康普顿效应中的微分散射截面

杨蕴玠　李秀芬
（乐山师范学院 物理系，四川 乐山 614004）

摘　要：介绍从康普顿矩阵元出发计算电子—光子康普顿微分散射截面的具体方法，并给出在低能极限下的经典近似。

关键词：散射；跃迁几率；微分截面；传播四维矢；极化矢量
中图分类号：O.571.41+8　文献标识码：A

关于电子——光子康普顿微分散射截面，在一般量子电动力学[2]，粒子物理[1]教材中，只给出了结果，未给出推导，这不利于学生对康普顿微分散射截面的物理意义的深入理解，而式中 $r_0=\frac{e^2}{4\pi mc^2}$ 及 $a=\frac{e^2}{4\pi c\epsilon_0 h}$ 的出现，也只有通过推导才能解释清楚。下面首先从康普顿散射矩阵元出发，对电子—光子康普顿微分散射截面进行推导，然后给出它的经典近似。

1　跃迁几率的计算

考虑一个封闭在大立方体体积V中的光子被一个电子的康普顿散射：令光子和电子的初态传播四维矢为 $\vec{k}_i$ 和 $\vec{p}_i$，末态传播四维矢为 $\vec{k}_f$ 和 $\vec{p}_f$。只有形式为 $A_+\bar{\Psi}_+\Psi_-A_-$ 的一些项才会对康普顿幅有贡献，因为只有两种联接光子线和电子线的方式，因此有贡献的费因曼图只有两个，它们相应于对矩阵元有贡献的两项。这个过程最低阶的康普顿散射矩阵元为

$$<f|s|i>=(2\pi)^4\delta(p_i+k_i-p_f-k_f)\frac{(-e^2)}{v^2}\left(\frac{m^2}{4E_fE_i\omega_f\omega_i}\right)^{\frac{1}{2}}A$$

其中 $\omega_i\omega_f$ 是实验室系中光子初态和末态的能量，E_iE_f 是电子的初态和末态的能量，A称为康普顿散射幅。

1.1　跃迁几率

系统从初态i到末态f的跃迁总几率为

$$|<f|s|i>|^2=(2\pi)^8[\delta(p_i+k_i-p_f-k_f)]^2\frac{e^4}{4V^2}\frac{m^2}{E_fE_i\omega_f\omega_i}|A|^2 \tag{1}$$

康普顿散射的特点：初态电子可以看着静止，末态电子的反冲很小，有

$$\vec{p}_i=0\quad p_f^2<<1\quad E_i=E_f=m$$

$$[(2\pi)^8\delta(p_i+k_1-p_f-k_f)]^2=(2\pi)^4\delta(p_i+k_i-p_f-k_f)TV$$

式中T表示一个很大的时间间隔，碰撞就是在这一时间间隔中发生的。

单位时间的跃迁几率即跃迁率为：

$$W_{fi}=\frac{|<f|s|i>|^2}{T}=(2\pi)^4\delta(p_i+k_i-p_f-k_f)\frac{e^4}{4V^3}\frac{1}{\omega_i\omega_f}|A|^2 \tag{2}$$

收稿日期：2000-02-04
作者简介：杨蕴玠（1950年），男，四川乐山人，乐山师院物理系副教授。

在 $\vec{p}_f \to \vec{p}_f + d\vec{p}_f \quad \vec{k}_f \to \vec{k}_f \to d\vec{k}_f$ 这个动量范围的状态数为

$$\frac{V}{(2\pi)^6} d^3\vec{p}_f d^3\vec{k}_f$$

所以跃迁到该动量范围的跃迁率为

$$dw = W_{fi} d^3\vec{p}_f d^3\vec{k}_f \frac{V^2}{(2\pi)^6} = \frac{e^4}{(2\pi)^4 4V} \delta(p_i + k_i - p_f - k_f) \frac{|A|^2}{\omega_i \omega_f} d^3\vec{p}_f d^3\vec{k}_f$$

