МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ

ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.Г.ШУХОВА»

(БГТУ им.В.Г.Шухова)

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и

автоматизированных систем

Лабораторная работа №1.3

дисциплина: Дискретная математика

тема: «Теоретико-множественные тождества»

Выполнил: ст. группы ПВ-201

Машуров Дмитрий Русланович

Проверил: Бондаренко Т.В.

Белгород 2021

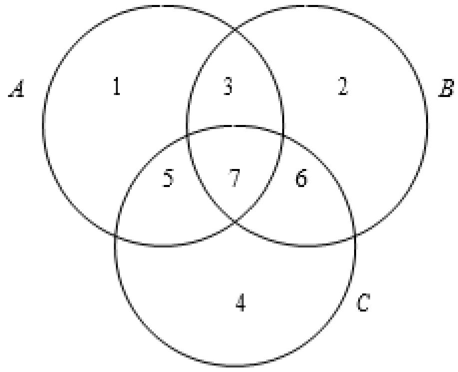
Лабораторная работа №1.3

Теоретико-множественные тождества

Цель: изучить методы доказательства теоретико-множественных тождеств

Задания

1. На рис.1 изображены круги Эйлера, соответствующие множест- вам *A*, *B* и *C*, с пронумерованными элементарными областями (не содержащими внутри себя других областей). Заштриховать элементарные области в соответствии с вариантом задания (см. табл.2).



2. Написать выражение 1 над множествами *A*, *B* и *C*, определяющее заштрихованную область, используя операции пересечения, объединения и дополнения.
3. Используя свойства операций над множествами, преобразовать выражение 1 в выражение 2, не содержащее операции дополнения множества.
4. Используя свойства операций над множествами, преобразовать выражение 2 в выражение 3, не содержащее операции объединения множеств.
5. Используя свойства операций над множествами, преобразовать выражение 3 в выражение 4, не содержащее операции пересечения множеств.
6. Доказать тождественность выражений 2 и 3 методом характеристических функций.
7. Доказать тождественность выражений 2 и 4 методом логических функций. Для автоматизации доказательства написать программу, которая получает и сравнивает таблицы истинности логических функций.
8. Доказать тождественность выражений 3 и 4 теоретико-множественным методом. Для автоматизации доказательства написать про-

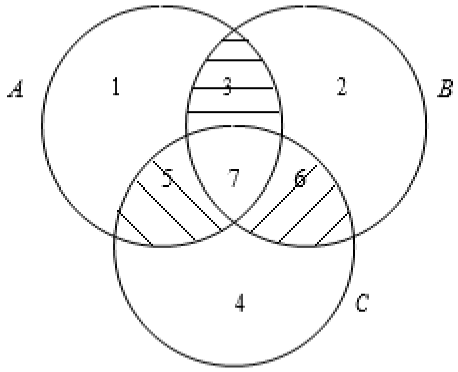
грамму, в которой вычисляются и сравниваются значения выражений 3 и 4 при $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{2,3,6,7\}$ и $C = \{4,5,6,7\}$.

Задание варианта №17:

Номера областей – 3, 5, 6

Выполнение:

1. Заштрихую области в соответствии со своим вариантом:



2. Напишу выражение 1 над множествами A, B и C, определяющее заштрихованную область:

$$(A \cap B \cup A \cap C \cup B \cap C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C})$$

3. Преобразую выражение 1 в выражение 2, не содержащее операции дополнения множества

$$(A \cap B \cup A \cap C \cup B \cap C) - (A \cap B \cap C)$$

4. Преобразую выражение 2 в выражение 3, не содержащее операции объединения множеств

$$\Big(\Big(\big((A \cap B - A \cap C) \bigtriangleup A \cap C\big) - B \cap C\Big) \bigtriangleup B \cap C\Big) - (A \cap B \cap C)$$

5. Преобразую выражение 3 в выражение 4, не содержащее операции пересечения множеств

$$\Big(\Big(\Big(\Big(\big(A-(A-B)\big)-\big(A-(A-C)\big)\Big)\triangle\big(A-(A-C)\big)\Big)$$
$$-\big(B-(B-C)\big)\Big)\triangle\big(B-(B-C)\big)\Big)$$
$$-\Big(\mathrm{C}-\Big(\mathrm{C}-\big(A-(A-B)\big)\Big)\Big)$$

