Propuesta preliminar de los contenidos teórico-prácticos de la asignatura
"Álgebra lineal y Geometría II"

Iker Malaina Celada

5 de octubre de 2018

Índice

1. ESPACIO VECTORIAL COCIENTE

1.1. Espacio vectorial cociente

Definición 1.1. *Sea V un K-espacio vectorial y sea W un K-subespacio vectorial de V, diremos que $v_1 R v_2$ (esto es, v_1 está relacionado con v_2) si $v_1 - v_2 \in W$.*

Proposición 1.2. *R es una relación de equivalencia.*

Demostración.

1. **Reflexiva**. Sea $v \in V$, $v - v = 0 \in W \Rightarrow vRv$.

2. **Simétrica**. Supongamos que $v_1 R v_2$, entonces $v_1 - v_2 \in W \Rightarrow -(v_1 - v_2) \in W \Rightarrow v_2 - v_1 \in W \Rightarrow v_2 R v_1$.

3. **Transitiva**. Supongamos que $v_1 R v_2$ y $v_2 R v_3, \Rightarrow v_1 - v_2 \in W \wedge v_2 - v_3 \in W \Rightarrow v_1 - \cancel{v_2} + \cancel{v_2} - v_3 \in W \Rightarrow v_1 R v_3$.

□

Definición 1.3. *Sea V un espacio vectorial, W un subespacio vectorial, y R una relación de equivalencia, definiremos la coclase de v con respecto a W como:*

$$[v] = \{v' \in V | vRv'\} = \{v' \in V | v - v' \in W\} = \{v + w | w \in W\} = v + W.$$

Observación 1.4. $v_1 + W = v_2 + W \iff v_1 - v_2 \in W$.

Definición 1.5. *Llamaremos espacio vectorial cociente del k-espacio vectorial V entre el K-subespacio vectorial W al K-subespacio $\frac{V}{W} = \{v + W | v \in W\} = \{[v] | v \in V\}$.*

Proposición 1.6. *Sean V un K-espacio vectorial, W un subespacio vectorial, $v_1, v_2 \in V$, y $\lambda \in K$. Las operaciones:*

1. *Suma: $(v_1 + W) + (v_2 + W) = (v_1 + v_2) + W$.*

2. *Producto escalar: $\lambda(v + W) = (\lambda v) + W$.*

están bien definidas.

Demostración.

1. Supongamos que $v_1 + W = v_1' + W \wedge v_2 + W = v_2' + W \Rightarrow v_1 - v_1' \in W \wedge v_2 - v_2' \in W \Rightarrow (v_1 + v_2) - (v_1' + v_2') \in W \Rightarrow (v_1 + v_2) \in W \wedge (v_1' + v_2') \in W$.

2. Supongamos que $v + W = v' + W \Rightarrow v - v' \in W \Rightarrow \lambda(v - v') \in W \Rightarrow \lambda v - \lambda v' \in W \Rightarrow (\lambda v) + W = (\lambda v') + W$.

□

Proposición 1.7. $\left(\frac{V}{W}, +, \cdot_K\right)$ *es un K-espacio vectorial.*

Demostración.

1. **Propiedad conmutativa para $+$.** $(v_1+W)+(v_2+W)=(v_1+v_2)+W=(v_2+v_1)+W=(v_2+W)+(v_1+W)$.

2. **Propiedad asociativa para $+$.** $((v_1+W)+(v_2+W))+(v_3+W)=((v_1+v_2)+W)+(v_3+W)=((v_1+v_2)+v_3)+W)=(v_1+(v_2+v_3))+W)=(v_1+W)+((v_2+v_3)+W)=(v_1+W)+((v_2+W)+(v_3+W))$.

3. **Elemento neutro para $+$.** $(v+W)+(0+W)=(v+0)+W=v+W$. Análogamente, $(0+W)+(v+W)=(0+v)+W=v+W$.

4. **Elemento opuesto para $+$.** $(v+W)+((-v)+W)=(v+(-v))+W=0+W$.

5. **Propiedad asociativa para $\cdot_K$.** $\lambda(\mu(v+W))=\lambda((\mu v)+W)=(\lambda(\mu v))+W=((\lambda\mu)v)+W=(\lambda\mu)(v+W)$.

6. **Elemento neutro para $\cdot_K$.** $1_K(v+W)=(1_K v)+W=v+W$.

7. **Propiedad distributiva para $\cdot_K$ respecto a la suma de vectores.** $\lambda((v_1+W)+(v_2+W))=\lambda((v_1+v_2)+W)=(\lambda(v_1+v_2))+W=(\lambda(v_1+v_2))+W=(\lambda v_1+\lambda v_2)+W=((\lambda v_1)+W)+((\lambda v_2)+W)=\lambda(v_1+W)+\lambda(v_2+W)$.

8. **Propiedad distributiva para $\cdot_K$ respecto a la suma de escalares.** $(\lambda+\mu)(v+W)=((\lambda+\mu)v)+W=(\lambda v+\mu v)+W$.

□

Observación 1.8. *La coclase $v+W$ suele denotarse también por $\overline{v}$.*

1.2. Bases y dimensión

Teorema 1.9. *Si V es un K-espacio vectorial de dimensión n y W es un K-subespacio de V de dimensión m, entonces $dim_K(\frac{V}{W})=n-m$.*

Demostración. Sea $B_W=\{u_1,...,u_m\}$ una base de W. La completamos hasta una base de V, $B_V=\{u_1,...,u_m,v_1,...,v_{n-m}\}$, añadiendo de forma apropiada los $n-m$ vectores. Ahora probemos que $B_{V/W}=\{\overline{v_1},...,\overline{v_{n-m}}\}$ es base de V/W:

1. **Sistema generador.** Sea $v\in V,\exists\lambda_1,...,\lambda_m,\mu_1,...,\mu_{n-m}\in K|v=\lambda_1u_1+...+\lambda_mu_m+\mu_1v_1+...+\mu_{n-m}v_{n-m}$. Entonces $\overline{v}=\lambda_1\overline{u_1}+...+\lambda_m\overline{u_m}+\mu_1\overline{v_1}+...+\mu_{n-m}\overline{v_{n-m}}=\mu_1\overline{v_1}+...+\mu_{n-m}\overline{v_{n-m}}$ ya que $u_1,...,u_m\in W$. Por lo tanto, $\{\overline{v_1},...,\overline{v_{n-m}}\}$ es sistema generador de $\frac{V}{W}$.

2. **Independencia lineal.** Supongamos que $\mu_1\overline{v_1}+...+\mu_{n-m}\overline{v_{n-m}}=\overline{0}$. Entonces, $\mu_1v_1+...+\mu_{n-m}v_{n-m}\in W$, luego $\exists\lambda_1,...,\lambda_m\in K|\mu_1v_1+...+\mu_{n-m}v_{n-m}=\lambda_1u_1+...+\lambda_mu_m$, luego $\mu_1v_1+...+\mu_{n-m}v_{n-m}-\lambda_1u_1-...-\lambda_mu_m=0$, y como B_V es base de V y por lo tanto sus vectores son linealmente independientes, $-\mu_i=0\ \forall i$, luego $\mu_i=0\ \forall i$.

