Optimización de una función

El problema

Queremos encontrar el valor máximo de la función de variable real

$$\begin{array}{rccl} f: & [-1,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x\,\mathrm{sen}(10\pi x)+1 \end{array}$$

La función f es una función continua definida en un compacto por lo que el máximo tiene que existir. Como f es también infinitamente derivable en $(-1,2)$, entonces el máximo tiene que estar en el conjunto dado por los extremos del intervalo y los máximos locales. Sea $x_{\max}$ el máximo buscado. Entonces

$$x_{\text{máx}} \in \{-1,2\} \cup \{x \in (-1,2) \,|\, f'(x) = 0\}$$

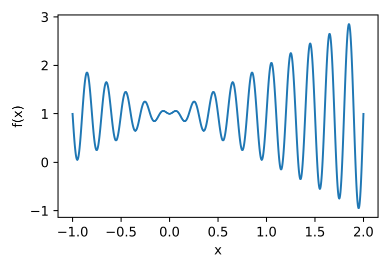

Figure 1:

La función f en el intervalo $[-1,2]$ está representada en figura 1.

Es claro que el espacio de búsqueda tiene infinitos elementos, luego las técnicas exhaustivas están descartadas. Utilizando métodos analíticos se puede obtener que $x_{\text{máx}} = \frac{37}{20} + \epsilon$, con $\epsilon \to 0$, cuyo valor queda desconocido.

Lo que haremos en esta práctica es construir un algoritmo genético para resolver el problema de maximizar la función $f(x)$ en el intervalo $[-1,2]$.

Implementación en código

Utilizaremos un vector $v \in \{0,1\}^n$ para el cromosoma o individuo que representa valores reales de la variable x. La longitud del cromosoma depende de la precisión requerida al algoritmo. Sea dicha precisión seis cifras tras la coma decimal. En esta caso, teniendo el dominio longitud $|2-(-1)| = 3$, el dominio tiene que ser dividido en 3×10^6 partes iguales. Esto significa que necesitamos un cromosoma de longitud 22 dado que

$$2^{21} < 3 \times 10^6 + 1 < 2^{22}\,.$$

Debido a la desigualdad derecha, habrá cromosomas que representen números decimales de precisión 7.

La identificación de una cadena de 22 bits con el número real correspondiente se completa en dos pasos

1. Convertir la cadena binaria $v = (b_{21}b_{20}\dots b_2b_1b_0)$ de base 2 a base 10

$$(b_{21}b_{20}\dots b_2b_1b_0) = \left(\sum_{i=0}^{21} 2^i b_i\right)_{10} = x'$$

2. Encontrar el número x correspondiente

$$x = -1 + \frac{3}{2^{22}-1}x'\,.$$

Población inicial

Crear aleatoriamente un conjunto inicial de cromosomas (población). El tamaño de la población no tiene que ser demasiado pequeño. En primera aproximación podemos utilizar la regla $\# = (l, 2l)$ siendo l la longitud del cromosoma.

Función de evaluación

La función de evaluación *eval* para los cromosoma es, en este caso, la misma función f aplicada al valor que la variable x toma sobre un cierto cromosoma de la población:

$$eval(v) = f(x[v])\,.$$

Notad que la función *eval* es función del cromosoma y no de la variable real.

Departamento de Matemáticas
E. E. Ingeniería Industr. Inform., Aeroesp.
Dario Bettoni
dbet@unileon.es

Operadores genéticos

Introducimos ahora los operadores genéticos que actúan sobre la población. En primer lugar tenemos la **selección** de los individuos más aptos. Luego tenemos que actuar sobre la población elegida con los operadores propiamente genéticos, el de **crossover** y el de **mutación**.

