体的电场分布，已知球半径为 R，所带总电荷为 q。

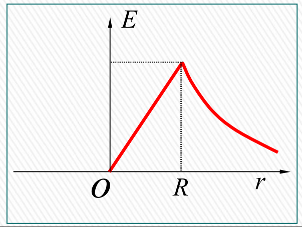
解(续)：以 ρ 表示电荷体密度，考虑方向，重新表示球内部的场强为：

$$\vec{E}=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r,\quad r\leq R$$

代入 $\vec{r}=r\vec{e}_r$ 得：

$$\vec{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r},\quad r\leq R$$



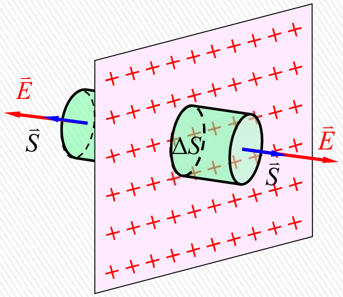


7.7 利用高斯定律求静电场的分布

P257 例 7.12：求无限大均匀带电平面的电场分布，电荷面密度为 σ。

解：无限长均匀带电平面的电场分布是向两边发散对称的，而且距离平面等远处的场强大小相等，方向搜垂直于平面。

作一个轴线垂直于该平面的封闭柱状高斯面(不要求是圆柱面)，其底面积为 ΔS。



高斯定理：$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i^{\text{in}}$

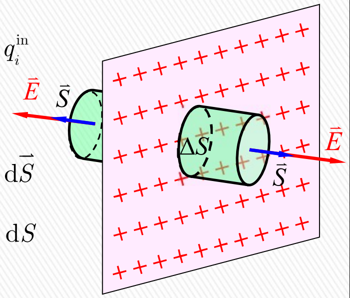
分析左边得：

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\int_{\text{柱面}}\vec{E}\cdot d\vec{S}+\int_{\text{上底}}\vec{E}\cdot d\vec{S}+\int_{\text{下底}}\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

7.7 利用高斯定律求静电场的分布

P257 例 7.12：求无限大均匀带电平面的电场分布，电荷面密度为 σ。

解(续)：高斯定理：$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i^{\text{in}}$



分析左边得：

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\int_{\text{上底}}\vec{E}\cdot d\vec{S}+\int_{\text{下底}}\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$=\int_{\text{上底}}E\cdot dS+\int_{\text{下底}}E\cdot dS$$

$$=2E\cdot\Delta S$$

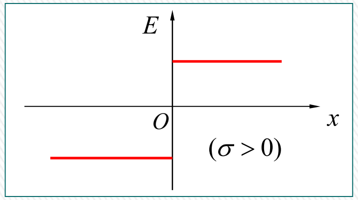
分析右边得：$\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i^{\text{in}}=\frac{\sigma\cdot\Delta S}{\varepsilon_0}$

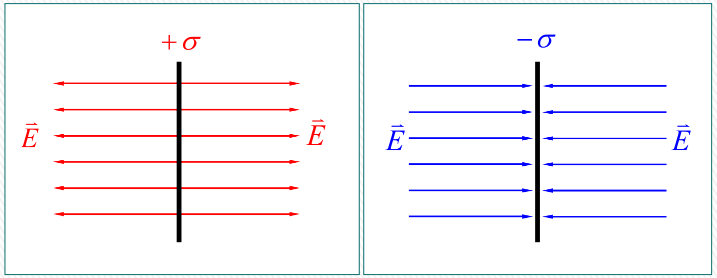
左右相等得：$2E\cdot\Delta S=\frac{\sigma\cdot\Delta S}{\varepsilon_0}\ \Rightarrow\ E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

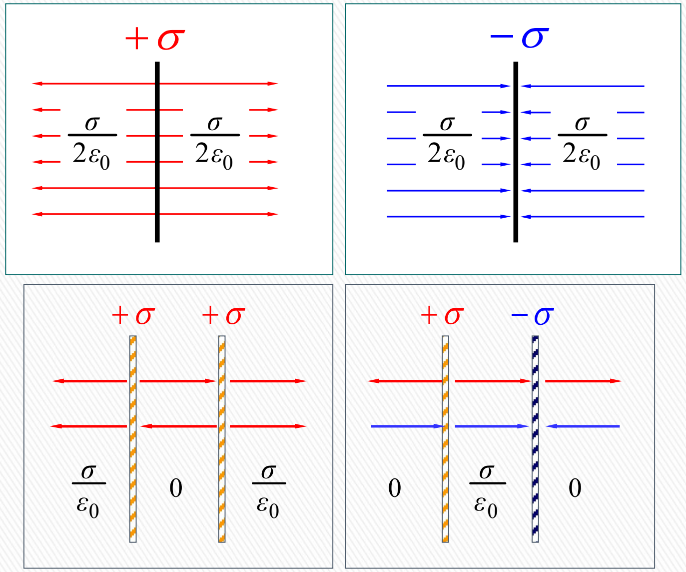
7.7 利用高斯定律求静电场的分布

P257 例 7.12：求无限大均匀带电平面的电场分布，电荷面密度为 σ。

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

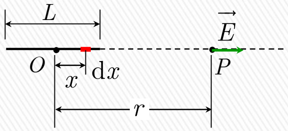






习题 7.9：一均匀带电直线长为 L，电荷线密度为 λ，求直线的延长线上距 L 中点为 $r\,(r > L/2)$ 处的场强。

解：以带电直线的中点为原点 O，在直线上取微元 $\mathrm{d}x$，则该微元的电量为 $\mathrm{d}q = \lambda\cdot\mathrm{d}x$，在 P 点产生的场强为：



$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{(r-x)^2}$$

整根带电直线在 P 点的场强为：

$$E = \int_L \mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{(r-x)^2} = \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2 - L^2/4\right)}$$

方向如图。

电磁学篇，第8章 电势

大学物理 (1)

云南大学

第 8 章 电势

一个质点在运动过程中如果只受保守力作用，则保守力做功多少与运动路径无关，只与运动起始和结束的位置有关；

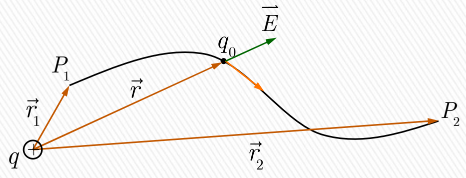
因此，可以引入“势”的概念来描述质点运动前后保守力做功的多少。

任课教师：张艳

8.1 静电场的保守性

» 现有一点电荷 q，其周围存在一个静电场；该电场中有另一个带电量为 q_0 的试验电荷，从 P_1 点运动至 P_2 点。

» 问：在这一过程中电场力(保守力)所做的功是多少？



$$A_{12} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

8.1 静电场的保守性

» 对于保守力场，质点在其中沿任一闭合回路运动，保守力做功为零，即：

$$A_{\text{conservative}} = \oint_L \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

» 因此容易得知，对于任一静电场，场强沿闭合回路的曲线积分为零，即：

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

静电场的环路定理：

在所有静电场中，电场强度沿任一闭合回路的积分为零。

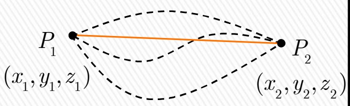
8.2 电势差和电势

» 问题的出发点：寻求一个**标量**来描述静电场。(场强是**矢量**)

» 由于保守力做功多少只与质点的始末位置相关，与路径无关，而且保守力做了多少功，体系的势能就减少多少。

$$\frac{E_{p1}}{q} - \frac{E_{p2}}{q} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$



» 其中 φ 称为**电势**，它是空间坐标的函数：

$\varphi_1 = \varphi(x_1,y_1,z_1)$, $\varphi_2 = \varphi(x_2,y_2,z_2)$

» φ_1 -φ_2 称为两点的**电势差**，也叫作两点的**电压**，通常表示为：

$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ 　　**注意下标的顺序！**

8.2 电势差和电势

» 要计算静电场中某点的电势，需要选取一个**电势零点**。

» 如果选取了空间中某点 P_0 为电势零点，则另一点 P 处的电势为：

$$\varphi_P = \int_{(P)}^{(P_0)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