$\square$

Ejemplo 1.10. *Cómo calcular la base del espacio cociente: sea* $V = \mathbb{R}^2, W = \langle(1,-2)\rangle$. *Primero completamos* $\{(1,-2)\}$ *hasta una base* $\{(1,-2),(1,0)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$. *Así,* $\left\{\overline{(1,0)}\right\}$ *es una base de* $\frac{V}{W}$.

Si tomamos la coclase $\overline{(3,9)} \in \frac{V}{W}, (3,9) = \lambda(1,-2) + \mu(1,0), \Rightarrow \begin{cases} 3 = \lambda + \mu \\ 9 = -2\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\frac{9}{2} \wedge \mu = 3 - \lambda = \frac{15}{2}$. *Por lo tanto,* $\overline{(3,9)} = \frac{15}{2}\overline{(1,0)}$

1.3. Teorema de isomorfía para espacios vectoriales

Teorema 1.11. ***Primer teorema de isomorfía de espacios vectoriales.*** *Si* $f : V \longrightarrow W$ *es una aplicación lineal entre dos* K*-espacios vectoriales* V *y* W, *entonces* $\frac{V}{Ker(f)} \simeq Im(f)$.

Demostración. Sea

$$\overline{f} : \frac{V}{Ker(f)} \longrightarrow Im(f)$$
$$\overline{v} \longrightarrow f(v)$$

veamos que $\overline{f}$ está bien definida:
Supongamos que $\overline{v_1} = \overline{v_2}$. Entonces $v_1 - v_2 \in Ker(f)$. De ahí, $f(v_1 - v_2) = 0$, luego $f(v_1) - f(v_2) = 0$ y $f(v_1) = f(v_2)$.
Veamos que f es lineal. Sean $\lambda, \mu \in K$ y $\overline{v_1}, \overline{v_2} \in \frac{V}{W}$. $\overline{f}(\lambda\overline{v_1} + \mu\overline{v_2}) = \overline{f}(\overline{\lambda v_1 + \mu v_2}) = f(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2) = \lambda\overline{f}(\overline{v_1}) + \mu\overline{f}(\overline{v_2})$.
Obviamente, $\overline{f}$ es suprayectiva.
Sea $\overline{v} \in Ker(\overline{f})$. $\overline{f}(\overline{v}) = \overline{0} \Rightarrow f(v) = 0 \Rightarrow v \in Ker(f) \Rightarrow v - 0 \in Ker(f) \Rightarrow \overline{v} = \overline{0}$, luego $Ker(\overline{f}) = \{\overline{0}\}$, y $\overline{f}$ es inyectiva. $\square$

Corolario 1.12. ***Fórmula del rango.*** *Si* $f : V \longrightarrow W$ *es una aplicación lineal, entonces* $dim(V) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$. *Se define el rango de* f *como* $rg(f) = dim(Im(f))$, *con lo que la fórmula anterior toma la forma* $dim(V) = dim(Ker(f)) + rg(f)$, *conocida como la fórmula del rango.*

Teorema 1.13. ***Segundo teorema de isomorfía de espacios vectoriales (teorema del doble cociente).*** *Si* V *es un* K*-espacio vectorial y* W, L *son subespacios de* V *con* $W \subseteq L$, *entonces* $\frac{L}{W}$ *es subespacio de* $\frac{V}{W}$, *y* $\frac{\frac{V}{W}}{\frac{L}{W}} \simeq \frac{V}{L}$.

Demostración. Sea

$$f : \frac{V}{W} \longrightarrow \frac{V}{L}$$
$$v + W \longrightarrow v + L$$

f está bien definida, ya que $v_1 + W = v_2 + W \Rightarrow v_1 - v_2 \in W \Rightarrow v_1 - v_2 \in L \Rightarrow v_1 + L = v_2 + L$.
Veamos que f es lineal: $f(\lambda(v_1+W)+\mu(v_2+W)) = f((\lambda v_1+\mu v_2)+W) = (\lambda v_1+\mu v_2)+L = \lambda(v_1+L)+\mu(v_2+L)$. Veamos ahora que $\frac{L}{W}$ es subespacio de $\frac{V}{W}$. $Ker(f) = \left\{v + W \in \frac{V}{W} | v + L = 0 + L\right\} = \left\{v + W \in \frac{V}{W} | v \in L\right\} = \frac{L}{W}$. Por lo tanto, $\frac{L}{W}$ es subespacio de $\frac{V}{W}$.

Por el primer teorema de isomorfía tenemos que $\frac{\frac{V}{W}}{\frac{L}{W}} \simeq Im(f) = \frac{V}{L}$. A partir de la demostración del primer teorema de isomofría, se obtiene que la aplicación:

$$\overline{f} : \frac{\frac{V}{W}}{\frac{L}{W}} \longrightarrow \frac{V}{L}$$

$$v + W + \frac{L}{W} \longrightarrow v + L$$

es un isomorfismo.

$\square$

2. TRIANGULARIZACIÓN Y FORMA CANÓNICA DE JORDAN

2.1. Endomorfismos y matrices triangularizables

Definición 2.1. *Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo del K-espacio vectorial V. Un subespacio W de V se dice que es f-invariante si $f(W) \subseteq W$.*

Observación 2.2. *Equivalentemente, W es f-invariante si $f(v) \in W$ $\forall v \in W$.*

Ejemplo 2.3. *Sea*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longrightarrow (x + y, x - y)$$

$W = \langle(1, 1)\rangle$ no es f-invariante, ya que $f(1, 1) = (2, 0) \notin W$.

Ejemplo 2.4. *Sea*

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longrightarrow (y, 2x - y)$$

$W = \langle(1, 1)\rangle = \{(x, x)|x \in \mathbb{R}\}$ es g-invariante, ya que $g(x, x) = (x, x) \in W$.

Observación 2.5. *Basta ver que $g(1, 1) \in W$. Más en general, si $f : V \longrightarrow V$ es endomorfismo y $W = \langle u_1, ..., u_n\rangle$, entonces W es f-invariante $\iff$ $f(u_i) \in W$ $\forall i$.*

Observación 2.6. *Si $f : V \longrightarrow V$ es un endomorfismo y W es un subespacio f-invariante de V, entonces f induce un endomorfismo*

$$f_{|W} : W \longrightarrow W$$

$$v \longrightarrow f(v)$$

el cual es esencialmente la restricción de f a W, teniendo en cuenta que en este caso, la restricción tiene sus imágenes en W por la definición de subespacio f-invariante.

Proposición 2.7. *Si $f : V \longrightarrow V$ es un endomorfismo y W es un subespacio f-invariante de V, entonces*

$$\overline{f} : \frac{V}{W} \longrightarrow \frac{V}{W}$$

$$\overline{v} \longrightarrow \overline{f(v)}$$

es un endomorfismo.

Demostración. Veamos que está bien definido:
Supongamos que $\overline{v_1} = \overline{v_2}$, entonces $v_1 - v_2 \in W$, luego $f(v_1 - v_2) \in W$. Como $f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2)$, se tiene que $f(v_1) - f(v_2) \in W$, y $\overline{f(v_1)} = \overline{f(v_2)}$.
Sean $\overline{v_1}, \overline{v_2} \in \frac{V}{W}$ y $\lambda, \mu \in K$, $\overline{v_1}, \overline{v_2} \in \frac{V}{W}$. $\overline{f}(\lambda\overline{v_1} + \mu\overline{v_2}) = \overline{f}(\overline{\lambda v_1 + \mu v_2}) = \overline{f(\lambda v_1 + \mu v_2)} = \overline{\lambda f(v_1) + \mu f(v_2)} = \lambda\overline{f}(\overline{v_1}) + \mu\overline{f}(\overline{v_2})$. □

Proposición 2.8. *Si $f : V \longrightarrow V$ es un endomorfismo, W es un subespacio f-invariante de V, $B_W = \{w_1, ..., w_m\}$ es una base de W y la completamos hasta una base $B_V = \{w_1, ---, w_m, v_1, ..., v_{n-m}\}$ de V de forma que $B_{\frac{V}{W}} = \{\overline{v_1}, ..., \overline{v_{n-m}}\}$ es base de $\frac{V}{W}$, entonces*

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & & \dots \\ 0 & \vdots & C \end{pmatrix}$$

donde $A = M_{B_W}(f_{|W})$ y $C = M_{B_{\frac{V}{W}}}(\overline{f})$.

Demostración. Sea $i \in \{1, ..., m\}$. Como $f(w_i) \in W$, $\exists a_{1,i}, ..., a_{m,i} \in K \quad | f(v_i) = a_{1,i}w_1 + ... + a_{m,i}w_m = f(v_i) = a_{1,i}w_1 + ... + a_{m,i}w_m + 0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_{n-m}$, y obviamente,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,m} \end{pmatrix} = M_{B_W}(f_{|W}).$$

Sea $j \in \{1, ..., n-m\}$, $f(v_j) \in V$, luego $\exists b_{1,j}, ..., b_{m,j}, c_{1,j}, ..., c_{n-m,j} \in K \mid f(v_j) = b_{1,j}w_1 + ... + b_{m,j}w_m + c_{1,j}v_1 + ... + c_{n-m,j}v_{n-m}$, luego $\overline{f(v_j)} = b_{1,j}\overline{w_1} + ... + b_{m,j}\overline{w_m} + c_{1,j}\overline{v_1} + ... + c_{n-m,j}\overline{v_{n-m}} = c_{1,j}\overline{v_1} + ... + c_{n-m,j}\overline{v_{n-m}}$. Finalmente, como $\overline{f}(\overline{v_j}) = \overline{f(v_j)}$, se tiene que $M_{B_{\frac{V}{W}}}(\overline{f}) = C$.

□

Ejemplo 2.9. *Sea*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longrightarrow (x + y, x - y)$$

y $W = \langle(1,1)\rangle$, $f(1,1) = (1,1)$, $B_W = \{(1,1)\}$, $B_{\mathbb{R}^2} = \{(1,1),(1,0)\}$, $B_{\frac{\mathbb{R}^2}{W}} = \left\{\overline{(1,0)}\right\}$. Entonces

$$f(1,1) = (1,1) = 1 \cdot (1,1) + 0 \cdot (1,0) \text{ y } f(1,0) = (2,1) = \lambda(1,1) + \mu(1,0) \Rightarrow \begin{cases} 2 = \lambda + \mu \\ 1 = \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$\lambda = 1 \wedge \mu = 1 \Rightarrow$

$$M_{\mathbb{R}^2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Siendo $B_W(f_{|W}) = (1)$, $B_{\frac{\mathbb{R}^2}{W}} = (1)$.

Definición 2.10. *Sea* $f : V \longrightarrow V$ *un endomorfismo. Un elemento* $\lambda \in K$ *se dice que es un valor propio de* f *si* $\exists v \in V - \{0\} \,|\, f(v) = \lambda v$.

Observación 2.11. *Es importante destacar que* v *debe ser no nulo, porque si no la definición sería trivial y todo* λ *sería valor propio.*

Ejemplo 2.12.

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longrightarrow (2x + 2y, y)$$

2 es un valor propio ya que $(1, 0) \neq (0, 0)$, *y* $f(1, 0) = (2, 0) = 2(1, 0)$.

Ejemplo 2.13. *Si* $f : V \longrightarrow V$ *es un endomorfismo, 0 es un valor propio* $\Longleftrightarrow$ f *no es inyectiva, y en este caso los vectores propios asociados al 0 son los vectores de* $Ker(f) - \{0\}$.

Ejemplo 2.14. *Si* $\lambda \in K$ *y*

$$f : V \longrightarrow V$$

$$v \longrightarrow \lambda v$$

entonces λ *es un valor propio, y los vectores propios asociados a* λ *son los de* $V - \{0\}$. *Dicho endomorfismo es una homotecia de centro 0 y razón* λ.

Definición 2.15. *Sea* $A \in M_n(K)$. *Un* $\lambda \in K$ *es un valor propio de* A *si* $\exists \boldsymbol{x} \in K^n - \{(0, ..., 0)\} \,|\, A\boldsymbol{x}^t = \lambda \boldsymbol{x}^t$. *Dicho vector* $\boldsymbol{x}$ *se llama vector propio asociado a* λ.

Observación 2.16. *Si* $f : V \longrightarrow V$ *es un endomorfismo,* B *es una base de* V, $v \in V$, *y* $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ *son las coordenadas de* v *en la base* B *y* $A = M_B(f)$, *entonces*

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

es una matriz columna cuyas entradas son las coordenadas de $f(V)$ *en la base* B, *por lo que el que* v *sea un vector propio de* f *asociado al valor propio* λ *es equivalente a que* $\boldsymbol{x}$ *sea vector propio de* A *asociado al valor propio* λ, *por lo que la definición anterior es la versión matricial de valor propio de un endomorfismo.*

Proposición 2.17. *Sea* $f : V \longrightarrow V$ *un endomorfismo de un* K*-espacio vectorial de dimensión* n, B *una base de* V *y* $A = M_B(f)$. *Un elemento* $\lambda \in K$ *es valor propio de* $f \Longleftrightarrow |\lambda I_n - A| = 0$.