1.2 光子到方位角(θ,Φ)附近立体角元 dΩ 的跃迁率

$$dw = \int d^3\vec{p}_f \int \omega_f^2 d\omega_f d\Omega \frac{e^4}{(2\pi)^4 4V} \delta(p_i + k_i - p_f - k_f) \frac{|A|^2}{\omega_i \omega_f}$$

$$= \frac{e^4 d\Omega}{(2\pi)^2 4V} \int d\omega_f \frac{\omega_f}{\omega_i} \delta(E_i + \omega_i - E_f - \omega_f) |A|^2$$

$$dw = \frac{e^4 d\Omega}{(2\pi)^2 4V} \frac{\omega_f}{\omega_i} \left[\frac{\partial \omega_f}{\partial(E_f + \omega_f)}\right]_{\theta\varphi} |A|^2 \tag{3}$$

$\omega_f + E_f =$ 总能量

由能量守恒 $\quad E_f + \omega_f = m + \omega_i \tag{4}$

由动量守恒 $\quad \vec{p}_f + \vec{k}_f = \vec{k}_i \tag{5}$

即 $\quad E_f^2 = m^2 + (\vec{k}_f - \vec{k}_i)^2 = m^2 + \omega_i^2 + \omega_f^2 - 2\omega_i \omega_f \cos\theta$

$$\therefore \quad \left[\frac{\partial(\omega_f + E_f)}{\partial \omega_f}\right]_{\theta\varphi} = \frac{1}{E_f}(E_f + \omega_f - \omega_i \cos\theta)$$

将 $p_i - k_f = p_f - k_i$ 平方，且 $p^2 = -m^2$ 有

$$\omega_f = \frac{m\omega_i}{m + \omega_i(1 - \cos\theta)} \tag{6}$$

$$\therefore \quad E_f + \omega_f - \omega_i \cos\theta = \frac{m\omega_i}{\omega_f} \tag{7}$$

$$\left[\frac{\partial(\omega_f + E_f)}{\partial \omega_f}\right]_{\theta\varphi} = \frac{m\omega_i}{E_f \omega_f}$$

由于 $m \approx E$，故光子到达方位角(θ,Φ)附近立体角元 dΩ 的跃迁几率

$$dw = \frac{d\Omega}{(2\pi)^2 V} \frac{\omega_f^2}{\omega_i^2} \frac{e^2}{4} |A|^2$$

2 微分散射截面的计算

$$\because \quad dw = \frac{V_{rel}}{V} d\sigma(\theta) \tag{8}$$

$$\therefore \quad \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{\omega_f^2}{\omega_i^2} \frac{1}{V_{rel}} |A|^2$$

入射粒子为光子，$V_{rel} = C = 1$，则康普顿微分散射截面为

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{\omega_f^2}{\omega_i^2} |A|^2 \tag{9}$$

式中 A 称为康普顿散射幅。对初态的电子自旋，末态的光子极化求平均；末态的电子自旋，光子极化求和

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{\omega_f^2}{\omega_i^2} \sum_{sp_i} \sum_{sp_f} |A|^2 \tag{10}$$

$$A \equiv \bar{u}_s(\vec{p}_f)\left(\not{\varepsilon}_n \frac{1}{p_i + k_i - im} \varepsilon \backslash - m + \not{\varepsilon}_m \frac{1}{p_i - k_f - im} \not{\varepsilon}_n\right) u_r(\vec{p}_i) \tag{11}$$

2.1 康普顿散射幅

$\because \quad p_i^2 = -m^2, k_i^2 = 0, \vec{p}_i = 0$

对于 ϵ_i, ϵ_f 都有 $\vec{p}_i = 0; \varepsilon^{(1)} = (\vec{\varepsilon}^{(1)}, 0)$

$$\varepsilon^{(2)}=(\vec{\varepsilon}^{(2)},0)\quad \varepsilon^{(3)}=(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|},0)\quad \varepsilon_4=(0,i)$$

$$\{\not{\varepsilon}_i\not{k}_i\}=2(\varepsilon_i k_i)=2\vec{\varepsilon}_i\cdot\vec{k}_i=0\quad \{\not{\varepsilon}_f\not{k}_f\}=2(\varepsilon_f k_f)=2\vec{\varepsilon}_f\cdot\vec{k}_f=0$$

$$\{\not{\varepsilon}_i\not{p}_i\}=2(\varepsilon_i p_i)=2\vec{\varepsilon}_i\cdot\vec{p}_i=0\quad \{\not{\varepsilon}_f\not{p}_i\}=2(\varepsilon_f p_f)=2\vec{\varepsilon}_f\cdot\vec{p}_i=0$$

