Capítulo 4

Aplicaciones del cálculo diferencial

Desarrollamos en este capítulo algunas aplicaciones del cálculo diferencial de funciones de varias variables, como son el estudio de las condiciones para la existencia de la función implícita e inversa, así como la determinación de los máximos y mínimos de funciones, tanto globales como locales.

4.1. Teorema de la función inversa

Es conocido que, en una variable, si g es una función de clase $C^{(1)}$ en un intervalo (a,b) y $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$, entonces g es una función estrictamente monótona y existe la inversa $g^{-1} : g(a,b) \to \mathbb{R}$, la cual es derivable en $g(a,b)$ y su derivada viene dada por

$$(g^{-1})'(y_0) = \frac{1}{g'(x_0)}, \text{ con } y_0 = g(x_0).$$

En el caso general, dado un sistema

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

se trata de encontrar las condiciones suficientes para que $x_1, \dots, x_n$ se puedan expresar en función de $y_1, \dots, y_n$, sin tener que resolver explícitamente el sistema.

Un caso particular de este problema es el de la solución de un sistema lineal

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j = x_i, \ 1 \leq i \leq n,$$

el cual tiene solución única cuando la matriz de los coeficientes tiene determinante no nulo y, en este caso, la solución viene dada por la regla de Cramer.

Si denotamos por $z = (z_1, \dots, z_n)$ y $x = (x_1, \dots, x_n)$ y definimos las funciones

$$f_i(x, z) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j - x_i, \ 1 \le i \le n,$$

la matriz $(a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ es precisamente la matriz jacobiana de la función $F = (f_1, \dots, f_n)$ con respecto a las variables $(z_1, \dots, z_n)$ y, de lo anterior, deducimos que $\det(DF) \ne 0$ es una condición suficiente para que el sistema defina de forma implícita a z como función de x. Esta condición también será esencial en el caso general.

En lo sucesivo, el determinante de la matriz jacobiana de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se denotará por alguna de las siguientes expresiones:

$$\det Df = Jf = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \dots & \partial f_1/\partial x_n \\ & \vdots & \\ \partial f_n/\partial x_1 & \dots & \partial f_n/\partial x_n \end{vmatrix}.$$

Definición. Sean $D \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Decimos que f es *abierta* si $f(A)$ es abierto para todo $A \subset D$ abierto.

Queremos describir las condiciones suficientes para que una función sea abierta pero antes necesitamos un lema previo.

Lema 4.1.1. *Dado $a \in \mathbb{R}^n$, denotamos por B a la bola abierta de centro a y radio r. Supongamos que $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua en $\overline{B}$ tal que existen $D_i f_j(x)$, para todo $x \in B$, $i, j = 1, \dots, n$. Si $f(x) \ne f(a)$, $\forall x \in \operatorname{fr}(B)$ y $Jf(x) \ne 0$, $\forall x \in B$, entonces $f(B)$ contiene una bola abierta de centro $f(a)$.*

Demostración. Definimos la función $g : \operatorname{fr}(B) \to \mathbb{R}$ por $g(x) = \|f(x) - f(a)\|$. Por hipótesis, g es continua y $g(x) > 0$, $\forall x \in \operatorname{fr}(B)$. Como $\operatorname{fr}(B)$ es compacto, existe $m = \min\{g(x) : x \in \operatorname{fr}(B)\}$. Si llamamos $T = B(f(a), m/2)$, bastará probar que $T \subset f(B)$ para concluir la prueba.

Dado cualquier $y \in T$, definimos $h : \overline{B} \to \mathbb{R}$ por $h(x) = \|f(x) - y\|$. Por ser h continua y $\overline{B}$ compacto, h alcanza el mínimo en $\overline{B}$. Por una parte, $h(a) = \|f(a) - y\| < m/2$. Por otra parte, si $x \in \operatorname{fr}(B)$,

$$h(x) = \|f(x) - y\| \ge \|f(x) - f(a)\| - \|f(a) - y\| > g(x) - m/2 \ge m/2.$$

Por tanto, el mínimo de h no se alcanza en la frontera, con lo que existe $c \in B$ tal que $h(c) = \min\{h(x) : x \in \overline{B}\}$, pero también h^2 alcanza el mínimo en el punto c.

Como

$$h^2(x) = \|f(x) - y\|^2 = \sum_{j=1}^{n} (f_j(x) - y_j)^2,$$

todas las derivadas parciales de h^2 se anulan en c. Por tanto,

$$0 = \sum_{j=1}^{n} 2(f_j(c) - y_j) \cdot D_i f_j(c), \ i = 1, \dots, n,$$

el cual es un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con las incógnitas y_i, $i = 1, \dots, n$. Como el determinante de este sistema lineal es $Jf(c) \neq 0$, el sistema tiene solución única $y_j = f_j(c)$, $j = 1, \dots, n$. Así pues, $y = f(c)$ con lo que $y \in f(B)$. $\square$

Proposición 4.1.2. *Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función continua tal que existen $D_i f_j(x)$, para todo $x \in D$, $i, j = 1, \dots, n$. Si f es inyectiva y $Jf(x) \neq 0$, $\forall x \in D$, entonces $f(D)$ es abierto.*

Demostración. Dado $y \in f(D)$, sea $x \in D$ tal que $y = f(x)$. Como D es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset D$. Por el lema anterior, existe $\delta > 0$ tal que

$$B(f(x), \delta) \subset f(B(x, r)) \subset f(D).$$

Por tanto, $f(D)$ es abierto. $\square$

Una especie de recíproco del teorema anterior es el siguiente resultado.

Teorema 4.1.3 (inyectividad local)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^{(1)}$ en un abierto $D \subset \mathbb{R}^n$ tal que $Jf(x_0) \neq 0$, para algún $x_0 \in D$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que f es inyectiva en $B(x_0, \varepsilon)$.*

Demostración. Dados $x^1, \dots, x^n \in D$, definimos la función

$$h(x^1, \dots, x^n) = \begin{vmatrix} D_1 f_1(x^1) & \dots & D_n f_1(x^1) \\ \vdots & & \\ D_1 f_n(x^n) & \dots & D_n f_n(x^n) \end{vmatrix}.$$

Por hipótesis, h es una función continua en su dominio (pues se trata de un polinomio en cada una de sus variables) y $h(x_0, \dots, x_0) = Jf(x_0) \neq 0$. Por tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $h(x^1, \dots, x^n) = \det(D_i f_j(x^j)) \neq 0$, para todo $x^j \in B(x_0, \varepsilon)$.

Si f no es inyectiva en $B(x_0, \varepsilon)$, existen $x, y \in B(x_0, \varepsilon)$ tales que $x \neq y$ pero $f(x) = f(y)$. Como el segmento $[x, y]$ está contenido en $B(x_0, \varepsilon)$, podemos aplicar el teorema del valor medio (teorema 3.2.7) a cada f_j, con lo que existen $u^j \in [x, y]$ tales que

$$0 = f_j(x) - f_j(y) = \langle \nabla f_j(u^j), y - x \rangle = \sum_{i=1}^n D_i f_j(u^j) \cdot (y_i - x_i), \ j = 1, \dots, n.$$

Obtenemos un sistema lineal cuyo determinante es $\det(D_i f_j(u^j)) \neq 0$. Por tanto, $y_i = x_i$, $\forall i$, es decir $y = x$, lo que contradice la suposición anterior. $\square$

Observación. El teorema anterior no asegura la inyectividad de f en todo su dominio a pesar de que $Jf(x) \neq 0$, $\forall x$. Por ejemplo, si $f(x, y) = (x \cos y, x \operatorname{sen} y)$, como $Jf(x, y) = x$, entonces $Jf(x, y) \neq 0$, si $x \neq 0$. Sin embargo, $f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$, de modo que f no es inyectiva globalmente.

Teorema 4.1.4. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función de clase $C^{(1)}$ en un abierto $D \subset \mathbb{R}^n$ tal que $Jf(x) \neq 0$, para todo $x \in D$, entonces f es abierta.*

Demostración. Sea $A \subset D$ un abierto. Por el teorema anterior, si $x \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que f es inyectiva en $B(x, \varepsilon)$. Por la proposición 4.1.2, $f(B(x, \varepsilon))$ es abierto. Como $A = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon)$, entonces $f(A) = \bigcup_{x \in A} f(B(x, \varepsilon))$, luego $f(A)$ es abierto. □

Los resultados anteriores conducen a una clase importante de funciones, que definimos a continuación.

Definición. Dados un abierto $D \subset \mathbb{R}^n$ y una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, decimos que f es una *transformación regular* en D si $f \in C^{(1)}(D)$, f es inyectiva en D y $Jf(x) \neq 0$, para todo $x \in D$.

Debido al teorema anterior, es evidente que toda transformación regular es una aplicación abierta.

Ejemplos.

1) Si $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u,\ 0 < v < 2\pi\}$, la función $f(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v)$ es una tranformación regular en D, con $Jf(u, v) = u$.

   En este caso, $f(D) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ y la aplicación inversa definida por $f^{-1}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{arc\,tg} y/x)$ corresponde al cambio a *coordenadas polares*.

2) Si $D = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : 0 < u,\ 0 < v < 2\pi\}$, la función $f(u, v, w) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, w)$ es una tranformación regular en D, con $Jf(u, v, w) = u$.

   En este caso, $f(D) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, 0) : x \geq 0\}$ y la aplicación inversa $f^{-1}(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{arc\,tg} y/x, z)$ corresponde al cambio a *coordenadas cilíndricas*.

3) Si $D = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : 0 < u,\ 0 < v < 2\pi,\ 0 < w < \pi\}$, la función $f(u, v, w) = (u \cos v \operatorname{sen} w, u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w, u \cos w)$ es también regular, con $Jf(u, v, w) = u^2 \operatorname{sen} w$. En este caso, si (x, y, z) son las coordenadas cartesianas de un punto en $\mathbb{R}^3$, entonces las *coordenadas esféricas* del punto son (u, v, w) si $f(u, v, w) = (x, y, z)$.

Después de estos resultados previos, ya estamos en condiciones de probar la existencia de la función inversa en el caso de funciones de varias variables. Necesitaremos el siguiente lema previo.

Lema 4.1.5. *Sean $K \subset \mathbb{R}^m$ un compacto y $f : K \to \mathbb{R}^n$ una función continua e inyectiva. Entonces existe una única función continua $g : f(K) \to \mathbb{R}^m$ tal que $g(f(x)) = x$, para todo $x \in K$.*

Demostración. Como $f : K \to f(K)$ es biyectiva, existe una única función $g : f(K) \to K$ tal que $g(f(x)) = x$, para todo $x \in K$.

Para ver que g es continua, sea $A \subset K$ cerrado. Como K es compacto, A es compacto. Entonces $f(A)$ es compacto y, en particular, cerrado. □

Teorema 4.1.6 (existencia de la función inversa)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^{(1)}$ en un abierto $D \subset \mathbb{R}^n$. Si $x_0 \in D$ y $Jf(x_0) \neq 0$, entonces existen*

I) *un entorno* U *de* x_0,

II) *un entorno* V *de* $f(x_0)$,

III) *una única función* $g : V \to U$ *de clase* $C^{(1)}$ *en* V,

tales que $g\big(f(x)\big) = x$, $\forall x \in U$.

Dicha función es, por definición, la *inversa local* de f.

Demostración. Como $f \in C^{(1)}(D)$, Jf es continua en D. Por ser $Jf(x_0) \neq 0$, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $Jf(x) \neq 0$, para todo $x \in B(x_0, \varepsilon_1)$.