- **Selección**: Consideremos por ejemplo los siguientes cormosomas

$$\begin{aligned} v_1 &= (1000101110110101000111)\,, \\ v_2 &= (0000001110000000010000)\,, \\ v_3 &= (1110000000111111000101)\,, \\ v_4 &= (1111111111111111111111) \end{aligned}$$

  a los cuales corresponden los valores reales $x(v_1) = 0.637197$, $x(v_2) = -0.958973$, $x(v_3) = 1.6278881$, $x(v_4) = 2.0$ y aptitudes

$$\begin{aligned} eval(v_1) &= 1.586347\,, \\ eval(v_2) &= 0.078877\,, \\ eval(v_3) &= 2.250654\,, \\ eval(v_4) &= 1,0\,, \end{aligned}$$

  Podemos ver que el cromosoma tres es el más apto. Ahora que tenemos las aptitudes de los varios cromosomas tenemos que especificar un método de selección, por ejemplo, por ruleta con pesos.

- **Crossover**: Imaginemos que los cromosomas v_2 y v_3 han sido seleccionados para la reproducción. Entonces, para hacer el crossover necesitamos obtener el punto de corte de forma aleatoria. Imaginemos que este nos proporcione que el corte ocurre tras el quinto gen.

$$\begin{aligned} v_2 &= (00000|01110000000010000)\,, \\ v_3 &= (11100|00000111111000101)\,. \end{aligned}$$

  El resultado del crossover son dos nuevos cromosomas con obtenidos intercambiando los genes hasta el punto de corte

$$\begin{aligned} v_2' &= (00000|00000111111000101)\,, \\ v_3' &= (11100|01110000000010000)\,, \end{aligned}$$

  cuyas aptitudes son $eval(v_2') = 0.909673$ y $eval(v_3') = 2,459252$. Nótese que v_3' es más apto que sus padres.

- **Mutación**: Alteración de uno o más genes con probabilidad igual a la frecuencia de mutación p_m. Así supongamos que el quinto gen de v_3' queda convertido en v_3'' tras la mutación

$$v_3'' = (1110\underline{1}01110000000010000)\,.$$

  El cromosoma mutado representa el valor $x[v_3''] = 1,7597777$, y su aptitud es $f(x[v_3'']) = -0,677405$. Así la mutación ha ocasionado una pérdida significativa en la aptitud del cromosoma. Nótese que no es difícil encontrar un caso en el que la mutación proporcione ganancia en la aptitud. No obstante, no debe olvidarse que el objetivo de la mutación no es la mejora inmediata sino evitar la pérdida de información que llevaría a la Deriva Genética.

- **Elitismo**: Introducir un operador de elitismo. Esto puede ayudar la convergencia del algoritmo dado que en este caso hay muchos óptimos locales.

Parámetros

Para este problema se en particular se han usado los siguientes parámetros:

- Tamaño población $pop\_size = 50$;
- Probabilidad de Crossover $cross\_prob = 0.25$;
- probabilidad de mutación $mut\_prob = 0.01$.

Resultados experimentales

En la gráfica 2 se muestra la evolución de la media y el valor máximo de la aptitud con la evolución. La media de la población inicial es $\langle f(pop)\rangle_{\mathrm{ini}} = 1.009659$ y la mejor solución inicial es $f(x_{\mathrm{max,ini}}) = 2.564479$ correspondiente a la solución $x_{\mathrm{max,ini}} = 1.640285$. Después de 150 generaciones la media de la población es $\langle f(pop)\rangle_{\mathrm{fin}} = 2.850126$ y la mejor solución inicial es $f(x_{\mathrm{max,fin}}) = 2.850207$ correspondiente a la solución $x_{\mathrm{max,fin}} = 1.850817$.

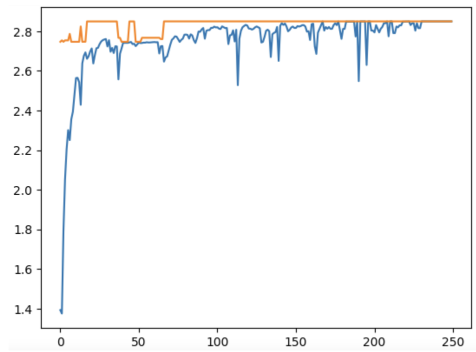

Figure 2: