EWS Aufgabe 10.2

April Herwig

January 23, 2021

a) Die Funktion $\mathbb{1}_{(-\infty,x]}(X_i)$ ist äquivalent zu einer Bernoulli verteilten Zufalsvariable $Y_i \sim Bernoulli(F(x)) \in \mathcal{L}^2$. Damit ist für die Summe der unabhängig, identisch verteilten Stichproben:

$$P(|\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty,x]}(X_i) - F(x)| \geq \epsilon) = P(|\sum_{i=1}^{n} Y_i - F(x)| \geq \epsilon) \to 0,$$

stochastisch nach dem schwachem Gesetz der Großen Zahlen.

b) Es ist:

$$\begin{aligned} F_\theta^{-1}(p) \leq x \Leftrightarrow & p \leq F_\theta(x) \\ & p = F_n(x) \Leftrightarrow F_n(x) \leq F_\theta(x). \end{aligned}$$

Betrachte also $F_n^{-1}(p) - F_\theta^{-1}(p) > \epsilon$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow F_\theta^{-1}(p) \leq x - \epsilon \leq F_n^{-1}(p) \\ &\Leftrightarrow F_n(x) \leq F_\theta(x) \\ &\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : F_n(x) - F_\theta(x) > \delta. \end{aligned}$$

Dies gilt analog für $F_\theta^{-1}(x) - F_n^{-1}(x) > \epsilon$

$$\Rightarrow |F_n^{-1}(p) - F_\theta^{-1}(p)| > \epsilon \Leftrightarrow |F_n(x) - F_\theta(x)| > \delta.$$

Insbesondere ist $\forall \epsilon' > 0 \exists \delta' > 0 :$

$$P_\theta^{\otimes n}(|F_n(x) - F_\theta(x)| > \delta') \Rightarrow P_\theta^{\otimes n}(|F_n^{-1}(p) - F_\theta^{-1}(p)| > \epsilon'),$$

da F streng monoton wachsend und rechtsseitig stetig ist, aus dem $\epsilon - \delta$ stetigkeits Kriterium. Insgesamt also:

$$\begin{aligned} & P_\theta^{\otimes n}(|F_n(x) - F_\theta(x)| > \delta) \to 0 \\ \Rightarrow\ & P_\theta^{\otimes n}(|F_n^{-1}(p) - F_\theta^{-1}(p)| > \epsilon) \to 0. \end{aligned}$$