Por el teorema de inyectividad local 4.1.3, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $B(x_0, \varepsilon_2) \subset B(x_0, \varepsilon_1)$ y f es inyectiva en $B(x_0, \varepsilon_2)$.

Dado $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$, por el lema 4.1.1, existe $\delta > 0$ tal que $B(f(x_0), \delta) \subset f(B(x_0, \varepsilon))$. Definimos entonces $V = B(f(x_0), \delta)$ y $U = f^{-1}(V) \cap B(x_0, \varepsilon)$, los cuales son entornos de $f(x_0)$ y x_0, respectivamente.

Como $\overline{B(x_0, \varepsilon)}$ es compacto y f es inyectiva y continua en dicho conjunto, podemos aplicar el lema anterior, de modo que existe g continua en $f(\overline{B(x_0, \varepsilon)})$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}$.

Queda probar que $g \in C^{(1)}(V)$, es decir que, para todo $k = 1, \dots, n$, existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{g_k(y + he_j) - g_k(y)}{h} = D_j g_k(y), \ \ \forall y \in V$$

(donde e_j representa el j-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$), y que $D_j g_k$ es continua en V.

Definimos para ello la función $h(z) = \det(D_j f_i(z^i))$, donde $z = (z^1, \dots, z^n)$, $z^i \in D$. De forma similar a la demostración del teorema 4.1.3, podemos suponer que $h(z) \neq 0$, para todo $z = (z^1, \dots, z^n)$, con $z^i \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}$.

Dado $y \in V$, llamamos $x = g(y)$ y $\widetilde{x} = g(y + he_j)$. Podemos suponer que $x, \widetilde{x} \in U$ eligiendo h suficientemente pequeño. De esta manera, resulta que $f(\widetilde{x}) - f(x) = he_j$ y, por el teorema del valor medio aplicado a cada componente f_k, tenemos:

$$\frac{f_k(\widetilde{x}) - f_k(x)}{h} = \langle \nabla f_k(z^k), (\widetilde{x} - x)/h \rangle, \ \ k = 1, \dots, n.$$

Obtenemos un sistema lineal de n ecuaciones con las incógnitas $(\widetilde{x} - x)/h$, cuyo determinante es $\det D_j f_k(z^k) = h(z) \neq 0$. La solución se calcula aplicando la regla de Cramer, de modo que $\dfrac{g_k(y + he_j) - g_k(y)}{h}$ se puede escribir como cociente de determinantes Δ_1/Δ_2. Por ser g continua, $\lim_{h \to 0} \widetilde{x} = x$, de donde $\lim_{h \to 0} z^k = x$, con lo que $\lim_{h \to 0} \Delta_2 = \det(D_j f_k(x)) = Jf(x)$, el cual es distinto de cero porque $x \in U$.

En definitiva, existe $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{g_k(y + he_j) - g_k(y)}{h} = D_j g_k(y)$. Pero este límite es un cociente de determinantes donde aparecen las derivadas parciales $D_j f_i(x)$, lo que asegura que cada $D_j g_k$ es continua. $\square$

Observación. Para calcular la derivada de g, basta tener en cuenta que $Df(x) \cdot Dg(y) = I_n$, con $y = f(x)$, de modo que

$$\sum_{k=1}^{n} D_k g_i(y) \cdot D_j f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

(sistema de n^2 ecuaciones cuyas incógnitas corresponden a los elementos de la matriz jacobiana de g).

4.2. Teorema de la función implícita

Nos planteamos en esta sección el siguiente problema:

¿Bajo qué condiciones una ecuación del tipo $f(x, z) = 0$, con $x \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^n$, tiene alguna solución $z = g(x)$?

Si dicha solución existe y es única localmente, decimos que f *define implícitamente a* z en función de x.

Veamos un ejemplo sencillo: la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ representa la esfera centrada en el origen y radio unidad. Al despejar z en la ecuación, obtenemos dos posibles soluciones, $z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, que representan la semiesfera superior y la semiesfera inferior, respectivamente, y definen dos funciones diferenciables, pero únicamente si $x^2 + y^2 < 1$. Esto significa que, en un entorno del punto (x_0, y_0, z_0) perteneciente a la esfera, si $z_0 \neq 0$, la ecuación inicial define implícitamente una única función $z = z(x, y)$ diferenciable pero, si $z_0 = 0$, la ecuación no tiene solución única de la forma $z = z(x, y)$.

Enunciamos a continuación el resultado general que proporciona las condiciones suficientes para la existencia de una función definida en forma implícita.

Teorema 4.2.1 (de la función implícita)**.** *Sean $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^{(1)}$ en un abierto $D \subset \mathbb{R}^{m+n}$ y $(x_0, z_0) \in D$ (donde $x_0 \in \mathbb{R}^m$ y $z_0 \in \mathbb{R}^n$) un punto tal que $f(x_0, z_0) = 0$ y $\dfrac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)}(x_0, z_0) \neq 0$. Entonces existe un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ de x_0 y una única función $g : U \to \mathbb{R}^n$ tales que:*

a) $g \in C^{(1)}(U)$,

b) $g(x_0) = z_0$,

c) $f\big(x, g(x)\big) = 0$, $\forall x \in U$.

Demostración. Definimos la función $F : D \to \mathbb{R}^{m+n}$ por $F = (F_1, \dots, F_{m+n})$, donde

$$F_k(x, z) = x_k, \text{ si } 1 \leq k \leq m,$$
$$F_{m+k}(x, z) = f_k(x, z), \text{ si } 1 \leq k \leq n,$$

es decir $F = (I, f)$, siendo $I : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ la función identidad.

Así definida, se comprueba fácilmente que $JF(x,z) = \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(z_1,\dots,z_n)}(x,z)$. Por hipótesis, $JF(x_0,z_0) \neq 0$ y, además, $F(x_0,z_0) = (x_0,0)$. Por el teorema de la función inversa, existen abiertos A y B que contienen a (x_0,z_0) y $(x_0,0)$, respectivamente, de modo que F es inyectiva en A y $F^{-1}(B) = A$.

Por tanto, existe $G : B \to A$ inversa local de F, es decir tal que $G(F(x,z)) = (x,z)$ y $G \in C^{(1)}(B)$. Escribimos $G = (v,w)$, donde $v = (v_1,\dots,v_m)$ y $w = (w_1,\dots,w_n)$.

Definimos ahora $U = \{x \in \mathbb{R}^m : (x,0) \in B\}$ y, para cada $x \in U$, definimos $g(x) = w(x,0)$.

Es claro que U es abierto en $\mathbb{R}^m$ y que $g \in C^{(1)}(U)$ porque $G \in C^{(1)}(B)$. Además $g(x_0) = w(x_0,0) = z_0$ pues $(x_0,0) = F(x_0,z_0)$.

Por ser $F : A \to B$ biyectiva, para cualquier $(x,z) \in B$, existe un único $(x',z') \in A$ tal que $(x,z) = F(x',z')$.

Por definición, $F(x',z') = (x', f(x',z'))$, de modo que $x' = x$ y $f(x',z') = z$.

Como G y F son inversas, $G(x,z) = (x',z')$. Esto implica que

$$v(x,z) = x' = x \text{ y } w(x,z) = z'.$$

En definitiva, $F(x, w(x,z)) = (x,z),\ \forall (x,z) \in B$. En particular, si $z = 0$, entonces

$$F(x, w(x,0)) = (x,0) \Longrightarrow F(x, g(x)) = (x,0) \Longrightarrow f(x, g(x)) = 0,\ \forall x \in U.$$

Para probar la unicidad de g, si existieran g_1, g_2 tales que $f(x, g_1(x)) = f(x, g_2(x)) = 0$, como f es inyectiva, entonces $g_1(x) = g_2(x)$, para todo $x \in U$. $\square$

Observación. La existencia de solución del teorema de la función inversa se deduce del teorema de la función implícita aplicado a las funciones

$$\begin{aligned} F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) &= y_1 - f_1(x_1,\dots,x_n) \\ &\vdots \\ F_n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) &= y_n - f_n(x_1,\dots,x_n). \end{aligned}$$

Como ya enunciamos en la sección anterior, la solución existe si el determinante de la matriz jacobiana es no nulo, es decir $\frac{\partial(F_1,\dots,F_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} \neq 0$, lo que equivale a $\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} \neq 0$. Este hecho corresponde al teorema de la función inversa.

Veamos en los distintos casos cómo se calculan las derivadas de una función definida en forma implícita.

Caso de una variable independiente

Si una ecuación $f(x,y) = 0$, donde f es una función diferenciable de las variables x e y, determina a y como función de x, la derivada de esta función dada en forma implícita, siempre que $f'_y(x,y) \neq 0$, puede hallarse por la fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}.$$

Las derivadas de orden superior pueden hallarse por derivación sucesiva de la fórmula anterior.

Ejemplo 1. En la fórmula $(x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)+1=0$, tenemos:

$$f'_x(x,y)=3(x^2+y^2)^2\cdot 2x-3(2x)=6x[(x^2+y^2)^2-1]$$
$$f'_y(x,y)=3(x^2+y^2)^2\cdot 2y-3(2y)=6y[(x^2+y^2)^2-1].$$

de donde $dy/dx=-x/y$.

Para hallar la segunda derivada, derivamos con respecto a x la primera derivada que hemos encontrado, teniendo en cuenta al hacerlo que y es función de x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{y-x(dy/dx)}{y^2}=-\frac{y-x(-x/y)}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}.$$

Caso de varias variables independientes

Análogamente, si la ecuación $F(x_1,\dots,x_n,z)=0$, donde F es una función diferenciable de las variables $x_1,\dots,x_n$ y z, determina en forma implícita a z como función de las variables independientes $x_1,\dots,x_n$, en los puntos donde $F'_z(x_1,\dots,x_n,z)\neq 0$, las derivadas parciales de esta función dada en forma implícita pueden hallarse por las fórmulas:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=-\frac{F'_{x_1}(x_1,\dots,x_n,z)}{F'_z(x_1,\dots,x_n,z)},\dots,\frac{\partial z}{\partial x_n}=-\frac{F'_{x_n}(x_1,\dots,x_n,z)}{F'_z(x_1,\dots,x_n,z)}.$$

Ejemplo 2. La ecuación $x^2-2y^2+3z^2-yz+y=0$ representa una superficie en el espacio $\mathbb{R}^3$. Si suponemos que dicha ecuación define a z como función de x e y, $z=f(x,y)$, sus derivadas parciales se calculan como sigue:

$$F'_x(x,y,z)=2x,\ F'_y(x,y,z)=-4y-z+1,\ F'_z(x,y,z)=6z-y,$$

de modo que

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{6z-y},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1-4y-z}{6z-y},$$

en los puntos donde $6z-y\neq 0$.

Sistemas de funciones implícitas

Si el sistema de dos ecuaciones $\left\{\begin{matrix}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{matrix}\right\}$ determina u y v como funciones diferenciables de las variables x e y y el determinante de la matriz jacobiana $\begin{pmatrix}D_uF & D_vF\\ D_uG & D_vG\end{pmatrix}$ es no nulo, entonces las derivadas parciales de $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ se obtienen por las fórmulas

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}\ , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}\ , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}.$$

Ejemplo 3. Sabiendo que las ecuaciones $\left\{\begin{matrix} u+v = x+y \\ xu+yv = 1 \end{matrix}\right\}$ determinan u y v como funciones de x e y, si definimos las funciones

$$F(x,y,u,v) = u+v-x-y$$
$$G(x,y,u,v) = xu+yv-1,$$

las fórmulas anteriores dan los siguientes resultados: $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y-x,$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & u \end{vmatrix} = u+x, \ \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ u & y \end{vmatrix} = -y-u,$$
$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ v & y \end{vmatrix} = -y-v, \ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & v \end{vmatrix} = v+x.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y+u}{y-x}\ ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{u+x}{y-x}\ ;$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y+v}{y-x}\ ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{v+x}{y-x}\ .$$

En la práctica, en vez de utilizar las fórmulas anteriores, podemos resolver directamente el sistema formado por las derivadas parciales de las ecuaciones dadas, teniendo en cuenta que u y v son funciones de x e y.