6. Докажу тождественность выражений 2 и 3 методом характеристических функций

$$\chi_{(A\cap B\cup B\cap C\cup A\cap C)-(A\cap B\cap C)} = \chi_{A\cap B\cup A\cap C\cup B\cap C} - \chi_{A\cap B\cup A\cap C\cup B\cap C}\cdot\chi_{A\cap B\cap C} =$$
$$= \chi_{A\cap B\cup A\cap C\cup B\cap C}\,(1-\chi_{A\cap B\cap C}) =$$
$$= (\chi_A\chi_B+\chi_A\chi_C+\chi_B\chi_C-2\chi_A\chi_B\chi_C)(1-\chi_A\chi_B\chi_C) =$$
$$= \chi_A\chi_B+\chi_A\chi_C+\chi_B\chi_C-2\chi_A\chi_B\chi_C-\chi_A\chi_B\chi_C$$
$$-\chi_A\chi_B\chi_C-\chi_A\chi_B\chi_C+2\chi_A\chi_B\chi_C =$$
$$= \chi_A\chi_B+\chi_A\chi_C+\chi_B\chi_C-3\chi_A\chi_B\chi_C$$

$$\chi_{((((A\cap B-A\cap C)\triangle A\cap C)-B\cap C)\triangle B\cap C))-(A\cap B\cap C)} =$$

$$= \chi_{((((A\cap B-A\cap C)\triangle A\cap C)-B\cap C)\triangle B\cap C)} - \chi_{(((A\cap B-A\cap C)\triangle A\cap C)-B\cap C)\triangle B\cap C)} \cdot \chi_{A\cap B\cap C} =$$

$$= \chi_{(((A\cap B-A\cap C)\triangle A\cap C)-B\cap C)\triangle B\cap C)} (1-\chi_{A\cap B\cap C})$$

$$\chi_{((((A\cap B-A\cap C)\triangle A\cap C)-B\cap C)\triangle B\cap C)} = \chi_{(((A\cap B-A\cap C)\triangle A\cap C)-B\cap C)} + \chi_{B\cap C} -$$

$$-2\cdot \chi_{(((A\cap B-A\cap C)\triangle A\cap C)-B\cap C)} \cdot \chi_{B\cap C} =$$

$$= (\chi_{((A\cap B-A\cap C)\triangle A\cap C)} - \chi_{((A\cap B-A\cap C)\triangle A\cap C)} \cdot \chi_{B\cap C}) + \chi_{B\cap C} -$$

$$-2\cdot(\chi_{((A\cap B-A\cap C)\triangle A\cap C)} - \chi_{((A\cap B-A\cap C)\triangle A\cap C)} \cdot \chi_{B\cap C}) \cdot \chi_{B\cap C} =$$

$$= (\chi_{((A\cap B-A\cap C)\triangle A\cap C)} - \chi_{((A\cap B-A\cap C)\triangle A\cap C)} \cdot \chi_{B\cap C})(1-2\chi_{B\cap C}) + \chi_{B\cap C} =$$

$$= (\chi_{((A\cap B-A\cap C)\triangle A\cap C)}(1-\chi_{B\cap C}))(1-2\chi_{B\cap C}) + \chi_{B\cap C} =$$

$$= ((\chi_{(A\cap B-A\cap C)} + \chi_{A\cap C} - 2\cdot\chi_{(A\cap B-A\cap C)}\cdot\chi_{A\cap C})(1-\chi_{B\cap C}))(1-2\chi_{B\cap C}) + \chi_{B\cap C} =$$

$$= ((\chi_{(A\cap B-A\cap C)}(1-2\chi_{A\cap C}) + \chi_{A\cap C})(1-\chi_{B\cap C}))(1-2\chi_{B\cap C}) + \chi_{B\cap C} =$$

$$= (((\chi_A\chi_B - \chi_A\chi_B\chi_c)(1-2\chi_A\chi_c) + \chi_A\chi_c)(1-\chi_B\chi_c))(1-2\chi_B\chi_c) + \chi_B\chi_c$$

$$= ((\chi_A\chi_B - 2\chi_A\chi_B\chi_c - \chi_A\chi_B\chi_c - 2\chi_A\chi_B\chi_c + \chi_A\chi_c)(1-\chi_B\chi_c))(1-2\chi_B\chi_c)$$

$$+\chi_B\chi_c = (\chi_A\chi_B - 2\chi_A\chi_B\chi_c - \chi_A\chi_B\chi_c - 2\chi_A\chi_B\chi_c + \chi_A\chi_c - \chi_A\chi_B\chi_c + 2\chi_A\chi_B\chi_c$$

$$+ \chi_A\chi_B\chi_c + 2\chi_A\chi_B\chi_c - \chi_A\chi_B\chi_c)(1-2\chi_B\chi_c) \overset{+\chi_B\chi_c}{=} \chi_A\chi_B - 2\chi_A\chi_B\chi_c -$$

$$- \chi_A\chi_B\chi_c - 2\chi_A\chi_B\chi_c + \chi_A\chi_c - \chi_A\chi_B\chi_c + 2\chi_A\chi_B\chi_c + \chi_A\chi_B\chi_c + 2\chi_A\chi_B\chi_c$$

$$- \chi_A\chi_B\chi_c - 2\chi_A\chi_B\chi_c + 4\chi_A\chi_B\chi_c + 2\chi_A\chi_B\chi_c + 4\chi_A\chi_B\chi_c - 2\chi_A\chi_B\chi_c$$

$$+ 2\chi_A\chi_B\chi_c - 4\chi_A\chi_B\chi_c - 2\chi_A\chi_B\chi_c - 4\chi_A\chi_B\chi_c + 2\chi_A\chi_B\chi_c + \chi_B\chi_c =$$