Demostración. λ es un valor propio de $\iff \exists v \in V-\{0\} \,|(\lambda id - f)(v) = 0 \iff Ker(\lambda id - f) \neq \{0\}$. Como $M_B(\lambda id - f) = \lambda I_n - A$, esta última condición es equivalente a que $|\lambda I_n - A| = 0$, como se quería demostrar. □

Definición 2.18. *Si $A \in M_n(K)$, su polinomio característico es*

$$P_A(x) = |xI_n - A|$$

Por lo probado en la proposición anterior, se tiene lo siguiente:

Proposición 2.19. *Si $f : V \longrightarrow V$ es un endomorfismo, B una base de V y $A = M_B(f)$, entonces un elemento $\lambda \in K$ es un valor propio de $f \iff$ es raíz del polinomio característico $P_A(x)$.*

Observación 2.20. *Hemos visto que $P_{M_B(f)}$ no depende de la base B elegida, y por lo tanto es un invariante de f, que denotaremos por $P_f(x)$. Veamos dos coeficientes destacados de este polinomio:*
Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,m} \end{pmatrix},$$

entonces

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} x - a_{1,1} & \cdots & x - a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ x - a_{m,1} & \cdots & x - a_{m,m} \end{vmatrix}.$$

El término x^n viene de $(x - a_{1,1}) \cdot \ldots \cdot (x - a_{n,n})$ y de la manera que lo hemos definido, su coeficiente es 1.
El término x^{n-1} también se obtiene de $(x - a_{1,1}) \cdot \ldots \cdot (x - a_{n,n})$, pero tiene como coeficiente $-a_{1,1} - \ldots - a_{n,n} = -tr(A)$. El término independiente es $P_A(0)$, y se obtiene como:

$$A = \begin{vmatrix} -a_{1,1} & \cdots & -a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n,1} & \cdots & -a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^n |A|.$$

Por lo tanto, como $P_A(x)$ es independiente de la matriz que representa a f,esto nos permite definir $tr(f)$ y $det(f)$ como $tr(A)$ y $det(A)$ respectivamente, donde A es la matriz coordenada de f en una base cualquiera.

Definición 2.21. *Si f es un endomorfismo de V y λ es un valor propio de f, se llama subespacio propio asociado a λ, y se denota por $V(\lambda)$ a $Ker(f - \lambda id)$.*

Observación 2.22. *$V(\lambda)$ está formado por los vectores propios asociados a λ junto con el vector 0.*

Definición 2.23. *Si f es un endomorfismo de V y λ es un valor propio, se llama multiplicidad de λ, y se denota por $m(\lambda)$, a $dim_K(V(\lambda))$.*

Definición 2.24. *Si f es un endomorfismo de V y λ es un valor propio, se llama multiplicidad algebraica de λ y se denota por $m_a(\lambda)$, a la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico.*

Definición 2.25. *Un endomorfismo f de un K-espacio vectorial V se dice diagonalizable si existe una base B de V tal que $M_B(f)$ es diagonal.*

Equivalentemente se puede definir de manera matricial como:

Definición 2.26. *Una matriz $A \in M_n(K)$ se dice diagonalizable si $\exists P \in GL_n(K)|P^{-1}AP$ es diagonal.*

Proposición 2.27. *f es diagonalizable $\iff$ V admite una base de vectores propios.*

Demostración. Supongamos que f es diagonalizable, y sea $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V tal que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

Entonces, como B es libre, $v_i \neq 0 \forall i$. Además, $f(v_i) = \lambda i v_i$, luego v_i es un vector propio asociado a λ_i. Recíprocamente, supongamos que f admite una base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ formada por vectores propios, siendo cada v_i un vector propio asociado al valor propio λ_i. Entonces,

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

□

Ahora daremos condiciones suficientes para que un endomorfismo f sea diagonalizable.

Lema 2.28. *Sea f un endomorfismo de un K-espacio vectorial f. Si $v_1, ..., v_k$ son vectores propios asociados a valores propios distintos, entonces $\{v_1, ..., v_n\}$ es libre*

Demostración. Por inducción sobre k. Si $k = 1, v_1 \neq 0$, luego $\{v_1\}$ es libre. Supongamos por hipótesis de inducción que el resultado es cierto para $k-1$ y supongamos que v_i es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_i, \forall i$. Si $\mu_1 v_1 + ... + \mu_k v_k = 0$, entonces $(f - \lambda_1 id)(\mu_1 v_1 + ... + \mu_k v_k) = (f - \lambda_1 id)(\mu_1 v_1) + \sum_{i=2}^{k}(f - \lambda_1 id))(\mu_i v_i) = \mu_1 \cdot 0 + \sum_{i=2}^{k} \mu_i(\lambda_i v_i - \lambda_1 v_i) = \sum_{i=2}^{k} \mu_i(\lambda_i - \lambda_1)v_i$. Como por hipótesis de inducción $\{v_2, ..., v_k\}$ es libre, $\mu_i(\lambda_i - \lambda_1) = 0, \forall i \geq 2$, y como $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0, \forall i \geq 2$, se llega a $\mu_i = 0, \forall i \geq 2$. Así, $\mu_1 v_1 = 0$, y como $v_1 \neq 0$, se obtiene finalmente que $\mu_1 = 0$. □

Proposición 2.29. *Si f es un endomorfismo de un K-espacio vectorial de dimensión n, entonces el número de valores propios distintos es $\leq n$. Si f tiene n valores propios distintos, entonces f es diagonalizable.*

Demostración. Si k es el número de valores propios distintos $\lambda_1, ..., \lambda_k$, y para cada i, v_i es un vector propio asociado a λ_i, entonces $\{v_1, ..., v_n\}$ es libre por el lema anterior, luego $k \leq n$.
Si $k = n$, entonces $\{v_1, ..., v_n\}$ es libre y su cardinal es $dim_k V$, luego forman una base de V y f es diagonalizable. □

Ejemplo 2.30. *Sea*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longrightarrow (\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y)$$

Matricialmente, lo expresamos como:

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{vmatrix} x - 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & x + 3/5 \end{vmatrix} = x^2 + (3/5)x - (3/5)x - (9/25) - (16/25) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

Como $dim(\mathbb{R}^2) = 2$ y hay 2 valores propios distintos, f es diagonalizable.
$\lambda = 1, V(1) = Ker(f - id)$

$$\begin{pmatrix} -2/5 & 4/5 \\ 4/5 & -8/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2x + 4y = 0 \Rightarrow x = 2y \Rightarrow V(1) = \langle (2, 1) \rangle$$

$\lambda = -1, V(-1) = Ker(f + id)$

$$\begin{pmatrix} 8/5 & 4/5 \\ 4/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 4x + 2y = 0 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow V(-1) = \langle (1, -2) \rangle$$

Por lo tanto, en la base $\{(2, 1), (1, -2)\}$ se tiene

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.31. *Sea f un endomorfismo de un K-espacio vectorial V. f es diagonalizable $\Longleftrightarrow$ el polinomio característico $P_f(x)$ se descompone como producto de factores lineales, y para cada valor propio λ se cumple que $m(\lambda) = m_a(\lambda)$.*

Demostración.

1. Supongamos que f es diagonalizable. Podemos suponer que $\exists$ una base

$$B = \{v_{1,1}, ..., v_{1,n_1}, ..., v_{k,1}, ..., v_{k,n_k}\} \qquad de \quad V \quad tal \quad que$$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_k & & \\ & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix},$$

con n_1 valores de λ_1, ... , n_k valores de λ_k, en la diagonal, y con los $\lambda_1, ..., \lambda_k$ distintos. Ahora tenemos por lo tanto que $P_f(x) = (x-\lambda_1)^{n_1} \cdot ... \cdot (x-\lambda_k)^{n_k}$, por lo que el polinomio característico se descompone en un producto de factores lineales. Por el lema anterior tenemos la desigualdad $m(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$. Como los vectores $v_{i,1}, ..., v_{i,n_i}$ son linealmente independientes y están en $V(\lambda_i)$, tenemos que $m(\lambda_i) = dim(V(\lambda_i)) \leq n_i = m_a(\lambda_i)$.