Así pues, al derivar respecto a x, obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 1$$
$$u + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

de donde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u+y}{-x+y}\ , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u+x}{x-y}.$$

Análogamente se procedería resolviendo el sistema formado por las derivadas parciales respecto a y.

Funciones dadas en forma paramétrica

Si la función diferenciable z de las variables x e y se expresa mediante sus ecuaciones paramétricas

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)$$

y $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$, la diferencial de esta función se deduce del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv. \end{aligned}$$

Conociendo la diferencial $dz = pdx + qdy$, hallamos las derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial x} = p$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y} = q$.

Ejemplo 4. Si la función z de los argumentos x e y viene dada por las ecuaciones $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$, $(u \neq v)$, hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Primer método. Por diferenciación, hallamos tres ecuaciones que relacionan entre sí las cinco variables:

$$\begin{aligned} dx &= du + dv, \\ dy &= 2udu + 2vdv, \\ dz &= 3u^2du + 3v^2dv. \end{aligned}$$

De las primeras dos ecuaciones despejamos du y dv:

$$du = \frac{2vdx - dy}{2(v-u)},\ dv = \frac{dy - 2udx}{2(v-u)}.$$

Sustituyendo en la tercera ecuación estas expresiones, resulta:

$$dz = 3u^2\, \frac{2vdx - dy}{2(v-u)} + 3v^2\, \frac{dy - 2udx}{2(v-u)} = -3uv\, dx + \frac{3}{2}\,(u+v)\, dy,$$

de donde $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -3uv$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{3}{2}\,(u+v)$.

Segundo método. Calculamos las derivadas parciales respecto a x e y en las tres ecuaciones que definen z, teniendo en cuenta que $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Tenemos así:

$$(*) \qquad \begin{cases} 1 = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} & 0 = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ 0 = 2u\, \dfrac{\partial u}{\partial x} + 2v\, \dfrac{\partial v}{\partial x} & 1 = 2u\, \dfrac{\partial u}{\partial y} + 2v\, \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

$$(**) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3u^2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3v^2\,\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3u^2\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + 3v^2\,\dfrac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

Al resolver los dos sistemas de $(*)$, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{v-u}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u}{u-v},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2(u-v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2(v-u)}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula $(**)$, resulta:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2\frac{v}{v-u} + 3v^2\frac{u}{u-v} = -3uv$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3u^2\frac{1}{2(u-v)} + 3v^2\frac{1}{2(v-u)} = \frac{3(u+v)}{2}.$$

Tercer método. Definimos la función $h(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big) - z(u,v)$, donde $z = f(x,y)$ es la función determinada por las ecuaciones paramétricas. Entonces $h(u,v) = 0$ en los puntos donde está definida dicha función y:

$$\frac{\partial h}{\partial u} = 0 = D_1 f \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + D_2 f \cdot \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial u},$$
$$\frac{\partial h}{\partial v} = 0 = D_1 f \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + D_2 f \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Resulta así un sistema de dos ecuaciones que se resuelve aplicando la regla de Cramer.

4.3. Cambio de variables

Como aplicación al cálculo de derivadas de funciones compuestas vamos a estudiar la forma en que se transforman las ecuaciones diferenciales cuando se realiza un cambio de variable (supondremos en todos los casos la igualdad de las derivadas parciales de segundo orden cruzadas). Destaquemos que la elección adecuada de un cambio de variable permite simplificar una ecuación diferencial y obtener muy fácilmente sus soluciones.

PRIMER CASO: En la ecuación

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

cambia una sola variable.

1.1. Cambia la variable independiente mediante la ecuación $x = x(t)$.

ESQUEMA DE DEPENDENCIAS
$y \to x \to t$

Como $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt}$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.
Si derivamos nuevamente respecto a t, resulta:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^2},\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Las derivadas sucesivas se obtienen de manera análoga.

1.2. Cambia la variable independiente mediante la ecuación $t = t(x)$.

ESQUEMA DE DEPENDENCIAS
$x \leftarrow t \leftarrow y \rightarrow x$

Por la regla de la cadena se obtiene directamente que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = y'_t \cdot t'_x$ y

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}\right] \\ &= \frac{d}{dx}(y'_t) \cdot t'_x + y'_t \cdot t''_x = y''_t \cdot (t'_x)^2 + y'_t \cdot t''_x.\end{aligned}$$

1.3. Cambia sólo la función mediante la ecuación $y = y(z)$.

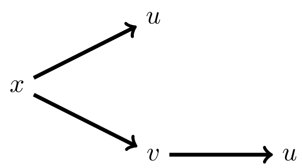
ESQUEMA DE DEPENDENCIAS
$x \leftarrow y \rightarrow z \rightarrow x$

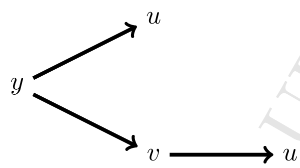
$$\begin{aligned}y'_x &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = y'_z \cdot z'_x, \\ y''_x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(y'_z \cdot z'_x) = y'_z \cdot z''_x + \frac{d}{dx}(y'_z) \cdot z'_x \\ &= y'_z \cdot z''_x + \frac{d}{dz}(y'_z) \cdot z'_x \cdot z'_x = y'_z \cdot z''_x + y''_z \cdot (z'_x)^2.\end{aligned}$$

SEGUNDO CASO: En la ecuación

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

cambian la función y variable antiguas por una función y variable nuevas mediante las relaciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. El esquema de dependencias es el siguiente:





Las relaciones entre las derivadas de primer orden se obtienen de la siguiente forma: Si $y = f(x)$ y $v = g(u)$, entonces $y(u, v) = f\big(x(u, v)\big) = f\Big(x\big(u, g(u)\big)\Big)$, de donde

$$y'_u(u, v) + y'_v(u, v) \cdot \frac{dv}{du} = f'\Big(x\big(u, g(u)\big)\Big) \cdot \left[x'_u(u, v) + x'_v(u, v) \cdot \frac{dv}{du}\right].$$

Así pues, la derivada se obtiene como:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{y'_u + y'_v \cdot (dv/du)}{x'_u + x'_v \cdot (dv/du)}.$$

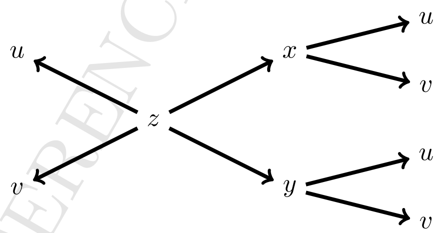
TERCER CASO: Transformar la ecuación en derivadas parciales

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dots\right) = 0$$

por la ecuación

$$F\left(u, v, z, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}, \dots\right) = 0$$

mediante el cambio $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. El esquema de dependencias es el siguiente:



Las relaciones entre las derivadas de primer orden se obtienen al resolver el sistema:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

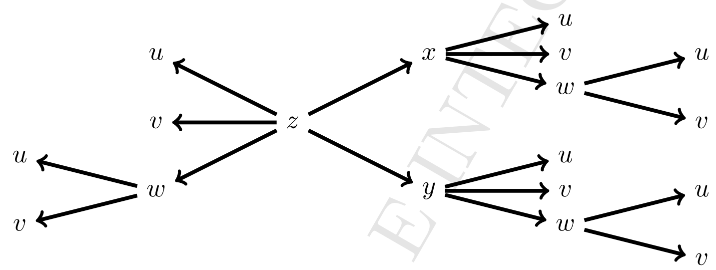
En el caso de que la transformación venga dada por las ecuaciones $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, se resuelve el sistema análogo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

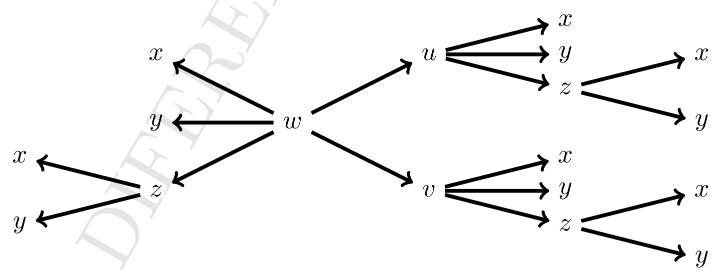
CASO GENERAL: Cambiar las variables independientes x e y por u y v y la función z por w, mediante las relaciones

$$\left.\begin{array}{l} x = f(u,v,w) \\ y = g(u,v,w) \\ z = h(u,v,w) \end{array}\right\} \text{ o bien } \left\{\begin{array}{l} u = F(x,y,z) \\ v = G(x,y,z) \\ w = H(x,y,z). \end{array}\right.$$

Debemos tener en cuenta los siguientes esquemas de dependencias

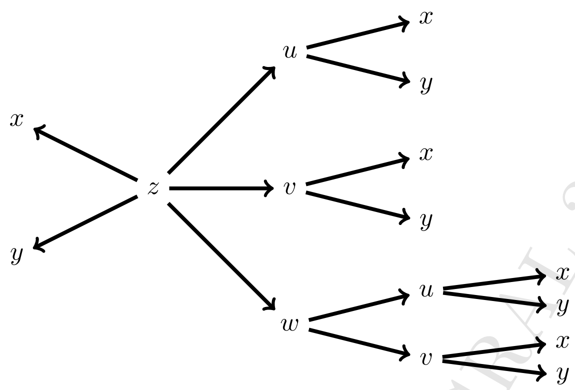


o bien



Derivando las veces que sea necesario y resolviendo los sistemas resultantes, se podrían conocer las derivadas parciales de z con respecto a x e y en función de las correspondientes derivadas parciales de w con respecto a u y v.

Sin embargo el caso más sencillo no exige la resolución de ningún sistema de ecuaciones; este caso corresponde a las relaciones de la forma $z = \varphi(u,v,w)$, $u = f(x,y)$, $v = g(x,y)$ para el cual el esquema de dependencias es



De este modo, al derivar resulta:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

pero como

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Análogamente,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

4.4. Máximos y mínimos de funciones

Los conceptos de máximo y mínimo de una función de varias variables son completamente análogos a los correspondientes de funciones de una variable y tienen también su origen en consideraciones geométricas.

Definición. Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con dominio $D \subset \mathbb{R}^n$, decimos que

a) f tiene un *máximo absoluto (o global)* en un punto $x_0 \in D$ si

$$f(x_0) \geq f(x), \ \forall x \in D;$$

b) f tiene un *mínimo absoluto (o global)* en un punto $x_0 \in D$ si

$$f(x_0) \leq f(x), \ \forall x \in D.$$

Los puntos donde una función toma indistintamente un valor máximo o mínimo reciben el nombre genérico de *extremos*.

En el capítulo 2 enunciamos el teorema de Weierstrass (teorema 2.3.9) que proporciona condiciones suficientes para la existencia de extremos absolutos. A continuación, daremos la versión local de estos conceptos.