φ_P 在数值上等于将单位正电荷从 P 点移动到 P_0 点，电场力所做的功。

积分路径的选取原则：**选取能使积分最简单的。**

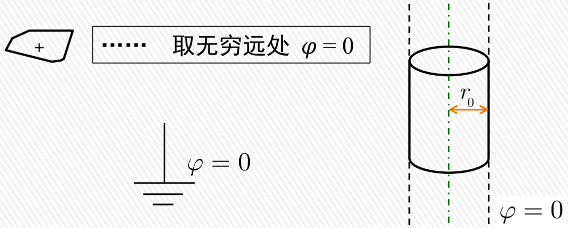
8.2 电势差和电势

» **电势零点**选取原则：

> 对于球对称或一般形状带电体，以计算方便为原则，一般选取无穷远处；

> 对于有接地点的带电体系，接地点为零电势参考点；

> 对于无限大平面，无限长直导线，无限长圆柱等电荷分布扩展至无穷远处的带电体，选取带电体附近任一点。

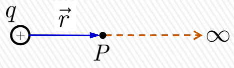


8.2 电势差和电势

» 点电荷 q 的电势函数，即：以无穷远处为电势零点，该电荷在**距离它自身 r 的点 P** 处产生的电势为：

$$\varphi=\int_{(P)}^{(\infty)}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_{r}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\cdot d\vec{r}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



8.2 电势差和电势

» 求电势的一般步骤：

(1) 求电场强度；

(2) 选取电势零点；

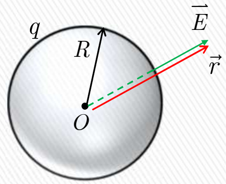
(3) 选取最简便的积分路径，一般沿直线积分；

(4) 如果积分路径经过多个电场区域，则分段积分之后相加。

8.2 电势差和电势

P267 例 8.1：求均匀带电球面的电场中的电势分布，球面半径为 R，总带电量为 q。

解：由 **P255 例7.9** 得知，均匀带电球面的电场强度方向为径矢方向，大小为：



$$E=\begin{cases}0, & r<R\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r\ge R\end{cases}$$

取无穷远为电势零点，则其电势为：

$$\varphi=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^{\infty}E\cdot dr=\begin{cases}\displaystyle\int_r^R 0dr+\int_R^{\infty}\frac{q\cdot dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r\le R\\ \displaystyle\int_r^{\infty}\frac{q\cdot dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r>R\end{cases}$$

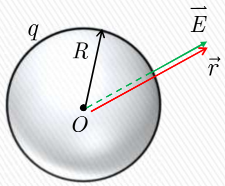
8.2 电势差和电势

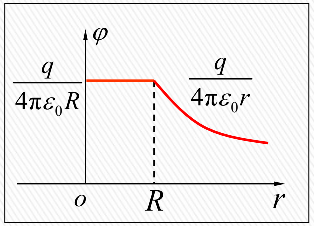
P267 例 8.1：求均匀带电球面的电场中的电势分布，球面半径为 R，总带电量为 q。

解(续)：

$$\varphi=\begin{cases}\displaystyle\int_r^R 0\,\mathrm{d}r+\int_R^{\infty}\frac{q\cdot\mathrm{d}r}{4\,\pi\varepsilon_0 r^2}, & r\le R\\[2ex] \displaystyle\int_r^{\infty}\frac{q\cdot\mathrm{d}r}{4\,\pi\varepsilon_0 r^2}, & r>R\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{q}{4\,\pi\varepsilon_0 R}, & r\le R\\[2ex] \dfrac{q}{4\,\pi\varepsilon_0 r}, & r>R\end{cases}$$

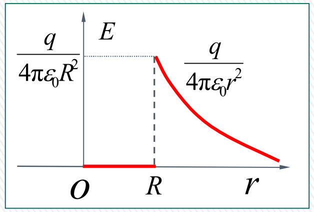




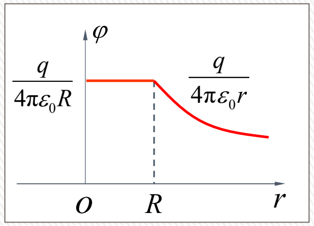
8.2 电势差和电势

讨论：均匀带电球面的电场和电势的关系：

$$E=\begin{cases}0, & r\le R\\[1ex] \dfrac{q}{4\,\pi\varepsilon_0 r^2}, & r>R\end{cases}$$



$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}, & r\le R\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r>R\end{cases}$$



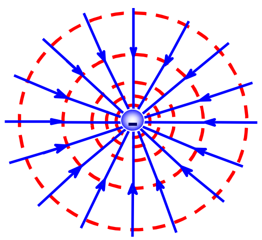
8.3 电势叠加原理

» 等势面：

电势相等的点组成的曲面叫做等势面。

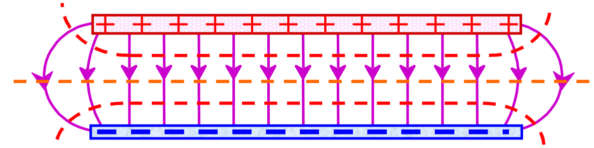
或者反过来说，如果在电场中一个曲面上各点电势相等，则这个面称为等势面。

点电荷的电场线与等势面

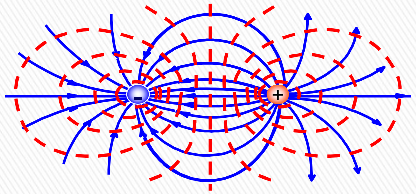


8.3 电势叠加原理

两平行带电平板的电场线和等势面



一对等量异号点电荷的电场线和等势面



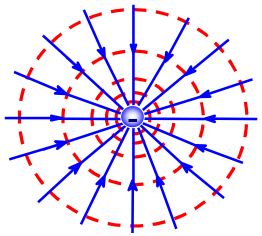
8.3 电势叠加原理

» 等势面和电场分布的关系：

> 等势面和电场线处处正交；

> 等势面越密集，电场强度越大，反之亦然；

点电荷的电场线与等势面



8.4 电势梯度

» 电场强度和电势之间有确定的数学关系，

» 电势等于电场强度在空间上的积分：

$$\varphi = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

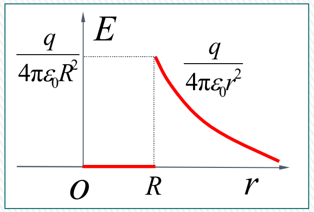
» 电场强度等于电势的梯度的负值：

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

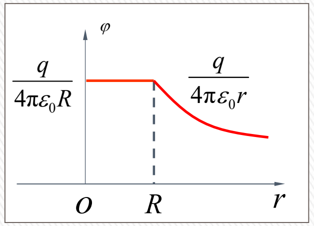
8.4 电势梯度

» 均匀带电球面的电场强度和电势的关系：

$$E = \begin{cases} 0 & , r < R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & , r \geq R \end{cases}$$



$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & , r \leq R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & , r > R \end{cases}$$

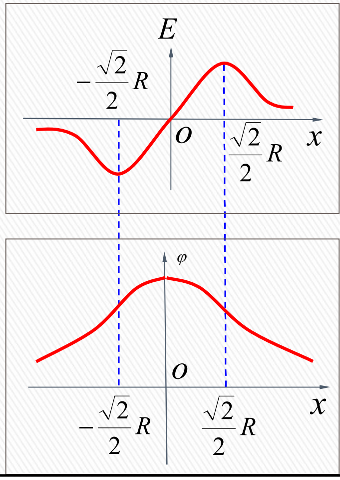


8.4 电势梯度

» 均匀带电圆环轴线上的电场强度和电势的关系：

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}$$



大学物理(1)

