云南大学 2019 秋季学期理工类本科 2018 级
《概率论与数理统计》考试题 B 卷参考答案及评分标准

一、 填空题(每空 2 分,共 20 分)

1、$\underline{0}$ 2、$\underline{\frac{7}{8}}$ 3、$\underline{N(b,a^2)}$ 4、$\underline{N(0,14)}$ 5、$\underline{48}$

6、$\underline{\frac{1}{5}}$ 7、$\underline{0.7}$ 8、$\underline{(1-p)^3+3p(1-p)}$ 或 $\underline{1-p^3}$ 9、$\underline{\chi^2(3)}$

或 $\underline{\Gamma\left(\frac{3}{2},2\right)}$ 10、$\underline{5}$

二、选择题(每题 2 分,共 20 分)

1、d 2、b 3、b 4、b 5、d

6、c 7、c 8、d 9、c 10、d

三、 证明:① (X,Y) 关于 X,Y 的边缘概率密度为:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^1 (2-x-y)\,dy=\frac{3}{2}-x & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$ **(2 分)**

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^1 (2-x-y)\,dx=\frac{3}{2}-y & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$ **(2 分)**

$$\because\quad f_X(x)\,f_Y(y)=\begin{cases}(\frac{3}{2}-x)(\frac{3}{2}-y) & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\ne f(x,y)$$ **(1 分)**

$\therefore$ X,Y 不相互独立。

又 $\because$ $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx=\int_0^1 x(\frac{3}{2}-x)\,dx=\frac{5}{12}$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy=\int_0^1 y(\frac{3}{2}-y)\,dy=\frac{5}{12}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 xy(2-x-y)dy=\frac{1}{6}$$ **(1 分)**

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_0^1 x^2(\frac{3}{2}-x)dx-(\frac{5}{12})^2=\frac{11}{144}$$ **(1 分)**

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\int_0^1 y^2(\frac{3}{2}-y)dy-(\frac{5}{12})^2=\frac{11}{144}$$ **(1 分)**

$\therefore\quad \rho_{XY}=\dfrac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\neq 0$ **(2 分)**

$\therefore\quad X$ **和** Y **相关。**

四、解：令事件 A **表示系统可靠，则：** $A=(A_1\cup B_1)(A_2\cup B_2)(A_3\cup B_3)$

(2 分) **因** $A_i, B_i(i=1,2,3)$ **相互独立，且** $P(A_i)=P(B_i)=r$ **故所求概率为：**

$$P(A)=P((A_1\cup B_1)(A_2\cup B_2)(A_3\cup B_3))$$ **(2 分)**

$$=\prod_{i=1}^{3}P(A_i\cup B_i)=\prod_{i=1}^{3}[P(A_i)+P(B_i)-P(A_i)P(B_i)]$$ **(2 分)**

$$=r^3(2-r)^3$$ **(4 分)**

五、解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy=1$ **有** $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A\exp\left[-(2x+y)\right]dxdy=1$

得 $A=2$ **(4 分)**

(2) $\because\ P\{Y\geq X\}=1-P\{Y\leq X\}$

满足条件 $Y\leq X$ **在** xOy **平面上为平面上直线** $y=x$ **及其下方的区域** G

$$\therefore\ P(Y\leq X)=P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_0^{\infty}\int_y^{\infty} 2\exp\left[-(2x+y)\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{3}$$ **(4 分)**

故 $P\{Y \ge X\} = 1 - P\{Y \le X\} = \frac{2}{3}$ **(2 分)**

六、∵ $X_i \sim N(20,3)$ $(i = 1,2,\ldots 10)$ $Y_j \sim N(20,3)$ $(j = 1,2,\ldots,15)$

$\therefore$ $\overline{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i \sim N(20, \frac{3}{10})$ **(1 分)** $\overline{Y} = \frac{1}{15}\sum_{j=1}^{15} Y_j \sim N(20, \frac{3}{15})$ **(1 分)**

$\therefore$ $\overline{X} - \overline{Y} \sim N(0, \frac{1}{2})$ 或 $\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sim N(0,1)$ **(2 分)**

所求概率为:

$P\{|\overline{X} - \overline{Y}| > 0.3\} = P\{\overline{X} - \overline{Y} > 0.3\} + P\{\overline{X} - \overline{Y} < -0.3\}$ **(2 分)**

$$= 1 - P\left\{\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \le 0.3\sqrt{2}\right\} + P\left\{\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} < -0.3\sqrt{2}\right\}$$

$= 1 - \Phi(0.3\sqrt{2}) + \Phi(-0.3\sqrt{2})$

$= 2\left[1 - \Phi(0.3\sqrt{2})\right]$ **(2 分)**

$= 0.6744$ **(2 分)**

七、 **总体 X 的一阶、二阶矩为:**

$\mu_1 = E(X) = \mu$ ① **(2 分)**

$\mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \sigma^2 + \mu^2$

即 $\mu_2 = \sigma^2 + \mu^2$ ② **(2 分)**

由 ①、② 联立求得 $\mu = \mu_1$ $\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2$ **(2 分)**

由于总体的 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)$ 与样本的 k 阶矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 的关系为

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P} \mu_k \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

$\therefore$ 分别以样本的一阶、二阶矩 A_1, A_2 代替总体的一阶、二阶矩 μ_1, μ_2，

得未知参数 μ 和 σ^2 的矩估计量为:

$$\hat{\mu} = A_1 = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

即未知参数 μ 和 σ^2 的矩估计量为:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$ (2 分)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$ (2 分)

八、$\because$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$\therefore$ $\int_0^1 (ax+b)\,dx = 1$ 即: $\frac{1}{2}a + b = 1$ ① (4 分)

由 $E(X) = \frac{1}{3}$ 得: $\int_0^1 x(ax+b)dx = \frac{1}{3}$

即: $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{3}$ ② (2 分)

联立①、②求解得: $a = -2, b = 2$ (4 分)