Definición. Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con dominio $D \subset \mathbb{R}^n$, decimos que

a) f tiene un *máximo relativo (o local)* en un punto $x_0 \in D$ si existe una bola $B(x_0, r)$ centrada en x_0 tal que $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in B(x_0, r) \cap D$;

b) f tiene un *mínimo relativo (o local)* en un punto $x_0 \in D$ si existe una bola $B(x_0, r)$ centrada en x_0 tal que $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in B(x_0, r) \cap D$.

En el caso de funciones de dos variables, la interpretación geométrica de estas nociones es evidente.

Estos conceptos están relacionados con el de punto estacionario.

Definición. Si una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto x_0 y $\nabla f(x_0) = 0$, se dice que x_0 es un *punto estacionario o punto crítico* de la función.

La relación citada viene dada por la siguiente condición necesaria de existencia de extremos.

Teorema 4.4.1 (criterio de las derivadas primeras)**.** *Sea D un abierto de $\mathbb{R}^n$ y f una función diferenciable en D. Si f tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) en un punto $x_0 \in D$, entonces x_0 es un punto estacionario de f.*

Demostración. Para cada $v \in \mathbb{R}^n$, con $v \neq 0$, definimos la función $g_v(t) = f(x_0 + tv)$, la cual es diferenciable en $t = 0$.

Si f tiene un máximo local en x_0 (razonamos de forma análoga con el mínimo), entonces $f(x_0) \geq f(x)$ en alguna bola $B(x_0, r)$. Entonces

$$g_v(t) = f(x_0 + tv) \leq f(x_0) = g_v(0), \text{ si } |t| < r/\|v\|.$$

Por tanto, g_v tiene un máximo local en $t = 0$, de donde $g_v'(0) = 0$, es decir $\langle \nabla f(x_0), v \rangle = 0$.

Como esta igualdad es cierta para todo $v \in \mathbb{R}^n$, deducimos que $\nabla f(x_0) = 0$. $\square$

En el caso particular de funciones de dos variables, lo anterior quiere decir que el plano tangente a una función diferenciable en un máximo o un mínimo es necesariamente horizontal. Dicho plano queda por encima de la superficie en un entorno del punto donde la función tiene un máximo y queda por debajo de la superficie en un entorno del punto donde la función tiene un mínimo.

Debemos observar que dicha condición no es suficiente. Por ejemplo, si consideramos la función $f(x, y) = x \cdot y$, entonces $\nabla f(x, y) = (y, x)$ y el gradiente se anula sólo en el origen. Sin embargo, es evidente que en dicho punto no puede haber un máximo ni un mínimo de la función, pues en cualquier entorno del origen la función toma valores positivos y negativos.

La determinación de condiciones suficientes para la existencia de extremos relativos se basa en el estudio del signo del término de segundo orden en el polinomio de Taylor asociado a la función. Para formular dichas condiciones debemos recordar algunos conceptos relativos a la teoría de formas cuadráticas.

Definición. Dada una matriz simétrica $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, (es decir con $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$), se define la *forma cuadrática* asociada a A como la función $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$Q(h) = h \cdot A \cdot h^T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j, \ \forall h = (h_1, \dots, h_n).$$

Decimos que una forma cuadrática Q es

i) *definida positiva* si $Q(h) > 0$, $\forall h \neq 0$,

ii) *definida negativa* si $Q(h) < 0$, $\forall h \neq 0$.

Una caracterización de esta definición la da el siguiente resultado.

Proposición 4.4.2 (criterio de Sylvester). *Si $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ es una matriz simétrica y denotamos por*

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{1k} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \ (k = 1, \dots, n),$$

a los menores principales de A, entonces:

a) La forma cuadrática asociada a A es definida positiva si y sólo $\det A_k > 0$, $\forall k = 1, \dots, n$.

b) La forma cuadrática asociada a A es definida negativa si y sólo si

$$(-1)^k \det A_k > 0, \ \forall k = 1, \dots, n$$

(es decir, los signos de los determinantes de los menores principales se van alternando empezando con $a_{11} = \det A_1 < 0$).

Con estos hechos, las condiciones suficientes para la existencia de extremos relativos de una función de varias variables se pueden enunciar como sigue:

Teorema 4.4.3 (criterio de las derivadas segundas). *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^{(2)}$ en un abierto $D \subset \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in D$ un punto estacionario de f. Si definimos la forma cuadrática*

$$Q_{x_0}(h) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j = \frac{1}{2}\, h \cdot Hf(x_0) \cdot h^T, \tag{4.1}$$

entonces:

a) f tiene un mínimo local en x_0 si Q_{x_0} es definida positiva.

b) f tiene un máximo local en x_0 si Q_{x_0} es definida negativa.

Demostración. La fórmula de Taylor de primer orden asociada a la función f en x_0 tiene la forma

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} D_h^2 f(z), \ \text{con } z \in [x_0, x_0 + h],$$

siendo $D_h^2 f(z) = \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} f(z) h_i h_j$. Podemos entonces escribir

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Q_{x_0}(h) + \|h\|^2 \cdot E(h), \tag{4.2}$$

donde $\|h\|^2 \cdot E(h) = \frac{1}{2} D_h^2 f(z) - Q_{x_0}(h)$. Deducimos entonces que

$$\|h\|^2 \cdot |E(h)| \le \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} |D_{ij} f(z) - D_{ij} f(x_0)| \cdot \|h\|^2.$$

Por la continuidad de $D_{ij} f$ en x_0, resulta que $\lim_{h \to 0} E(h) = 0$.

Veamos ahora el apartado (a). Como Q_{x_0} es continua en $\mathbb{R}^n$, si $Q_{x_0}(h) > 0$, para todo $h \neq 0$, entonces $Q_{x_0}(h) > 0$ en la esfera unidad $S = \{h \in \mathbb{R}^n : \|h\| = 1\}$. Por ser S compacto, Q_{x_0} alcanza el mínimo en S, digamos que $m = \min_{\|h\|=1} Q_{x_0}(h) > 0$.

Para cualquier $h \neq 0$, $Q_{x_0}(h / \|h\|) = \frac{1}{\|h\|^2} Q_{x_0}(h) \ge m$, de donde $Q_{x_0}(h) \ge m \cdot \|h\|^2$. Sustituyendo en (4.2), obtenemos

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \ge m \cdot \|h\|^2 + \|h\|^2 \cdot E(h).$$

Debido a que $\lim_{h \to 0} E(h) = 0$, existe $r > 0$ tal que $|E(h)| < m/2$ si $0 < \|h\| < r$. Para estos valores de h, $0 \le \|h\|^2 \cdot |E(h)| < m \cdot \|h\|^2 / 2$, de donde

$$f(x_0 + h) - f(x_0) > m \cdot \|h\|^2 - \frac{m \cdot \|h\|^2}{2} = \frac{m \cdot \|h\|^2}{2} > 0,$$

lo que significa que f tiene un mínimo local en x_0.

Para probar el apartado (b), basta repetir el argumento anterior con la función $-f$. $\square$

El recíproco de este teorema no es cierto: por ejemplo, el origen es un punto estacionario de las funciones $f(x, y) = x^3 + y^3$ y $g(x, y) = x^4 + y^4$; en ambas funciones, la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana en el origen es degenerada (es decir $Q(h_1, h_2) = 0$, $\forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$); ahora bien, en el origen g tiene un mínimo pero f no tiene máximo ni mínimo.

Sin embargo, el teorema anterior será cierto con una pequeña modificación basada en los siguientes conceptos:

Definición. Una forma cuadrática Q es

a) *semidefinida positiva* cuando $Q(h) \ge 0$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, y es

b) *semidefinida negativa* cuando $Q(h) \le 0$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$.

Esto quiere decir que la forma cuadrática puede anularse también para valores no nulos.

Teorema 4.4.4. *Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^{(2)}$ en un abierto $D \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$ un punto estacionario de f y Q la forma cuadrática asociada al hessiano de f en x_0 dada por (4.1).*

a) Si f tiene un mínimo local en x_0, entonces Q es semidefinida positiva.

b) Si f tiene un máximo local en x_0, entonces Q es semidefinida negativa.

De lo anterior se deduce que, si Q es indefinida (no es semidefinida positiva ni semidefinida negativa) y x_0 es un punto estacionario, entonces no corresponde a un máximo ni a un mínimo local. Estos puntos reciben el nombre de *puntos de ensilladura* de la función.

Terminaremos esta sección con la aplicación de los resultados anteriores al caso más común de funciones de dos variables.

Teorema 4.4.5. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^{(2)}$ en un abierto $D \subset \mathbb{R}^2$ y $(x_0, y_0) \in D$ un punto estacionario de f. Si llamamos $\Delta = \det Hf(x_0, y_0)$ y $a_{11} = D_{11}f(x_0, y_0)$, entonces*

a) f tiene un mínimo local en (x_0, y_0) si $a_{11} > 0$ y $\Delta > 0$;

b) f tiene un máximo local en (x_0, y_0) si $a_{11} < 0$ y $\Delta > 0$;

c) f tiene un punto de ensilladura en (x_0, y_0) si $\Delta < 0$.

Demostración. Si llamamos $a_{12} = D_{12}f(x_0, y_0)$ y $a_{22} = D_{22}f(x_0, y_0)$, la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana de f en (x_0, y_0) es

$$Q(h, k) = \frac{1}{2}(a_{11}h^2 + 2a_{12}hk + a_{22}k^2).$$

Si $a_{11} \neq 0$, podemos escribir

$$Q(h, k) = \frac{1}{2a_{11}}\big((a_{11}h + a_{12}k)^2 + \Delta \cdot k^2\big).$$

Si $\Delta > 0$, $Q(h, k)$ tiene el mismo signo que a_{11} de modo que los apartados (a) y (b) se deducen del teorema 4.4.3.

Si $\Delta < 0$,

$$Q(h, k) = \frac{1}{2a_{11}}(a_{11}h + a_{12}k + \sqrt{-\Delta} \cdot k)(a_{11}h + a_{12}k - \sqrt{-\Delta} \cdot k)$$

es producto de dos factores lineales que representan dos rectas en el plano $\{h, k\}$, las cuales se cortan en el origen y determinan cuatro regiones: en dos de ellas Q es negativo y en las otras dos Q es positivo. Por tanto, f tiene un punto de ensilladura. □

Observación. En el caso de que $\Delta = 0$, debe compararse, a partir de la definición, el valor de la función en (x_0, y_0) con el que toma en puntos de algún entorno de (x_0, y_0), como veremos en los ejemplos siguientes.

Ejemplos.

a) Dada la función $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^3$, los puntos estacionarios corresponden a la solución del sistema $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, es decir $(2x - 2y, -2x + 3y^2) = (0, 0)$. Se obtienen los puntos $P_1 = (0, 0)$ y $P_2 = (2/3, 2/3)$.

Para determinar si la función alcanza un máximo o mínimo local en algunos de estos puntos, calculamos la matriz hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix}.$$

Como $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\det Hf(0,0) < 0$, el punto $(0,0)$ corresponde a un punto de ensilladura.

Como $Hf(2/3,2/3) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, tenemos que $a_{11} > 0$ y $\det Hf(0,0) > 0$, de modo que la función tiene un mínimo local en el punto $(2/3,2/3)$.

b) El único punto estacionario de la función $f(x,y) = x^2 - 2xy^2$ es $P_0 = (0,0)$. Además,

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -4y \\ -4y & -4x \end{pmatrix} \Longrightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La forma cuadrática asociada a la matriz hessiana es semidefinida positiva, de modo que no podemos concluir si la función tiene un extremo local en el origen. Ahora bien, si escribimos $f(x,y) = x(x-2y^2)$, resulta que $f(x,y) > 0$ en la región $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x > 2y^2\}$ pero $f(x,y) < 0$ en la región $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x < 2y^2\}$. Esto permite concluir que el punto $(0,0)$ corresponde a un punto de ensilladura.