这里真空中的光子是横向极化的，只有 $\varepsilon^{(1)}$，$\varepsilon^{(2)}$ 与 $\vec{k}$ 垂直，则

$$A=\frac{-i}{2m\omega_i\omega_f}\bar{u}_s(\vec{p}_f)\{\omega_f\not{\varepsilon}_f\not{\varepsilon}_i[i(\not{p}_i+\not{k}_i)+m]-\omega_i\not{\varepsilon}_i\not{\varepsilon}_f[i(\not{p}_i-\not{k}_f)+m]\}u_r(\vec{p}_i)$$

由狄拉克方程

$$(i\not{p}_i+m)u_r(\vec{p}_i)=0$$

故 $$A=\frac{-i}{2m\omega_i\omega_f}\bar{u}_s(\vec{p}_f)Ru_r(\vec{p}_i)\tag{12}$$

先对自旋求和和求平均，有

$$\sum_{sp_i}\sum_{sp_f}|A|^2=\frac{1}{4m^2\omega_i^2\omega_f^2}\sum_{sp_i}\sum_{sp_f}|\bar{u}_f Ru_i|^2\tag{13}$$

$$|\bar{u}_f Ru_i|^2=sp(u_i\bar{u}_i\gamma_4R^+\gamma_4u_f\bar{u}_fR)$$

对初态和终态电子自旋求和，利用公式

$$\sum_{r=1,2}u_r(\vec{p})\bar{u}_r(\vec{p})=\frac{-ip+m}{2E}$$

$$\sum_i\sum_f|\bar{u}_f Ru_i|^2=\frac{1}{8mE_f}sp[(i\not{p}_i-m)\gamma_4R^+\gamma_4(i\not{p}_f-m)R]$$

于是(13)式变为

$$\sum_{sp_i}\sum_{sp_f}|A|^2=\frac{1}{32m^3E_f\omega_i^2\omega_f^2}B\tag{14}$$

其中 $B=sp[(\not{p}_i+im)\bar{R}(\not{p}_f+im)R]$

而 $P_i+k_i=p_f+k_f$

设 $B=B_1+B_2+B_3$

$$B_1=sp(\not{p}_i\bar{R}\not{p}_iR-m_2\bar{R}R)\quad B_2=sp(\not{p}_i\bar{R}\not{k}_iR)\quad B_3=-sp(\not{k}_i\bar{R}\not{k}_fR)$$

∵ $\vec{p}_i=0,p_4=im,(\varepsilon_i,p_i)=0,(\varepsilon_f,p_f)=0$

$$\{\not{p}_iR\}=4m\omega_i\omega_f(\varepsilon_i\varepsilon_f)$$

$$B_1=sp[\{\not{p}_i\bar{R}\}\not{p}_iR-\bar{R}\not{p}_i\not{p}_iR-m^2\bar{R}R]$$

$$\not{p}_i\not{p}_i=p_ip_i=-m^2$$

$$sp[\not{p}_iR]=8m\omega_i\omega_f(\varepsilon_i\varepsilon_f)$$

故 $B_1=32m\omega_i^2\omega_f^2(\varepsilon_i\varepsilon_f)^2$

∵ $sp\omega_i^2\not{p}_i\not{\varepsilon}_i\not{k}_f\not{\varepsilon}_i\not{k}_i\not{\varepsilon}_i\not{k}_f\not{\varepsilon}_f=8\omega_i^2(p_ik_f)(k_ik_f)$

