Problemas T1 (soluciones)

$\boxed{1}$

Calculamos las ecuaciones de $W = \langle (1,-1,0), (0,-1,1) \rangle$:

$(x,y,z) = \lambda(1,-1,0) + \mu(0,-1,1) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda - \mu \\ z = \mu \end{cases} \xRightarrow[\text{en } E2)]{\text{(sustituir}} x + y + z = 0$$

$\overline{V_1} = \overline{V_2} \Rightarrow V_1 - V_2$ cumple $x+y+z = 0$

- $(1,0,0) - (0,1,0) = (1,-1,0) \rightarrow 1-1+0=0 \Rightarrow (1,-1,0) \in W$

  $\Rightarrow \overline{(1,0,0)} = \overline{(0,1,0)}$

- $(1,0,0) - (0,0,1) = (1,0,-1) \rightarrow 1+0-1=0 \Rightarrow (1,0,-1) \in W$

  $\Rightarrow \overline{(1,0,0)} = \overline{(0,0,1)}$

- $(1,0,0) - (1,1,1) = (0,-1,-1) \rightarrow 0-1-1=-2 \neq 0 \Rightarrow (1,0,-1) \notin W$

  $\Rightarrow \overline{(1,0,0)} \neq \overline{(1,1,1)}$

- $(1,0,0) - (1,-1,1) = (0,1,-1) \rightarrow 0+1-1=0 \Rightarrow (0,1,-1) \in W$

  $\Rightarrow \overline{(1,0,0)} = \overline{(1,-1,1)}$

- $(1,0,0)-(2,1,0)=(-1,-1,0) \to -1-1+0=-2\neq 0 \Rightarrow (-1,-1,0)\notin W$

$\Rightarrow \overline{(1,0,0)} \neq \overline{(-1,-1,0)}$

- $(1,1,1)-(2,1,0)=(-1,0,1) \to -1+0+1=0 \Rightarrow (-1,0,1)\in W$

$\Rightarrow \overline{(1,1,1)} = \overline{(2,1,0)}$

Obteniendo así:

$\overline{(1,0,0)} = \overline{(0,1,0)} = \overline{(0,0,1)} = \overline{(1,-1,1)} = V_1$

$\overline{(1,1,1)} = \overline{(2,1,0)} = V_2$

Solo hay dos elementos distintos. Observamos:

$\{\overline{(1,0,0)}\}$ es base de $\mathbb{R}^3/W$ (dim $(\mathbb{R}^3/W) = 3-2=1$) ($\mathbb{K}$-libre y maximal)

(Hay infinitos coclases, pero todos son proporcionales).

Hemos visto $V_1 \neq V_2 \longrightarrow$

$(1,1,1)-3\cdot(1,0,0) = (-2,1,1) \to -2+1+1=0 \Rightarrow (-2,1,1)\in W$

$\Rightarrow 3\cdot\overline{(1,0,0)} = \overline{(1,1,1)}$

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}^4 \to$ base de $\mathbb{R}^4/W$.

a) $W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1+x_2=0,\ x_3-x_4=0\}$ ($x_2=-x_1$ y $x_4=x_3$)

$B_W=\{(1,-1,0,0),(0,0,1,1)\}$ ($<(\lambda,-\lambda,\mu,\mu)> = <(1,-1,0,0),(0,0,1,1)>$)

Teorema del reemplazamiento para pasar de B_C a $B\subset B_C$, $B\cup B_W$.

$(1,0,0,0)$ nos vale.

Ahora queremos:

$v_4 \in \mathbb{R}^4 \mid v_4 \notin W \cup <(1,0,0,0)>$

O calculamos las ecuaciones, u observamos que como v_1, v_2, v_3 tienen las dos últimas coordenadas iguales, podemos tomar: $v_4 = (0,0,0,1)$ o $v_4 = (0,0,1,0)$

$\Rightarrow \beta v = \{(1,-1,0,0), (0,0,1,1), (1,0,0,0), (0,0,0,1)\}$

Por el teorema:

$\Rightarrow B_{\mathbb{R}^4/W} = \{\overline{(1,0,0,0)}, \overline{(0,0,0,1)}\}$

Si $v \in \mathbb{R}^4/W \Rightarrow v = \lambda\,\overline{(1,0,0,0)} + \mu\,\overline{(0,0,0,1)}$

d) $W = <(1,2,3,4), (2,2,2,6), (0,2,4,4)>$

Sabemos que $\{(1,2,3,4), (2,2,2,6), (0,2,4,4)\}$ es sistema generador, pero buscamos una base. Hacemos las cuentas:

Ecs.: de $W \rightarrow x - 2y + z = 0$ $(w \in \mathbb{R}^4) \Rightarrow (y, z, w$ son parámetros$)$.