第 9 章

静电场中的导体

9.1 导体的静电平衡条件

» **导体：**

允许电荷在其内迅速、近似自由移动(导电)的物体，如：银、金、铜、铝等金属，掺杂后的半导体，无机盐溶液，等离子体等等。

» **电介质：**

电荷在其内几乎无法自由移动的物体，如：普通橡胶、聚乙烯、聚四氟乙烯、二氧化硅、硅油、纯水和干燥的空气等等。

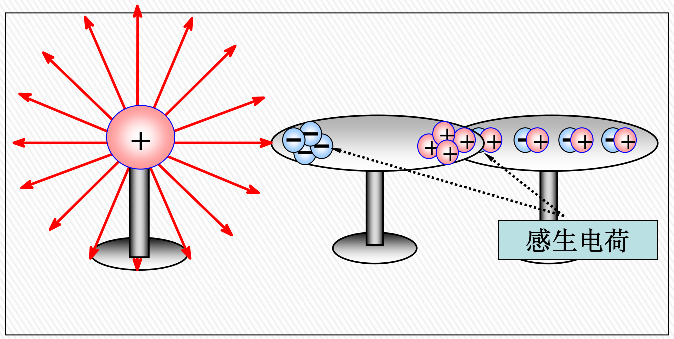
» **半导体：**

有一类物质很特殊，它们的纯净物性质接近绝缘体，但只要在其中掺入微量特殊物质将使其可以像导体那样导电。这样的物质称为半导体。

如：硅、锗和砷化镓等。

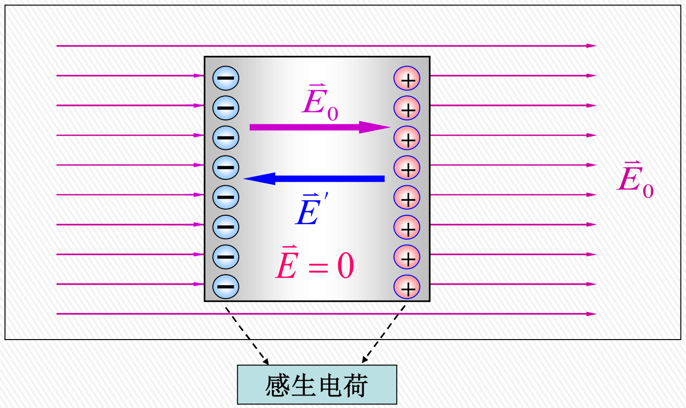
9.1 导体的静电平衡条件

» 静电感应：



9.1 导体的静电平衡条件

» 静电平衡：感生电荷的场强 $\vec{E}'$ 和 原场强 $\vec{E}_0$ 互相抵消，使得导体内部的合场强 $\vec{E}=0$ 。

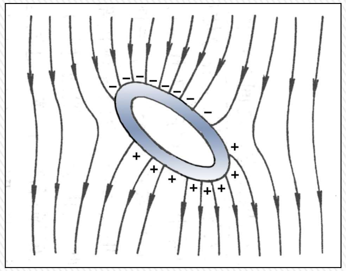


9.1 导体的静电平衡条件

» 静电平衡：

> 导体内部任何一点处的电场强度为零 ➜ **整个导体是一个等势体，导体表面是一个等势面**；

> 等势面和电场线永远垂直 ➜ **导体表面的电场强度的方向与导体表面垂直**。



9.2 静电平衡的导体上的电荷分布

第9章 静电场中的导体

» 处于静电平衡的导体具有如下性质：

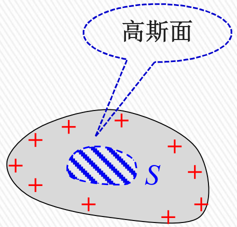
（1）导体**内部**各处的净余电荷为零，电荷只分布在导体表面；

证明：在导体内部任取一高斯面，

$\because \vec{E}=0$,

高斯定理：$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=0=\dfrac{q}{\varepsilon_0}$

$\therefore q=0$

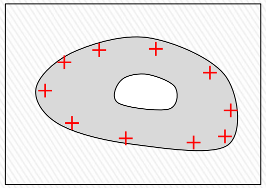


9.2 静电平衡的导体上的电荷分布

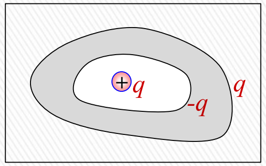
第9章 静电场中的导体

» 处于静电平衡的**空腔导体**的电荷分布：

◆ 空腔内无电荷时，电荷分布在外表面，内表面没有电荷。



◆ 空腔内有电荷 q 时，空腔内表面有感应电荷 $-q$，外表面有感应电荷 $+q$



9.3 有导体存在时静电场的分析与计算

第9章 静电场中的导体

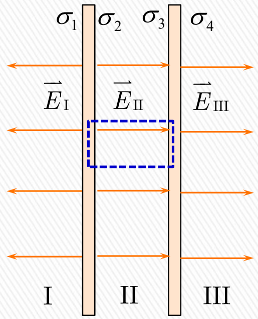
P286 例 9.1：有一大块金属平板，面积 S，带电量 Q，今在其附近平行地放置第二块大金属板，此板不带电。(1) 求静电平衡时，金属板上的电荷分布，及周围空间的电场强度分布；

(1) 解：由于静电平衡时导体内部无电荷，所以电荷只能分布在两块金属板的表面上。设 4 个表面上的电荷密度分别为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$，由电荷守恒定律可知：

$$\sigma_1+\sigma_2=\frac{Q}{S}\ ,\ \sigma_3+\sigma_4=0$$

作如图蓝色虚线所示的高斯面，可知通过该高斯面的电场强度通量为 0，根据高斯定理可得：

$$\sigma_2+\sigma_3=0$$



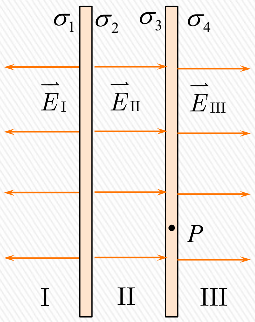
9.3 有导体存在时静电场的分析与计算

P286 例 9.1：有一大块金属平板，面积 S，带电量 Q，今在其附近平行地放置第二块大金属板，此板不带电。(1) 求静电平衡时，金属板上的电荷分布，及周围空间的电场强度分布；

(1) 解(续)：在金属板中任选一点 P，该点的场强为 4 个带电平面的场强之和，同时也为 0：

$$E_P=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0$$

$$\Rightarrow \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3-\sigma_4=0$$



联立以上方程解得：

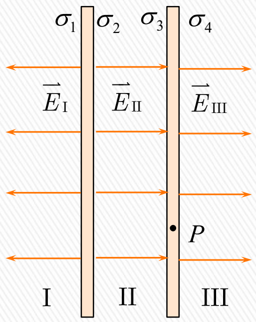
$$\sigma_1=\frac{Q}{2S},\ \sigma_2=\frac{Q}{2S},\ \sigma_3=-\frac{Q}{2S},\ \sigma_4=\frac{Q}{2S}$$

9.3 有导体存在时静电场的分析与计算

P286 例 9.1：有一大块金属平板，面积 S，带电量 Q，今在其附近平行地放置第二块大金属板，此板不带电。(1) 求静电平衡时，金属板上的电荷分布，及周围空间的电场强度分布；

(1) 解(续)：4 个带电平面的电荷密度分别为：

$$\sigma_1=\frac{Q}{2S},\ \sigma_2=\frac{Q}{2S},\ \sigma_3=-\frac{Q}{2S},\ \sigma_4=\frac{Q}{2S}$$



因此容易得 I、II、III 区的电场强度：

$$E_{\mathrm{I}}=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$，方向←

$$E_{\mathrm{II}}=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$，方向→

$$E_{\mathrm{III}}=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$，方向→

大学物理(1)

雲南大學

第 10 章

静电场中的电介质

什么叫做电介质

- 电介质即通常所说的绝缘体，其实并没有完全电绝缘的材料。
- 本章只讨论理想电介质，即内部完全没有自由电荷。
- 但把一块电介质放到电场中，它也要受到电场的影响，即发生电极化现象。
- 处于电极化状态的电介质也会影响原有电场的分布。

10.1 电介质对电场的影响

» 平行板电容器的两块板子分别带电 $+Q$ 和 $-Q$。

» 由前述章节分析可知，板子之间会产生静电场 $\vec{E}_0$，进而使得板子之间产生电势差 U_0。

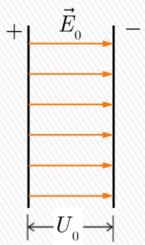
» 当板子之间是空气时，空气的电容率约等于**真空电容率** ε_0。

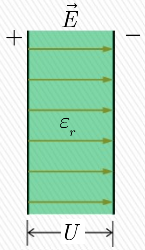
» 当板子之间插入电介质时，电场强度和电势差都变小了：

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}, \quad U = \frac{U_0}{\varepsilon_r}$$

» 这里 ε_r 是该绝缘体的**相对介电常量**(也叫**相对电容率**)，其**绝对电容率**为 $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$。

» 见 **P303 表 10.1** 。





10.3 电位移 *D* 的高斯定律

» **电位移 *D* 的高斯定理**：通过**任意闭合曲面**的**电位移通量**，等于该闭曲面包围的**自由电荷**的代数和。

$\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_0$， $\vec{D}$ 的单位为库伦每平方米$(\mathrm{C/m^2})$。