2. Supongamos ahora que $P_f(x)$ se descompone en factores lineales y que para cada valor propio λ_i se cumple que$m(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$. Sean $\lambda_1, ..., \lambda_k$ los valores propios distintos. Vamos a probar que no hay intersección entre los subespacios, o dicho de otra forma, que la suma $S = V(\lambda_1) + ... + V(\lambda_k)$ es una suma directa (es decir, que $S = V(\lambda_1) \oplus ... \oplus V(\lambda_k)$). Sea $u_1 + ... + u_k = v_1 + ... + v_k$, con $u_i, v_i \in V(\lambda_i), \forall i$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{k}(u_i - v_i) = 0.$$

Si suponemos por reducción al absurdo que no todos los $(u_i - v_i)$ son nulos, entonces los $(u_i - v_i)$ no nulos serían vectores propios de los respectivos λ_i, lo que se contradice con el lema 2.28, que dice que los vectores propios asociados a valores propios distintos son linealmente independientes. Tomando ahora para cada i una base $v_{i,1}, ..., v_{i,n_i}$ de $V(\lambda_i)$, tenemos que $B = \{v_{1,1}, ..., v_{1,n_1}, ..., v_{k,1}, ..., v_{k,n_k}\}$ es una base de V formada por vectores propios, lo que implica que f es diagonalizable.

$\square$

Definición 2.32. *Sea K un cuerpo. Una matriz $A \in M_n(K)$ es triangular superior si $a_{i,j} = 0, \forall i, j \in \{1, ..., n\}$, cuando $i > j$.*

Definición 2.33. *Sea f un endomorfismo de un K-espacio vectorial, se dice que f es triangularizable si $\exists$ una base B de V tal que $M_B(f)$ es triangular superior.*

Observación 2.34. *La definición anterior podría haberse dado en términos de matrices triangulares inferiores, pero el concepto es equivalente, ya que se puede obtener invirtiendo el orden de los vectores de la base.*

Definición 2.35. *Una matriz $A \in M_n(K)$ es triangularizable si $\exists P \in GL_n(K) | P^{-1}AP$ es triangular superior.*

Observación 2.36. *El concepto es el mismo que el de endomorfismo triangularizable, ya que dada una base B de V, f es triangularizable $\iff M_B(f)$ es triangularizable.*

Teorema 2.37. *Un endomorfismo f de un K-espacio vectorial V es triangularizable $\iff$ el polinomio característico $P_f(x)$ se descompone en producto de factores lineales.*

Demostración. Supongamos que f es triangularizable. Sea B una base de V tal que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

se cumple que:

$$P_f(x) = \begin{vmatrix} x - a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ 0 & x - a_{2,2} & \cdots & -a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x - a_{n,n} \end{vmatrix} = (x - a_{1,1}) \cdot \ldots \cdot (x - a_{n,n}),$$

y por lo tanto se descompone en producto de factores lineales.

Recíprocamente, supongamos que $P_f(x)$ se descompone como producto de factores lineales. Probaremos por inducción sobre la dimensión de V que f es triangularizable. Si $dim(V) = 1$, es trivial ver que el resultado es cierto, ya que toda matriz de tamaño 1x1 es triangular superior. Sea $n = dim(V)$ y supongamos por inducción que el resultado es cierto para $n-1$. Sea $a_{1,1}$ un valor propio de f (que existe porque f se descompone en producto de factores lineales), y sea v_1 el vector asociado a dicho valor propio. Consideremos el subespacio $W = \langle v_1 \rangle$. Este subespacio es f-invariante porque $f(v_1) = a_{1,1}, v_1 \in W$, por lo que induce un endomorfismo $\overline{f} : \frac{V}{W} \longrightarrow \frac{V}{W}$ definido por $\overline{f}(\overline{v}) = \overline{f(v)}$. Como hay una base de $\frac{V}{W}$ en la que la matriz asociada a $\overline{f}$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

siendo C una matriz asociada a $\overline{f}$, por lo que se tiene que $P_f(x) = (x - a_{1,1})P_{\overline{f}}(x)$. $Como P_f(x)$ se descompone como producto de factores lineales, simplificando $x - a_{1,1}$ puede observarse que lo mismo debe sucederle por lo tanto a $P_{\overline{f}}(x)$. Además, como $dim(\frac{V}{W}) = n-1$, podemos utilizar la hipótesis de inducción sobre $\overline{f}$, concluyendo por lo tanto que es triangularizable. Por ende,

$\exists\overline{B} = \{\overline{v_2}, ..., \overline{v_n}\}$ tal que:

$$M_{\overline{B}}(\overline{f}) = \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Ahora, para cada $i \in \{2, ..., n\}$, se tiene que $\overline{f(v_i)} = \overline{f}(\overline{v_i}) = a_{2,i}\overline{v_2} + ... + a_{i,i}\overline{v_i} = \overline{a_{2,i}v_2 + ... + a_{i,i}v_i}$, y por lo tanto $\exists a_{1,i} \in K | f(v_i) = a_{1,i}v_1 + a_{2,i}v_2 + ... + a_{i,i}v_i$. Obviamente, $f(v_1) = a_{1,1}v(1)$, por lo que obtenemos finalmente que si $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, entonces B es una base de V para la que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

que es una matriz triangular, como se quería demostrar. □

2.2. Polinomio mínimo

Observación 2.38. *Recuérdese que el conjunto de endomorfismos de un K-espacio vectorial V se puede convertir en un K-espacio vectorial con las siguientes operaciones:*

1. *Si $f, g \in End(V), (f + g)(v) = f(v) + g(v)$.*
2. *Si $\lambda \in K \wedge f \in End(V), (\lambda f)(v) = \lambda(f(v))$.*

Este K-espacio vectorial es isomorfo al K-espacio vectorial de las matrices cuadradas $M_n(K)$ con entradas en K. Una base natural de este espacio está formado por las matrices $\{E_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$, donde $E_{i,j}$ tiene un 1 en la fila i y en la columna j, y 0 en el resto de posiciones. Por lo tanto, la dimensión de $End(V)$ es n^2, donde $n = dim(V)$.

Definición 2.39. *Vamos a definir una aplicación que asocie polinomios a endomorfismos. Si V es un K-espacio vectorial y f es un endomorfismo, definimos la aplicación:*

$$\delta : K[x] \longrightarrow End(V)$$

$$a_n x^n + ... + a_0 \longrightarrow a_n f^n + ... + a_0 id$$

siendo $f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f$, etc.. Esta aplicación cumple que para dos polinomios cualquiera $P_1, P_2 \in K[X]$, $\delta(P_1 + P_2) = \delta(P_1) + \delta(P_2)$, $\delta(P_1 P_2) = \delta(P_1)\delta(P_2)$, y $\delta(1) = id$. Es obvio...

