Cálculo diferencial e integral 2/Seminario 1

Nombre:

C1) *¿Cuáles de las siguientes funciones definidas en* $\mathbb{R}^3$ *son normas?*

a) $n(x,y,z) = |x| + 2|y| + 3|y-z|$. ☐

b) $n(x,y,z) = |x| + 2|y| + 3|y+z|$. ☐

c) $n(x,y,z) = |x| - 2|y| + 3|y-z|$. ☐

d) $n(x,y,z) = |x| + 2|y| + |3y-z|$. ☐

C2) *En el espacio euclídeo* $\mathbb{R}^n$*, probar la llamada identidad del paralelogramo:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Encontrar un ejemplo en el que esta igualdad es falsa en el caso de la norma $\|\cdot\|_1$.

C3) *Sean* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *dos vectores no nulos. ¿Es cierto que*

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff \textit{existe } \lambda \neq 0 \textit{ tal que } x = \lambda y?$$

C4) *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto arbitrario. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas?*

a) $A = \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{fr}(A)$. ☐

b) $A \subset A'$. ☐

c) A *es abierto si y sólo si* $A \cap \operatorname{fr}(A) = \emptyset$. ☐

d) A *es cerrado si y sólo si* $\operatorname{fr}(A) \subset A$. ☐

C5) *Sean* $A, B \subset \mathbb{R}^2$. *¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas?*

a) Si A *es acotado, entonces* A' *es compacto.* ☐

b) Si B *es cerrado, entonces* $\operatorname{fr} B \subset B$. ☐

c) Si B *es acotado, entonces* $\overline{B}$ *es compacto.* ☐

d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ☐

C6) *¿Cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos en $\mathbb{R}^2$ con la distancia euclídea?*

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$. ☐

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$. ☐

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - |y| \neq 1\}$. ☐

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < xy < 1\}$. ☐

C7) *Calcular los siguientes límites, en caso de existir:*

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y \operatorname{sen} \dfrac{1}{xy}$. ☐

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,\infty)} y \operatorname{sen} \dfrac{1}{xy}$. ☐

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1 + xy)^{\frac{1}{x+y}}$. ☐

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\infty)} (1 + xy)^{\frac{1}{x+y}}$. ☐

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{|xy|}}{|x| + |y|}$. ☐

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2|x|^3 - |y|^2}{|x| + |y|}$. ☐