Álgebra lineal y Geometría II
Gloria Serrano Sotelo
Daniel Hernández Serrano
Departamento de MATEMÁTICAS

TEMA 3. CLASIFICACIÓN DE MÉTRICAS.

Índice

1. Clasificación de métricas: una aproximación al problema.

Aunque para este tema haremos un aproximación eminentemente práctica de cómo calcular los invariantes numéricos que clasifican las métricas simétricas sobre $\mathbb{R}$, dedicaremos este primer capítulo a realizar un esbozo de la clasificación teórica de métricas (sin entrar en muchas demostraciones). Trabajaremos sobre cuerpos de característica distinta de 2.
Sabemos que dos k-espacios vectoriales son isomorfos si y solo si tienen la misma dimensión:

$$E \xrightarrow{\sim} E' \iff n = \dim_k E = \dim_k E' = n' \,,$$

luego la dimensión es un invariante numérico que clasifica espacios vectoriales finitos.
Si ahora añadimos una métrica T_2, vamos a estudiar qué invariantes necesitamos para clasificar las parejas (E, T_2). Nos referiremos a estas parejas como **geometrías**.

1.1. Geometrías equivalentes, invariantes y descomposición ortogonal.

Definición 1.1. Dos geometrías (E, T_2) y (E', T_2') son **equivalentes o isométricas** cuando existe un isomorfismo $f\colon E' \xrightarrow{\sim} E$ tal que $T_2'(u', v') = T_2\big(f(u'), f(v')\big)$ para todos $u', v' \in E'$. De otro modo, cuando el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} E \times E \arrow[r, "T_2"] & k \\ E' \times E' \arrow[u, "f\times f"] \arrow[ur, "T_2'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \big(f(u'), f(v')\big) \arrow[r, "T_2"] & T_2\big(f(u'), f(v')\big) = T_2'(u', v') \\ (u', v') \arrow[u, "f\times f"] \arrow[ur, "T_2'"'] & \end{tikzcd}$$

Proposición 1.2. *Dos geometrías (E, T_2) y (E', T_2') son isométricas si y solo si existen bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y $\{e_1', \dots, e_{n'}'\}$ de E' tales que la matriz de T_2 respecto de $\{e_1, \dots, e_n\}$ es igual a la matriz de T_2' respecto de $\{e_1', \dots, e_{n'}'\}$.*

Demostración. En efecto, por ser isométricas existe una isomorfismo $f\colon E' \xrightarrow{\sim} E$ tal que $T_2'(u',v') = T_2\big(f(u'), f(v')\big)$. Como f es isomorfismo, se tiene que $n = \dim_k E = \dim_k E' = n'$, y que si $\{e_1', \dots, e_{n'}'\}$ es una base de E' entones los vectores $\{e_1 := f(e_1'), \dots, e_n = f(e_{n'}')\}$ son una base de E.
Por lo tanto, denotando G' a la matriz de T_2' en la base $\{e_1', \dots, e_{n'}'\}$ y G a la de T_2 en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ se tiene que $G = G'$ ya que:

$$g_{ij}' := T_2'(e_i', e_j') = T_2\big(f(e_i'), f(e_j')\big) = T_2(e_i, e_j) = g_{ij}$$

Recíprocamente, supongamos que $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{e_1', \dots, e_{n'}'\}$ son bases de E y E' respectivamente tales que la matriz G de T_2 respecto de $\{e_1, \dots, e_n\}$ es igual a la matriz G' de T_2' respecto de $\{e_1', \dots, e_{n'}'\}$, es decir:

$$g_{ij}' := T_2'(e_i', e_j') = T_2(e_i, e_j) = g_{ij}\,.$$

Se tiene entonces que $n = \dim_k E = \dim_k E' = n'$, luego tomando el único isomorfismo $f\colon E' \xrightarrow{\sim} E$ que manda la base $\{e_1', \dots, e_{n'}'\}$ de E' a la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E (o sea, $e_i = f(e_i')$ para todo $i = 1, \dots n$) se prueba que

$$g_{ij} := T_2(e_i, e_j) = T_2\big(f(e_i'), f(e_j')\big)$$

ha de ser igual por hipótesis a $g_{ij}' := T_2'(e_i', e_j')$ y por tanto $T_2'(e_i', e_j') = T_2\big(f(e_i'), f(e_j')\big)$. $\square$

Corolario 1.3. *Si dos métricas son isométricas, entonces las dimensiones de los espacios y de sus radicales son iguales:*

$$n = \dim_k E = \dim_k E' = n' \qquad y \qquad r_0 \overset{not}{=} \dim_k \operatorname{Rad} T_2 = \dim_k \operatorname{Rad} T_2' \overset{not}{=} r_0'$$

Definición 1.4. Llamaremos **rango de** T_2 al escalar:

$$\operatorname{rg}(T_2) = n - r_0 = \dim_k E - \dim_k \operatorname{Rad} T_2\,.$$

Observación 1.5. Nótese que si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de E en la que la matriz de T_2 es G y $\phi_{T_2}\colon E \to E^*$ es la polaridad asociada, entonces:

$$\operatorname{rg}(T_2) = \dim_k E - \dim_k \operatorname{Rad} T_2 = \dim_k E - \dim_k \ker \phi_{T_2} = \dim_k \operatorname{Im} \phi_{T_2} = \operatorname{rg}(G^t) = \operatorname{rg}(G)$$

Tenemos entonces que si dos geometrías son isométricas sus rangos son iguales, pero, ¿es cierto el recíproco? Es decir, ¿basta este invariante para clasificar geometrías?
La respuesta, como veremos, solo es afirmativa cuando la métrica es hemisimétrica, pero no si es simétrica (donde necesitaremos más invariantes, que dependerán además del cuerpo base).
Empezaremos, sin entrar en mucho detalle, reduciendo este estudio a la clasificación de geometrías (E, T_2) no singulares (en las que la métrica T_2 es no singular).

1.1.1. Descomposición ortogonal.

Definición 1.6. Diremos que dos subespacios E_1 y E_2 de E están en **suma ortogonal** si están en suma directa y son ortogonales. La suma ortogonal se denotará $E_1 \perp E_2$.

Observación 1.7. Nótese que si (E, T_2) y (E', T_2') son dos geometrías isométricas y $f\colon E' \xrightarrow{\sim} E$ es el isomorfismo que da la isometría, se tiene:

- Si $V' \subseteq E'$ es un subespacio entonces $f(V'^{\perp}) = f(V')^{\perp}$.
- e' es un vector isótropo de E' si y solo si $f(e')$ es un vector isótropo de E.
- $f(\operatorname{Rad} T'_{2|V'}) = \operatorname{Rad} T_{2|f(V')}$.
- Si $E' = E_1' \perp E_2'$ entonces $f(E') = f(E_1') \perp f(E_2')$.

Utilizaremos sin demostrar el siguiente resultado:

Teorema 1.8. *Toda geometría (E, T_2) descompone salvo isometrías como suma ortogonal del radical y un subespacio no singular, es decir,*

$$E \simeq \operatorname{Rad} T_2 \perp V\,,$$

donde la restricción de T_2 al subespacio $V \subseteq E$ es no singular.

Como $r_0 = \dim_k \operatorname{Rad} T_2$ es invariante por isometrías, este resultado efectivamente permite reducir el problema a clasificar geometrías (E, T_2) no singulares, que pueden ser de dos tipos: elípticas e hiperbólicas.

Definición 1.9. Un subespacio W de E es **elíptico** si no tiene vectores isótropos no nulos, es decir, si cuando $T_2(w, w) = 0$ entonces es $w = 0$.

Definición 1.10. Un **plano hiperbólico** es un subespacio no singular de E de dimensión 2 que contiene algún vector isótropo no nulo. Llamaremos **espacio hiperbólico** H_{2i} de dimensión $2i$ a una suma ortogonal de i planos hiperbólicos.

En particular, los subespacios hiperbólicos y los elípticos son subespacios no singulares. Puede demostrarse que si $E'_i \subseteq E$ es un subespacio totalmente isótropo (todos sus vectores son isótropos) de dimensión i, entonces existe un subespacio hiperbólico H_{2i} de dimensión $2i$ tal que $E'_i \subset H_{2i}$. Por lo tanto, en una geometría no singular de dimensión n se verifica que $2 \dim_k E' \leq n$ para todo subespacio totalmente isótropo $E' \subset E$.

Definición 1.11. Se llama **índice de una geometría** no singular al máximo i de las dimensiones de sus subespacios totalmente isótropos. Llamaremos índice de una geometría al índice de su restricción a la parte no singular.

Teorema 1.12. *Si (E, T_2) es una geometría no singular de dimensión n e índice i, entonces E descompone como suma ortogonal:*

$$E \simeq W \perp H_{2i}$$

de una subespacio elítico W y un subespacio hiperbólico H_{2i}.

Este resultado permite reducir la clasificación de geometrías no singulares a la de las geometrías hiperbólicas y a la de las elípticas.