2.3. Subespacios fundamentales generalizados

2.4. Obtención de la forma canónica de Jordan

2.5. Teorema de Cayley-Hamilton

3. ESPACIO DUAL

3.1. Espacio dual

Definición 3.1. *Sea V un K-espacio vectorial, llamaremos V^* al conjunto de todas las aplicaciones lineales de V en K, conocido como espacio dual. Los elementos de V^* se llaman funcionales (sobre V) (notación: sea $\phi \in V^*$ y $v \in V$, denotaremos a $\phi(v)$ como $\langle \phi, v \rangle$).*

Proposición 3.2. *El espacio dual V^* es un espacio vectorial.*

Teorema 3.3. *Si V es un K-espacio vectorial de dimensión finita, entonces el espacio dual V^* también tiene dimensión finita, y se cumple que $dim(V) = dim(V^*)$.*

3.2. Bases duales

Definición 3.4. *Se define la base dual $\{v_1^*, ..., v_n^*\}$ de V^* de una base $\{v_1, ..., v_n\}$ de V como los funcionales v_i^* tales que:*

$$\langle v_i^*, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases} .$$

3.3. Aplicación dual

Definición 3.5. *Sea f la aplicación lineal entre los K-espacios vectoriales V y F, $f : V \longrightarrow F$, al componer dicha función f con cualquier funcional $\phi \in F^*$ tendremos un elemento $\phi \circ f$ de V^*. A la aplicación $f^* : V^* \longrightarrow F^*$ la denominaremos aplicación dual de f.*

Teorema 3.6. *Dados V un K-espacio vectorial con un producto escalar no degenerado, y un funcional $L : V \longrightarrow K$, entonces existe un único $v \in V$ tal que $\forall w \in V$, se cumple:*

$$L(v) = \langle v, w \rangle .$$

Teorema 3.7. *La aplicación $v \longrightarrow L_v$ de V en V^* es un isomorfismo.*

3.4. Ortogonalidad

Definición 3.8. *Sean S un subconjunto de V y $\phi \in V^*$, decimos que ϕ es ortogonal a S si $\langle \phi, v \rangle = 0, \quad \forall v \in S$*

Teorema 3.9. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n con un producto escalar no degenerado, W un subespacio de V y $W^\perp$ el subespacio ortogonal a W en V, entonces:*

$$dim(V) = dim(W) + dim(W^\perp).$$

Proposición 3.10. *Sea $f: V \longrightarrow F$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales finitos y $f^*: V^* \longrightarrow F^*$ su dual. Entonces:*

$$(Im(f))^{\perp} = Ker(f') \quad \wedge \quad Ker(f)^{\perp} = Im(f').$$

3.5. Introducción al Álgebra tensorial

Teorema 3.11. *Sean V, W dos K-espacios vectoriales de dimensión finita, $\exists$ un K-espacio T de dimensión finita y una aplicación bilineal $V \times W \longrightarrow T$ denotada como:*

$$(v, w) \longrightarrow v \otimes w$$

que satisface:

1. *Si U es un K-espacio vectorial y $g: V \times W$ una aplicación bilineal, entonces $\exists! \ g^*: T \longrightarrow U | g(v, w) = g^*(v \otimes w)$, $\forall v \in V \wedge \forall w \in W$.*

2. *Si $\{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V y $\{w_1, ..., w_m\}$ una de W, los elementos $v_i \otimes w_j$, con $i = 1, ..., n$ y $j = 1, ..., m$ forman una base de T.*

Definición 3.12. *El espacio T del teorema anterior se conoce como el producto tensorial de V y W, denotado como $V \otimes W$. Al elemento $v \otimes w$ asociado al par v, w se le llama producto tensorial de v y w.*

Proposición 3.13. *Sean V, W dos K-espacios vectoriales de dimensión finita, entonces:*

$$dim(V \otimes W) = dim(V)dim(W).$$

Teorema 3.14. *Sea V un K-espacio vectorial, sea V^* su espacio dual, y sea $L(V, V)$ el espacio de las aplicaciones lineales de V sobre el propio V. Entonces $\exists!$ isomorfismo $V^* \otimes V \longrightarrow L(V, V)$ tal que para cada $\phi \otimes v$ le asocia la aplicación lineal $L_{\phi \otimes v}(w) = \phi(w)v$, con $\phi \in V^* \wedge v \in V$.*

4. ESPACIOS AFINES EUCLÍDEOS

4.1. Espacios afines

Definición 4.1. *Sea V un K-espacio vectorial, $A \neq \emptyset$ un subconjunto, y la aplicación $\varphi: AxA \longrightarrow V$ que cumple:*

1. *$\forall p \in A$, la aplicación $\varphi_p: A \longrightarrow V$, definida como $\varphi_p(p) = \varphi(p, q)$ es una aplicación biyectiva,*

2. *$\varphi(p, q) + \varphi(q, r) = \varphi(p, r)$,*

entonces al trío (A, V, φ) le llamaremos espacio afín sobre el cuerpo K.

4.2. Subespacios afines

Definición 4.2. *Sea $S \subseteq A$ un conjunto, le llamaremos subespacio afín si $\exists p \in A \wedge W$ subespacio vectorial de V, cumpliendo que $S = p + W$.*

Proposición 4.3. *Sean $p, q \in A$ y W_1, W_2 subespacios vectoriales de V, entonces:*

$$p + W_1 = q + W_2 \iff W_1 = W_2 \wedge q \in p + W_1.$$

Proposición 4.4. *Sean $p, q \in A$, $S_1 = p + \overrightarrow{S_1}, S_2 = q + \overrightarrow{S_2}$ dos subespacios afines de A. Entonces:*

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \iff \overrightarrow{pq} \in \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2}.$$

Definición 4.5. *Sea $B \subseteq A \wedge B \neq \emptyset$. Se define el subespacio afín generado por el subconjunto B como el subespacio afín más pequeño que contiene a B. Se denota por $\langle B \rangle$, y fijado un punto $p \in B$, se define como: $\langle B \rangle = p + \langle \{\overrightarrow{pq} : q \in B\} \rangle$.*

Definición 4.6. *Sean S_1, S_2 dos subespacios afines de A. Entonces S_1 y S_2 se llaman paralelos si existe alguna relación de contenido entre sus direcciones ($\overrightarrow{S_1} \subseteq \overrightarrow{S_2} \vee \overrightarrow{S_2} \subseteq \overrightarrow{S_1} \vee \overrightarrow{S_1} = \overrightarrow{S_2}$). Si S_1 y S_2 se cortan y no son paralelos, se dirá que los subespacios se cruzan.*

Proposición 4.7. *Sean $S_1 = p + \overrightarrow{S_1}, S_2 = q + \overrightarrow{S_2}$ subespacios afines de A, entonces $S_1 + S_2 = p + (\overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} + \langle \overrightarrow{pq} \rangle)$.*

Proposición 4.8. ***Fórmulas de Grassmann.*** *Sean S_1, S_2 dos subespacios afines de A, entonces:*

1. *Si $S_1 \cap S_2 = \emptyset \Rightarrow dim(S_1 + S_2) = dim S_1 + dim S_2 - dim(\overrightarrow{S_1} \cup \overrightarrow{S_2}) + 1$.*

2. *Si $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Rightarrow dim(S_1 + S_2) = dim S_1 + dim S_2 - dim(S_1 \cup S_2)$.*