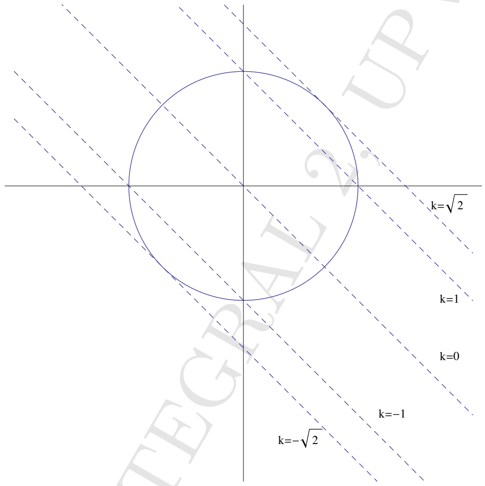
c) Dada la función $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$, el punto $P_0 = (0,0)$ es un punto estacionario. Como $f(x,y) = (x-y^2)^2 - y^5$, resulta que la función toma valores negativos en los puntos del conjunto $\{(x,y) : x = y^2, y > 0\}$ pero toma valores positivos en el conjunto $\{(x,y) : y = 0\}$. Por tanto, la función tiene un punto de ensilladura en el origen.

4.5. Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange

Cierto tipo de problemas de extremos consiste en encontrar los valores máximo y mínimo de una función cuyas variables están sometidas a ciertas condiciones de dependencia; éstos reciben el nombre de *problemas de máximos y mínimos condicionados*.

Por ejemplo, en el caso de una función de dos variables $z = f(x,y)$, si éstas están relacionadas por la condición $y = g(x)$, los extremos condicionados de f son precisamente los máximos y mínimos de la función de una variable $z = f\big(x, g(x)\big)$. Geométricamente, el problema consiste en encontrar los valores extremos de la curva en $\mathbb{R}^3$ que es la intersección de las superficies $z = f(x,y)$, $y = g(x)$.

Por ejemplo, si queremos determinar los puntos donde la función $f(x,y) = x+y$ alcanza el máximo y mínimo sobre la curva $C : x^2+y^2 = 1$, observamos, en primer lugar, que las curvas de nivel $x+y = k$ son rectas paralelas que cortan a C si $k \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. El valor de k será máximo cuando $k = \sqrt{2}$ y mínimo cuando $k = -\sqrt{2}$. Ambos se alcanzan en un punto donde la recta es tangente a C, es decir donde los vectores normales a la curva y la recta son proporcionales. Como $n_1 = (2x, 2y)$ y $n_2 = (1,1)$, debe existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(2x, 2y) = \lambda(1,1)$. Por tanto, $x = y$, y podemos deducir que el máximo se alcanza en $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y el mínimo se alcanza en $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.



El planteamiento general de estos problemas es el siguiente:

Problema. *Encontrar el valor máximo (o mínimo) de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, en un dominio M definido del siguiente modo:*

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : F^i(x) = 0,\ 1 \leq i \leq m\}.$$

El conjunto de funciones $F^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m)$ constituye lo que llamaremos *restricciones de las variables.* Denotaremos por $f|_M$ a la restricción de f al conjunto M.

Estableceremos a continuación las nociones básicas que permiten enunciar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de máximos y mínimos condicionados.

Definición. Dado un entero positivo $r < n$, decimos que un subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ es una *variedad r-dimensional* (o *r-variedad*) *de clase* $C^{(q)}$ cuando $\forall x \in M$, existen un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a x y una función $F : U \to \mathbb{R}^{n-r}$, con $F \in C^{(q)}(U)$, tales que

i) $\operatorname{rang} DF(x) = n - r$, $\forall x \in U$, y

ii) $M \cap U = \{x \in U : F(x) = 0\}$.

Es fácil, a partir de la definición, demostrar el siguiente resultado.

Proposición 4.5.1. *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $F : A \to \mathbb{R}^{n-r}$ una función de clase $C^{(q)}$ en A. Entonces el conjunto $M = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0,\ \operatorname{rang} DF(x) = n - r\}$ es una r-variedad de clase $C^{(q)}$.*

Por ejemplo, si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de clase $C^{(q)}$, cualquier conjunto de nivel $K_c = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = c\}$ no vacío y que no contenga puntos estacionarios de F es una $(n-1)$-variedad de clase $C^{(q)}$.

Con estos conceptos se prueba la siguiente condición necesaria de existencia de extremos condicionados.

Teorema 4.5.2 (de los multiplicadores de Lagrange)**.** *Sean M una r-variedad de $\mathbb{R}^n$ de clase $C^{(1)}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ una función definida en un abierto $D \subset \mathbb{R}^n$, con $f \in C^{(1)}(D)$ y $M \subset D$. Si $f|_M$ tiene un extremo relativo en x_0, entonces existen constantes $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ $(m = n - r)$ tales que x_0 es un punto estacionario de la función*

$$g = f + \lambda_1 F^1 + \cdots + \lambda_m F^m,$$

donde $F^1, \dots, F^m$ son las componentes de la función F asociada a la variedad M.

La demostración completa puede encontrarse en [Ap]. Veremos aquí dos casos particulares.

Teorema 4.5.3. *Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones de clase $C^{(1)}$ en un entorno de (x_0, y_0) tales que f alcanza un extremo relativo en (x_0, y_0) sujeto a la restricción $g(x, y) = 0$. Si además $Dg(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Df(x_0, y_0) = \lambda Dg(x_0, y_0)$.*

Demostración. Supongamos que $D_2 g(x_0, y_0) \neq 0$ (análogamente se procede si $D_1 g(x_0, y_0) \neq 0$). La función g verifica las hipótesis del teorema de la función implícita, de modo que existe $y = h(x)$ definida en un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que $y_0 = h(x_0)$ y $g(x, h(x)) = 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Además

$$D_1 g(x_0, y_0) + D_2 g(x_0, y_0) \cdot h'(x_0) = 0.$$

Por otra parte, la función $\varphi(x) = f(x, h(x))$ es de clase $C^{(1)}$ en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y alcanza un extremo relativo en x_0. Por tanto, $\varphi'(x_0) = 0$, es decir

$$D_1 f(x_0, y_0) + D_2 f(x_0, y_0) \cdot h'(x_0) = 0.$$

Así pues, los vectores $(D_1 g(x_0, y_0), D_2 g(x_0, y_0))$ y $D_1 f(x_0, y_0), D_2 f(x_0, y_0))$ son perpendiculares a $(1, h'(x_0))$ de modo que son proporcionales. □

Observación. Veamos con un ejemplo que la condición $Dg(x_0, y_0) \neq 0$ es necesaria. Es claro que el mínimo de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ bajo la restricción $(x - 1)^3 - y^2 = 0$ se alcanza en el punto $(1, 0)$ pues es el punto de la curva $y^2 = (x - 1)^3$ más próximo al origen.

Ahora bien, si llamamos $g(x, y) = (x - 1)^3 - y^2$, $Df(1, 0) = (2, 0)$ y $Dg(1, 0) = (0, 0)$ de modo que no son proporcionales.

Teorema 4.5.4. *Sean $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funciones de clase $C^{(1)}$ en un entorno de (x_0, y_0, z_0) tales que f alcanza un extremo relativo en (x_0, y_0, z_0) sujeto a las restricciones $g(x, y, z) = 0$, $h(x, y, z) = 0$. Si además $Dg(x_0, y_0, z_0)$ y $Dh(x_0, y_0, z_0)$ son linealmente independientes, entonces existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que $Df(x_0, y_0, z_0) = \lambda Dg(x_0, y_0, z_0) + \mu Dh(x_0, y_0, z_0)$.*

Demostración. Por ser $Dg(x_0, y_0, z_0)$ y $Dh(x_0, y_0, z_0)$ linealmente independientes, la matriz

$$\begin{pmatrix} D_1 g(x_0, y_0, z_0) & D_2 g(x_0, y_0, z_0) & D_3 g(x_0, y_0, z_0) \\ D_1 h(x_0, y_0, z_0) & D_2 h(x_0, y_0, z_0) & D_3 h(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

tiene rango 2. Supongamos, por ejemplo, que $\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. Por el teorema de la función implícita, existen $\delta > 0$ y dos funciones $y = y(x)$, $z = z(x)$ de clase $C^{(1)}$ en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tales que $y_0 = y(x_0)$, $z_0 = z(x_0)$ y $(x, y(x), z(x))$ es solución del sistema $g(x,y,z) = 0$, $h(x,y,z) = 0$, para cada $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Además,

$$\begin{aligned} D_1g(x_0,y_0,z_0) + D_2g(x_0,y_0,z_0) \cdot y'(x_0) + D_3g(x_0,y_0,z_0) \cdot z'(x_0) = 0, \\ D_1h(x_0,y_0,z_0) + D_2h(x_0,y_0,z_0) \cdot y'(x_0) + D_3h(x_0,y_0,z_0) \cdot z'(x_0) = 0, \end{aligned}$$

de modo que el vector $(1, y'(x_0), z'(x_0))$ es normal al plano generado por $Dg(x_0,y_0,z_0)$ y $Dh(x_0,y_0,z_0)$.

Por otro lado, la función $\varphi(x) = f(x, y(x), z(x))$ tiene un extremo relativo en (x_0,y_0,z_0) por lo que $\varphi'(x_0) = 0$, o bien

$$0 = D_1f(x_0,y_0,z_0) + D_2f(x_0,y_0,z_0) \cdot y'(x_0) + D_3f(x_0,y_0,z_0) \cdot z'(x_0).$$

El vector $Df(x_0,y_0,z_0)$ es ortogonal a $(1, y'(x_0), z'(x_0))$ por tanto pertenece al plano generado por $Dg(x_0,y_0,z_0)$ y $Dh(x_0,y_0,z_0)$. En definitiva, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que $Df(x_0,y_0,z_0) = \lambda Dg(x_0,y_0,z_0) + \mu Dh(x_0,y_0,z_0)$. □

Estos resultados indican que, en un problema de búsqueda de extremos condicionados, los únicos posibles puntos de extremo local se encuentran entre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} D_ig(x) = 0, & 1 \le i \le n \\ F^j(x) = 0, & 1 \le j \le m \end{cases}$$

de $m+n$ ecuaciones con las $m+n$ incógnitas $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Esto sugiere también considerar la función de $m+n$ variables

$$g(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F^j(x_1, \dots, x_n)$$

y calcular los puntos estacionarios de g en $M \times \mathbb{R}^m$, los cuales serán los únicos posibles valores donde f tenga un extremo relativo (observar que $\dfrac{\partial g}{\partial \lambda_j} = F^j$). Se reduce así el problema de extremos condicionados a un problema de extremos ordinarios.

Las condiciones suficientes para la existencia de extremos pueden determinarse de la siguiente forma:

Teorema 4.5.5. *Se considera la función $g = f + \lambda_1F^1 + \dots + \lambda_mF^m$.*

a) Si en un punto x_0 la función alcanza un máximo relativo, entonces la forma cuadrática correspondiente a g, $Q_{x_0}(h) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij}g(x_0)h_ih_j$, es semidefinida negativa en un entorno reducido de x_0.

b) Si $Q_{x_0}(h) > 0$ en algún entorno reducido de x_0, entonces la función alcanza un mínimo relativo en x_0.