Hasta ahora tenemos, en general, que dada una geometría (E, T_2) cualquiera, el espacio E descompone como:

$$E \simeq \operatorname{Rad} T_2 \perp W \perp H_{2i}\,.$$

Observemos además que toda métrica T_2 en E puede expresarse de modo único como suma de una métrica simétrica más una hemisimétrica $T_2 = T_2^S + T_2^H$ por la fórmula:

$$T_2^S(u, v) = \frac{1}{2}\big(T_2(u, v) + T_2(v, u)\big)\,; \quad T_2^H(u, v) = \frac{1}{2}\big(T_2(u, v) - T_2(v, u)\big)\,,$$

y por tanto, estos son los dos casos que vamos a considerar.

1.2. Clasificación de métricas hemisimétricas.

En realidad, ya tenemos clasificadas las métricas hemisimétricas, pues en ellas por definición es $T_2(u, v) = -T_2(v, u)$ y por tanto todo vector $e \in E$ es isótropo:

$$T_2(e, e) = -T_2(e, e) \implies 2T_2(e, e) = 0 \overset{ch(k)\neq 2}{\implies} T_2(e, e) = 0\,.$$

Esto demuestra que no hay parte elíptica, y que si T_2 es hemisimétrica entonces:

$$E = \operatorname{Rad} T_2 \perp H_{2i}\,.$$

Se puede probar que dos geometrías hiperbólicas $(H_{2i}, T_{2|H_{2i}})$ y $(H'_{2j}, T'_{2|H'_{2i}})$ son isométricas si y solo si $i = j$, y por la propia descomposición:

$$r = n - r_0 = \dim_k E - \dim_k \operatorname{Rad} T_2 = \dim_k H_{2i} = 2i\,.$$

En consecuencia:

Teorema 1.13. *Dos métricas hemisimétricas son equivalentes si y solo si tienen el mismo rango.*

1.3. Clasificación de métricas simétricas sobre $\mathbb{C}$.

Sea (E, T_2) una geometría con T_2 simétrica y:

$$E = \operatorname{Rad} T_2 \perp H_{2i} \perp W \,,$$

donde puede haber parte elíptica W. La clasificación de los espacios elípticos W depende del cuerpo.

Sobre el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$, si (W, T_2) es elítico se puede probar que $\dim_{\mathbb{C}} W \leq 1$ y que dos geometrías elípticas (W, T_2) y (W', T_2') son isométricas si y solo si tienen la misma dimensión. Por tanto, bastan el rango y el índice para clasificar.

Teorema 1.14. *Dos métricas simétricas sobre $\mathbb{C}$ son equivalentes si y solo si tienen el mismo rango y el mismo índice.*

1.4. Clasificación de métricas simétricas sobre $\mathbb{R}$.

Cuando trabajamos sobre $\mathbb{R}$ puede haber espacios elípticos de mayor dimensión y en este caso veremos que si (W, T_2) es elíptico y T_2 es simétrica y no singular, entonces T_2 es o bien definido positiva o bien definido negativa (es decir, $-T_2$ definido positiva). Esto determina el último invariante que necesitaremos: el **signo** de una métrica simétrica (positivo o negativo según lo sea la restricción de T_2 a W).

Proposición 1.15. *Sea (W, T_2) un espacio elíptico. Si $T_2(w, w) > 0$ para algún $w \in W$, entonces $T_2(w', w') > 0$ para todo $w' \in W$.*
En particular, T_2 es o bien definido positiva, o bien definido negativa .

Demostración. Sea $w \in W$ tal que $T_2(w, w) > 0$. Si existiera $w' \in W$ tal que $T_2(w', w') < 0$, la ecuación

$$0 = T_2(w + xw', w + xw') = T_2(w, w) + 2xT_2(w, w') + x^2 T_2(w', w')$$

tendría soluciones reales, pues su discriminante

$$4T_2(w, w')^2 - 4T_2(w, w)T_2(w', w') > 0$$

sería positivo. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es una de esas raíces, el vector $w + \lambda w'$ sería isótropo, lo que contradice el hecho de que W sea elíptico. $\square$

Definición 1.16. Diremos que (W, T_2) tiene **signo positivo** (resp. negativo) si T_2 es definido positiva (resp. definido negativa).

Teorema 1.17. *Dos espacios elípticos (W, T_2) y (W', T_2') sobre $\mathbb{R}$ son isométricos si tienen la misma dimensión y el mismo signo.*

Demostración. Basta demostrarlo cuando T_2 sea definido positiva. Si (W, T_2) y (W', T_2') son isométricos por definición las dimensiones coinciden. Por otra parte, como T_2 es simétrica y definido positiva entonces (W, T_2) es un espacio euclídeo y por tanto existe una base ortonormal respecto de la que la matriz de T_2 es la identidad. Por último, al ser (W, T_2) y (W', T_2') isométricos, existen bases respecto de las cuales sus matrices son las mismas, luego respecto de las cuales la matriz de T_2' es también la identidad, lo que prueba que T_2' es también definido positiva y por tanto de igual signo que T_2. El recíproco es análogo. $\square$

Puede probarse (usando una versión del Teorema de Witt, que no enunciaremos ni demostraremos en estas notas) que el signo de la parte elíptica no depende de la descomposición del espacio E escogida. Por lo tanto, podemos definir:

Definición 1.18. Llamaremos **signo** de una geometría (E, T_2) al signo de su restricción a la parte elíptica de cualquiera de sus descomposiciones.

Finalmente tenemos que:

Teorema 1.19. *Dos geometrías simétricas (E, T_2) y (E', T_2') son equivalentes si y solo si tienen el mismo rango, índice y signo.*

2. Cálculo del rango, índice y signo de una métrica simétrica sobre $\mathbb{R}$.

Veamos ahora el cálculo práctico de los invariantes que clasifican las métricas simétricas sobre $\mathbb{R}$. Recordemos que dos geometrías (E, T_2) y (E', T_2') son isométricas cuando existe un isomorfismo $f\colon E' \simeq E$ tal que $T_2'(u', v') = T_2\big(f(u'), f(v')\big)$, que en coordenadas es un cambio de base $G' = B^tGB$, siendo B la matrix asociada a f en las bases correspondientes y G y G' las de T_2 y T_2' respectivamente. Por lo tanto, tenemos que clasificar matrices G bajo la equivalencia

$$G' \sim G \iff G' = B^tGB\,.$$

Esto es muy parecido (y de hecho es lo que nos va a ayudar) a la clasificación de endomorfismos, que en coordenadas equivale a clasificar matrices cuadradas A donde, no obstante, la equivalencia era

$$A' \sim A \iff A' = B^{-1}AB\,.$$

¿Cómo construimos un endomorfismo a partir de una métrica simétrica? Si la equivalencia es distinta, ¿podemos usar la clasificación de endomorfismos para clasificar métricas simétricas sobre $\mathbb{R}$?

2.1. Diagonalización de métricas simétricas.

Vamos a construir un endomorfismo asociado a una pareja de métricas. Sea E un espacio vectorial real de dimensión n y T_2 una métrica **simétrica** sobre E. Consideremos una métrica **euclídea** auxiliar $\overline{T_2}$ y sean $\phi_{T_2} : E \longrightarrow E^*$ y $\phi_{\overline{T}_2} : E \longrightarrow E^*$ las polaridades asociadas a las métricas T_2 y $\overline{T_2}$ respectivamente.

Definición 2.1. Definimos el **endomorfismo** T **asociado** a la pareja de métricas $(T_2, \overline{T_2})$ como la aplicación lineal $T = \phi_{\overline{T}_2}^{-1} \circ \phi_{T_2}$:

$$T\colon E \xrightarrow{\phi_{T_2}} E^* \xrightarrow{\phi_{\overline{T}_2}^{-1}} E\,.$$

Si G y $\overline{G}$ son las matrices asociadas a T_2 y $\overline{T}_2$ (respectivamente) en una misma base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E, la matriz asociada a T en esa base es $\overline{G}^{-1}G$. En particular, si la matriz de la métrica euclídea en esa base es la identidad, $\overline{G} = \mathrm{Id}$ (recordemos que existen bases ortonormales en los espacios euclídeos), la matriz del endomorfismo coincide con la matriz G de la métrica simétrica T_2.

Observemos que por ser T_2 simétrica y por definición de $T = \phi_{\overline{T}_2}^{-1} \circ \phi_{T_2}$ se tiene:

$$\overline{T}_2\big(T(e), e'\big) = \phi_{\overline{T}_2}\big(T(e)\big)(e') = \phi_{T_2}(e)(e') = T_2(e, e') = T_2(e', e) = \overline{T}_2\big(T(e'), e\big) = \overline{T}_2\big(e, T(e')\big)\,,$$

luego también:

$$\overline{T}_2\big(p(T)(e), e'\big) \overset{(*)}{=} \overline{T}_2\big(e, p(T)(e')\big)$$

para cualesquiera $e, e' \in E$ y cualquier polinomio $p(x) \in k[x]$.

Proposición 2.2. *El endomorfismo T asociado a $(T_2, \overline{T}_2)$ es diagonalizable sobre* $\mathbb{R}$.

Demostración. Por el criterio de diagonalización del polinomio anulador veamos que dicho polinomio descompone en producto de factores lineales distintos.
Sea $m_T(x) = p_1(x)^{m_1} \cdots p_r(x)^{m_r}$ la descomposición en factores primos del polinomio anulador de T. Por el primer teorema de descomposición tenemos que:

$$E \simeq \ker p_1(T)^{m_1} \oplus \cdots \oplus \ker p_r(T)^{m_r}$$

y que el polinomio anulador de cada $\ker p_i(T)^{m_i}$ es $p_i(T)^{m_i}$.

- Comprobemos que los factores primos son todos diferentes, es decir, que las multiplicidades m_i valen 1. En efecto, si $p_i(x)$ apareciera con multiplicidad $m_i > 1$ entonces, para todo $e \in \ker p_i(T)^{m_i}$ se tiene que:
$$\overline{T}_2\big(p_i(T)^{m_i-1}(e), p_i(T)^{m_i-1}(e)\big) \overset{(*)}{=} \overline{T}_2\big(p_i(T)^{m_i}(e), p_i(T)^{m_i-2}(e)\big) = 0$$
y como $\overline{T}_2$ es euclídea entonces $p_i(T)^{m_i-1}(e) = 0$, lo que contradice el hecho de que el polinomio anulador de $\ker p_i(T)^{m_i}$ es $p_i(T)^{m_i}$.
- Veamos ahora que $p_i(x)$ son todos lineales. Si existiera algún $p_i(x)$ no lineal, entonces sería un polinomio irreducible en $\mathbb{R}$ y por tanto, un polinomio de grado 2 sin raíces reales:
$$p_i(x) = (x-a)^2 + b^2\,, \qquad \text{con} \qquad a, b \in \mathbb{R}\,.$$
Como $p_i(x)$ divide al anulador, existe $e \in E$ no nulo tal que:
$$0 = p_i(T)(e) = (T-a)^2(e) + b^2 e\,,$$
lo que implica que:
$$\overline{T}_2\big((T-a)(e), (T-a)(e)\big) = \overline{T}_2\big((T-a)^2(e), e\big) = -b^2\overline{T}_2(e,e)\,.$$
Como $\overline{T}_2$ es euclídea y $e \neq 0$ ha de ser $\overline{T}_2(e,e) > 0$, pero entonces:
$$\overline{T}_2\big((T-a)(e), (T-a)(e)\big) < 0\,,$$
llegando a cotradicción con que $\overline{T}_2$ sea euclídea.

Por lo tanto, el polinomio anulador descompone en producto de factores lineales distintos:
$$m_T(x) = (x-\lambda_1)\cdot \cdots \cdot (x-\lambda_r)\,.$$
□

Proposición 2.3. *Vectores propios de T de valores propios distintos son ortogonales para ambas métricas.*

Demostración. Sea $e \in E$ un vector propio de valor propio no nulo $\lambda \in k$, $T(e) = \lambda e$, y sea $e' \in E$ un vector propio de valor propio no nulo $\lambda' \neq \lambda$. Se tiene que:
$$\lambda\overline{T}_2(e,e') = \overline{T}_2\big(T(e), e'\big) = \overline{T}_2\big(e, T(e')\big) = \lambda'\overline{T}_2(e,e') \implies (\lambda-\lambda')\overline{T}_2(e,e') = 0\,,$$
y como $\lambda' \neq \lambda$ entonces $\overline{T}_2(e,e') = 0$, es decir, son ortogonales para $\overline{T}_2$. De aquí se sigue que:
$$0 = \overline{T}_2(e,e') \implies 0 = \lambda\overline{T}_2(e,e') = \overline{T}_2\big(T(e), e'\big) = T_2(e,e')$$
y por lo tanto son también ortogonales para T_2. □

Teorema 2.4 (de diagonalización de métricas simétricas sobre $\mathbb{R}$). *Existe una base ortonormal respecto de $\overline{T_2}$ en la que la matriz de la métrica simétrica T_2 es diagonal y cuyas entradas diagonales son los valores propios de T.*

Demostración. Como $(E, \overline{T}_2)$ es euclídeo, sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de E ortonormal para $\overline{T}_2$, en la que la matriz asociada a $\overline{T}_2$ es la identidad. Sea G la matriz de T_2 en la base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E.
Entonces, en esta base la matriz del endomorfismo T asociado a esta pareja de métricas coincide con G:
$$T_G\colon E_{\{e_i\}} \xrightarrow{G} E^* \xrightarrow{\mathrm{Id}} E_{\{e_i\}}\,.$$
Como el endomorfismo T es diagonalizable existe una base de vectores propios $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, en la que su matriz asociada es diagonal D y cuyas entradas son los valores propios de T.
$$T_D\colon E_{\{v_i\}} \xrightarrow{G_1} E^* \xrightarrow{\overline{G}_1^{-1}} E_{\{v_i\}}\,.$$
No obstante, la matriz G_1 de T_2 en la base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ puede no ser todavía la matriz diagonal D con entradas diagonales los vectores propios de T, de hecho $D = \overline{G}_1^{-1} \cdot G_1$,

donde $\overline{G}_1$ es la matriz de $\overline{T}_2$ en la base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Ortonormalizando entonces esta base respecto de la métrica euclídea $\overline{T}_2$, se obtiene una nueva base $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ en la que la matriz de la métrica euclídea $\overline{T}_2$ es la identidad y, por tanto, en la que la matriz de la métrica simétrica T_2 coincide con la del endomorfismo asociado, que en esa base es también D.

$$T_D\colon E_{\{u_i\}} \xrightarrow{D} E^* \xrightarrow{\mathrm{Id}} E_{\{u_i\}}\,.$$

En definitiva, en la base $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ la matriz de T_2 es diagonal y los coeficientes de la diagonal son los valores propios del endomorfismo T asociado a la pareja de métricas $(T_2, \overline{T}_2)$. $\square$

Llamaremos a esta base **base ortonormal de diagonalización**, entendiendo que es **ortonormal respecto de la métrica euclídea auxiliar** $\overline{T}_2$ y, como se ha demostrado, **ortogonal respecto de la métrica** T_2.

Ejemplo 2.5. Diagonalicemos la métrica de matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

y calculemos una base ortonormal de diagonalización.
El polinomio característico del endomorfismo T, asociado a la métrica y a la métrica auxiliar, de matriz G es $c_T(x) = x(x-4)(x-9)$.
Valores propios de T: $\{0, 4, 9\}$.
Subespacios de vectores propios: $\ker(T) = \langle v_1 = (1,2,2)\rangle$, $\ker(T-4I) = \langle v_2 = (-2,1,0)\rangle$, $\ker(T-9I) = \langle v_3 = (-2,-4,5)\rangle$.
Forma diagonal de la métrica

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Base ortonormal de diagonalización: como los vectores propios de valores propios diferentes son ortogonales para calcular la base ortonormal de diagonalización basta dividir cada vector propio por su módulo respecto de la métrica euclídea auxiliar

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{3}(1,2,2),\ u_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0),\ u_3 = \frac{v_3}{|v_3|} = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-2,-4,5)$$

2.2. Cálculo efectivo del rango, índice y signo.

Sea $(T_2, \overline{T}_2)$ una pareja de métricas sobre un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E, donde T_2 es simétrica y $\overline{T}_2$ euclídea, y sea T el endomorfismo asociado a esta pareja.

Definición 2.6. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base en la que la matriz de T_2 es G. Llamaremos **ecuación secular** de la métrica T_2 al polinomio $\det(x\,\mathrm{Id} - G) = |x\,\mathrm{Id} - G| = 0$.

Como vimos en el primer tema, para clasificar endomorfismos bajo la equivalencia:

$$A' \sim A \iff A' = B^{-1}AB\,.$$

usábamos el polinomio característico $\det(x\,\mathrm{Id} - A)$ (que permite calcular los valores propios), porque era invariante por cambios de base: $A' = B^{-1}AB$.
Sin embargo, para clasificar métricas simétricas sobre $\mathbb{R}$ hemos clasificar matrices simétricas G con la equivalencia:

$$G' \sim G \iff G' = B^tGB\,,$$

y aquí, la *ecuación secular* de la métrica $\det(x\,\mathrm{Id} - G)$ *ya no es siempre invariante* por cambios de base, pues si G' es la matriz de T_2 en otra base y B es la matriz del cambio de base, se verifica que $G' = B^tGB$ y por tanto en general se tiene que:

$$|x\,\mathrm{Id} - G'| = |x\,\mathrm{Id} - B^tGB| \neq |x\,\mathrm{Id} - G|\,.$$

Por lo tanto, si cambiamos de base, aunque el endomorfismo asociado siga diagonalizando, los coeficientes de su forma diagonal podrían ser otros. Esto nos dice que para clasificar estas métricas, no nos valen como invariantes los valores propios de T.
Este problema se resuelve usando la **Ley de Inercia de Sylvester:** el número de raíces nulas, r_0, el número de raíces positivas, r_+, y el número de raíces negativas, r_-, de la ecuación secular, $\det(x\,\mathrm{Id} - G)$, de una métrica simétrica T_2 son invariantes por cambios de base.
Esto es lo que nos va a permitir calcular de manera efectiva el rango, el índice y el signo de una métrica simétrica sobre $\mathbb{R}$.

Observación 2.7. Si B es una matriz ortogonal, es decir, una matriz que verifica que $B^tB = I$, entonces:

$$|x\,\mathrm{Id} - G'| = |x\,\mathrm{Id} - B^tGB| = |xB^tB - B^tGB| = |B^t(x\,\mathrm{Id} - G)B| = |B^t||x\,\mathrm{Id} - G||B| = |x\,\mathrm{Id} - G|\,.$$

Por tanto, en este caso la ecuación secular es invariante por cambios de base.

Teorema 2.8. *Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y T_2 una métrica simétrica sobre E de rango r, índice i y signo* $\mathrm{sig}(T_2)$. *Sea $E = \mathrm{Rad}\,T_2 \perp H_{2i} \perp W$ la descomposición ortogonal de E. Entonces:*

- $\dim_k \mathrm{Rad}\,T_2 = r_0 = n - r$.
- $\dim_k H_{2i} = 2i = r - |r_+ - r_-|$.
- $\dim_k W = |r_+ - r_-|$.

En consecuencia:

$$r = n - r_0 = 2i + |r_+ - r_-|\,; \qquad i = \min\{r_+, r_-\}\,; \qquad \mathrm{sig}(T_2) = \mathrm{sig}(r_+ - r_-)\,.$$

Además, estas fórmulas no dependen de la base escogida.

Demostración. Por lo visto anteriormente, si las fórmulas son ciertas es claro que no dependen de la base elegida. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de E ortonormal de diagonalización en la que la matriz de T (que coincide con la de T_2) es diagonal:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccc|ccc}
0 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & & & & \\
\hline
 & & & \lambda_1 & & & & & & & \\
 & & & & \mu_1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & \lambda_s & & & & \\
 & & & & & & & \mu_s & & & \\
\hline
 & & & & & & & & \alpha_1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & \alpha_m
\end{array}\right)$$

donde hay r_0 raíces nulas del polinomio característico de T, $c_T(x)$, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ son raíces positivas, $\{\mu_1, \dots, \mu_s\}$ son raíces negativas con $s = min\{r_+, r_-\}$, y $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ son todas raíces del mismo signo (que será positivo si $r_+ > r_-$ y negativo si $r_+ < r_-$), luego $m = |r_+ - r_-|$.
Se tiene entonces que $\mathrm{Rad}\,T_2 = \langle e_1, \dots, e_{r_0}\rangle$, que $H_{2s} = \langle e_{r_0+1}, \dots, e_{r_0+2s}\rangle$ es un subespacio hiperbólico y que $W = \langle e_{r_0+2s+1}, \dots, e_{r_0+2s+m}\rangle$ es un subespacio elíptico de signo igual a $\mathrm{sig}(r_+ - r_-)$. Luego $i = s$ y $n = r_0 + 2s + m$, de donde se concluye.

□

Por último, el cálculo efectivo de los invariantes r_0, r_+ y r_- nos lo da la Regla de Descartes (que no demostraremos): dada G la matriz asociada a T_2 en una cierta base se tiene:

- r_+ = número de variaciones de signo entre los coeficientes no nulos de $|x\,\mathrm{Id} - G|$.

- $r_- = \dim E - r_+ - r_0$

Corolario 2.9. *Existe una base de E, que denominaremos **base reducida**, en la que la matriz de la métrica T_2 tiene una forma reducida del tipo:*

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Para obtener una base reducida a partir de una base ortonormal $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de diagonalización del teorema anterior, basta dividir cada vector u *que no esté en el radical* por $\sqrt{T_2(u,u)}$ si $T_2(u,u) > 0$ o por $\sqrt{-T_2(u,u)}$ si $T_2(u,u) < 0$. $\square$

Observación 2.10. Si H es un plano hiperbólico la forma reducida de la restricción de T_2 a H es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En efecto, podemos pensarlo por descarte, pues las posibles formas reducidas de H serían:

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, que no puede ser pues el radical de la restricción no sería $\{0\}$, de hecho sería $\operatorname{Rad} T_{2|H} = \langle e_1 \rangle$ ya que e_1 es ortogonal a sí mismo y a e_2, luego a todos los vectores de H.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, que tampoco puede ser, pues claramente la restricción sería definido positiva en el primer caso y definido negativa en el segundo, luego no podría contener ningún vector isótropo no nulo.
- Por lo tanto, las única formas reducidas posibles son $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Teorema 2.11. *Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y T_2 una métrica simétrica sobre E de rango r, índice i y signo $\operatorname{sig}(T_2)$. Sea $E = \operatorname{Rad} T_2 \perp H_{2i} \perp W$ la descomposición ortogonal de E. Entonces existe una base en la que:*

- $\dim \operatorname{Rad} T_2 = r_0$
- $\dim H_{2i} = 2 \cdot (\#$ *de parejas* $\{1, -1\})$
- $\dim W = |\#1's - \#(-1)'s|$

En consecuencia:

$$r = n - r_0\,; \qquad i = \# \text{ de parejas } \{1,-1\}\,; \qquad \operatorname{sig}(T_2) = \operatorname{sig}(\#1's - \#(-1)'s)\,.$$

Además, estas fórmulas no dependen de la base escogida.

Demostración. Basta reordenar una base reducida para agrupar en la forma reducida las parejas $\{1, -1\}$. $\square$

Teorema 2.12. *Dos métricas simétricas sobre $\mathbb{R}$ son equivalentes si tienen la misma forma reducida.*

Ejemplo 2.13. Clasificar sobre $\mathbb{R}$ la métrica de matriz

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ecuación secular de la métrica con matriz asociada G: $\det(xI - G) = x^4 - 5x^3 - 13x^2 + 21x - 4 = 0$.
Invariantes:

- $r_0 =$ n raíces nulas del polinomio $\det(xI - G) : 0$
- $r_+ =$ n de variaciones de signo entre los coeficientes consecutivos no nulos del polinomio $\det(xI - G) : 3$
- $r_- = n - r_+ - r_0 = 4 - 3 - 0 = 1$

Rango de T_2: $r = n - r_0 = 4$
índice de T_2: $i = \text{mín}\{r_+, r_-\} = 1$
Signo de T_2 = Signo $(r_+ - r_-) = +$
Forma reducida de T_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema de descomposición: $E = H \perp W_{2,+}$, siendo H un plano hiperbólico y W un subespacio elíptico de dimensión 2 en el que la métrica restricción es definido positiva.

3. Formas cuadráticas. Aplicación a la clasificación afín de cónicas.

Definición 3.1. Una **forma cuadrática** es una aplicación:

$$Q : E \longrightarrow k \quad \text{tal que} \quad Q(\lambda e) = \lambda^2 Q(e) \quad \forall \lambda \in k, \forall e \in E\,.$$

Toda métrica simétrica T_2 sobre E tiene asociada una forma cuadrática $Q : E \longrightarrow k$ definida por $Q(e) = T_2(e, e)$ para todo $e \in E$. Recíprocamente a toda forma cuadrática Q le corresponde una métrica simétrica T_2 definida por:

$$T_2(e, e') = \frac{1}{2}[Q(e + e') - Q(e) - Q(e')]$$

Ejercicio 3.2. Demostrar que T_2 así definida es una métrica y es simétrica.

Si $G = (g_{ij})$ es la matriz asociada a una métrica simétrica T_2 en una base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, la expresión en coordenadas respecto de dicha base de la forma cuadrática Q asociada a T_2 es

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + \ldots + g_{nn}x_n^2 + 2\sum_{i<j} g_{ij}x_ix_j$$

Ejemplo 3.3. Sea

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz de T_2 respecto de una base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de E. La expresión en coordenadas respecto de esta base de la forma cuadrática asociada es $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 2xy + 6yz$.

Ejemplo 3.4. Si Q es la forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^3$ definida en coordenadas respecto de una base por la expresión $Q(x, y, z) = 3x^2 - xy + 3xz - 2yz - z^2$, la métrica simétrica asociada tiene por matriz en esa base $\begin{pmatrix} 3 & -1/2 & 3/2 \\ -1/2 & 0 & -1 \\ 3/2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

3.1. Diagonalización de formas cuadráticas.

Los teoremas de clasificación de métricas simétricas reales son aplicables a las formas cuadráticas asociadas. En particular los análogos para formas cuadráticas al Teorema de Diagonalización y la Ley de Inercia de Silvester se pueden enunciar del siguiente modo.

Teorema 3.5. *Dada una forma cuadrática Q en E se puede encontrar una base $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ en la que la expresión de Q en las correspondientes coordenadas $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es de la forma*

$$Q(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_p y_p^2 + \mu_{p+1} y_{p+1}^2 + \ldots + \mu_{p+q} y_{p+q}^2$$

siendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_p > 0$ las p raíces positivas de la ecuación secular de la métrica simétrica asociada y $\mu_{p+1}, \ldots, \mu_{p+q} < 0$ sus q raíces negativas. Los números $p = r_+$ y $q = r_-$ no dependen de la base en que se represente Q.