» **电位移 *D*** 和**电场强度 *E*** 的关系：

因为 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$，而 $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$

所以 $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

其中 $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$，称为电介质的介电常量，也叫做电容率。

P307 例 10.1：一个带正电的金属球，半径为 R，电量为 q，浸泡在相对电容率为 ε_r 的油中，求球外的电场分布 。

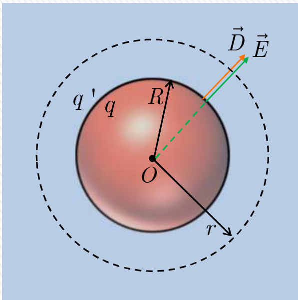
解：由于对称性的存在，金属球的电荷 q 和束缚电荷 q' 都是均匀分布的，电场强度 $\vec{E}$ 和电位移 $\vec{D}$ 的分布也都是球对称的。

在球面之外作一个半径为 r 的高斯面，应用 D 的高斯定理得：

$$\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = D \cdot 4\pi r^2 = q$$

$$\Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}$$

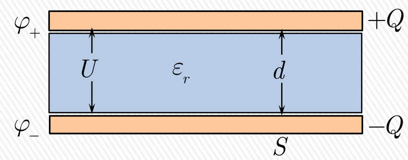


10.4 电容器和它的电容

» 电容是一种常用的电子元件，由两块用电介质隔开的金属导体组成。

» 电容器最基本的形式是**平行板电容器**，两端加上等量异号电荷 $\pm Q$，板间产生电压 $U = \varphi_+ - \varphi_-$，则它的电容为：

$$C = \frac{Q}{U}$$



» 电容器的电容大小只取决于它本身的结构，即导体形状、导体尺寸以及导体之间的电介质，与它所带的电量无关。

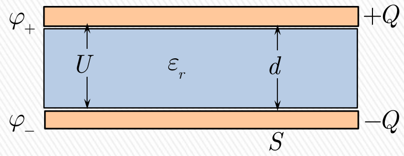
第10章 静电场中的电介质

10.4 电容器和它的电容

» **平行板电容器**的电容大小。(**任何形状的电容都是如此解法**)

(1) 给电容器的两极分别加上电荷 $\pm Q$，则两极之间的场强为：

$$E=\frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$



(2) 两极之间的电压为：

$$U=Ed=\frac{Qd}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$

(3) 电容大小为：$C_{\text{平行板}}=\dfrac{Q}{U}=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$

» 平行板电容器的大小正比于板的面积和电介质的电容率，反比于板间距离，与所带电量 $\pm Q$ 无关。

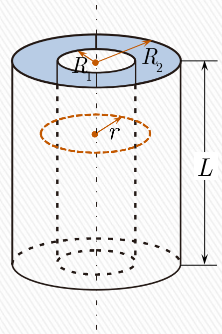
第10章 静电场中的电介质

10.4 电容器和它的电容

» **圆柱形电容器**由两个同轴的金属圆筒构成，筒的长度为 L，两筒的半径分别为 R_1 和 R_2，两筒之间填充相对电容率为 ε_r 的电介质。

(1) 给内外筒分别充以电荷 $\pm Q$，则它们的电荷线密度分别为 $\pm\lambda=\pm Q/L$，由高斯定理求得两筒之间的场强为

$$E=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r rL}$$



(2) 两筒之间的电压为：

$$U=\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r rL}\mathrm{d}r=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

(3) 电容大小为：$C_{\text{圆柱}}=\dfrac{Q}{U}=\dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln(R_2/R_1)}$

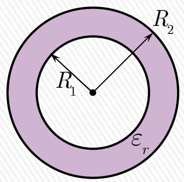
第10章 静电场中的电介质

10.4 电容器和它的电容

» **球形电容器**由两个同心金属球壳构成，球壳半径分别为 R_1 和 R_2，球壳之间填充相对电容率为 ε_r 的电介质。

» 用相同的方法可以求得其电容为

$$C_{\text{球形}}=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1R_2}{R_2-R_1}$$



电磁学篇，第11章 恒定电流

大学物理 (1)

云南大学

第 11 章

恒定电流

11.1 电流和电流密度

- 电流：带电粒子的定向运动称为**电流**。
- 载流子：形成电流的带电粒子称为**载流子**。
- 传导电流：导体中由电荷定向运动形成的电流称为**传导电流**。

导体类型	载流子类型
金属(比如铜)	电子
N 型半导体(比如掺入磷的硅)	电子
P 型半导体(比如掺入硼的硅)	空穴
液体(比如氯化钠水溶液)	正离子和负离子
气体(比如等离子体)	正离子、负离子和电子

11.1 电流和电流密度

- **电流强度**：单位时间内，通过导体某一横截面的电荷量，简称**电流**。

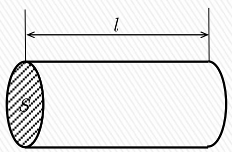
$$I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\text{，单位是安培，}1\ \mathrm{A}=1\ \mathrm{C/s}\text{。}$$

- **电流强度**是一个标量。
- **电流**是一个宏观的概念，当需要精确描述导体内部某个小区域的电流大小时，就显得过于粗略了。

11.3 欧姆定律和电阻

- 欧姆定律：导体两端的电势差 U 和通过它的电流 I 之间的关系：$U=I\cdot R$，其中 R 为导体的**电阻**，单位 欧姆 (Ω)。
- **电阻率** ρ：反映某种材料的导电性能的参数，如果将这种材料制作成形状规则、横截面积为 S、长度为 l 的导体，则其**电阻**和**电阻率**的关系为：

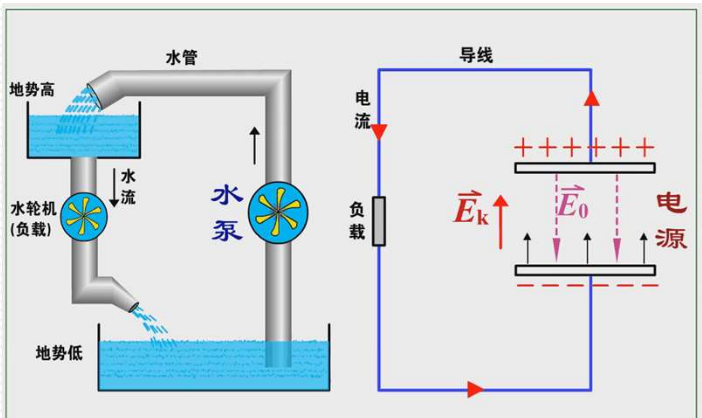
$$R=\frac{\rho l}{S}\quad\text{或者}\quad\rho=\frac{RS}{l}$$



- **电阻率**的单位为 Ω·m 。
- **电阻率**的倒数称之为**电导率**：

$$\sigma=\frac{1}{\rho}\text{，单位 西门子 }\mathrm{s}=\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$$

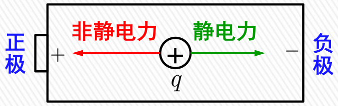
11.4 电动势



电源和水泵作用的类比

11.4 电动势

- 在电源内部，非静电力做功，将正电荷从电源的负极移动到正极。
- 不同的电源移动电荷的能力不同，我们用**电动势**来描述这种能力。
- 用 A_{ne} 来表示在电源内部，电量为 q 的正电荷从负极移动到正极的过程中，非静电力做的功，则该电源的**电动势**为：



$$\mathscr{E}=\frac{A_{\mathrm{ne}}}{q}$$

电动势的单位也是伏特(V)，其符号约定为：负极指向正极为正，反之为负。

- 在电源内部，非静电力和非静电场的关系为：

$$\vec{F}_{\mathrm{ne}}=q\vec{E}_{\mathrm{ne}}$$

大学物理(1)

云南大学

第 12 章

磁场和它的源

12.1 磁力与电荷的运动

- **磁场**

相对某参照系运动的电荷，在这个参照系看来，这个电荷在其周围空间中即会产生电场，也会产生磁场。

定向运动产生电流，恒定的电流产生恒定磁场，或者叫静磁场。

- **磁场的大小**

如何定量衡量磁场的大小呢？

12.2 磁场与磁感应强度

- **磁感应强度**：从实验可检验的角度出发，我们知道磁场会对处于其中的运动电荷产生作用力，通过大量的实验测量我们发现，这个力的大小和方向与磁感应强度之间有确定的、简单的关系：

