Cálculo diferencial e integral 2/Seminario 6

Nombre:

P1) *Sean* $D \subset \mathbb{R}^2$ *un abierto y* $f : D \to \mathbb{R}$ *una función de clase* $C^{(1)}$ *en* D *tal que* $D_2 f(x_0, y_0) \neq 0$ *para algún* $(x_0, y_0) \in D$.

a) Probar que la función $F(x,y) = (x, f(x,y))$ *es localmente invertible en* (x_0, y_0).

b) Si llamamos $v_0 = f(x_0, y_0)$, *probar que existe una función* $y = \varphi(x)$ *de clase* $C^{(1)}$ *en algún entorno de* x_0 *tal que* $\varphi(x_0) = y_0$.

P2) *Sea* $f(x,y) = (x-2)^3 y + x e^{y-1}$. *¿En algún entorno de cuáles de estos puntos la ecuación* $f(x,y) = 0$ *determina una función* $y = \varphi(x)$ *de clase* $C^{(1)}$*?*

a) $P = (1,1)$.

b) $P = (0,0)$.

c) $P = (2,1)$.

P3) *Si la función* $u = u(x)$ *viene definida por el sistema* $u = f(x,y,z)$, $g(x,y,z) = 0$, $h(x,y,z) = 0$, *hallar* $u'(x)$.

P4) *Dada la expresión* $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$, *probar (bajo las condiciones adecuadas) que*

$$(y-x) + (y-z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z-x)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

P5) *a) Demostrar que el sistema*

$$\begin{aligned} xz^3 + y^2u^3 &= 1 \\ 2xy^3 + u^2 z &= 0 \end{aligned}$$

define a x *e* y *como funciones implícitas de* z *y* u *en un entorno del punto* $P(x,y,z,u) = (0,1,0,1)$.

b) Probar que $F(z,u) = \big(x(z,u), y(z,u)\big)$ *admite una función inversa de clase* $C^{(\infty)}$ *en un entorno de* $(0,1)$.

c) Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,1)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,1)$.

P6) *a) Probar que la función* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$x = \frac{u^2 - v^2}{\sqrt{u^2+v^2}}, \; y = \frac{2uv}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

es una transformación regular en un entorno del punto $(0,1)$.

b) *Calcular la diferencial de la inversa local* $(u, v) = F^{-1}(x, y)$ *en un entorno del punto* $(-1, 0)$.

P7) *Sea* $f(x, y, z) = 0$. *Probar que* $\dfrac{\partial x}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$, *bajo suposiciones adecuadas. ¿Cuáles son dichas hipótesis?*

P8) *Se considera la superficie de ecuación* $xye^z + zx^2 \ln y - y = 0$. *¿Qué variables pueden despejarse en función de las demás en un entorno del punto* $(1, 1, 0)$*?*

P9) *Dada la función* $f(x, y, z) = (x^2 - 2xyz, 3y^2 + xz^3 - 2x + 6z + 3)$, *probar que la ecuación* $f(x, y, z) = (0, 0)$ *define a* (x, y) *como función implícita* $h = (h_1, h_2)$ *de* z *en un entorno del punto* $(0, 1, -1)$. *Calcular* $h_1''(-1)$ *y* $h_2''(-1)$.

P10) *a)* *Demostrar que el sistema*

$$xz^3 + y^2u^3 = 1 \qquad (1)$$
$$2xy^3 + u^2z = 0 \qquad (2)$$

define a x *e* y *como funciones implícitas de* z *y* u *en un entorno del punto* $P(x, y, z, u) = (0, 1, 0, 1)$.

b) *Probar que* $F(z, u) = \big(x(z, u), y(z, u)\big)$ *admite una función inversa de clase* $C^{(\infty)}$ *en un entorno de* $(0, 1)$.

c) *Calcular* $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0, 1)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, 1)$.

P11) *Sea* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + \alpha xz + z^3$, *con* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Sabiendo que el origen es un punto estacionario de* f, *¿para qué valores de* α *la función* f *tiene un mínimo local en el origen?*

a) *Para cualquier* $\alpha \in \mathbb{R}$. ☐

b) *Para ningún* $\alpha \in \mathbb{R}$. ☐

c) *Sólo si* $\alpha \neq 0$. ☐

d) *Ninguna de las anteriores.* ☐

P12) *Comprobar que* $f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ *tiene infinitos máximos locales y ningún mínimo.*