4.3. Sistemas de referencia afín

Definición 4.9. *Diremos que los puntos $p_0, p_1, ..., p_k \in A$ son afinmente independientes si los vectores $\overrightarrow{p_0p_1}, ..., \overrightarrow{p_0p_k} \in V$ son linealmente independientes.*

Definición 4.10. *Sean el punto $p_0 \in A$ y la base B de V. Llamaremos sistema de referencia afín al par $R = (p_0, B)$ donde p_0 se conoce como el origen del sistema de referencia, y B como la base del sistema de referencia.*

Teorema 4.11. ***Cambio de coordenadas.*** *Sean $R = (p_0, B)$ y $\overline{R} = (q_0, \overline{B})$ dos sistemas de referencia afín en el espacio afín A. Sea X la matriz columna de las coordenadas del punto x en el sistema de referencia R, y $\overline{X}$ la matriz columna con las coordenadas de ese mismo punto en el sistema $\overline{R}$. Sean Q la matriz con las coordenadas de p_0 en el sistema de referencia $\overline{X}$ y por último, la matriz P, que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B con respecto a la base $\overline{B}$. Entonces se tiene que:*

$$\overline{X} = Q + PX$$

4.4. Coordenadas baricéntricas

Sea (A, V, φ) un espacio afín de dimensión n y $p_0, ..., p_n$ un conjunto de puntos de A. Entonces existen un punto $p \in A$ y $k, k^0, ..., k^n \in K$ donde no todos son cero, cumpliendo:

$$\begin{cases} k\overrightarrow{px} + k^0\overrightarrow{pp_0} + ... + k^n\overrightarrow{pp_n} = \overrightarrow{0} \\ k + k^0 + ... + k^n = 0 \end{cases},$$

y tomando $x^i = -\frac{k^i}{k}$ (ya que para que $p_0, ..., p_n$ sean linealmente independientes, $k \neq 0$), tenemos:

$$\begin{cases} \overrightarrow{px} = x^0\overrightarrow{pp_0} + ... + x^n\overrightarrow{pp_n} \\ x^0 + ... + x^n = 1 \end{cases}.$$

Para definir las coordenadas baricéntricas, veamos primero que $x^0, ..., x^n$ no dependen de p:

Proposición 4.12. *Sea (A, V, φ) un espacio afín de dimensión n y $p_0, ..., p_k$ k puntos de dicho espacio. Si dado $x \in A$, existen $x^0, ..., x^k \in K$ y $p \in A$ tales que:*

$$\begin{cases} \overrightarrow{px} = x^0\overrightarrow{pp_0} + ... + x^n\overrightarrow{pp_k} \\ x^0 + ... + x^k = 1 \end{cases},$$

entonces:

1. *La expresión se cumple si sustituímos p por cualquier $q \in A$.*

2. *Si $p_0, ..., p_k$ son linealmente independientes, $x^0, ..., x^k$ están definidos unívocamente.*

Definición 4.13. *Se llamará sistema de referencia baricéntrico de un espacio afín (A, V, φ) de dimensión n a todo conjunto de $(n+1)$ puntos $\{p_0, ..., p_n\}$ linealmente independientes. Se definen las coordenadas baricéntricas de un punto $x \in A$ en el sistema de referencia baricéntrico $\{p_0, ..., p_n\}$ como los $(x^0, ..., x^n) \in K^{n+1} \Big| \begin{cases} \overrightarrow{px} = x^0\overrightarrow{pp_0} + ... + x^n\overrightarrow{pp_k} \\ x^0 + ... + x^k = 1 \end{cases}$.*

4.5. Aplicaciones afines

Definición 4.14. *Sean (A_1, V_1, φ_1) y (A_2, V_2, φ_2) dos espacios afines sobre el cuerpo K. Se llama aplicación afín entre dichos espacios afines al par $(f, \overrightarrow{f})$ donde $f : A_1 \longrightarrow A_2$ es una aplicación y $\overrightarrow{f} : V_1 \longrightarrow V_2$ es una aplicación lineal, y además se cumple que $(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{pq})) = \overrightarrow{f(p)f(q)}, \forall p, q \in A_1$ (o equivalentemente, $f(p + \overrightarrow{v}) = f(p) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$).*

Proposición 4.15. *Sean $p \in A_1, q \in A_2, \phi : V_1 \longrightarrow V_2$ una aplicación lineal, entonces existe una única aplicación afín cumpliendo que $f(p) = q$ y al mismo tiempo $\overrightarrow{f} = \phi$.*

Proposición 4.16. *Sean* $R_1 = (p, B_1), R_2 = (p, B_2)$ *dos sistemas de referencia afín para los espacios* A_1 *y* A_2*, de dimensiones* n *y* m *respectivamente. Entonces la aplicación* $f : A_1 \longrightarrow A_2$ *es una aplicación afín* $\iff \exists M \in M_{mxn}(K) \wedge B \in M_{mx1}(K) | Y = MX + B$*, donde la matriz* X *es la matriz columna de un cualquier punto* $x \in A_1$ *en el sistema de referencia* R_1 *y la matriz* Y *es la matriz columna de* $f(x)$ *en el sistema de referencia* R_2*.*

4.6. Espacios afines euclídeos

Definición 4.17. *Llamaremos espacio afín euclídeo al espacio afín* (A, E, φ)*, siendo* E *el espacio vectorial euclídeo.*

Definición 4.18. *Definiremos la distancia entre dos puntos* $p, q \in A$ *en el espacio afín euclídeo como:*

$$d(p, q) = ||\overrightarrow{pq}|| = \sqrt{\overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{qp}}.$$

Teorema 4.19. ***Teorema de Pitágoras.*** *Sean* p, q, r *tres puntos del espacio afín euclídeo* (A, E, φ)*. Si* $\overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{pr} = 0$*, entonces:*

$$d(p, q)^2 = d(p, r)^2 + d(q, r)^2.$$

4.7. Subespacios afines ortogonales

Definición 4.20. *Sean* S, T *dos subespacios afines del espacio afín euclídeo* A*. Entonces diremos que* S *y* T *son ortogonales si* $S \cup T \neq \emptyset$ *y además* $\forall \overrightarrow{s} \in \overrightarrow{S} \wedge \forall \overrightarrow{t} \in \overrightarrow{T}, \overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{t} = 0.$

Proposición 4.21. *Sean* S, T *dos subespacios afines del espacio afín euclídeo* A*, entonces existe un subespacio afín* $R | R \perp S \wedge R \perp T$*.*

4.8. Clasificación de isometrías

Definición 4.22. *La aplicación entre los espacios afines euclídeos* A_1 *y* A_2 *a* $f : A_1 \longrightarrow A_2$ *se llama isometría si conserva las distancias (esto es, si* $d(f(a), f(b)) = d(a, b) \quad \forall a, b \in A_1$*).*

Definición 4.23. *Un movimiento es una isometría de un espacio afín euclídeo* A *en sí mismo.*

Definición 4.24. *Sea la aplicación afín* $f : A \longrightarrow A$*, llamaremos conjunto de puntos fijos a* $P_f := \{p \in A | f(p) = p\}$*.*