$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$$

洛伦兹力公式

- 在 SI 单位制中磁感应强度的单位是特斯拉(T)，另外还用高斯(G)作为磁感应强度的单位。

$$1\ \mathrm{T}=10^4\ \mathrm{G}$$

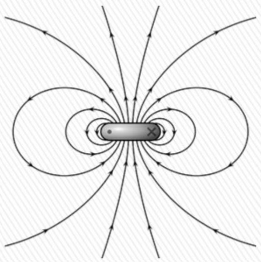
磁体类型	磁感应强度(T)
永磁体	0.01 - 0.5
电磁铁	0.5 - 10
地磁场	约5×10^{-5}
昆明的地磁场强度	约4.7×10^{-5}

12.2 磁场与磁感应强度

- 大量实验表明，**磁感应强度**也满足**叠加原理**。
- 多个磁场共同作用在某点时，该点的磁感应强度，等于各个磁场单独作用在该点的磁感应强度的矢量和：

$$\vec{B}=\sum_i \vec{B}_i$$

12.2 磁场与磁感应强度



- 与用电场线描绘电场类似，我们也可以用**磁感线**描绘磁场。
- 磁感线的**规定**：
  - 切线方向为磁感应强度的方向；
  - 疏密程度表示磁感应强度的大小。
- 磁感线的**特点**：
  - **无头无尾，闭合曲线**。
- 同时，引入**磁通量**的概念，即通过空间中某个曲面的磁感线的数量：

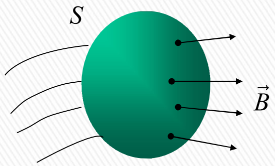
$$\Phi=\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

- **磁通量**的单位是**韦伯(Wb)**，$1\ \mathrm{Wb}=1\ \mathrm{T{\cdot}m^2}$。

12.2 磁场与磁感应强度

- **磁场的高斯定理**：穿过任意闭合曲面的磁通量等于零：

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$



- 磁场的高斯定理是麦克斯韦方程组中的其中一个。
- 其物理含义：磁场是**无源场**。

- **静电场的高斯定理**：穿过任意闭合曲面的电位移通量等于该曲面包围的电荷的代数和：

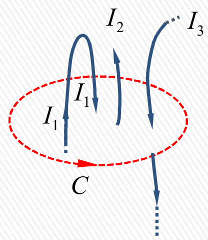
$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\sum q^{\mathrm{in}}$$

- 物理含义：静电场是**有源场**。

12.5 安培环路定理

- 磁场的**安培环路定理**：在**恒定电流磁场**中，磁感应强度沿**任一闭合路径 C** 的曲线积分，等于该路径所包围的电流强度代数和的乘以真空磁导率 μ_0：

$$\oint_C \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\mu_0\sum_i I_{\mathrm{in}}$$



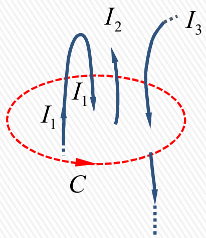
- 磁场的**安培环路定理**是麦克斯韦方程组中的其中一个。
- 该定理可以用来求解**对称**分布的电流的磁感应强度。

12.6 利用安培环路定理来求磁场的分布

» 跟**静电场**的**高斯定理**很相似，**磁场**的**安培环路定理**可以用来求解具有**对称性**的稳定磁场的磁感应强度。

» 求解磁感应强度时，要在电流周围作一个有方向的闭合回路 C，称之为**安培回路**。

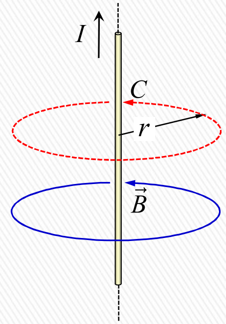
$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \sum_i I_{\text{in}}$$



例：无限长载流直导线，电流为 I，求其周围的磁场分布。

解：以导线为圆心，在其周围作一个半径为 r 的安培环路，环路的方向和电流的方向右手螺旋。则根据安培环路定理得：

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I$$



由于无限长直导线周围磁场的对称性，磁感应强度 $\vec{B}$ 的方向和安培环路的方向 $d\vec{r}$ 处处一致，因此

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \oint_C B\cdot dr$$

又因为对称性，安培环路上的磁感应强度大小处处一样，因此

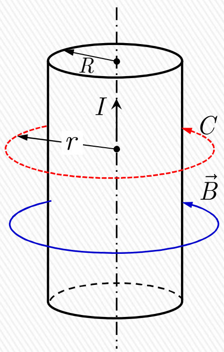
$$\oint_C B\cdot dr = B\cdot\oint_C dr = B\cdot 2\pi r$$

因此 $B\cdot 2\pi r = \mu_0 I \ \Rightarrow\ B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

P352 例 12.6：无限长**圆柱面电流**，轴向总电流为 I，半径为 R，求其周围的磁场分布。

解：以圆柱轴线为圆心，在其周围作一个半径为 r 的安培环路，环路的方向和电流的方向右手螺旋。则根据安培环路定理得：

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \sum I$$



由前述分析可得，$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = B\cdot 2\pi r$

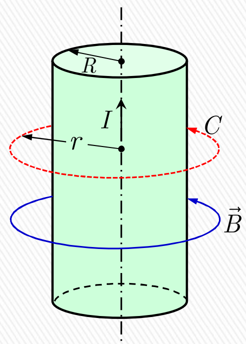
又有 $\sum I = \begin{cases} 0\,, & r < R \\ I\,, & r \geq R \end{cases}$

容易得：$B = \begin{cases} 0\,, & r < R \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\,, & r \geq R \end{cases}$

例：无限长**圆柱电流**，电流均匀分布，轴向总电流为 I，半径为 R，求其周围的磁场分布。

解：以圆柱轴线为圆心，作一半径为 r 的安培环路，则安培环路定理：

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \sum I$$

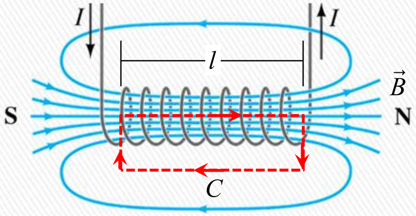


由前述分析可得，$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = B\cdot 2\pi r$

又有 $\sum I = \begin{cases} \dfrac{r^2}{R^2} I\,, & r < R \\ I\,, & r \geq R \end{cases}$

容易得：$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}\,, & r < R \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\,, & r \geq R \end{cases}$

P346 例 12.3：均匀密绕螺线管，绕线密度为 n，电流为 I，求其轴线上的磁场分布。



解：在螺线管上作如图的矩形安培环路。安培环路定理：

$$\oint_C \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 \sum I$$

其中

$$\oint_C \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{内} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{外} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{左} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{右} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{内} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

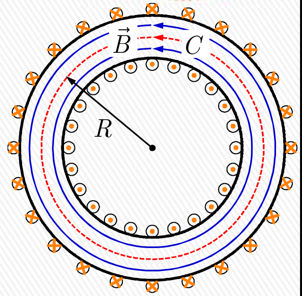
$$= B\cdot l$$

$$\mu_0 \sum I = \mu_0 \cdot nlI$$

容易得：$B = \mu_0 nI$

P353 例 12.7：如图所示**螺绕环**，管的轴线半径为 R，绕线匝数为 N，电流为 I，求线圈中的磁场。

解：对于螺绕环，可以认为其内部的磁感应强度为大小相等，方向右手螺旋，如右下图图蓝线所示。



在螺绕环内部作半径为 R 的安培环路，环路方向和磁感应强度方向一致，则安培环路定理：

$$\oint_C \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 \sum I$$

其中 $\oint_C \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = B\cdot 2\pi R\,,\ \sum I = NI$

容易得：$B = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi R} = \mu_0 nI$，$n$ 为绕线密度。

大学物理 (1)

雲南大學

第 13 章

磁力

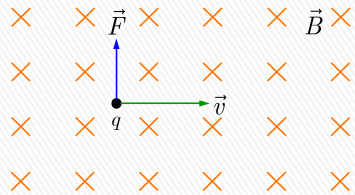
13.1 带电粒子在磁场中的运动

» **洛伦兹力**：带电粒子穿过磁场时，会受到一个作用力，这个力与粒子速度及磁感应强度的关系为：

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

» 一般说来，空间中还伴随着电场，因此，洛伦兹力公式的完整形式应为：

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$

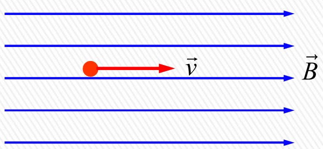


H. A. 洛伦兹
1853~1928

13.1 带电粒子在磁场中的运动

» 带电粒子**初始速度**方向**平行**于**磁场方向**：

> 此时，洛伦兹力 $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$ 的大小为 0，粒子不受磁场力，(在没有其它力的情况下) 保持原速度作匀速直线运动。