Es decir, como se sabe, existe una base ortonormal de diagonalización (ortonormal respecto de la métrica euclídea auxiliar) en la que la métrica asociada a Q tiene asociada una matriz diagonal, y por tanto Q respecto de esa base se expresa como sumas y restas de cuadrados siendo el número de términos positivos y el número de términos negativos de esta expresión invariantes por cambios de base.

Ejemplo 3.6. Clasificar las formas cuadráticas

$$Q_1(x, y, z) = x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz - 5yz$$
$$Q_2(x, y, z, t) = 2y^2 - z^2 + t^2 + 4xy - 2xz + 2xt - 4yz - 3zt$$

Calculamos las matrices de las métricas simétricas asociadas, G_1 y G_2, respectivamente

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & -\frac{5}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos las raíces nulas, positivas y negativas de las ecuaciones seculares de G_1 y G_2, y las correspondientes formas reducidas.

$$|xI - G_1| = x^3 - \frac{73}{4}x - \frac{31}{4} \Rightarrow r_0 = 0, r_+ = 1, r_- = 2$$

$$\Rightarrow \text{Forma reducida: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \overline{x}^2 - \overline{y}^2 - \overline{z}^2$$

$$|xI - G_2| = x^4 - 2x^3 - \frac{53}{4}x^2 + \frac{7}{2}x + 19 \Rightarrow r_0 = 0, r_+ = 2, r_- = 2$$

$$\Rightarrow \text{Forma reducida: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t}) = \overline{x}^2 - \overline{y}^2 + \overline{z}^2 - \overline{t}^2$$

Ejemplo 3.7. Ejemplo Diagonalizar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2xz + 2yz$, calculando una base ortonormal de diagonalización y la expresión de Q en el nuevo sistema de coordenadas definido por esta base.
Matriz G de la métrica simétrica en la base asociada a las coordenadas (x, y, z),

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecuación secular de G: $(x + 1)(x - 1)(x - 2) = 0$, valores propios: $\{-1, 1, 2\}$.

Base de vectores propios: $\{v_1 = (1, -1, 2), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (-1, 1, 1)\}$
Base ortonormal de diagonalización: $\{u_1 = \frac{v_1}{\sqrt{6}}, u_2 = \frac{v_2}{\sqrt{2}}, u_3 = \frac{v_3}{\sqrt{3}}\}$.
Matriz de cambio de base: $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

Ejemplo

Forma diagonal: $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Expresión de Q en el nuevo sistema de coordenadas $\{\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\}$, $Q(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = -\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + 2\overline{z}^2$, donde

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \overline{x} = \frac{1}{\sqrt{6}}(x - y + 2z) \\ \overline{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ \overline{z} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-x + y + z) \end{cases}$$

son las expresiones que dan explícitamente el cambio de coordenadas de $\{x, y, z\}$ a $\{\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\}$ en la que la forma cuadrática se expresa como suma y resta de cuadrados.

3.2. Aplicación a la clasificación afín de cónicas.

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3.
Sean $E_\infty = \langle e_1, e_2 \rangle$ un plano vectorial de E y e_0 un vector de E que no está en E_∞, $e_0 \notin E_\infty$. Los vectores $\{e_0, e_1, e_2\}$ forman una base de E, y si representamos por (x_0, x_1, x_2) sus funciones coordenadas, el *plano afín* H definido por

$$H = e_0 + E_\infty$$

tiene por ecuación implícita $x_0 = 1$. En este sistema de coordenadas la ecuación implícita del *plano del infinito* E_∞ es $x_0 = 0$.

Definición 3.8. Una cónica de H es una familia $\mathcal{C} = \{\lambda T_2\}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, formada por una métrica simétrica T_2 sobre E y todas sus proporcionales.
El *lugar geométrico definido por la cónica* $\mathcal{C}$ es la intersección del plano afín H con el conjunto de los vectores de E que son isótropos para la métrica T_2

$$\textit{locus de } \mathcal{C} = \{e \in E : T_2(e, e) = 0\} \cap H$$

En coordenadas, el locus de $\mathcal{C}$ representa la ecuación de una *curva de grado 2* de H. En efecto, si $G = (g_{ij})$ es la matriz de un representante T_2 de la cónica $\mathcal{C}$ respecto de una base $\{e_0, e_1, e_2\}$ de E en la que la ecuación de H es $x_0 = 1$, se tiene

$$\textit{locus de } \mathcal{C} = \left\{(1, x_1, x_2) \in H : \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\},$$

de donde resulta

$$g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{01}x_1 + 2g_{02}x_2 + g_{00} = 0\,.$$

Observación 3.9. La parte cuadrática de esta ecuación, $g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + 2g_{12}x_1x_2$, se corresponde con la matriz de la restricción de la métrica T_2 al plano del infinito E_∞,

$$\left(T_{2|E_\infty}\right) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.10.

$$H = \{(1,x,y)\} \subset \mathbb{R}^3 \quad , \quad \mathcal{C} = \{\lambda T_2\} \quad , \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\textit{El locus de } \mathcal{C} \equiv \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

es la curva de grado dos del plano $XY : x^2 + 2y^2 + 2xy - 6x + 4y + 1 = 0$.

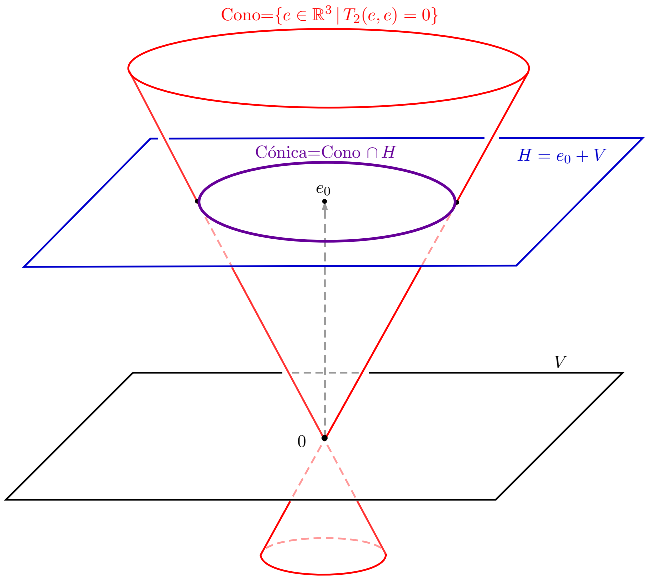


FIGURA 1. Cónica. En las notas $V = E_\infty$.

Definición 3.11. Una *cónica* $\mathcal{C} = \{\lambda T_2\}$ es *irreducible o no degenerada* si lo es cualquiera de sus métricas representantes.

Ejemplo 3.12. Las cónicas de ecuaciones

(a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, **(b)** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, **(c)** $y^2 - 2px = 0$, donde $a, b, p \in \mathbb{R} - \{0\}$

son irreducibles pues las métricas representantes, de matrices

$$\textbf{(a)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b^2 \end{pmatrix}, \quad \textbf{(b)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/b^2 \end{pmatrix}, \quad \textbf{(c)} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/p \end{pmatrix},$$

son no singulares.

Definición 3.13. Un vector $e_0 \in E$ define un *centro de la cónica* $\mathcal{C}$ si $e_0 \notin E_\infty$ y $T_2(e_0, e) = 0$ para todo $e \in E_\infty$.

Proposición 3.14. *Si* $\mathcal{C} = \{\lambda T_2\}$ *es una cónica irreducible y tiene centro éste es único.*

Demostración. Sea $e_0 \in E$ un vector que define un centro de la cónica $\mathcal{C}$.
Como T_2 es una métrica irreducible el subespacio ortogonal al hiperplano del infinito, $E_\infty^\perp$, es una recta, luego e_0 es un generador de ella pues es ortogonal a E_∞, y como $e_0 \notin E_\infty$ esta recta $\langle e_0 \rangle$ corta a H en un único punto, $c = \langle e_0 \rangle \cap H$, que es el centro de la cónica. $\square$

Corolario 3.15. *Si $\mathcal{C} = \{\lambda T_2\}$ es una cónica irreducible con centro existe una base $\{e_0, e_1, e_2\}$ de E en la que las coordenadas del centro son*

$$c = \big(1, \frac{\operatorname{Adj} g_{10}}{\operatorname{Adj} g_{00}}, \frac{\operatorname{Adj} g_{20}}{\operatorname{Adj} g_{00}}\big)\,,$$

donde $G = (g_{ij})$ es la matriz, respecto de esa base, de una métrica representante de $\mathcal{C}$.