En la mayoría de los ejemplos prácticos, para determinar si un punto estacionario corresponde a un máximo o un mínimo, utilizaremos métodos indirectos, sugeridos por cada situación particular. En los ejemplos que siguen iremos mostrando algunos de los métodos posibles.

Ejemplos.

1) Sea $f(x,y) = xy$ y $M = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 2a^2\}$, $(a > 0)$. Para determinar los máximos, mínimos y puntos de ensilladura de $f|_M$, observamos en primer lugar que M es una variedad 1-dimensional.

   Para ello, dado cualquier $(x,y) \in M$, habrá que probar que existen

   i) un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ que contiene a (x,y) y

   ii) una función $F : U \to \mathbb{R}$, $F \in C^{(1)}(U)$

   tales que $\operatorname{rang} JF(x,y) = 1$ y $M \cap U = \{(x,y) \in U : F(x,y) = 0\}$.

   En efecto, sea $F(x,y) = x^2 + y^2 - 2a^2$. Por ser un polinomio, $F \in C^{(\infty)}(U)$. Además $JF(x,y) = (2x, 2y)$; entonces $\operatorname{rang} JF(x,y) = 1$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Esto sugiere considerar el abierto $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y la función F arriba definida, pues $M \cap U = \{(x,y) \in U : F(x,y) = 0\}$.

   Podemos pues aplicar el teorema de los multiplicadores de Lagrange, que asegura que los extremos de f en encuentran entre los puntos estacionarios de la función $g = f + \lambda F$. Calcularemos los puntos estacionarios de g:

$$\begin{aligned}
D_x g(x,y,\lambda) = 0 &\iff y + 2x\lambda = 0 \\
D_y g(x,y,\lambda) = 0 &\iff x + 2y\lambda = 0 \\
D_\lambda g(x,y,\lambda) = 0 &\iff x^2 + y^2 - 2a^2 = 0.
\end{aligned}$$

   Si $\lambda = 0$, entonces $x = y = 0$, de donde $0 = 2a^2$, lo que es absurdo pues $a > 0$.

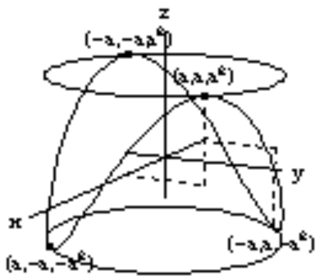
   Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$\lambda = -y/2x = -x/2y \Longrightarrow -2y^2 + 2x^2 = 0 \Longrightarrow x^2 - y^2 = 0.$$

   Como, además $x^2 + y^2 = 2a^2$, las soluciones del sistema dan los puntos estacionarios (a,a), $(-a,a)$, $(a,-a)$ y $(-a,-a)$.

   Observamos que el conjunto M es compacto: es cerrado por ser la imagen inversa de un cerrado por una aplicación continua, $F^{-1}(\{0\}) = M$, y acotado porque M está contenido en cualquier bola de centro el origen y radio mayor que $a\sqrt{2}$. Como además $f|_M$ es continua, entonces $f|_M$ alcanza su máximo y mínimo absolutos.

   Debido a que $f(-a,-a) = f(a,a) = a^2$ y $f(-a,a) = f(a,-a) = -a^2$, los puntos (a,a) y $(-a,-a)$ corresponden al máximo absoluto y $(a,-a)$ y $(-a,a)$ al mínimo absoluto.



2) Sean $f(x,y) = x^3 + y^3$ y $M = \{(x,y) : x^2 - y^2 = 1\}$ y queremos determinar los extremos relativos de $f|_M$.

Observamos en primer lugar que M es una variedad pues existen un abierto $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y una función $F : U \to \mathbb{R}$, definida por $F(x,y) = x^2 - y^2 - 1$, tales que $F \in C^{(\infty)}(U)$, $\operatorname{rang} JF(x,y) = 1$ (pues $JF(x,y) = (2x, -2y)$) y

$$M \cap U = \{(x,y) \in U : F(x,y) = 0\}.$$

Podemos pues aplicar el teorema de los multiplicadores de Lagrange y considerar la función $g(x,y) = x^3 + y^3 + \lambda(x^2 - y^2 - 1)$.

Calculamos los puntos estacionarios de g:

$$\begin{aligned} D_x g(x,y) = 0 &\iff 3x^2 + 2\lambda x = 0 \iff x(3x + 2\lambda) = 0 \\ D_y g(x,y) = 0 &\iff 3y^2 - 2\lambda y = 0 \iff y(3x + 2\lambda) = 0 \\ F(x,y) = 0 &\iff x^2 - y^2 = 1. \end{aligned}$$

Para resolver el sistema distinguiremos los siguientes casos:

- Si $x \neq 0$, $y = 0$, entonces $3x + 2\lambda = 0$, de donde $x = -2\lambda/3$; pero como $x^2 - y^2 = 1$ $x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$ y tenemos los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$.
- Si $x = 0$, $y \neq 0$, entonces $y^2 = -1$ que es imposible.
- Si $x = y = 0$, entonces $0 = 1$, también imposible.

Luego los puntos estacionarios son los dos citados $P_1 = (1,0)$ y $P_2 = (-1,0)$. Como el conjunto M no es compacto (no es acotado), no podemos asegurar la existencia de extremos. Lo único que sabemos es que si $f|_M$ tiene extremos, se han de encontrar entre dichos puntos estacionarios. Aplicaremos el criterio de la segunda derivada a la función f donde suponemos que la restricción M permite definir la variable x como función implícita de la variable y (lo cual es válido según el teorema de la función implícita en cada uno de los puntos estacionarios P_1 y P_2).

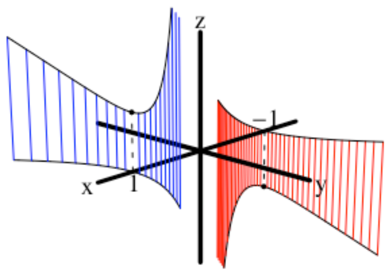
De la ecuación $x^2 - y^2 = 1$, deducimos que $x'(y) = \dfrac{y}{x}$. Por lo tanto,

$$f'(y) = 3x^2 \cdot x'(y) + 3y^2 = 3xy + 3y^2$$
$$f''(y) = 3x + 3x'(y) \cdot y + 6y = 3x + \frac{3y^2}{x} + 6y.$$

Sustituyendo en los puntos estacionarios, resulta

$$f''(P_1) = 3 > 0 \text{ y } f''(P_2) = -3 < 0$$

de modo que la función alcanza un mínimo relativo en el punto $P_1 = (1, 0)$ y un máximo relativo en el punto $P_2 = (-1, 0)$.



En la figura se observa que el máximo relativo de la función es menor que el mínimo relativo y que la función no tiene máximo ni mínimo absolutos.

4.6. Ejercicios

Ejercicio 4.1. *Sea* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$g(x) = \begin{cases} x/2 + x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Estudiar si es localmente invertible en un entorno de 0.

Ejercicio 4.2. *Suponiendo que el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} 2x = v^2 - u^2 \\ y = uv \end{cases}$ *permite definir las funciones* $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, *calcular* $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Ejercicio 4.3. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *la función definida por* $f(x,y) = (x + 2y, x - y)$.

a) Averiguar si satisface las hipótesis del teorema de la función inversa.

b) Hallar $\operatorname{Im} f$.

c) Comprobar que f *tiene inversa global, hallando* f^{-1}.

Ejercicio 4.4. *Probar que* $f(u,v) = (u \cos v, \operatorname{sen}(u - v))$ *es localmente invertible en un entorno del punto* $(\pi/2, \pi/2)$. *Calcular* $Df^{-1}(0,0)$.

Ejercicio 4.5. *Se considera la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$f(u,v) = (e^u + e^v, e^u - e^v).$$

Probar que f *es localmente invertible en un entorno de cada punto* $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. *Mostrar que también* f *es globalmente invertible calculando su función inversa. Comprobar que las matrices derivadas de* f *y de* f^{-1} *en puntos correspondientes son inversas.*

Ejercicio 4.6. *Si* u, v *son funciones de las variables* x, y *definidas por las ecuaciones*

$$\begin{aligned} e^u \cos v - x &= 0 \\ e^u \operatorname{sen} v - y &= 0, \end{aligned}$$

probar que el ángulo formado por ∇u *y* ∇v *es constante.*

Ejercicio 4.7. *Probar que la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$ *es localmente invertible en un entorno de cada punto, pero no lo es globalmente. Si*

$$A = \{(x,y) : 0 < y < 2\pi\},$$

probar que $f|_A$ *es inyectiva y hallar* f^{-1}.

Ejercicio 4.8. *Sea* $g(r,\vartheta) = (r\cos\vartheta, r\operatorname{sen}\vartheta)$. *Probar que* g *es localmente invertible en cada punto distinto de* $(0,\vartheta)$. *Obtener una inversa en el dominio* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$.

Ejercicio 4.9. *Dada la función* $f(x,y) = (x^2 - x - 2, 3y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, *estudiar las hipótesis del teorema de la función inversa, calcular* $f(\mathbb{R}^2)$, *ver si* f *es inyectiva y encontrar* f^{-1} *explícitamente.*

Ejercicio 4.10. *Hallar* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *y* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ *en el punto* $u = 1$, $v = 1$, *si* $x = u + \ln v$, $y = v - \ln u$, $z = 2u + v$.

Ejercicio 4.11. *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *la función definida por*

$$f(x,y,z) = \big(e^x, \operatorname{sen}(x+y), e^z\big).$$

a) Probar que f *es localmente invertible en* $(0,0,0)$.

b) Probar que existen puntos en $\mathbb{R}^3$ *donde no se cumplen las hipótesis del teorema de la función inversa.*

Ejercicio 4.12. *Sea* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por*

$$g(x,y,z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y).$$

a) Probar que g *es diferenciable en todo* $\mathbb{R}^3$ *y posee función inversa diferenciable en un entorno de cada punto.*

b) Probar que g *es globalmente invertible.*

Ejercicio 4.13. *Sea* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *la función definida por*

$$g(x,y) = (\operatorname{ch} x \cos y, \operatorname{sh} x \operatorname{sen} y).$$

Probar que g *posee inversa diferenciable en un entorno de cada punto de* $\mathbb{R}^2$ *distinto del origen. ¿Posee* g *una única inversa?*

Ejercicio 4.14. *a) Probar que la función* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$x = \frac{u^2 - v^2}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \ y = \frac{2uv}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

es una transformación regular en un entorno del punto $(0, 1)$.

b) Calcular la diferencial de la inversa local $(u, v) = F^{-1}(x, y)$ *en un entorno del punto* $(-1, 0)$.

c) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $v = v(x, y)$ *en el punto* $(-1, 0)$.

Ejercicio 4.15. *Sea* $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la función definida por*

$$h(x, y) = x^2 + y^3 + xy + x^3 + ay,$$

siendo a un parámetro real.

a) ¿Para qué valores de a la ecuación $h(x, y) = 0$ *define y como función implícita de x de clase* $C^{(\infty)}$, *en un entorno de* $(0, 0)$*?*

b) ¿Define la anterior ecuación a x como función implícita diferenciable de y en un entorno de $(0, 0)$ *para algún valor de a?*

Ejercicio 4.16. *Se considera la función* $u(x, y) = e^{y/x} \cdot g\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$, *siendo* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función de clase* $C^{(1)}$. *Si* $g(3) = 0$, $g'(3) = 1$, *demostrar que* $u(x, y) = 0$ *define implícitamente una función* $y = \varphi(x)$ *en un entorno del punto* $(1, 1/2)$. *Calcular* $\varphi'(1)$.