13.1 带电粒子在磁场中的运动

» 带电粒子**初始速度**方向**垂直**于**磁场方向**：

> 此时，洛伦兹力 $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$ 的大小为 $F=qvB$，方向永远垂直于初始速度 $\vec{v}$ 和磁场方向 $\vec{B}$ 。

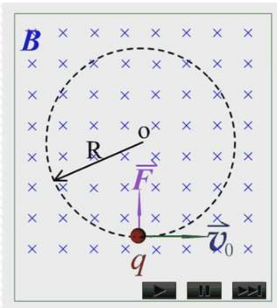
> 粒子作**匀速圆周运动**，**洛伦兹力**为**法向力**，只改变粒子运动方向，不改变速率大小。

» 通常把粒子的这种运动叫做**回旋**，其**回旋半径为**：

$$m\frac{v^2}{R}=qvB \Rightarrow R=\frac{mv}{qB}\ \text{正比于速率}\ v$$

» **回旋周期**为：

$$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi m}{qB}\ \text{常量}$$

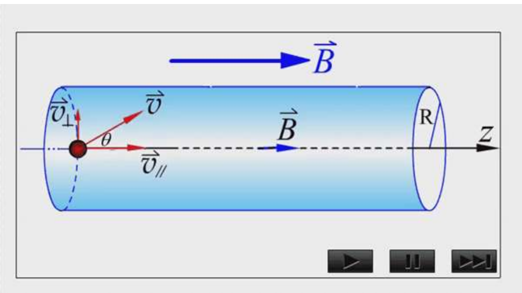


13.1 带电粒子在磁场中的运动

» 带电粒子**以角度 θ 倾斜进入**磁场：

> 此时，可以把带电粒子的初始速度 v 分解为水平分量 $v_{//}$ 和垂直分量 $v_{\perp}$ 。

> 水平分量使得带电粒子作**匀速直线运动**，垂直分量使得带电粒子作**匀速圆周运动**，**合起来**即**匀速螺旋运动**。



13.1 带电粒子在磁场中的运动

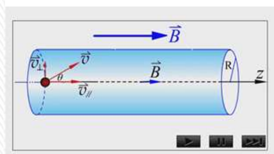
» 带电粒子**以角度 θ 倾斜进入**磁场，速度分解为垂直分量和水平分量：

$\vec{v}=\vec{v}_{//}+\vec{v}_{\perp}$ ， $v_{//}=v\cos\theta$ ， $v_{\perp}=v\sin\theta$

> **匀速螺旋运动**，螺旋半径和回旋周期由速率的垂直分量决定：

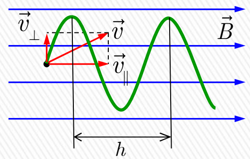
$R=\dfrac{mv_{\perp}}{qB}$，正比于速率的垂直分量

$T=\dfrac{2\pi m}{qB}$，常量



> 螺距由速率的水平分量和回旋周期共同决定：

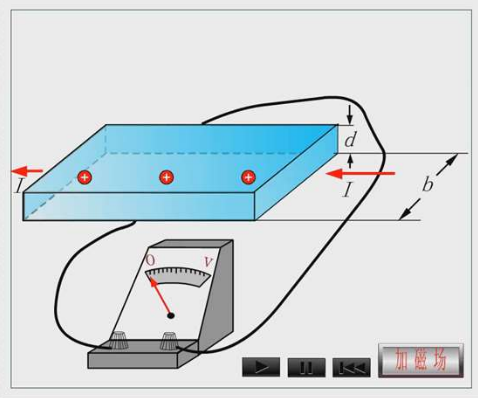
$$h=v_{\parallel}\cdot T=v_{\parallel}\frac{2\pi m}{qB}$$



第13章 磁力

13.2 霍尔效应

» 当载流导体处于磁场中时，导体中的电荷可能受到洛伦兹力影响而向导体一侧移动，使得导体两侧呈现出来一个小的电势差，这种现象被称为**霍尔效应**。

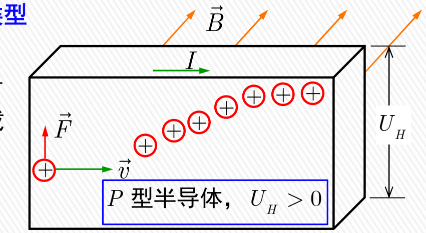


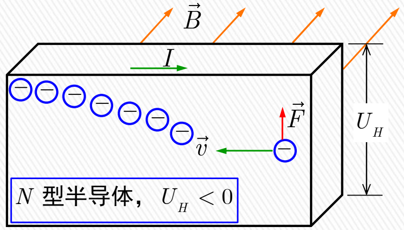
第13章 磁力

13.2 霍尔效应：判别半导体类型

» 半导体类型：P 型，载流子为带正电的空穴；N 型，载流子为带负电的电子；

» 不同类型的载流子呈现出来的霍尔电压是相反的，因此，可以通过霍尔电压的正负来判断半导体的类型。





第13章 磁力

13.3 载流导线在磁场中受的磁力

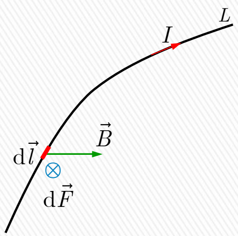
» 载流导线中的运动电荷受**洛伦兹力**作用，宏观上表现出导线在受力，此力称为**安培力**。

> 在导线上取一微元 dl，dl 受到的**安培力**为

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

> 整段导线受到的**安培力**为：

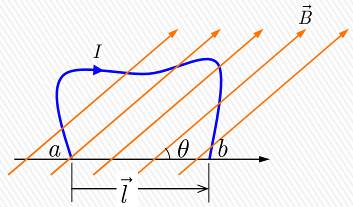
$$\vec{F} = \int_L I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$



第13章 磁力

P371 例 13.1：在均匀磁场 B 中有一段弯曲导线 ab，通有电流 I，求它所受的磁场力。

解：
$$\vec{F} = \int_{(a)}^{(b)} I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$
$$= I\left(\int_{(a)}^{(b)} \mathrm{d}\vec{l}\right) \times \vec{B}$$
$$= I\vec{l} \times \vec{B}$$



此力的大小为 $IlB\sin\theta$，方向为垂直纸面向外。

如果 a, b 两点重叠，则 $l = 0 \Rightarrow F = 0$，即**闭合线圈在匀强磁场中所受的磁力为 0** 。

但是，**磁力矩**未必为 0 。

13.4 载流线圈在匀强磁场中受的磁力矩

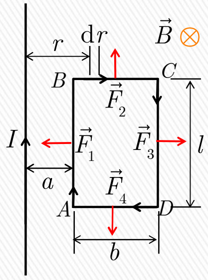
» 载流线圈在匀强磁场中所受的磁力矩为：

$$\vec{M}=\vec{m}\times\vec{B}$$

其中载流线圈的磁矩 $\vec{m}=I\vec{S}$

» 如果线圈有 N 匝，那么磁矩和磁力矩都相应地增大 N 倍。

习题 13.22：如图，在长直电流旁边放一矩形线圈与其共面，线圈各边分别平行和垂直于直导线。线圈长度 l，宽为 b，近边距直导线 a；长直导线中通有电流 I。当矩形线圈通有电流 I_1 时，它所受的磁力的大小和方向如何？它又受到多大的磁力矩？



解：长直导线在右侧产生的磁场为

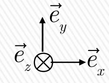
$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_z$$

AB 段所受的磁力为

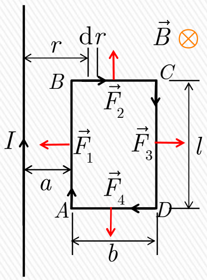
$$\vec{F}_1=I_1\vec{l}\times\vec{B}=I_1 l\vec{e}_y\times\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\vec{e}_z=-\frac{\mu_0 lII_1}{2\pi a}\vec{e}_x$$

CD 段所受的磁力为

$$\vec{F}_3=I_1\vec{l}\times\vec{B}=-I_1 l\vec{e}_y\times\frac{\mu_0 I}{2\pi(a+b)}\vec{e}_z=\frac{\mu_0 lII_1}{2\pi(a+b)}\vec{e}_x$$