$\Rightarrow \dim(W) = 3 \Rightarrow B_W = \{(1,2,3,4), (2,2,2,6), (0,2,4,4)\}$

(son lk-libre maximal $\Rightarrow$ es base).

Tomamos $v \in \beta_c \subset \mathbb{R}^4$

$(0,2,4,4) = \lambda(1,2,3,4) + \mu(2,2,2,6)$

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ 2\lambda + 2\mu = 2 \\ 3\lambda + 2\mu = 4 \\ 4\lambda + 6\mu = 4 \end{cases} \rightarrow \text{no hay sol. son lk-libre}$$

Añadimos un vector: $v \notin \beta_c \rightarrow (1,0,0,0)$

$$\beta_v = \{(1,2,3,4), (2,2,2,6), (0,2,4,4), (1,0,0,0)\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\beta_{\mathbb{R}^4/W} = \{\overline{(1,0,0,0)}\}}$$

$\boxed{5}$

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0,\ x-y+z-t=0\}$$

i) $\{\overline{(1,0,0,0)}, \overline{(0,1,0,0)}\}$

Ecs. plano:

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases} \xRightarrow{(\ldots)} \begin{cases} z=-x \\ t=-y \end{cases} \quad \text{(restando y sumando } E_1, E_2)$$

$\Rightarrow \dim(W) = 2$, el conjunto basta que sea lk-libre.

$$\lambda\overline{(1,0,0,0)} + \mu\overline{(0,1,0,0)} = \overline{0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\lambda, \mu, 0, 0) \in W \Rightarrow \lambda = 0,\ \mu = 0 \Rightarrow$ Si es base

ii) $\{\overline{(1,0,0,0)}, \overline{(0,0,1,0)}\}$

$\dim(W) = 2$, basta ver que es lk-libre.

$$\lambda\overline{(1,0,0,0)} + \mu\overline{(0,0,1,0)} = \overline{0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\lambda, 0, \mu, 0) \in W \Rightarrow \lambda = \mu$ por tanto no son lk-libre

y no son base.

iii) Como $|\beta| = 3 > 2$, no puede ser base.

6

iii) $W = \langle (1,1,1,1), (0,1,0,1), (1,-1,1,-1) \rangle$

$(1,-1,1,-1) = (1,1,1,1) - 2(0,1,0,1)$

$\dim(W) = 2$

$\beta_W = \{(1,0,1,0), (0,1,0,1)\}$

Tomamos $V = (1,0,0,0)$

Buscamos $v \notin W + \langle (1,0,0,0) \rangle \rightarrow (0,1,0,0)$

$\Rightarrow \boxed{\beta_{V/W} = \{\overline{(1,0,0,0)}, \overline{(0,1,0,0)}\}}$

Coordenadas de $\overline{(1,0,1,0)}$ en $\beta_{V/W}$

$(1,0,1,0) = 1\cdot \underbrace{(1,0,1,0)}_{\in W} + 0\cdot \underbrace{(0,1,0,1)}_{\in W} + 0\cdot(1,0,0,0) + 0\cdot(0,1,0,0)$

$\Rightarrow \boxed{\overline{(1,0,1,0)} = 0\cdot \overline{(1,0,0,0)} + 0\overline{(0,1,0,0)}} \Rightarrow \boxed{\overline{(1,0,1,0)} = \overline{0}}$

8

V $\mathbb{k}$-e.v. y $W \leq V$, $v \in V$. Dem. $v \notin W$, entonces $\exists\, V/W$ t.q. los coordenadas de $\overline{v}$ son $(1,0,\dots,0)$

Tomamos $\beta_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ y $\beta_V = \{w_1, \dots, w_m, v, v_1, \dots, v_n\}$

$\Rightarrow \beta_{V/W} = \{\overline{v}, \overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}\} \Rightarrow$ coordenadas de $\overline{v}$ son $(1,0,\dots,0)$

$\boxed{10}$ $\mathbb{R}^4$

$W = \langle (1,1,1,0), (0,1,1,1) \rangle$

$\varphi : \mathbb{R}^4/W \longrightarrow \mathbb{R}^4/W$ dados por:

i) $\overline{(x,y,z,t)} \longmapsto \overline{(t,x,y,z)}$

Sacamos las ecuaciones de W:

$(x,y,z,t) = \lambda(1,1,1,0) + \mu(0,1,1,1)$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda + \mu \\ t = \mu \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = x + t \\ z = x + t = y \end{cases} \Rightarrow W = \{(x, x+t, x+t, t) \mid x,t \in \mathbb{R}\}$$

(1)

Veamos si W es f-invariante (en ese caso estaría bien definida).