Ejercicio 4.17. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la función definida por* $f(x, y) = y \cos x$. *Probar que* $f(x, y) = 0$ *define una función implícita diferenciable* $y = h(x)$ *en un entorno de* $(0, 0)$. *Hallar* $h'(0)$. *¿Posee h función inversa diferenciable en un entorno del origen?*

Ejercicio 4.18. *Sea* $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$. *¿La ecuación* $F(x, y, z) = 0$ *determina a z como función implícita de x e y en un entorno del punto* $(1, 1, 1)$*? ¿Y en un entorno de* $(1, 1, -1)$*? ¿Cuál es la expresión explícita de dichas funciones?*

Ejercicio 4.19. *Calcular las derivadas parciales de la función* $z = f(x, y)$ *definida implícitamente por la ecuación* $y^2 + xz + z^2 - e^z - c = 0$.

Ejercicio 4.20. *¿Cerca de qué puntos, la superficie*

$$x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3yz^3 = 1$$

se puede representar como función implícita diferenciable $z = f(x, y)$?

Ejercicio 4.21. *Sabiendo que la ecuación $xy + z + 3xz^5 = 4$ representa de forma implícita una función $z = g(x, y)$ en un entorno del punto $(1, 0, 1)$, calcular $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 0)$ y $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 0)$.*

Ejercicio 4.22. *Dada la función $f(x, y, z) = (x^3 + y^3 + 3x^2y - 3z, x - y + z^3 + 1)$ y el punto $P = (-1, 1, 1)$, probar que $f(x, y, z) = 0$ define una función $g(x) = \big(g_1(x), g_2(x)\big)$ en un entorno de P y calcular $g'(x)$.*

Ejercicio 4.23. *Calcular la recta tangente a la curva definida en forma implícita por la ecuación $x^3 + y^3 - 2xy + x - y - 2 = 0$ en el punto $(1, 0)$.*

Ejercicio 4.24. *Probar que la ecuación $xy = \ln(x/y)$ define implícitamente una función $y = f(x)$ de clase $C^{(\infty)}$ en un entorno del punto $x_0 = \sqrt{e}$ tal que $f(\sqrt{e}) = 1/\sqrt{e}$. Deducir que f tiene un máximo local en x_0.*

Ejercicio 4.25. *a) Probar que la ecuación $x^2 + y^3 + xy + x^3 - y = 0$ define a y como función de x en un entorno del origen.*

b) Si $y = \varphi(x)$ es la función definida en el apartado anterior, calcular el polinomio de Taylor de de orden dos de φ en $x = 0$.

c) ¿Alcanza la función φ un mínimo local en $x = 0$?

Ejercicio 4.26. *Hallar el plano tangente a la superficie $z = g(x, y)$ definida implícitamente por la ecuación $3e^x - \dfrac{y + \sqrt{x^2 + z^2}}{y - \sqrt{x^2 + z^2}} = 0$ en el punto $P = (0, 2, 1)$.*

Ejercicio 4.27. *Estudiar si la ecuación $F(x, y, z) = xy + yz + 3xz^5 - 1 = 0$ define a z como función implícita de x e y en un entorno del punto $(1, -1, 1)$. En caso afirmativo, calcular el plano tangente a la gráfica $z = z(x, y)$ en el punto $(1, -1, 1)$ y el polinomio de Taylor de orden 2 para la función $z = z(x, y)$ en un entorno de $(1, -1)$.*

Ejercicio 4.28. *Se considera la función* $u = u(x, y)$ *definida implícitamente por la ecuación* $u = F(x + u, yu)$. *Calcular* $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ *en función de las derivadas parciales de* F.

Ejercicio 4.29. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable. Supongamos que la ecuación* $f(y/x, z/x) = 0$ *define a* z *implícitamente como función de* x *e* y. *Probar que*

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Ejercicio 4.30. *Las ecuaciones* $x = u + v$, $y = uv^2$ *definen implícitamente a* v *como función de* x *e* y *(eliminando* u*). Probar que* $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{v(x, y)}{3v(x, y) - 2x}$ *y encontrar una fórmula análoga para* $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Ejercicio 4.31. *La ecuación* $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$ *define a* z *como función implícita diferenciable de* x *e* y *en un cierto abierto* $U \subset \mathbb{R}^2$. *Si llamamos* $z = f(x, y)$ *a dicha función, calcular* $df(x, y)$ *en función de* D_1F *y* D_2F.

Ejercicio 4.32. *Si la ecuación* $F\Big(x + \dfrac{z}{y}, y + \dfrac{z}{x}\Big) = 0$, *donde* F *es una función diferenciable, define implícitamente una función* $x = z(x, y)$, *comprobar que*

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

Ejercicio 4.33. *Determinar condiciones suficientes para que la ecuación*

$$f\Big(\frac{xy}{z}, x^2 + y^2\Big) = 0$$

defina a z *como función implícita de* x *e* y *en un entorno del punto* $(1, 1, 2)$. *Para dicha función, calcular* $y\,\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\,\dfrac{\partial z}{\partial y}$ *en el punto* $(1, 1, 2)$.

Ejercicio 4.34. *Sea* $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ *la función definida por*

$$f(x, y, z, u, v) = (u + v + x^2 - y^2 + z^2, u^2 + v^2 + u - 2xyz).$$

Probar que $f(x, y, z, u, v) = 0$ *define una función implícita* $(u, v) = \big(h_1(x, y, z), h_2(x, y, z)\big)$, *la cual es diferenciable en un entorno del punto* $P(0, 0, 0, -1/2, 1/2)$. *Calcular* $dh(P)$.

Ejercicio 4.35. *Sea*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 & (1) \\ x + y + z = 0 & (2) \end{cases}$$

Comprobar que dicho sistema define a z e y como funciones de x en un entorno de $P(-1,-1,2)$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva intersección de las superficies (1) y (2) en dicho punto.

Ejercicio 4.36. *Las ecuaciones*

$$\begin{aligned} x^2 - y\cos(uv) + z^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - \operatorname{sen}(uv) + 2z^2 &= 2 \\ xy - \operatorname{sen} u \cos v + z &= 0 \end{aligned}$$

definen a x, y, z como funciones de u y v. Calcular $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial x}{\partial v}$ en el punto $x = 1$, $y = 1$, $u = \pi/2$, $v = 0$, $z = 0$.

Ejercicio 4.37. *Suponiendo que las expresiones $x = \phi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, $z = \rho(u,v)$ determinan a z como función de x, y, calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.*

Ejercicio 4.38. *Sean $x = f(u,v,w)$, $y = g(u,v,w)$, $z = h(u,v,w)$. Determinar $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.*

Ejercicio 4.39. *Suponiendo que $z = z(x,y)$ satisface $f(x,y,z,t) = 0$, $g(x,y,z,t) = 0$, hallar Dz.*

Ejercicio 4.40. *Sea $f(x,y,z) = 0$. Probar que $\dfrac{\partial x}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$, bajo suposiciones adecuadas.*

Ejercicio 4.41. *Sea $z = f(x,y)$ una función definida por $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz)$, donde φ es diferenciable y a, b, c son constantes. Probar que*

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

Ejercicio 4.42. *Comprobar que la función implícita $z = z(x, y)$ determinada por la ecuación $y = x\phi(z) + \psi(z)$ satisface*

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Ejercicio 4.43. *La función $z = z(x, y)$ viene dada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right)$. Comprobar*

$$(x^2 - y^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$$

Ejercicio 4.44. *Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ si $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$.*

Ejercicio 4.45. *Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ si $F(x - y, y - z, z - x) = 0$.*

Ejercicio 4.46. *Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ si $F(xz, yz) = 0$.*

Ejercicio 4.47. *Estudiar si la ecuación*

$$x^2 + xy + y^2 + z^2 + z = 5$$

define a z como función implícita de x e y en un entorno del punto $P = (1, 1, 1)$. En caso afirmativo, hallar $\frac{\partial z}{\partial x}(P)$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(P)$.

Ejercicio 4.48. *Calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ si $z = z(x, y)$ viene definida implícitamente por la ecuación $x + 2y + z + e^{x+y+z} = 0$.*

Ejercicio 4.49. *La ecuación $\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(y + z) = 1$ define $z = f(x, y)$. Calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en función de x, y, z.*

Ejercicio 4.50. *La ecuación $z^3 - 3xyz = a^3$ $(a \neq 0)$ define implícitamente a z como función de x e y. Calcular las derivadas parciales de segundo orden de $z = z(x, y)$.*

Ejercicio 4.51. *Sea* $f : R^3 \longrightarrow R$ *tal que* $f(x,y,z) = \operatorname{sen} z + (1+x^2)^y + z + y^2 - 2y$.
a) Probar que $f(x,y,z) = 0$ *define una función implícita* $z = g(x,y)$ *en un entorno de* $(0,1,0)$.
b) Calcular las derivadas parciales de primer y segundo orden de g *en* $(0,1)$.

Ejercicio 4.52. *Se considera la función* $f(x,y,z,u,v) = (4x + yv - e^u, y - 2z + 3v - u\cos v)$ *y el punto* $P = (1,-3,0,0,1)$.
Probar que $f(x,y,z,u,v) = (0,0)$ *permite definir una función* $g(x,y,z) = \big(g_1(x,y,z), g_2(x,y,z)\big)$ *en un entorno de* P *y calcular* $\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}, \dfrac{\partial g}{\partial z}$.

Ejercicio 4.53. *Las ecuaciones* $x + y = uv$, $xy = u - v$, *definen* x *e* y *como funciones implícitas de* u *y* v, *por ejemplo,* $x = X(u,v)$, $y = Y(u,v)$. *Probar que* $\dfrac{\partial X}{\partial u} = \dfrac{xv-1}{x-y}$, *si* $x \neq y$, *y hallar fórmulas similares para* $\dfrac{\partial X}{\partial v}, \dfrac{\partial Y}{\partial u}, \dfrac{\partial Y}{\partial v}$.

Ejercicio 4.54. *a) Dadas las ecuaciones*

$$x = u + u\,w, \quad y = v + u\,v, \quad z = u + v + w\,,$$

demostrar que existen dos funciones f *y* g *de clase* C^1 *que definen* (u,v,w) *como función de* (x,y,z) *en un entorno de* $(0,0,0)$.

b) Calcular las derivadas parciales de $w(x,y,z)$ *en* $(0,0,0)$, *para una de las funciones del apartado anterior.*

Ejercicio 4.55. *Dado el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 4 \\ xyuv = 1 \end{cases}$, *hallar:*

a) Las expresiones de du, dv.

b) El valor de $x\,\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\,\dfrac{\partial z}{\partial y}$, *siendo* $z = (u+v)^2$.

Ejercicio 4.56. *Dada la curva* $C : \begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - z^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$, *hallar un vector unitario tangente a* C *en el punto* $P(\sqrt{7}, 3, 4)$.

Ejercicio 4.57. *Probar que la ecuación*

$$\operatorname{sen}(yz) + \operatorname{sen}(xz) + \operatorname{sen}(xy) = 0$$

define implícitamente una función $z = z(x,y)$ *de clase* $C^{(1)}$ *en un entorno del punto* $(\pi, 0, 1)$. *Calcular el polinomio de Taylor de primer orden asociado a la función* z *en el punto* $(\pi, 0)$.