Demostración. Respecto de la base $\{e_0, e_1, e_2\}$ de E, en la que e_0 es el vector que define el centro, $E_\infty^\perp = \langle e_0\rangle$, y $\{e_1, e_2\}$ una base de E_∞, la ecuación implícita de E_∞ es $x_0 = 0$, luego su subespacio incidente está generado por la forma lineal ω de coordenadas en la base dual $\omega = (1, 0, 0)$.
Si $G = (g_{ij})$ es la matriz de T_2 en esta base se tiene que $E_\infty^\perp = \langle G^{-1}\omega\rangle = \langle e_0\rangle$ con

$$e_0 = \big(\frac{\operatorname{Adj} g_{00}}{|G|}, \frac{\operatorname{Adj} g_{10}}{|G|}, \frac{\operatorname{Adj} g_{20}}{|G|}\big)\,,$$

luego el centro es

$$c = \big(1, \frac{\operatorname{Adj} g_{10}}{|G_\infty|}, \frac{\operatorname{Adj} g_{20}}{|G_\infty|}\big)\,,$$

donde $\operatorname{Adj} g_{00} = |G_\infty|$ es el determinante de la restricción de G a E_∞. □

Definición 3.16. Sea $\mathcal{C} = \{\lambda T_2\}$ una cónica de H. Se llaman rango r e índice i de la cónica a los de cualquiera de las métricas que la representan. Se llaman rango r_∞ e índice i_∞ de la cónica en el infinito a los de la restricción a E_∞ de cualquiera de las métricas que la representan.

$$r = \operatorname{rg}(T_2)\,,\ i = \text{indice }(T_2)\,; \quad r_\infty = \operatorname{rg}(T_{2|E_\infty})\,,\ i_\infty = \text{indice }(T_{2|E_\infty})$$

Definición 3.17. Dos cónicas $\mathcal{C} = \{\lambda T_2\}$ y $\mathcal{C}' = \{\mu T_2'\}$ de H son afínmente equivalentes, $\mathcal{C} \sim \mathcal{C}'$, si existe una automorfismo $f\colon E \simeq E$ que deja invariante H ($f(H) \subseteq H$) y para cada $\lambda \in R$ existe $\mu \in R$ tal que $\lambda T_2(f(e), f(e')) = \mu T_2'(e, e')$ para todos $e, e' \in E$.

Teorema 3.18. *Si dos cónicas $\mathcal{C} = \{\lambda T_2\}$ y $\mathcal{C}' = \{\mu T_2'\}$ de H son afínmente equivalentes, entonces:*

$$r = r'\,,\ i = i'\,; \quad r_\infty = r'_\infty\,,\ i_\infty = i'_\infty\,.$$

Demostración. Como $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son afínmente equivalentes existe un automorfismo f de E que transforma la familia $\{\lambda T_2\}$ en la familia $\{\mu T_2'\}$. Además, como f deja invariante H, f restringe a un automorfismo $f_\infty\colon E_\infty \simeq E_\infty$ de modo que transforma la métrica $T_{2|E_\infty}$ en la métrica $\mu T'_{2|E_\infty}$ para cierto $\mu \in \mathbb{R}$. Puesto que el rango y el índice de una métrica son invariantes por cambio de base se concluye. □

Demostraremos que el recíproco de este teorema también es cierto. Para ello obtendremos primero las ecuaciones reducidas afines de las cuádricas.

3.2.1. Ecuaciones reducidas de las cónicas con centro. .
Sea $e_0 \in H$ un centro de la cónica $\mathcal{C} = \{\lambda T_2\}$ y $\{e_1, e_2\}$ una base reducida para $T_{2|E_\infty}$. En la base $\{e_0, e_1, e_2\}$ de E la matriz de T_2 es:

$$\begin{pmatrix} T_2(e_0, e_0) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}\,,$$

donde α y β pueden ser 0, 1 o −1. Se presentan dos casos:

(a) Si $T_2(e_0, e_0) = 0$ las posibilidades son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En todos ellos se puede comprobar que $r = r_\infty$ e $i = i_\infty$.

(*b*) Si $T_2(e_0,e_0)=\gamma\neq 0$, tomando como representante inicial de la cónica $\frac{-1}{\gamma}T_2$ podemos suponer que $T_2(e_0,e_0)=-1$. Las posibilidades son:

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

En los casos primero y tercero se tiene que $r=r_\infty+1$ e $i=i_\infty+1$; en los restantes es $r=r_\infty+1$ e $i=i_\infty$.

3.2.2. Ecuaciones reducidas de las cónicas sin centro. .
Si la cónica no tiene centro, entonces todo vector en $E_\infty^\perp$ está en E_∞, es decir, $E_\infty^\perp\subseteq E_\infty$ y se tiene:

$$\operatorname{Rad}T_{2|E_\infty}:=\{e\in E_\infty\,|\,T_{2|E_\infty}(e,e')=0\,\forall e'\in E_\infty\}=E_\infty\cap E_\infty^\perp=E_\infty^\perp\,,$$

$$\operatorname{Rad}T_2\subseteq E_\infty^\perp=\operatorname{Rad}T_{2|E_\infty}\subseteq E_\infty\,.$$

Podemos entonces encontrar vectores

$$e_1\in\operatorname{Rad}T_{2|E_\infty}\quad\text{tal que}\quad e_1\notin\operatorname{Rad}T_2$$

$$u\in E\quad\text{tal que}\quad u\notin E_\infty$$

de modo que $T_2(u,e_1)=\beta\neq0$ y la matriz de T_2 restringida al plano $\langle u,e_1\rangle$ sea $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\beta&0\end{pmatrix}$. Se tiene entoces que $\langle u,e_1\rangle$ define un plano hiperbólico y se puede encontrar otra base $\{e_0,e_1\}$ tal que la matriz sea $\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$. Tomando entonces un vector e_2 ortogonal al plano $\langle e_0,e_1\rangle$ las posibilidades para la matriz de T_2 en la base reducida $\{e_0,e_1,e_2\}$ son:

$$\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

En todos estos casos se tiene $r=r_\infty+2$ e $i=i_\infty+1$, pues:

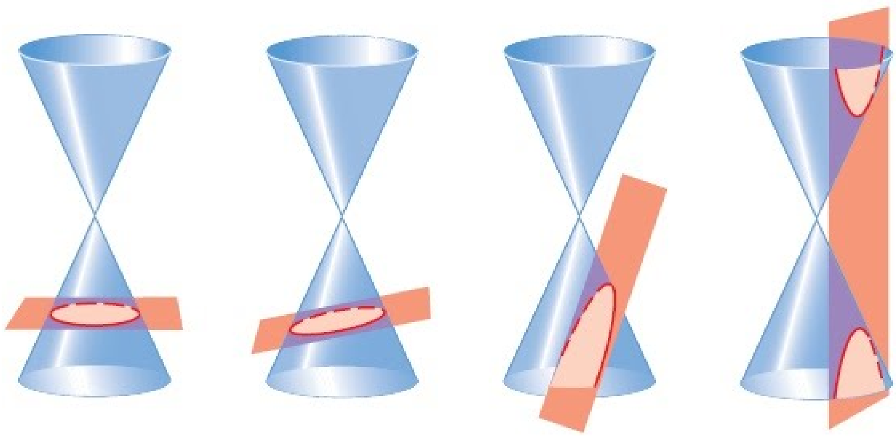
$$\dim_{\mathbb{R}}\operatorname{Rad}T_2=\dim_{\mathbb{R}}E_\infty^\perp=\dim_{\mathbb{R}}E-\dim_{\mathbb{R}}E_\infty+\dim_{\mathbb{R}}\operatorname{Rad}T_2=1+r_0\,.$$

Teorema 3.19. *La condición necesaria y suficiente para que dos cónicas $\mathcal{C}=\{\lambda T_2\}$ y $\mathcal{C}'=\{\mu T_2'\}$ de H sean afínmente equivalentes es que tengan iguales sus rangos, índices, rangos en el infinito e índices en el infinito,*

$$r=r'\,,\ i=i'\,;\quad r_\infty=r'_\infty\,,\ i_\infty=i'_\infty\,.$$

Utilizando este teorema obtenemos el siguiente cuadro de:
Clasificación afín de cónicas en $H\subset\mathbb{R}^3$

	r	3 (*Irreducibles*)		2		1	0
r_∞	$i_\infty \backslash i$	1	0	1	0	0	0
2	1	*Hipérbola* $x^2 - y^2 = 1$		*Par de rectas reales no paralelas* $x^2 - y^2 = 0$			
	0	*Elipse real* $x^2 + y^2 = 1$	*Elipse imaginaria* $x^2 + y^2 = -1$		*Par de rectas imaginarias no paralelas* $x^2 + y^2 = 0$		
1	0	*Parábola* $y^2 = 2x$		*Par de rectas reales paralelas* $x^2 = 1$	*Par de rectas imaginarias paralelas* $x^2 = -1$	*Recta real doble* $x^2 = 0$	
0	0			*Recta real* $x = 0$		*Conjunto vacío*	*Plano afín*



Círculo Elipse Parábola Hipérbola

Generalización: clasificación afín de cuádricas.
Dado un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E de dimensión $n+1$ denotemos $E_\infty = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ y sea $e_0 \in E$ tal que $e_0 \notin E_\infty$. Se tiene que $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ son una base de E y el hiperplano afín $H = e_0 + E_\infty$ tiene ecuación $x_0 = 1$, siendo $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ las funciones coordenadas. Se llama cuádrica en H a una familia $\mathcal{C} = \{\lambda T_2\}$ de métricas simétricas en E (con $\lambda \in \mathbb{R}$) y el lugar geométrico de la cuádrica $\mathcal{C}$ es $\{e \in E \,|\, T_2(e,e) = 0\} \cap H$, que en coordenadas representa la ecuación de una hipersuperficie de grado 2 en H. Las cónicas son cuádricas sobre un plano afín.
De modo análogo a como hicimos con las cónicas, pueden estudiarse las cuádricas en función de si tienen o no centro y dar su forma reducida, lo que permite clasificarlas en términos del rango, el índice y el rango y el índice para la restricción a E_∞.