Podemos tomar $f((x, x+t, x+t, t))$ y ver si pertenece a W.

O ver si la imagen de los vectores básicos pertenece a W. Lo hacemos:

$f((1,1,1,0)) = (0,1,1,1) \rightarrow x_1 = 0,\ x_4 = 1,\ x_2 = x_1 + x_4 = x_3$

Cumple las ecuaciones de W $\Rightarrow f((1,1,1,0)) \in W$ (en este caso, directamente $(0,1,1,1)$ pertenece a W por definición.

A su vez:

$f((0,1,1,1)) = (1,0,1,1) \rightarrow x_2 \neq x_1 + x_4 \Rightarrow (1,0,1,1) \notin W$

$\Rightarrow$ W no es f-invariante, no podemos afirmar aún que f está bien definida.

($f((x, x+t, x+t, t)) = (t, x, x+t, x+t) \notin W \Rightarrow$ no es f-invariante).

Veamos que no está definida.

$\overline{(0,1,1,1)} = \overline{(0,0,0,0)}$ pues $(0,1,1,1) \in W$ por def W

Observamos:

$\varphi(\overline{(0,1,1,1)}) = \overline{(1,0,1,1)}$ con $(1,0,1,1) \notin W \Rightarrow \overline{(1,0,1,1)} \neq \overline{(0,0,0,0)}$

$\varphi(\overline{(0,0,0,0)}) = \overline{(0,0,0,0)}$ y $(0,0,0,0) \in W$

Es decir, tomando dos representantes de una misma clase, hemos llegado a que su imagen es distinta. φ no está bien definida.

$$\varphi(\overline{(0,1,1,1)}) = \overline{(1,0,1,1)} \neq \overline{(0,0,0,0)} = \varphi(\overline{(0,1,1,1)}) = \varphi(\overline{(0,0,0,0)})$$

Es decir:

$\varphi(\overline{(0,1,1,1)}) \neq \varphi(\overline{(0,1,1,1)}) \rightarrow$ No está bien definida.

($f: V \rightarrow V$ lineal y $W \subseteq V$, f-invariante $\rightarrow \bar{f}: V/W \rightarrow V/W$, $\bar{v} \rightarrow \overline{f(v)}$ entonces $\bar{f}$ está bien definida.

Hemos intentado tomar f t.q. $\bar{f} = \varphi$, pero no existía f-invariante y así hemos continuado viendo que no estaba bien definida.

Es casi un $\bar{f}$ bien definida "sí y solo sí" f-invariante, ¡sí f lineal! Y no tiene por qué, pero nos ayuda a entenderlo.)

ii) $\overline{(x,y,z,t)} \longmapsto \overline{(x+t,\ 3x-y,\ 3x-z,\ x-2t)}$

(Mismo W).

Veamos si $\exists f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ t.q. W es f-invariante. Con $\bar{f} = \varphi$ (si lo fuera, está probado en teoría que φ está bien definida).

Definimos:

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ t.q. $f(x,y,z,t) = (x+t,\ 3x-y,\ 3x-z,\ x-2t)$

Tomamos $(x,\ x+t,\ x+t,\ t) \in W$ y calculamos $f(w) \rightarrow$

$f((x,x+t,x+t,t)) = (x+t,\ 3x-x-t,\ 3x-x-t,\ x-2t) =$

$= (x+t,\ 2x-t,\ 2x-t,\ x-2t) \rightarrow \begin{cases} x_1 = x+t \\ x_2 = 2x-t = x+t+x-2t = x_1 + x_4 \\ x_3 = 2x-t = x+t+x-2t = x_1+x_4 \\ x_4 = x-2t \end{cases}$

$\Rightarrow f(w) \in W,\ \forall w \in W \Rightarrow W$ es f-invariante.