习题 13.22：如图，在长直电流旁边放一矩形线圈与其共面，线圈各边分别平行和垂直于直导线。线圈长度 l，宽为 b，近边距直导线 a；长直导线中通有电流 I。当矩形线圈通有电流 I_1 时，它所受的磁力的大小和方向如何？它又受到多大的磁力矩？



解(续)：BC 段所受的磁力为

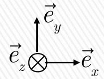
$$\vec{F}_2=\int_a^{a+b}I_1\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$$

$$=\int_a^{a+b}I_1\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathrm{d}r(\vec{e}_x\times\vec{e}_z)$$

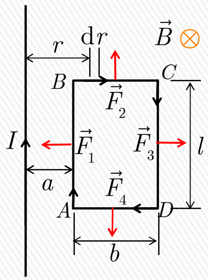
$$=\frac{\mu_0 II_1}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}\vec{e}_y$$

DA 段所受的磁力为

$$\vec{F}_4=-\vec{F}_3=-\frac{\mu_0 II_1}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}\vec{e}_y$$



习题 13.22：如图，在长直电流旁边放一矩形线圈与其共面，线圈各边分别平行和垂直于直导线。线圈长度 l，宽为 b，近边距直导线 a；长直导线中通有电流 I。当矩形线圈通有电流 I_1 时，它所受的磁力的大小和方向如何？它又受到多大的磁力矩？

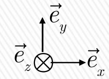


解(续)：线圈所受的合外磁力为

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4$$

$$=-\frac{\mu_0 lII_1}{2\pi a}\vec{e}_x+\frac{\mu_0 II_1}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}\vec{e}_y+\frac{\mu_0 lII_1}{2\pi\left(a+b\right)}\vec{e}_x-\frac{\mu_0 II_1}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}\vec{e}_y$$

$$=-\frac{\mu_0 lbII_1}{2\pi a\left(a+b\right)}\vec{e}_x$$

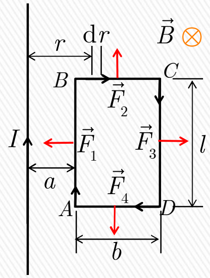


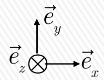
合外磁力矩为 0 。

习题 13.22：如图，在长直电流旁边放一矩形线圈与其共面，线圈各边分别平行和垂直于直导线。线圈长度 l，宽为 b，近边距直导线 a；长直导线中通有电流 I。当矩形线圈通有电流 I_1 时，它所受的磁力的大小和方向如何？它又受到多大的磁力矩？

解(续)：线圈所受的合外磁力为

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$
$$= -\frac{\mu_0 lII_1}{2\pi a}\vec{e}_x + \frac{\mu_0 II_1}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}\vec{e}_y + \frac{\mu_0 lII_1}{2\pi(a+b)}\vec{e}_x - \frac{\mu_0 II_1}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}\vec{e}_y$$
$$= -\frac{\mu_0 lbII_1}{2\pi a(a+b)}\vec{e}_x$$





合外磁力矩为 0 。

大学物理(1)

云南大学

第 14 章

磁场中的磁介质

14.1 磁介质对磁场的影响

» 与电场中的**电介质**类似，磁场中的**磁介质**也会改变磁场：

> 真空中的长直载流螺线管内部的磁场为：

$$B_0 = \mu_0 nI$$

> 保持电流不变，往螺线管中插入一根介质棒，则管内磁场变为：

$$B = \mu_r B_0 = \mu_0 \mu_r nI$$

> 其中，μ_r 称之为磁介质的**相对磁导率**。

> 不同材料的相对磁导率差别很大(**P 393**，**表 14.1**)。

14.1 磁介质对磁场的影响

» **抗磁质**，$\mu_r < 1$，水、氮、氢、汞、铜、铅、铋、银等。

» **顺磁质**，$\mu_r > 1$，空气、氧、一氧化氮、钠、铝、锰、铬、铂、钕、硫酸铜等。

» **铁磁质**，$\mu_r >> 1$，铁、钴、镍等金属，及它们与**稀土元素**的合金和它们的氧化物。

> 铁磁质对磁场的影响很大，在电工技术中有广泛的应用。

> 铁磁质的的磁化强度与外磁场之间具有特殊而复杂的关系，它们的 μ_r 不是常数，而是外加磁场的函数。

14.4 磁场强度 H 的环路定理

- 类似于**静电场**的**高斯定理**引入中间量**电位移 D**，**磁场**的**安培环路定理**引入中间量**磁场强度 H**。
- **磁场强度 H** 和**磁感应强度 B** 的关系为：

$$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0\mu_r},\quad \text{单位 A/m。}$$

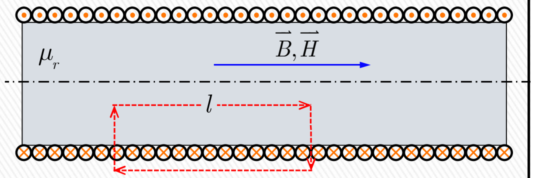
- 引入磁场强度的安培环路定理为：沿任一闭合路径的**磁场强度 H** 的积分等于该路径包围的自由电流的代数和，

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\sum I_{0,\text{in}}$$

P399 例 14.1：一无限长直螺线管，单位长度上的匝数为 n，管内充满相对磁导率为 μ_r 的磁介质。今在导线圈内通以电流 I，求管内磁感应强度。

解：作如图红色虚线框所示的安培环路，其宽度为 l。

H 的安培环路定理：



$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_{内}\vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\int_{外，左，右}\vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_{内}\vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=H\cdot l$$

$$=\sum I_{0,\text{in}}=l\cdot nI$$

解得：$H=nI$

因此 $B=\mu_0\mu_r H=\mu_0\mu_r nI$

大学物理 (1)

雲南大學

第 15 章

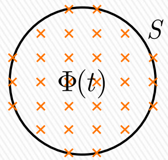
电磁感应

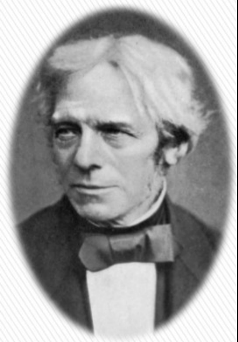
15.1 法拉第电磁感应定律

- 1820年，丹麦物理学家奥斯特的发现第一次揭示了电流能够产生磁场，之后法国物理学家安培和菲涅耳提出“磁场是否能激起电流？”
- 经过10年的研究，1831年8月29日，英国科学家法拉第第一次在实验中观察到：当穿过闭合线圈的磁通量改变时，线圈中会出现电流。
- 这一现象被称为**电磁感应**。
- **感应电动势**等于**磁通量对时间的变化率**的相反量：

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

其中 $\Phi=\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$





Michael Faraday
1791.9.22-1867.8.25

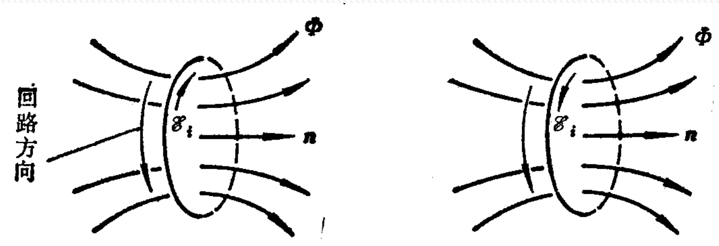
15.1 法拉第电磁感应定律

» **楞次定律**：闭合回路中**感应电流的方向**，总是使它所激发的磁场来**阻止**引起感应电流的磁通量的**变化**。

» **楞次定律**是**能量守恒定律**在电磁感应现象上的具体体现。

15.1 法拉第电磁感应定律

» 用**楞次定律**来判断感应电流方向：



(a) Φ为正值，$|\Phi|$增加，$\dfrac{d\Phi}{dt}>0$

(b) Φ为正值，$|\Phi|$减少，$\dfrac{d\Phi}{dt}<0$

15.1 法拉第电磁感应定律

» **全磁通和磁链**

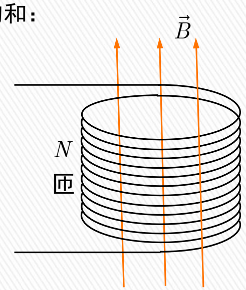
> 工程上使用的线圈通常不止一匝，而是许多匝。

> 这些线圈在电学上是串联的关系，因此，所有线圈总的感应电动势，等于每个线圈产生的感应电动势的和：

$$\mathscr{E} = -\left(\frac{d\Phi_1}{dt}+\frac{d\Phi_2}{dt}+\frac{d\Phi_3}{dt}+\cdots+\frac{d\Phi_N}{dt}\right)$$

$$= -\frac{d\sum_{i=1}^{N}\Phi_i}{dt}$$

$$= -\frac{d\Psi}{dt}$$



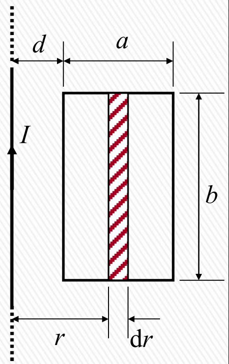
这里 $\Psi = \sum_{i=1}^{N}\Phi_i$ 称为**全磁通**，读作[psai :]。