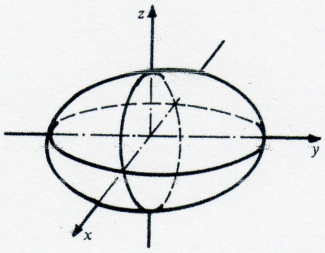
Clasificación afín de cuádricas en $H \subset \mathbb{R}^4$

r		4 (*Irreducibles*)			3 (*Conos y Cilindros*)		2		1	0
r_∞	$i_\infty \backslash i$	2	1	0	1	0	1	0	0	0
3	1	*Hiperboloide reglado* $x^2 - y^2 + z^2 = 1$	*Hiperboloide no reglado* $x^2 - y^2 - z^2 = 1$		*Cono real* $x^2 - y^2 + z^2 = 0$					
	0		*Elipsoide real* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$	*Elipsoide imaginario* $x^2 + y^2 + z^2 = -1$		*Cono imaginario* $x^2 + y^2 + z^2 = 0$				
2	1	*Paraboloide reglado* $y^2 - z^2 - 2x = 0$			*Cilindro hiperbólico* $x^2 - y^2 = 1$		*Par planos reales no paralelos* $x^2 - y^2 = 0$			
	0		*Paraboloide no reglado* $y^2 + z^2 - 2x = 0$		*Cilindro elíptico* $x^2 + y^2 = 1$	*Cilindro imaginario* $x^2 + y^2 = -1$		*Par planos imaginarios no paralelos* $x^2 + y^2 = 0$		
1	0				*Cilindro parabólico* $y^2 - 2x = 0$		*Par planos reales paralelos* $x^2 = 1$	*Par planos imaginarios paralelos* $x^2 = -1$	*Par planos reales coincidentes* $x^2 = 0$	
0	0						*Plano real* $x = 0$		*Conjunto vacío*	*Espacio afín*

Ejemplo 3.20. Clasificar afínmente las cuádricas siguientes

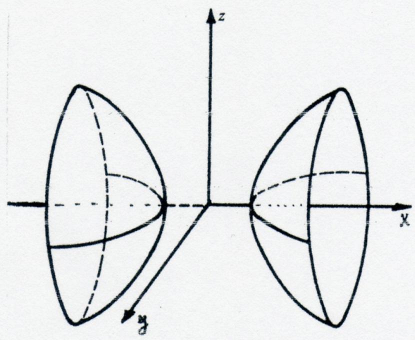
(a) $2x^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 3 = 0$
(b) $2y^2 + 4xz + 2x - 4y + 6z + 5 = 0$

Cuádricas irreducibles



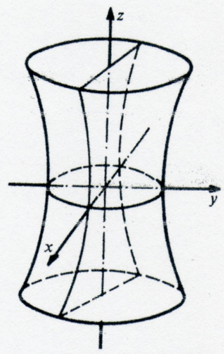
Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



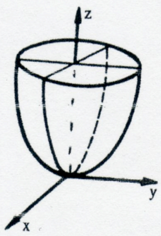
Hiperboloide no reglado (de dos hojas)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



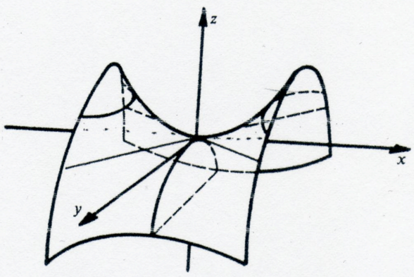
Hiperboloide reglado (de una hoja)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Paraboloide no reglado (Paraboloide elíptico)

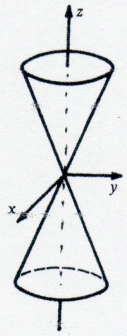
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



Paraboloide reglado (Paraboloide hiperbólico)

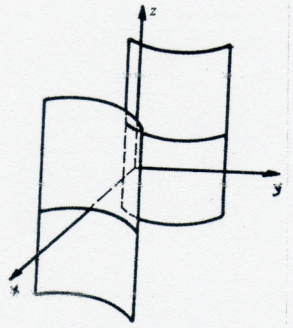
$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Conos y Cilindros



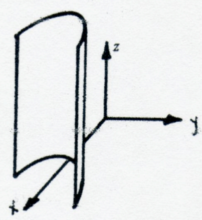
Superficie cónica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



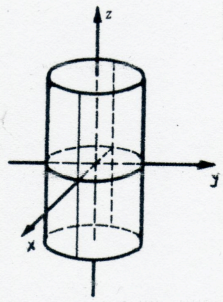
Cilindro hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Cilindro parabólico

$$y^2 = 2px$$



Cilindro elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(a) Las matrices G y G_∞ son

$$G=\begin{pmatrix}-3&0&0&0\\0&2&-1&1\\0&-1&0&-1\\0&1&-1&2\end{pmatrix}\quad;\quad G_\infty=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&0&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

Calculemos los rangos y los índices de la cuádrica y de su restricción al infinito
$p(x)=x^4-x^3-11x^2+5x+6\,,\ r_0(p(x))=0\,,\ r_+(p(x))=2\,,\ r_-(p(x))=2$
$p_\infty(x)=x^3-4x^2+x+2\,,\ r_0(p_\infty(x))=0\,,\ r_+(p_\infty(x))=2\,,\ r_-(p_\infty(x))=1$

$$r=4\,,\,i=2\,;\quad r_\infty=3\,,\,i_\infty=1$$

Es una cuádrica irreducible con centro, de matriz reducida $\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ y ecuación reducida afín $x^2-y^2+z^2=1$. Luego es un *Hiperboloide reglado.*

Calculemos su centro

$$c=\big(1,\frac{\operatorname{Adj} g_{10}}{|G_\infty|},\frac{\operatorname{Adj} g_{20}}{|G_\infty|},\frac{\operatorname{Adj} g_{30}}{|G_\infty|})=(1,0,0,0)\,,$$

esto es, el centro es el origen de coordenadas, $Centro=(0,0,0)$

(b)

$$G=\begin{pmatrix}5&1&-2&3\\1&0&0&2\\-2&0&2&0\\3&2&0&0\end{pmatrix}\quad;\quad G_\infty=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}$$

- $p(x)=x^4-7x^3-8x^2+36x\,,\ r_0(p(x))=1\,,\ r_+(p(x))=2\,,\ r_-(p(x))=1$
- $p_\infty(x)=x^3-2x^2-4x+8\,,\quad r_0(p_\infty(x))=0\,,\ r_+(p_\infty(x))=2\,,\ r_-(p_\infty(x))=1$

Los rangos y los índices de la cuádrica y de su restricción al infinito son

$$r=3\,,\,i=1\,;\quad r_\infty=3\,,\,i_\infty=1$$

Es una cuádrica degenerada con centro, de matriz reducida $\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ y ecuación reducida afín $x^2-y^2+z^2=0$, que representa una *Superficie cónica real.*

Problemas resueltos

3.1. *Clasificar afínmente las cónicas siguientes*
(a) $x^2-2xy+y^2+4x-6y+1=0$
(b) $x^2+4xy+4y^2-2x-4y-3=0$

Solución.

(a) *Escribamos la matriz G de la métrica T_2 y la matriz G_∞ de su restricción al infinito*

$$G=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&1&-1\\-3&-1&1\end{pmatrix}\quad;\quad G_\infty=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

Calculemos el número de raíces nulas r_0, el número de raíces positivas r_+ y el número de raíces negativas r_- de la ecuación secular de la métrica T_2 y de la métrica $T_{2|E_\infty}$

- $p(x)=|xI-G|=x^3-3x^2-11x+1\,,\ r_0(p(x))=0\,,\ r_+(p(x))=2\,,\ r_-(p(x))=1$
- $p_\infty(x)=|xI-G_\infty|=x^2-2x\,,\quad r_0(p_\infty(x))=1\,,\ r_+(p_\infty(x))=1\,,\ r_-(p_\infty(x))=0$

Luego los rangos y los índices de T_2 y de su restricción al infinito son

$$r=3\,,\,i=1\,;\quad r_\infty=1\,,\,i_\infty=0$$

Por tanto, es una cónica irreducible sin centro de matriz reducida $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y ecuación reducida afín* $y^2 - 2x = 0$*, esto es, una* Parábola.

(b)

$$G = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad G_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- $p(x) = |xI - G| = x^3 - 2x^2 - 20x\,,\ r_0(p(x)) = 1\,,\ r_+(p(x)) = 1\,,\ r_-(p(x)) = 1$
- $p_\infty(x) = |xI - G_\infty| = x^2 - 5x\,,\quad r_0(p_\infty(x)) = 1\,,\ r_+(p_\infty(x)) = 1\,,\ r_-(p_\infty(x)) = 0$

Los rangos y los índices de la métrica T_2 *y de su restricción al infinito son*

$$r = 2\,,\, i = 1\,; \quad r_\infty = 1\,,\, i_\infty = 0$$

Es una cónica degenerada con centro, de matriz reducida $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *y ecuación reducida afín* $x^2 - 1 = 0$*, que representa una* Par de rectas reales y paralelas.