Como $\bar{f} = \varphi$ y por teoría $\bar{f}$ está bien definida $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi$ (f inducido) está bien definida $\square$

(f induce:

$\bar{f} = \varphi : \mathbb{R}^4/W \longrightarrow \mathbb{R}^4/W$

$\bar{v} \longmapsto \overline{f(v)}$

$\longrightarrow \varphi$ bien definida (hemos probado que lo es $\bar{f}$).)

iii) $\varphi: \overline{(x,y,z,t)} \longrightarrow \overline{(x^2, y^2, z^2, t^2)}$

No podemos argumentar como el resto de casos porque no es lineal. Sin embargo observamos:

$W = \langle (1,1,1,0), (0,1,1,1) \rangle$

$\varphi(\overline{(1,1,1,0)}) = \overline{(1,1,1,0)}$ → No podemos afirmar nada.
$\varphi(\overline{(0,1,1,1)}) = \overline{(0,1,1,1)}$

Sin embargo: $(1,0,0,-1) \in W \Rightarrow \overline{(1,0,0,-1)} = \overline{(0,0,0,0)}$

$\varphi(\overline{(0,0,0,0)}) = \overline{(0,0,0,0)}$
$\varphi(\overline{(1,0,0,-1)}) = \overline{(1,0,0,1)}$ con $(1,0,0,1) \notin W$

$\Rightarrow \varphi(\overline{(0,0,0,0)}) = \overline{(0,0,0,0)} \neq \overline{(1,0,0,1)} = \varphi(\overline{(1,0,0,-1)}) = \varphi(\overline{(0,0,0,0)})$

$\Rightarrow \varphi(\overline{(0,0,0,0)}) \neq \varphi(\overline{(0,0,0,0)})$ No está bien definida.

(Recordar: para que esté bien definida, la imagen de una coclase no debe depender de los representantes de la clase).

$\boxed{11}$

¿$f \in End(\mathbb{R}^4)$ induce $\bar{f}$ en $\mathbb{R}^4/W$? (W ha de ser f-invariante).

a) $f((x,y,z,t)) = (x+y, y+z, z+t, t+x)$, $W = \langle (1,1,1,1) \rangle$

$f((1,1,1,1)) = (2,2,2,2) \in W \Rightarrow f$ es W-invariante $\Rightarrow$

Induce un $\bar{f}$ en $\mathbb{R}^4/W$. Vamos a buscar una base.

Por teoría, tomamos $\mathcal{B}_W = \{(1,1,1,1)\}$ y la completamos a una de $\mathbb{R}^4$ (siguiente cara).

$\beta_V = \{(1,1,1,1),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\beta_{\mathbb{R}^4/W} = \{\overline{(1,0,0,0)}, \overline{(0,1,0,0)}, \overline{(0,0,1,0)}\}}$$

(Recordar: teorema del reemplazamiento, dada β_W y β_V, siempre podemos cambiar vectores de la de β_V por los de la β_W para obtener una $\beta_V' \supset \beta_W$ y $\beta_V' \cap \beta_V \neq \emptyset$. Es lo que hacemos con β_W y la canónica.)

Tomando f de los vectores de β_V, obtenemos: (por columnas)

$$M_{\beta_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow P_{\beta' \nearrow}^{\beta_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{\beta'}(f) = P^{-1}_{\beta_c \nearrow \beta'} \cdot M_{\beta_c}(f) \cdot P_{\beta' \nearrow \beta_c}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&0&0&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&1&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3' = F_3 - F_1 \\ F_4' = F_4 - F_1}]{F_2' = F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&-1&1&0&-1&1&0&0 \\ 0&-1&0&1&-1&0&1&0 \\ 0&-1&0&0&-1&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3' = F_3 - F_2 \\ F_4' = F_4 - F_2}]{F_1' = F_1 + F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&-1&1&0&-1&1&0&0 \\ 0&0&-1&1&0&-1&1&0 \\ 0&0&-1&0&0&-1&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2' = F_2 + F_3 \\ F_4' = F_4 - F_3}]{F_1' = F_1 + F_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&1&0&0&1&0 \\ 0&-1&0&1&-1&0&1&0 \\ 0&0&-1&1&0&-1&1&0 \\ 0&0&0&-1&0&0&-1&1 \end{array}\right) \xrightarrow[= F_1, F_3, F_2 + F_4]{F_1', F_3', F_2' =}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&-1&0&0&-1&0&0&1 \\ 0&0&-1&0&0&-1&0&1 \\ 0&0&0&-1&0&0&-1&1 \end{array}\right) \xrightarrow[= -F_2, F_3, F_4]{F_2', F_3', F_4' =} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&1&0&0&-1 \\ 0&0&1&0&0&1&0&-1 \\ 0&0&0&1&0&0&1&-1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\hphantom{0\;0\;0\;1}}_{P^{-1}}$$