如果每个线圈的磁通量相等，都是Φ，则：$\mathscr{E} = -N\dfrac{d\Phi}{dt}$

例：无限长直导线中通有随时间变化的电流 $I=\alpha t$，α 为大于 0 的常数。右侧放置一个刚性矩形线圈。试求：(1) 线圈中感应电动势的大小。(2) 如果线圈的内阻为 R，那么其中的电流 I_i 为多大，方向又如何？

(1) 解：无限长直导线周围的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}，方向\otimes$$



则线圈中的磁通量为：

$$\Phi=\int_s \vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_d^{a+d}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot b\cdot dr=\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\frac{a+d}{d}$$

$$\overset{代入I=\alpha t}{=}\frac{\mu_0\alpha tb}{2\pi}\ln\frac{a+d}{d}$$

感应电动势为：

$$\mathscr{E}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{\mu_0\alpha b}{2\pi}\ln\frac{a+d}{d}$$

例：无限长直导线中通有随时间变化的电流 $I=\alpha t$，α 为大于 0 的常数。右侧放置一个刚性矩形线圈。试求：(1) 线圈中感应电动势的大小。(2) 如果线圈的内阻为 R，那么其中的电流 I_i 为多大，方向又如何？

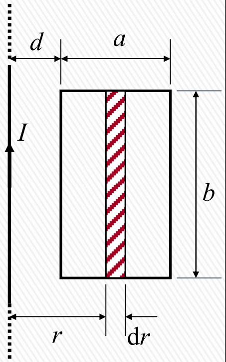
(2) 解：感应电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mu_0 \alpha b}{2\pi}\ln\frac{a+d}{d}$$

则线圈中的电流大小为：

$$I_i=\frac{|\mathscr{E}|}{R}=\frac{\mu_0 \alpha b}{2\pi R}\ln\frac{a+d}{d}$$

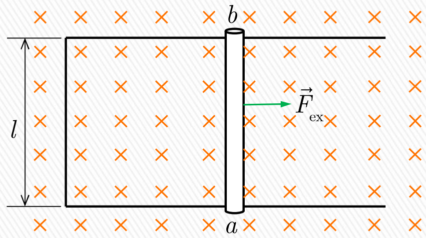
由楞次定律得，其方向为逆时针。



15.2 动生电动势

» 当导体在磁场中**切割磁力线**运动时，其两端会产生电动势，这一电动势称为**动生电动势**。

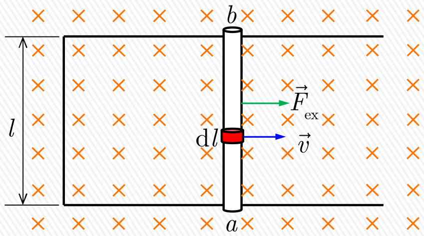
» 如图所示，在 U 型导体轨道上放置一根导线棒 ab，对导线棒施加外力 F_{ex}，F_{ex} 做功，导体内部带电粒子所受的**洛伦兹力**将外力所做的功**转换**为电能。



15.2 动生电动势

» 当导体在外力 F_{ex} 作用下达到速度 v 时，导体中的**动生电动势**为：

$$\mathscr{E}=\int_{(a)}^{(b)}(\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}\text{ ，} \mathrm{d}\vec{l}\text{ 的方向为 } a\to b\text{ 。}$$

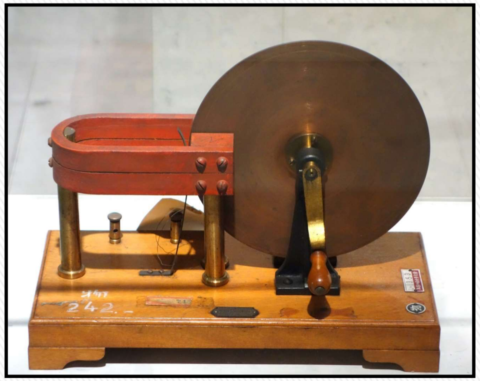


» 对于如图的均匀磁场、直导线棒以及速度与磁场方向垂直的情况，

$$\mathscr{E}=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{l}=vBl$$

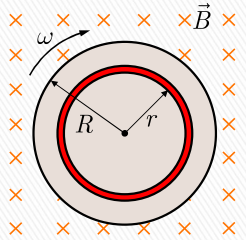
15.2 动生电动势

» 法拉第利用导体切割磁力线产生动生电动势的原理，发明了人类历史上第一台发电机——法拉第圆盘发电机。



例：法拉第圆盘发电机的半径为 R，在匀强磁场 B 中旋转，角速度为 ω，求该发电机的电动势。

解：在圆盘上取一个半径为 r、宽度为 $\mathrm{d}r$ 的环状微元，该微元对磁力线的切割效果是一致的。则该微元上的动生电动势为：

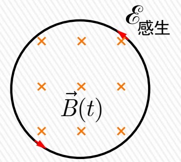


$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathscr{E} &= (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{r}\\ &= vB\cdot\mathrm{d}r\\ &= \omega rB\cdot\mathrm{d}r\end{aligned}$$

则整个圆盘的电动势为：

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= \int\mathrm{d}\mathscr{E}\\ &= \int_0^R \omega rB\cdot\mathrm{d}r\\ &= \frac{1}{2}\omega BR^2\end{aligned}$$

15.3 感生电动势和感生电场

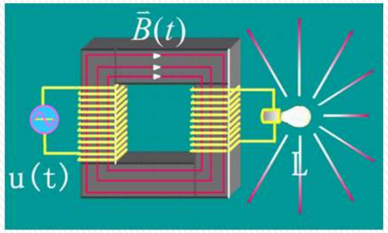


» **感生电动势**：如果导体回路不动，其中的磁场随时间发生变化，也会产生感应电动势，称为**感生电动势**。

» **交流变压器原理**：

> 变压器输入端的电压为

$u_{in}(t) = U_{in}\sin\omega t$



> 所产生的电流为：

$i_{in}(t) = I_{in}\cos\omega t$

> 该电流产生的磁通量为：

$\phi(t) = \Phi\cos\omega t$

> 输出端的感应电动势为：

$u_{out}(t) = U_{out}\sin\omega t$

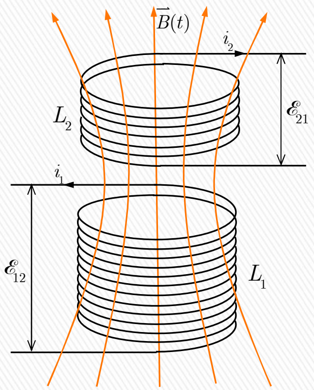
15.4 互感

» 一闭合导体回路，当其中的电流随时间变化时，它周围的磁场也随时间变化；

» 在它附近的另一导体回路受到影响，其中也会产生感生电动势，这种电动势叫做**互感电动势**。

» 这种现象叫做**互感**。

» 显然，两个导体的互感作用是对称的。



15.4 互感

» 当线圈 1 通有电流 i_1 时，线圈 2 受到影响，其中产生全磁通 $\Psi_{21} = M\cdot i_1$，其中 M 为线圈 L_1 和线圈 L_2 之间的**互感系数**。

» 互感系数的单位为 **亨利(H)**。

» 互感系数由两个线圈的几何形状、相对位置、各自匝数和磁介质决定，与它们的电流大小无关。

» 线圈 L_2 中的感生电动势为：

$$\mathscr{E}_{21} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

» 如果是线圈 L_2 通有电流 i_2，则线圈 L_1 中的感生电动势为：

$$\mathscr{E}_{12} = -M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$