6 Ejercicios

1. Consideremos el producto escalar estándar de $\mathbb{R}^3$. Partiendo de las siguientes bases, encuentra bases ortonormales utilizando el método de Gram-Schmidt:

(i) $\beta = \{(1,0,-1),(1,1,0),(0,-1,1)\}$;

(ii) $\beta = \{(1,0,1),(2,1,0),(0,1,1)\}$.

Por último, expresa las coordenadas del vector $(1,1,1)$ en las bases ortonormales obtenidas.

2. Consideremos el producto escalar estándar de $\mathbb{R}^4$. Encuentra una base ortonormal para cada uno de los siguientes subespacios:

(i) $U_1 = \langle (1,-1,0,0),(0,1,1,1),(2,1,0,1)\rangle$;

(ii) $U_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0\}$;

(iii) $U_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z+t=0,\ x+y-z+t=0\}$;

(iv) $U_3^{\perp}$.

3. Sea la forma bilineal $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3.$$

Verifica que f es un producto escalar y encuentra una base ortonormal con respecto de f para el subespacio $W = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}$ utilizando el método de Gram-Schmidt.

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineal definida como:

$$f((x,y,z),(x',y',z')) = xx' - xy' + xz' - yx' + 2yy' + zx' + 3zz'.$$

Prueba que f es un producto escalar y encuentra una base ortonormal con respecto de f para $\mathbb{R}^3$.

5. Supongamos que en el espacio $\mathbb{R}^3$ tenemos el producto escalar $\cdot$ y que $\beta = \{(1,0,-1),(1,-1,-1),(0,1,1)\}$ es una base ortonormal para dicho producto escalar.

(i) Calcula la expresión general del producto escalar $(x,y,z)\cdot(x',y',z')$.

(ii) Encuentra una base ortonormal β' que contenga un vector proporcional a $(1,1,1)$. Verifica que la matriz de cambio de base de β a β' es ortogonal.

6. Sea la forma bilineal $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f((x,y,z),(x',y',z')) = (x,y,z)\cdot(x',y',z') = xx' - xz' + yy' - zx' + 2zz'.$$

(i) Prueba que $\cdot$ es un producto escalar.

(ii) Utilizando la definición, prueba que la aplicación $h(x,y,z) = (y + z, -x + z, y)$ en $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ es una isometría.

(iii) Encuentra una base ortonormal para ese producto escalar y verifica que para esa base, la matriz asociada a la isometría h es ortogonal.

7. Consideremos el producto escalar estándar de $\mathbb{R}^3$. Prueba que la aplicación $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida como:

$$h(x,y,z) = (5x + 2y + 2z, 2x + 2y + z, 2x + y + 2z)$$

es un endomorfismo autoadjunto y encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios. Indica qué relación existe entre la matriz asociada al endomorfismo h con respecto a dicha base, y la matriz asociada a h con respecto a la base canónica.

8. Diagonaliza las siguientes matrices simétricas a través de una matriz ortogonal. Esto es, para cada una de las siguientes matrices simétricas A, encuentra una matriz semejante D y una matriz de paso ortogonal P tales que $D = P^{-1}AP$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$