$p_ik_i=-m\omega_i\quad p_ik_f=-m\omega_f$

∴ $B_2=-8m\omega_i^2\omega_f(k_ik_f)=sp(\not{p}_i\bar{R}\not{k}_iR)$

$B_3=-B_2=8m\omega_i^2\omega_f(k_ik_f)$

故 $$B=8m^2\omega_i^2\omega_f^2[4(\varepsilon_i\varepsilon_f)^2+\frac{\omega_i}{\omega_f}+\frac{\omega_f}{\omega_i}-2]\tag{15}$$

则康普顿散射幅

$$\sum_{spi}\sum_{spf}|A|^2=\frac{1}{4mE_f}[4(\varepsilon_i\varepsilon_f)^2+\frac{\omega_i}{\omega_f}+\frac{\omega_f}{\omega_i}-2]\tag{16}$$

2.2 康普顿微分散射截面

把(16)式代入(9)式得康普顿微分散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=(\frac{e^2}{4\pi})^2\frac{\omega_f{}^2}{\omega_i{}^2}\frac{1}{4m^2}[4(\varepsilon_i\varepsilon_f)^2+\frac{\omega_i}{\omega_f}+\frac{\omega_f}{\omega_i}-2]$$

$\because$ $\varepsilon_i\cdot\varepsilon_f=\vec{\varepsilon}_i\cdot\vec{\varepsilon}_f=\cos\varphi$ $|\vec{\varepsilon}_i|=|\vec{\varepsilon}_f|=1$

$$\therefore\quad \frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{r_0^2}{4}\frac{\omega_f^2}{\omega_i^2}(4\cos^2\varphi+\frac{\omega_f}{\omega_i}+\frac{\omega_i}{\omega_f}-2) \tag{17}$$

式中 r_0 称为经典电子半径

对电子自旋和光子极化的平均微分散射截面

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}=\frac{r_0^2}{4}\frac{\omega_f{}^2}{\omega_i^2}\sum_{pol_i}\sum_{pol_f}4[(\varepsilon_i\varepsilon_f)^2+\frac{\omega_i}{\omega_f}+\frac{\omega_f}{\omega_i}-2]$$

$$\sum_{P_{oli}}\sum_{P_{olf}}(\varepsilon_f\varepsilon_i)^2=1+\frac{(\vec{k}_i\cdot\vec{k}_f)^2}{k_f^2k_i{}^2}=1+\cos^2\theta$$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}=\frac{r_0{}^2}{2}\frac{\omega_f{}^2}{\omega_i{}^2}[\cos^2\theta+\frac{\omega_f}{\omega_i}+\frac{\omega_i}{\omega_f}-1] \tag{18}$$

3 经典近似

在低能极限下，$\omega_i=\omega_f$，这样得到

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\approx\frac{a^2}{m}(\varepsilon_i\varepsilon_f)^2 \tag{19}$$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}\approx\frac{a^2}{m}(1+\cos^2\theta) \tag{20}$$

$$a=\frac{e^2}{4\pi ch\varepsilon_0}\approx\frac{1}{137}$$

式中 a 为精细结构常数

将 $d\Omega$ 对所有的方向积分，得到平均散射截面

$$\bar{\sigma}=\frac{a^2}{m^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)d(-\cos\theta)d\varphi=\frac{8\pi}{3}\frac{a^2}{m^2}$$

它与经典的瑞利——汤姆生结果一致

[参考文献]

[1]MLeon(美). 粒子物理导论[M]. 南充师范学院物理系翻印，1981.

[2]S. N. 古普塔. 量子电动力学[M]. 北京：北京师范大学出版社，1987.

[3]周世勋．量子力学教程[M]. 北京：人民教育出版社，1980.

[4]曾谨言．量子力学[M]. 北京：科学出版社，1981.

本刊声明

为适应我国信息化建设需要，扩大作者学术交流渠道，本刊已入编《中国学术期刊(光盘版)，同时加入“中国期刊网”。作者著作权使用费与本刊稿酬一次性给付。如作者不同意将文章编入该数据库，请在投稿时声明，本刊将作适当处理。