$= \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 2\chi_A\chi_B\chi_C$

$(\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 2\chi_A\chi_B\chi_C)(1 - \chi_A\chi_B\chi_C) =$

$= \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 2\chi_A\chi_B\chi_C - \chi_A\chi_B\chi_C - \chi_A\chi_B\chi_C - \chi_A\chi_B\chi_C +$

$+ 2\chi_A\chi_B\chi_C = \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 3\chi_A\chi_B\chi_C$

Характеристические функции совпали

7. Докажу тождественность выражений 2 и 4 методом логических функций

$$\chi_{X-(X-Y)} = \chi_X \wedge \overline{\chi_{X-Y}} = \chi_X \wedge \overline{\chi_X \wedge \overline{\chi_Y}} =$$

$$= \chi_X \wedge (\overline{\chi_X} \vee \chi_Y) = \chi_X \wedge \chi_Y$$

$$\chi_{(((((A-(A-B))-(A-(A-C)))\Delta(A-(A-C)))-(B-(B-C)))\Delta(B-(B-C)))-(C-(C-(A-(A-B))))} =$$

$$= \chi_{(((((A-(A-B))-(A-(A-C)))\Delta(A-(A-C)))-(B-(B-C)))\Delta(B-(B-C)))} \wedge \overline{\chi_{C-(C-(A-(A-B)))}}$$

1) $$\chi_{(((((A-(A-B))-(A-(A-C)))\Delta(A-(A-C)))-(B-(B-C)))\Delta(B-(B-C)))} =$$

$$= (\chi_{((((A-(A-B))-(A-(A-C)))\Delta(A-(A-C)))-(B-(B-C)))}) \oplus \chi_B \wedge \chi_C =$$

$$= ((\chi_{(((A-(A-B))-(A-(A-C)))\Delta(A-(A-C)))}) \wedge (\overline{\chi_B} \vee \overline{\chi_C})) \oplus \chi_B \wedge \chi_C =$$

$$= (((\chi_{((A-(A-B))-(A-(A-C)))}) \oplus \chi_A \wedge \chi_C) \wedge (\overline{\chi_B} \vee \overline{\chi_C})) \oplus \chi_B \wedge \chi_C =$$

$$= (((\chi_A \wedge \chi_B \wedge (\overline{\chi_A} \vee \overline{\chi_C})) \oplus \chi_A \wedge \chi_C) \wedge (\overline{\chi_B} \vee \overline{\chi_C})) \oplus \chi_B \wedge \chi_C$$

2) $$\overline{\chi_{C-(C-(A-(A-B)))}} = \overline{\chi_C \wedge \overline{\chi_{C-(A-(A-B))}}} =$$

$$= \overline{\chi_C \wedge \overline{\chi_C \wedge \overline{\chi_{A-(A-B)}}}} = \overline{\chi_C \wedge \overline{\chi_C \wedge \overline{\chi_A \wedge \chi_B}}} =$$

$$= \overline{\chi_C \wedge (\overline{\chi_C} \vee (\chi_A \wedge \chi_B))} = \overline{\chi_A \wedge \chi_B \wedge \chi_C} =$$

$$= \overline{\chi_A} \vee \overline{\chi_B} \vee \overline{\chi_C}$$

$$((((\chi_A \wedge \chi_B \vee (\overline{\chi_A} \vee \overline{\chi_C})) \oplus \chi_A \wedge \chi_C) \wedge (\overline{\chi_B} \vee \overline{\chi_C})) \oplus \chi_B \wedge \chi_C) \wedge$$

$$\wedge (\overline{\chi_A} \vee \overline{\chi_B} \vee \overline{\chi_C})$$

a	b	c	a&b	a&c	⌐(a&c)	(a&b)&(⌐(a&c))	((a&b)&(⌐(a&c)))⊕(a&c)	b&c	⌐(b&c)	(((a&b)&(⌐(a&c)))⊕(a&c))&(⌐(b&c))	((((a&b)&(⌐(a&c)))⊕(a&c))&(⌐(b&c)))⊕(b&c)	(a&b)&c	⌐((a&b)&c)	(((((a&b)&(⌐(a&c)))⊕(a&c))&(⌐(b&c)))⊕(b&c))&(⌐((a&b)&c))
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0