3.2. *Calcular el centro, los ejes principales y la ecuación reducida métrica de la curva de grado dos del plano real de ecuación*

$$3x^2 + 3y^2 - 2xy + 2x - 4y + 1 = 0$$

Solución.

Sea G la matriz de una métrica T_2 representante de la cónica en $H \subset \mathbb{R}^3$ y G_∞ su restricción al infinito.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad G_\infty = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|xI - G| = x^3 - 7x^2 + 9x + 3 \quad ; \quad |xI - G_\infty| = (x-2)(x-4)$$

Se tiene

$$\left.\begin{aligned} r &= 3 \\ i &= 1 \\ r_\infty &= 2 \\ i_\infty &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Cónica irreducible con centro: } x^2 + y^2 = 1 \ (\textit{Elipse real})$$

(a) Centro de la elipse$=\big(-\dfrac{1}{8}, \dfrac{5}{8}\big)$

Por el Corolario 3.15,

$$c = \big(1, \frac{\operatorname{Adj} g_{10}}{|G_\infty|}, \frac{\operatorname{Adj} g_{20}}{|G_\infty|}\big) = (1, -\frac{1}{8}, \frac{5}{8})$$

(b) Calculemos una base ortonormal de diagonalización para G_∞.

$\ker(G_\infty - 2I) = \langle(0,1,1)\rangle \quad ; \quad \ker(G_\infty - 4I) = \langle(0,1,-1)\rangle$

$\{u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1),\ u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)\}$ es la base buscada.

(c) En la base $\{c, u_1, u_2\}$ la matriz de T_2 es

$$\begin{pmatrix} T_2(c,c) & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\ ,\ \text{con } T_2(c,c) = -\frac{3}{8}$$

Luego la ecuación reducida métrica de la elipse es

$$\frac{\bar{x}^2}{3/16} + \frac{\bar{y}^2}{3/32} = 1\,,$$

donde $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son las coordenadas asociadas a la base $\{u_1, u_2\}$.

(d) Ecuaciones de la transformación afín efectuada para pasar del sistema de referencia inicial en H, en el que las coordenadas son $\{x, y\}$, al sistema de referencia de origen c y ejes las rectas $c + \langle u_1 \rangle$, $c + \langle u_2 \rangle$, respecto del que las coordenadas son $\{\bar{x}, \bar{y}\}$.

Si B representa la matriz del cambio de base realizado en E_∞, esto es $B = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, componiendo el automorfismo de cambio de base con la traslación de vector c se obtienen las ecuaciones

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1/8\\ 5/8\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases}\bar{x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y - \frac{4}{8})\\ \bar{y} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x - y + \frac{6}{8})\end{cases}$$

(e) Los ejes principales de la elipse son las rectas $c + \langle u_1 \rangle$, $c + \langle u_2 \rangle$ de ecuaciones respectivas

$$\bar{y} = 0 \Rightarrow x - y + \frac{6}{8} = 0 \quad ; \quad \bar{x} = 0 \Rightarrow x + y - \frac{4}{8} = 0$$

(f) Las medidas sobre los semiejes, a y b, la excentricidad y los focos F y F' de la elipse, respecto del sistema de referencia inicial, son

$$a = \sqrt{\frac{3}{16}} \quad ; \quad b = \sqrt{\frac{3}{32}}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{3}{32}} \Longrightarrow \textit{Excentricidad} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\bar{F} = (\sqrt{\frac{3}{32}}, 0) \Longrightarrow F = (\frac{\sqrt{3} - 1}{8}, \frac{\sqrt{3} + 5}{8})$$

$$\bar{F}' = (-\sqrt{\frac{3}{32}}, 0) \Longrightarrow F' = (\frac{-\sqrt{3} - 1}{8}, \frac{-\sqrt{3} + 5}{8})$$

3.3. *Calcular el vértice, los ejes principales, la ecuación reducida métrica, el foco y la directriz de la parábola del ejemplo 3.1*

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$$

Solución.
Sean G y G_∞ como en el ejemplo anterior.

$$G = \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -1\\ -3 & -1 & 1\end{pmatrix} \quad ; \quad G_\infty = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Tenemos que encontrar una base $\{e, v_1, v_2\}$ en la que la matriz de T_2 es de la forma $\begin{pmatrix}0 & \alpha & 0\\ \alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}$ con $\alpha , \beta \neq 0$. El vector e define el vértice de la parábola y $\{v_1, v_2\}$ es una base ortonormal de diagonalización para G_∞.

(a) Calculemos v_1 y v_2.

$$|xI - G_\infty| = x(x - 2) \Rightarrow \text{Forma diagonal } \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \beta = 2$$

$$\ker G_\infty \equiv x - y = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$$

$$\ker(G_\infty - 2I) \equiv x + y = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$$

(b) Vértice de la parábola $V = (-\dfrac{31}{8}, -\dfrac{11}{8})$

El vector e que define el vértice está en H, luego sus coordenadas son $e = (1, x, y)$, y verifica las condiciones $T_2(e, e) = 0$, $T_2(e, v_1) = \alpha$ y $T_2(e, v_2) = 0$.

Calculemos x e y resolviendo el sistema determinado por la primera y tercera condiciones

$$\left.\begin{array}{l} T_2(e,e)=0 \Rightarrow x^2-2xy+y^2+4x-6y+1=0 \\ T_2(e,v_2)=0 \Rightarrow 5+2x-2y=0 \end{array}\right\} x=-\frac{31}{8}\,, \quad y=-\frac{11}{8} \implies e=(1,-\frac{31}{8},-\frac{11}{8})$$

(c) En la base $\{e,v_1,v_2\}$ la matriz de T_2 es

$$\begin{pmatrix} 0 & T_2(e,v_1) & 0 \\ T_2(e,v_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\,, \text{ con } T_2(e,v_1)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

luego la ecuación reducida métrica de la parábola es $\bar{y}^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\bar{x}$, donde $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son las coordenadas asociadas a la base $\{v_1,v_2\}$.

(d) Ecuaciones de la transformación afín efectuada para pasar del sistema de referencia inicial en H, en el que las coordenadas son $\{x,y\}$, al sistema de referencia de origen e y ejes las rectas $e+\langle v_1\rangle$, $e+\langle v_2\rangle$, respecto del que las coordenadas son $\{\bar{x},\bar{y}\}$.

Si B representa la matriz del cambio de base realizado en E_∞, esto es $B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, componiendo el automorfismo de cambio de base con la traslación de vector e se obtienen las ecuaciones

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-31/8\\-11/8\end{pmatrix} \implies \begin{cases} \bar{x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y+\frac{21}{4}) \\ \bar{y}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-y+\frac{10}{4}) \end{cases}$$

(e) Los ejes principales de la parábola son las rectas $e+\langle v_1\rangle$, $e+\langle v_2\rangle$ de ecuaciones respectivas

$$\text{Eje de simetría } \bar{y}=0 \Rightarrow x-y+\frac{10}{4}=0 \quad ; \quad \bar{x}=0 \Rightarrow x+y+\frac{21}{4}=0$$

(f) Calculemos por último el foco F y la directriz d de la parábola, respecto de las coordenadas iniciales x e y.

Comparando la ecuación reducida métrica $\bar{y}^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\bar{x}$ con $\bar{y}^2=2p\bar{x}$, resulta que $p=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ y las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz son $(p/2,0)$ y $\bar{x}=-p/2$.

En las coordenadas iniciales se tiene

$$F=(-\frac{30}{8},-\frac{10}{8}) \quad ; \quad d\equiv x+y+5=0$$

Ejercicios Propuestos

3.4. *Clasificar afínmente las cónicas siguientes:*

(a) $x^2+2y^2-2x+4y+2=0$
(b) $x^2-2xy+y^2+4x-6y+1=0$
(c) $3x^2-5xy+y^2-x+2y+1=0$
(d) $x^2+4xy+4y^2-2x-4y=3$
(e) $x^2+2y^2+3xy+2x+5y-3=0$
(f) $x^2+y^2+xy+x+y+1=0$
(g) $x^2+y^2-xy-x-y+1=0$
(h) $x^2+4y^2+4xy-2x-4y+2=0$

3.5. *Clasificar afínmente según los valores del parámetro λ la familia de cónicas siguiente:*

$$x^2+(2\lambda^2+1)y^2-2xy=2\lambda^2-3\lambda+1$$

3.6. *Calcular el centro, los ejes principales, la ecuación reducida métrica y la representación gráfica de las curvas de grado dos siguientes:*

$$3x^2-2xy+3y^2+2x-4y+1=0\,, \quad x^2-y^2+2xy-6x+4y+3=0$$

3.7. *Demostar que la curva plana de ecuación*

$$4x^2 + y^2 + 4xy + 6x + 1 = 0\,,$$

es una parábola. Calcular su vértice, eje principal, ecuación reducida métrica y representación gráfica.