Ejercicio 4.58. *a) Si* $F(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + z(x - 1 + \operatorname{tg}(2\pi x)) - 4$, *demostrar que la ecuación* $F(x,y,z) = 0$ *define, localmente cerca de* $(x,y) = (1,1)$, *dos funciones* $z = f(x,y)$ *y* $z = g(x,y)$ *diferenciables con derivadas parciales continuas.*

b) Calcular los desarrollos de Taylor de orden 1 *de* f *y* g *en el punto* $(1,1)$.

Ejercicio 4.59. *Probar que el sistema*

$$\begin{cases} 2x^2 + u + y = 0 \\ 2xz + x - z = 0 \end{cases}$$

define a x *e* y *como funciones diferenciables de* z *y* u *en un entorno del origen. Si llamamos* $x = f(z,u)$, $y = g(z,u)$ *a dichas funciones, probar que la función* $\Gamma = (f,g)$ *es invertible en un entorno del origen.*

Ejercicio 4.60. *a) Probar que el sistema*

$$\begin{cases} xz^3 + y^2u^3 = 1 \\ 2xy^3 + u^2z = 0 \end{cases}$$

define a las variables x, y *como funciones implícitas diferenciables de* z, u *en un entorno del punto* $P(x_0, y_0, z_0, u_0) = (0,1,0,1)$.

b) Sean $x = h(z,u)$, $y = g(z,u)$ *las funciones implícitas definidas en el apartado (a). Demostrar que la función* $F(z,u) = \big(h(z,u), g(z,u)\big)$ *admite función inversa diferenciable en un entorno del punto* $(0,1)$.

Ejercicio 4.61. *Determinar los valores del parámetro* a *para los que el sistema*

$$\begin{cases} xz^3 + yu + az = 1 \\ 2xy^3 + u^2z + a(y-1) = 0 \end{cases}$$

define a (x,y) *como función implícita de* (z,u) *en un entorno del punto* $(0,1,0,1)$. *Si llamamos* $(x,y) = G(z,u)$ *a dicha función, determinar los valores de* a *para los que dicha función admite una inversa local de clase* $C^{(1)}$ *en un entorno de* $(0,1)$.

Ejercicio 4.62. *Dada la función* $f(x,y) = x^2 - 2axy + y^2$, *¿cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas?*

a) Si $a^2 < 1$, *la función alcanza un mínimo en el punto* $(0,0)$.

b) Si $a < -1$, *la función tiene un punto de ensilladura en* $(0,0)$.

c) Si $a = 0$, *la función tiene un máximo en* $(0,0)$.

d) *Si* $a = 1$, *la función tiene un mínimo en* $(1, 1)$.

Ejercicio 4.63. *Consideremos el problema de determinar los máximos y mínimos globales de la función* $f(x, y) = x^2y + y^2$ *en la región* $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. *¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas?*

a) *El problema tiene solución porque la función es continua en* $\mathbb{R}^2$ *y* S *es un compacto.*

b) *Los únicos puntos críticos son* $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(2\sqrt{2}/3, -1/3)$ *y* $(-2\sqrt{2}/3, -1/3)$.

c) *Como el punto* $(0, -1)$ *corresponde a un máximo local estricto de* f *en la frontera de* S, *es solución del problema.*

d) *Como los puntos* $(2\sqrt{2}/3, -1/3)$ *y* $(-2\sqrt{2}/3, -1/3)$ *corresponden a mínimos locales en el interior de* S *y* $f(2\sqrt{2}/3, -1/3) = f(-2\sqrt{2}/3, -1/3) < f(0, 0)$, *son soluciones del problema.*

Ejercicio 4.64. *Hallar los extremos locales de las siguientes funciones:*

a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$.

b) $f(x, y) = 3x^2 + 12xy + 9y^2 + y^3$.

c) $f(x, y) = xy^2 + x^2$.

d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$.

e) $f(x, y) = x^5y + xy^5 + xy$.

f) $f(x, y) = (y - 2x^2)(y - x^2)$.

g) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 5}$.

h) $f(x, y) = e^y(x^4 - x^2) + e^{2y}$.

i) $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$.

j) $f(x, y) = (x - y + 1)^2$.

k) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$.

l) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ *entre los puntos con* $z = \frac{1}{xy}$.

m) $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ *en* $x^2 + y^2 \leq 1$.

n) $f(x, y) = x^2 + y^2$ *sobre la recta de pendiente* 1 *que pasa por* $(-1, 0)$.

ñ) $f(x, y, z) = x + y + z$ *sobre la curva* $x^2 + y^2 = 2$, $x + z = 1$.

o) $f(x, y) = (x - y)^n$ *con* $n \geq 1$ *y* $x^2 + y^2 = 1$.

Ejercicio 4.65. *Sea*
$$f(x,y) = e^{ax+y^2} + b \cdot \operatorname{sen}(x^2+y^2).$$
Determinar los valores de a y b para que la función tenga un punto estacionario en $(0,0)$ y el polinomio de Taylor de segundo grado centrado en el origen tome el valor 6 en el punto $(1,2)$.

Con los valores obtenidos de a y b, deducir si la función alcanza un máximo o mínimo en el punto $(0,0)$.

Ejercicio 4.66. *Calcular los valores de a y b para que el sistema*

$$\begin{cases} x + a\operatorname{sen} y - z^3 = 0 \\ x - a^2y^2 + e^{bz} = 1 \end{cases}$$

defina implícitamente a y y a z como funciones de x en un entorno del punto $(0,0,0)$. Además, el polinomio de Taylor de orden 2 de $z = z(x)$ en $x = 0$, tome el valor 0 en $x = b^2$ y la función $h(x) = y(x) - z(x)$ tenga un máximo en $x = 0$.

Ejercicio 4.67. *Estudiar los extremos absolutos de la función*

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

sobre el conjunto $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$.

Ejercicio 4.68. *Estudiar el carácter de los puntos estacionarios de la función*

$$f(x,y) = \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{3/2} - 2x - y^2$$

en $\mathbb{R}^2$. Determinar los puntos del conjunto $\{(x,y):\ x^2+y^2 \leq 4\}$ donde la función f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.

Ejercicio 4.69. *Clasificar los extremos relativos de la función $z = z(x,y)$ definida implícitamente por la ecuación*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

Ejercicio 4.70. *Calcular la distancia al origen de la recta*

$$\begin{cases} 2x + 2y + z + 9 = 0 \\ 2x - y - 2z - 18 = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 4.71. *Sea γ la curva intersección entre el cono $z^2 = x^2+y^2$ y el plano $z = 1+x+y$. Encontrar los puntos de γ que están más cerca y más lejos del origen.*

Ejercicio 4.72. *Hallar la distancia entre las rectas en $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones $x-1 = y/2 = z$ y $x = y = z$.*

Ejercicio 4.73. *Sea $M = \{(x,y,z) : x^2+y^2-z^2+2xy-16 = 0\}$ y sea $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Calcular todos los posibles extremos de f sobre M. ¿Es $(-2,-2,0)$ un punto extremo de f sobre M?*

Ejercicio 4.74. *Sea $f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$. Hallar el mínimo de f sobre el plano $2x+3y+4z = 12$. Justificar la respuesta.*

Ejercicio 4.75. *Estudiar el carácter de los puntos estacionarios de la función*

$$f(x,y) = \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{3/2} - 2x - y^2$$

en $\mathbb{R}^2$. Determinar los puntos del conjunto $\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\}$ donde la función f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.

Ejercicio 4.76. *Sea $f(x,y) = x^3 + y^3 + 9xy + 27$.*

a) Clasificar los extremos locales de $f(x,y)$ en $\mathbb{R}^2$.

b) Hallar los extremos absolutos de $f(x,y)$ sobre el cuadrado cerrado de vértices $(5,5)$, $(5,-5)$, $(-5,5)$, $(-5,-5)$.

Ejercicio 4.77. *Encontrar el valor máximo de la función $f(x,y) = 3x^2 + 2\sqrt{2}\,xy + 4y^2$ sobre el círculo cerrado de centro el origen y radio 3.*

Ejercicio 4.78. *Calcular el volumen máximo de un paralelepípedo sujeto a la restricción de que el área de su superficie sea $2a$ $(a > 0)$.*

Ejercicio 4.79. *Hallar el valor máximo de la raíz n-ésima del producto de los números positivos $x_1, \ldots, x_n$ a condición de que la suma de estos números sea igual a A.*

Ejercicio 4.80. *Dividir un segmento en tres partes de forma que el producto de sus dimensiones sea máximo.*

Ejercicio 4.81. *Sea* $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + bxy + az$*, con* $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Obtener una relación entre a *y* b *que sea necesaria para que* $(1, 1, 1)$ *sea extremo relativo de* F *sobre la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

b) Supuesta la condición anterior, determinar para qué valores de a *y* b *el* $(1, 1, 1)$ *es máximo relativo de* F *sobre la esfera y para cuáles es mínimo relativo sobre dicha esfera.*

Ejercicio 4.82. *Determinar los puntos donde la función* $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ *alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos en el compacto*

$$K = \{(x, y) \in R^2 : \ x \leq 0 \quad y \leq 0 \quad x + y \geq 3\}.$$

Ejercicio 4.83. *Determinar los valores máximo y mínimo absolutos de la función* $u = x + y + z$ *en el compacto*

$$K = \{(x, y, z) \in R^3 : \ z \geq x^2 + y^2, \ z \leq 1\}.$$

Ejercicio 4.84. *Estudiar los extremos de la función* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$ *sobre el conjunto*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ z \leq 1. \end{cases}$$

Ejercicio 4.85. *Sea* C *el arco de curva de ecuaciones* $2z = 16 - x^2 - y^2$ *y* $4 = x + y$ *contenido en el primer octante. Encontrar los puntos más cercanos y más lejanos al origen. ¿Cuál es la distancia mínima y máxima al origen?*

Ejercicio 4.86. *Sea la función* $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + xz + xy + az$.

a) ¿Para qué valores de a *la función* $f(x, y, z) = 0$ *define a* z *como función implícita de* x *e* y $(z = h(x, y))$ *en un entorno del origen?*

b) ¿Para qué valores de a *la función* $z = h(x, y)$ *tiene un extremo en el punto* $(0, 0)$*?*

Ejercicio 4.87. *Un espejo rectangular $OABC$, de lados a y c, se ha partido por una de sus esquinas, digamos O, de manera que el trozo OMN es un triángulo rectángulo, de base m y altura n. Aprovechando el fragmento $MABCNM$, encontrar un punto P, sobre MN, de tal manera que el nuevo espejo rectangular $PLBH$ tenga área máxima.*

Ejercicio 4.88. *Hacer máximo el volumen de un sólido rectangular que tiene tres caras sobre los planos coordenados y un vértice en el plano $x/a + y/b + z/c = 1$ ($a, b, c > 0$).*

Ejercicio 4.89. *Inscribir en el segmento de paraboloide elíptico*

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \ z = c,$$

un paralelepípedo de volumen máximo.

Ejercicio 4.90. *Sea $f(x, y) = x^2 + y^3 + xy + x^3 + \lambda y$, siendo λ un parámetro real.*

I) *¿Para qué valores de λ la ecuación $f(x, y) = 0$ define implícitamente a y como función de x en un entorno del origen?*

II) *¿Para qué valores de λ la ecuación $f(x, y) = 0$ define implícitamente a x como función de y en un entorno del origen?*

III) *Si $y = g(x)$ es la función implícita determinada por $f(x, y) = 0$ en un entorno del origen, calcular el valor de λ para que el polinomio de Taylor de segundo orden de g en el origen tome el valor 1 cuando $x = 1$.*

IV) *¿Para qué valores de λ tiene g un extremo en $x = 0$?*