云南大学2020秋季学期理工类本科2019级

《概率论与数理统计》考试题B卷参考答案及评分标准

一、 填空题(每空2分,共20分)

1、$\underline{\frac{3}{5}}$　2、$\underline{\frac{1}{3}}$　3、$\underline{N(0,13)}$　4、$\underline{\rho=0}$　5、$\underline{N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)}$

6、$\underline{\frac{4}{5}}$　7、$\underline{\frac{2}{3}}$　8、$\underline{\chi^2(1)}$　9、$\underline{10}$　10、$\underline{36}$

二、选择题(每题2分,共20分)

1、B　2、A　3、C　4、C　5、A

6、D　7、A　8、B　9、D　10、D

三、证明:(1)

(X,Y) 关于 X,Y 的边缘概率密度为:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & -1\le x\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$　(1分)

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1\le y\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$　(1分)

$\because$ $$f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1\le x\le 1,-1\le y\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}\neq f(x,y)$$　(3分)

$\therefore$ X,Y 不相互独立。

(2) 又$\because$ $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{2}{\pi}x\sqrt{1-x^2}\,dx=0$$　(1分)

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_{-1}^{1}\frac{2}{\pi}y\sqrt{1-y^2}\,dy=0$$　(1分)

$$E(XY)=\iint_{x^2+y^2\le 1}xyf(x,y)dxdy=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\cos\theta\times r\sin\theta dr=0$$　(1分)

$\therefore \quad \rho_{XY} = \dfrac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = 0$ [注： $D(X)$ 和 D(Y)均不为 0]

$\therefore$ X,Y 不相关。 (2 分)

四、解：令事件 A 表示系统可靠性，则：$A=(A_1A_2\dots A_n)\cup(B_1B_2\dots B_n)$ (2 分) 因 $A_i,B_i(i=1,2,\dots n)$ 相互独立，且 $P(A_i)=P(B_i)=r$ 故所求概率为：

$$P(A)=P((A_1A_2\dots A_n)\cup(B_1B_2\dots B_n)) \quad \text{(2 分)}$$

$$= P(A_1A_2\dots A_n)+P(B_1B_2\dots B_n)-P(A_1A_2\dots A_nB_1B_2\dots B_n) \quad \text{(2 分)}$$

$$= r^n(2-r^n) \quad \text{(4 分)}$$

五、(1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy=1$ 有 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A\exp\left[-(2x+y)\right]dxdy=1$

得 $A=2$ (4 分)

(2) 满足条件 $Y\le X$ 在 xOy 平面上为平面上直线 $y=x$ 及其下方的区域 G

故 $P(Y\le X)=P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy$

$$=\int_0^{\infty}\int_y^{\infty} 2\exp\left[-(2x+y)\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{3} \quad \text{(6 分)}$$

六、 $\because$ $X_i\sim N(20,3)$ $(i=1,2,\dots 10)$ $Y_j\sim N(20,3)$ $(j=1,2,\dots,15)$

$$\therefore \quad \overline{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i\sim N(20,\frac{3}{10}) \quad \text{(1 分)}$$

$$\overline{Y}=\frac{1}{15}\sum_{j=1}^{15}Y_j\sim N(20,\frac{3}{15}) \quad \text{(1 分)}$$

$\therefore$ $\overline{X}-\overline{Y}\sim N(0,\frac{1}{2})$ 或 $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sim N(0,1)$ (2 分) 所求概率为：

$$P\{|\overline{X}-\overline{Y}|<0.3\}=P\{-0.3<\overline{X}-\overline{Y}<0.3\}$$ (2 分)

$$=P\left\{-0.3\sqrt{2}<\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}<0.3\sqrt{2}\right\}=\Phi(0.3\sqrt{2})-\Phi(-0.3\sqrt{2})$$

$$=2\Phi(0.3\sqrt{2})-1$$ (2 分)

$$=0.3256$$ (2 分)

或： $P\{|\overline{X}-\overline{Y}|<0.3\}=1-\left[P\{|\overline{X}-\overline{Y}|\}>0.3\right]$ (2 分)

$=1-[P\{\overline{X}-\overline{Y}>0.3\}+P\{\overline{X}-\overline{Y}<-0.3]$ (2 分)

$=1-2(1-\Phi(0.4242))=0.3256$ (2 分)

七、总体 X 的一阶、二阶矩为：

$$\mu_1=E(X)=\frac{a+b}{2} \quad ①$$ (2 分)

$$\mu_2=E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\frac{(b-a)^2}{12}+\frac{(a+b)^2}{4} \quad ②$$ (2 分)

由 ①、② 联立求得

$$a=\mu_1-\sqrt{3(\mu_2-\mu_1^2)} \qquad b=\mu_1+\sqrt{3(\mu_2-\mu_1^2)}$$ (2 分)

由于总体的 k 阶矩 $\mu_k=E(X^k)$ 与样本的 k 阶矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 的关系为

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\xrightarrow{P}\mu_k \qquad k=1,2,\ldots.$$

$\therefore$ 分别以样本的一阶、二阶矩 A_1,A_2 代替总体的一阶、二阶矩 μ_1,μ_2，

得未知参数 a 和 b 的矩估计量为：

$$\hat{a}=A_1-\sqrt{3(A_2-A_1^2)}=\overline{X}-\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$ (2 分)

$$\hat{b}=A_1+\sqrt{3(A_2-A_1^2)}=\overline{X}+\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$ (2 分)

即未知参数 a 和 b 的矩估计量为:

$$\hat{a}=\overline{X}-\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$

$$\hat{b}=\overline{X}+\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$

八、$\because \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$

$\therefore \int_0^1(ax^2+bx+c)\,dx=1$ 即: $\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=1$ ① (2 分)

由 $E(X)=\frac{1}{2}$ 得: $\int_0^1 x(ax^2+bx+c)dx=\frac{1}{2}$

即: $\frac{1}{4}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{2}c=\frac{1}{2}$ ② (2 分)

由 $D(X)=E(x^2)-[E(x)]^2=\frac{3}{20}$ 得 $\int_0^1 x^2(ax^2+bx+c)dx=\frac{2}{5}$

即: $\frac{1}{5}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{3}c=\frac{2}{5}$ ③ (2 分)

联立①、②、③求解得: $a=12, b=-12, c=3$ (4 分)