$$\chi_{(A\cap B\cup A\cap C\cup B\cap C)-(A\cap B\cap C)} = \chi_{A\cap B\cup A\cap C\cup B\cap C} \wedge \overline{\chi_{A\cap B\cap C}} =$$

$$= (\chi_A \wedge \chi_B \vee \chi_A \wedge \chi_C \vee \chi_B \wedge \chi_C) \wedge (\overline{\chi}_A \vee \overline{\chi}_B \vee \overline{\chi}_C)$$

a	b	c	a&b	a&c	(a&b)v(a&c)	b&c	((a&b)v(a&c))v(b&c)	⌐a	⌐b	(⌐a)v(⌐b)	⌐c	((⌐a)v(⌐b))v(⌐c)	(((a&b)v(a&c))v(b&c))&(((⌐a)v(⌐b))v(⌐c))
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

8. Докажу тождественность выражений 3 и 4 теоретико-множественным методом при $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{2,3,6,7\}$ и $C = \{4,5,6,7\}$

Первое выражение:

$$\left(\left(\left((A \cap B - A \cap C) \triangle A \cap C\right) - B \cap C\right) \triangle B \cap C\right) - (A \cap B \cap C) =$$

$$\left(\left(\left(\{1,3,5,7\} \cap \{2,3,6,7\} - \{1,3,5,7\} \cap \{4,5,6,7\}\right) \triangle \{1,3,5,7\} \cap \{4,5,6,7\}\right)\right.$$
$$\left. - \{2,3,6,7\} \cap \{4,5,6,7\}\right) \triangle \{2,3,6,7\} \cap \{4,5,6,7\}\Big)$$
$$- (\{1,3,5,7\} \cap \{2,3,6,7\} \cap \{4,5,6,7\}) =$$

$$\left(\left(\left(\{3,7\} - \{5,7\}\right) \triangle \{5,7\}\right) - \{6,7\}\right) \triangle \{6,7\}\Big) - (\{7\})$$
$$= \left(\left((\{3,5,7\}) - \{6,7\}\right) \triangle \{6,7\}\right) - \{7\} = \{3,5,6,7\} - \{7\}$$
$$= \{3,5,6\}$$

Второе выражение:

$$\left(\left(\left(\left(A - (A - B)\right) - \left(A - (A - C)\right)\right) \triangle \left(A - (A - C)\right)\right)\right.$$
$$\left. - \left(B - (B - C)\right)\right) \triangle \left(B - (B - C)\right)\Big)$$
$$- \left(\mathrm{C} - \left(\mathrm{C} - \left(A - (A - B)\right)\right)\right) =$$

$$\Big(\Big(\Big(\Big(\{1,3,5,7\} - (\{1,3,5,7\} - \{2,3,6,7\})\Big)$$
$$- \left(\{1,3,5,7\} - (\{1,3,5,7\} - \{4,5,6,7\})\right)\Big)$$
$$\triangle \left(\{1,3,5,7\} - (\{1,3,5,7\} - \{4,5,6,7\})\right)\Big)$$
$$- \left(\{2,3,6,7\} - (\{2,3,6,7\} - \{4,5,6,7\})\right)\Big)$$
$$\triangle \left(\{2,3,6,7\} - (\{2,3,6,7\} - \{4,5,6,7\})\right)\Big)$$
$$- \Big(\{4,5,6,7\}$$
$$- \left(\{4,5,6,7\} - \left(\{1,3,5,7\} - (\{1,3,5,7\} - \{2,3,6,7\})\right)\right)\Big) =$$

$$\Bigg(\bigg(\Big(\big((\{1,3,5,7\} - \{1,5\}) - (\{1,3,5,7\} - \{1,3\})\big) \triangle (\{1,3,5,7\} - \{1,3\})\Big)$$
$$- (\{2,3,6,7\} - \{2,3\})\bigg) \triangle (\{2,3,6,7\} - \{2,3\})\Bigg)$$
$$- \Big(\{4,5,6,7\} - \big(\{4,5,6,7\} - (\{1,3,5,7\} - \{1,5\})\big)\Big) =$$
$$\bigg(\Big(\big((\{3,7\} - \{5,7\}) \triangle \{5,7\}\big) - \{6,7\}\Big) \triangle \{6,7\}\bigg) - (\{4,5,6,7\} - \{4,5,6\}) =$$
$$\big((\{3,5,7\} - \{6,7\}) \triangle \{6,7\}\big) - \{7\} = \{3,5,6,7\} - \{7\} = \{3,5,6\}$$

Результаты теоретико-множественных выражений совпали