概率论中，需要记忆的公式和定理

第二章 随机变量的分布

二项分布

$$ P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n $$

$$ E(X) = np, \quad D(X) = np(1-p) $$

泊松分布

$$ P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots $$

$$ E(X) = D(X) = \lambda $$

平均分布

$$ f(x) = \frac{1}{b-a} $$

$$ EX = \frac{a + b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b - a)^2}{12} $$

指数分布

$$ f(x) = \lambda e^{-\lambda x} $$

$$ EX = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2} $$

正态分布

$$ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} $$

$$ EX = \mu, \quad D(X) = \sigma^2 $$

正态分布的性质

$$ \quad f(x) = \frac{1}{\delta} , \varphi\left(\frac{x - \mu}{\delta} \right) $$

$$ \quad F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\delta} \right) $$

$$ \quad P\left(a \leq x \leq b \right) = P\left(\frac{a - \mu}{\delta} \leq z \leq \frac{b - \mu}{\delta} \right) $$

标准正态分布与其性质

$$ X \sim N(0, 1) $$

$$ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} $$

$\varphi(x)$ 是标准正态函数的概率密度函数

$\phi(x)$ 是标准正态函数的累积分布函数

性质I $$ \varphi(x) = \varphi(-x) $$

性质II

$$ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) $$

性质III

$$ P\bigl(|X| < x\bigr) = 2,\Phi(x) - 1 $$

性质IV

$$ \Phi(0) = 1 - \Phi(0) $$

随机变量函数的分布

结论 I:

均匀分布，且Y是X的线性变换

$$ X \sim U(a, b), \quad Y = \alpha X + d \Rightarrow Y \sim U(\alpha a + d, \alpha b + d) $$

结论 II:

正态分布，且Y是X的线性变换

$$ X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad Y = \alpha X + \beta \Rightarrow Y \sim N(\alpha \mu + \beta, \alpha^2 \sigma^2) $$

结论 III:

标准正态分布，且Y是X的标准化

$$ X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \Rightarrow Y \sim N(0, 1) $$

结论 IV:

当$y=g(x)$单调可微时：

$$ f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot \left| (h'(y)) \right| & \text{if } y \in h(\text{Dom}_X) \ 0 & \text{else} \end{cases} $$

其中h是$y=g(x)$的反函数，$h'(y)$是h的导数。

第三章 XY的联合分布函数

性质

$$ F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0,\quad F(+\infty, +\infty) = 1 $$

$$ x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1, y) \leq F(x_2, y), \quad y_1 < y_2 \Rightarrow F(x, y_1) \leq F(x, y_2) $$

$$ P(x_1 < X \leq x_2,\ y_1 < Y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) $$

$$ P(x_1 < X \leq x_2) = \lim_{y \to +\infty} \left[F(x_2, y) - F(x_1, y)\right] $$

边缘密度函数

和二重积分类似，$f_X(x)$取定x为定值时，所有Y取值相加的概率密度

可以看一下圆的那个例题

$$ f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) , dy $$ $$ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) , dx $$

3.5 两个随机变量函数的分布（连续型）

第四章

方差与期望

$$ D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 $$

$$ E(aX + b) = aE(X) + b $$

$$ D(aX + b) = a^2 D(X) $$

$$ E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y) $$

若XY独立，有:

$$ \quad E(XY) = E(X) \cdot E(Y) $$

$$ \quad D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) $$

协方差与相关系数

$$ E(XY) = E(X)E(Y) + \text{Cov}(X, Y) $$

$$ E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy \cdot f_{X,Y}(x, y) , dx , dy $$

$$ \rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} $$

判断独立和相关

相关不一定独立，但独立一定相关

第五章

切比雪夫不等式

$$ P\left(|X - EX| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\operatorname D(X)}{\varepsilon^2} $$

大数定律

法则	条件	收敛类型	适用范围
伯努利大数定律	独立同分布 + 伯努利变量	依概率收敛	特例
切比雪夫大数定律	有限方差 + 两两不相关	依概率收敛	宽泛
辛钦大数定律	**仅需独立同分布** + $E[X]<\infty$	**几乎处处收敛（更强）**	非常常用

伯努利大数定律：进行无穷次实验，最终频率趋近于概率

切比雪夫大数定律：样本均值趋近于期望

辛钦大数定律：样本均值几乎必然趋近于期望值

中心极限定理

1. 假设X1, X2, ..., Xn是独立同分布的随机变量，且其方差和期望存在，则这些随机变量标准化后求和符合标准正态分布

2. 对于独立同分布的随机变量，有

$$ \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(nE(X), nD(X)\right) $$

即

$$ \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)

$$

例题：在一次搜索救援行动中，每名志愿者在每次任务中成功搜救到的人数是一个随机变量，期望为 3 人，方差为 2.25。 现有 120 名志愿者参与任务，求他们总共成功搜救人数在 340 到 380 人之间的概率。 3. 拉普拉斯定理

进行n重伯努利实验，成功概率为p，当n趋近于无穷大时，成功次数的分布趋近于正态分布。即：

$$ X \sim B(n, p) \Rightarrow N(np, np(1-p)) $$

正态分布标准化

假设 X ~ N(μ, σ²)，则$a \leq X \leq b$ 的概率可以通过标准化转换为$\Phi(\frac{b - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a - \mu}{\sigma})$来计算。

第六章

统计量

常用统计量

1. 样本均值

$$ \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i $$ 2. 样本方差

$$ S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 $$ 3. 样本标准差

$$ S = \sqrt{S^2} $$ 4. 样本k阶原点矩

$$ A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i)^k $$ 5. 样本k阶中心矩

$$ B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^k $$ 6. 顺序（次序）统计量

$$ X_{(k)} = \text{第 } k \text{ 小的样本值} $$

相当于将样本重新由小到大排序后取第k个值，第1个样本最小，第n个样本最大

极差：$X_{(n)} - X_{(1)}$ 7. 经验分布函数

不理解这特么是个啥

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq X_{(1)} \ \frac{k}{n}, & X_{(k)} < x \leq X_{(k+1)},\quad k = 1, 2, \dots, n-1 \ 1, & x > X_{(n)} \end{cases} $$

统计量的性质

$$ E(\bar{X}) = \mu, \quad $$ $$D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} $$ $$ E(S^2) = \sigma^2, \quad $$

$$ S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 $$

卡方分布

n个随机变量服从正态分布，则它们的平方和X服从自由度为n的卡方分布，EX = n，DX = 2n。

有

$$ \chi(X+Y) = \chi(X) + \chi(Y) $$

t分布

X服从标准正态分布，Y服从自由度为n的卡方分布，则

$$\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从自由度为n的t分布。

F分布 ***

矩估计

通过一阶原点矩和二阶原点矩来估计总体中的参数

总体

一阶原点矩

$$ EX $$

二阶原点矩

$$ E(X^2) $$

样本

一阶原点矩

$$ A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} $$

二阶原点矩

$$ A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 $$

通过两个原点矩相等来估计总体中未知参数

点估计

使用最大似然估计

其工作原理是将联合概率密度函数作为参数的函数建模，构造似然函数，求导使其最大

简单来说就是将联合概率密度函数求导，结果为0时求出参数的值即可

区间估计