EWS Aufgabe 10.2

April Herwig

1/23/2021

```r
set.seed(1)
```

a) Die Funktion $\nVdash_{(-\infty,x]}(X_i)$ ist äquivalent zu einer Bernoulli verteilten Zufalsvariable $Y_i \sim Bernoulli(F(x)) \in \mathcal{L}^2$. Damit ist für die Summe der unabhängig, identisch verteilten Stichproben:

$$P(|\sum_{i=1}^{n} \nVdash_{(-\infty,x]}(X_i) - F(x)| > \epsilon) = P(|\sum_{i=1}^{n} Y_i - F(x)| > \epsilon) \to 0,$$

stochastisch nach dem schwachem Gesetz der Großen Zahlen.

b) Es ist:

$$\begin{aligned} F_\theta^{-1}(p) \leq x \Leftrightarrow & p \leq F_\theta(x) \\ & p = F_n(x) \Leftrightarrow F_n(x) \leq F_\theta(x). \end{aligned}$$

Betrachte also $F_n^{-1}(p) - F_\theta^{-1}(p) > \epsilon$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow F_\theta^{-1}(p) \leq x - \epsilon < F_n^{-1}(p) \\ &\Leftrightarrow F_n(x) < F_\theta(x) \\ &\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : F_n(x) - F_\theta(x) > \delta. \end{aligned}$$

Dies gilt analog für $F_\theta^{-1}(x) - F_n^{-1}(x) > \epsilon$

$$\Rightarrow |F_n^{-1}(p) - F_\theta^{-1}(p)| > \epsilon \Leftrightarrow |F_n(x) - F_\theta(x)| > \delta.$$

Insbesondere ist $\forall \epsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 :$

$$P_\theta^{\otimes n}(|F_n(x) - F_\theta(x)| > \delta') \Rightarrow P_\theta^{\otimes n}(|F_n^{-1}(p) - F_\theta^{-1}(p)| > \epsilon'),$$

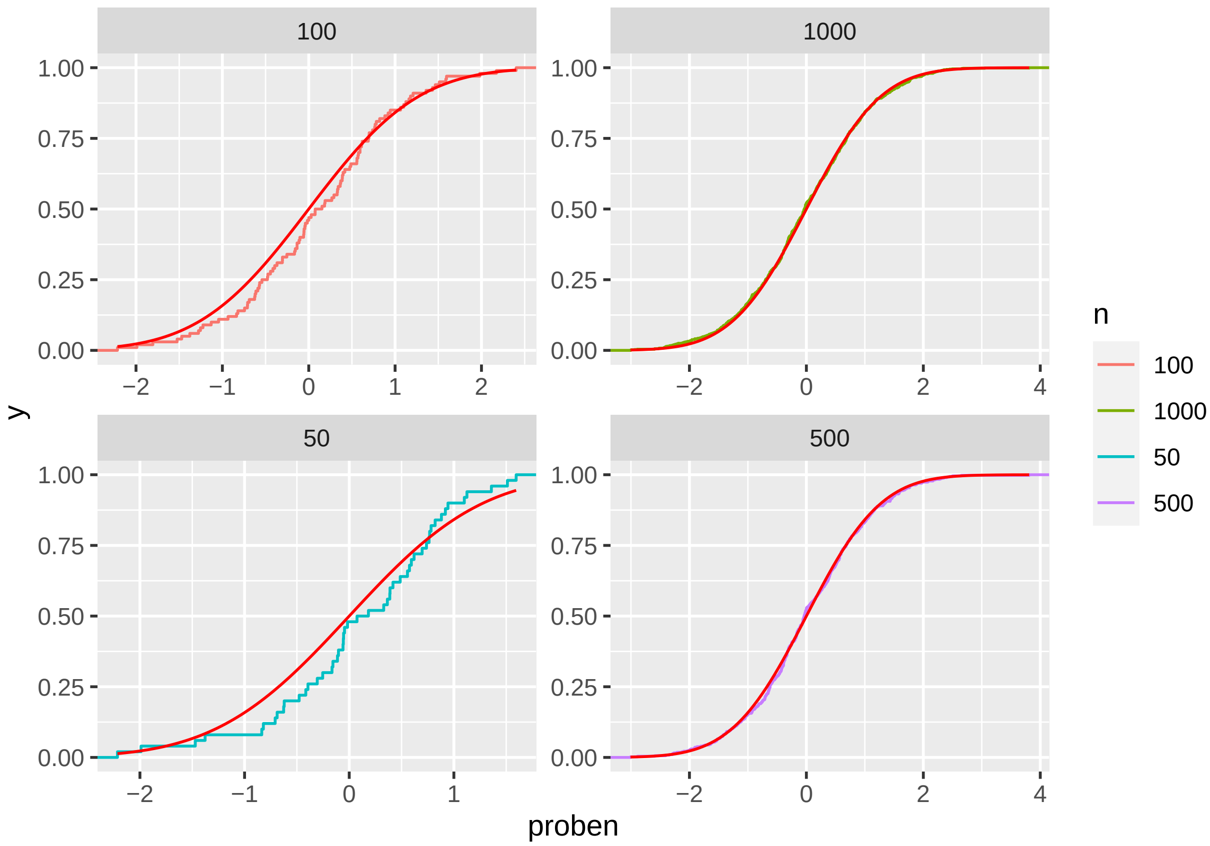
da F streng monoton wachsend und rechtsseitig stetig ist, aus dem $\epsilon - \delta$ stetigkeits Kriterium. Insgesamt also:

$$
\begin{aligned}
&P_\theta^{\otimes n}(|F_n(x) - F_\theta(x)| > \delta) \to 0 \\
&\Rightarrow P_\theta^{\otimes n}(|F_n^{-1}(p) - F_\theta^{-1}(p)| > \epsilon) \to 0.
\end{aligned}
$$

```
probe <- rnorm(1000)

stichproben <- tibble(
proben=c(probe[1:50], probe[1:100], probe[1:500], probe),
n=c(rep("50", 50), rep("100", 100), rep("500", 500), rep("1000", 1000))
)
```

```
ggplot(data=stichproben, mapping=aes(x=proben, color=n)) +
    stat_ecdf() + stat_function(fun=pnorm, color="red") +
    facet_wrap(vars(n), nrow=2, scales="free")
```



c)