Proposición 4.25. ***Clasificación de movimientos en la recta euclídea.*** *Sea* $f : A \longrightarrow A$ *un movimiento y* $dim(A) = 1$*, entonces* $\overrightarrow{f} = I$ *o* $-I$ *dado que es ortogonal. Si* $\overrightarrow{f} = -I$*, estaremos ante una homotecia de razón -1 con un único punto fijo. Puede considerarse también como una simetría central de centro dicho punto fijo.*

Proposición 4.26. ***Clasificación de movimientos en el plano euclídeo.*** *Sea* $Y = MX + B$ *un movimiento del plano euclídeo en cualquier sistema de referencia, puede clasificarse como:*

$$det(M)=1,(cos(\theta)=\tfrac{1}{2}tr(M))=\begin{cases} cos(\theta)=1(M=I)\begin{cases} B=0 & \textit{identidad} \\ B\neq 0 & \textit{traslación}\end{cases} \\ cos(\theta)=-1(M=-I) \quad \textit{simetría central} \\ |cos(\theta)|\neq 1 \quad \textit{rotación}\end{cases}$$

$$det(M)=-1\begin{cases} \nexists puntos\ fijos: & \textit{simetría axial compuesta con una traslación paralela al eje} \\ \exists puntos\ fijos: & \textit{simetría axial}\end{cases}$$

Proposición 4.27. ***Clasificación de movimientos en el espacio euclídeo.*** *Sea $Y = MX + B$ un movimiento del espacio euclídeo en cualquier sistema de referencia, puede clasificarse como:*

$$det(M)=1,(cos(\theta)=\tfrac{1}{2}(tr(M)-1)\begin{cases} \exists puntos\ fijos\begin{cases} cos(\theta)=1(M=I) & \textit{identidad} \\ cos(\theta)=-1 & \textit{simetría axial} \\ |cos(\theta)|\neq 1 & \textit{rotación}\end{cases} \\ \nexists puntos\ fijos\begin{cases} cos(\theta)=1 & \textit{traslación} \\ cos(\theta)\neq 1(M=-I) & \textit{movimiento helicoidal}\end{cases}\end{cases}$$

$$det(M)=-1,(cos(\theta)=\tfrac{1}{2}(tr(M)+1)\begin{cases} \exists puntos\ fijos\begin{cases} cos(\theta)=1 & \textit{simetría especular} \\ cos(\theta)=-1(M=-I) & \textit{simetría central} \\ |cos(\theta)|\neq 1 & \textit{simetría especular compuesta} \\ & \textit{con una rotación perpendicular al} \\ & \textit{plano de simetría}\end{cases} \\ \nexists puntos\ fijos: \textit{simetría especular compuesta con una} \\ \qquad \textit{traslación paralela al plano de simetría}\end{cases}$$

5. ESPACIOS PROYECTIVOS

5.1. Espacios proyectivos

Definición 5.1. *Sea K un cuerpo de dimensión n, llamaremos espacio proyectivo de dimensión n K^{n+1} al conjunto de todas las rectas en K^{n+1} que pasan por el origen O. Lo llamaremos $\mathbb{P}^n(K)$ (o símplemente $\mathbb{P}^n$), y formalmente se define como:*

$$\mathbb{P}^n = \left\{ \langle \overrightarrow{v} \rangle : \overrightarrow{v} \in K^{n+1} - \left\{ \overrightarrow{0} \right\} \right\}$$

Observación 5.2. *El espacio proyectivo también puede definirse en términos del espacio cociente a través de una relación de equivalencia ($x, y \in V - \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$, xRy también denotado como*

$x \sim y$ *sí y solo si* $\exists \lambda \in K - \left\{ \overrightarrow{0} \right\} \wedge y = \lambda x$ *). Entonces, tendremos la siguiente definición: Se llama espacio proyectivo asociado al* K*-espacio vectorial* V *de dimensión* n *al conjunto cociente* $\mathbb{P}^n(V) = \left\{ V - \left\{ \overrightarrow{0} \right\} / \sim \right\}$.

Observación 5.3. *Recordemos que* $V \simeq K^{n+1}$*, siendo* V *un espacio vectorial de dimensión* $n+1$.

Definición 5.4. *A cada recta del conjunto anterior se le llama punto proyectivo.*

Observación 5.5. *Sea el espacio afín estándar* $\mathbb{A}^n$ *sobre el cuerpo* K *(esto es, el espacio* (K^n, K^n, φ_e)*, con* $\varphi_e(v, w) = w - v$*). Si definimos la aplicación* ϕ *entre* $\mathbb{A}^n$ *y* $\mathbb{P}^n$ *como:*

$$\phi : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$(x_1, ..., x_n) \longrightarrow (x_1 : ... : x_n : 1)$$

entonces puede verse que

$$\mathbb{P}^n = \{(a_1 : a_2 : ... : a_n : 1) | a_i \in K, \forall i = 1, ..., n\} \cup \{(a_1 : a_2 : ... : a_n : 0) | \exists a_i \neq 0\} = \phi(\mathbb{A}^n) \cup \mathbb{H}$$

Definición 5.6. $\mathbb{H}$ *se conoce como el hiperplano del infinito, y sus puntos como puntos del infinito.*

Definición 5.7. $\phi(\mathbb{A}^n)$ *se conoce como la parte afín de* $\mathbb{P}^n$*, y es un espacio afín.*

Observación 5.8. *Nótese que el espacio proyectivo* $\mathbb{P}^n$ *puede ser entendido como la adición de los puntos del infinito al espacio afín* $\mathbb{A}^n$.

5.2. Coordenadas homogéneas

Definición 5.9. *Un polinomio se llamará homogéneo si todos sus términos son del mismo grado. Una ecuación será homogénea cuando esté definida por un polinomio homogéneo.*

Definición 5.10. *Sea* V *un* K*-espacio vectorial con base* $B = \{\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_n}\}$*. Un punto proyectivo* $X \in \mathbb{P}(V)$ *será de la forma* $X = \langle \overrightarrow{v} \rangle$ *con* $\overrightarrow{v} \in V$ *no nulo. El vector* $\overrightarrow{v}$ *de coordenadas* $(\alpha_1, ..., \alpha_n)_B$ *en la base* B *define una recta vectorial* $(\alpha_1 : ... : \alpha_n)$*. Entonces llamaremos coordenadas homogéneas de* X *a la expresión:* $X = (\lambda a_1 : ... : \lambda a_n)$*, con* $\lambda \in K - \{0\}$.

5.3. Subespacios proyectivos

Consideremos la aplicación

$$\Gamma : V - \left\{ \overrightarrow{0} \right\} \longrightarrow \mathbb{P}(V)$$

$$\overrightarrow{v} \longrightarrow \langle \overrightarrow{v} \rangle$$

Ahora podemos dar la definición de subespacio proyectivo:

Definición 5.11. *Diremos que* $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{P}(V)$ *es un subespacio proyectivo de* V *si existe un subespacio* $W \subseteq V$ *tal que* $\Gamma(W - \left\{ \overrightarrow{0} \right\}) = \mathbb{S}$*, esto es, si* $\mathbb{S} = \mathbb{P}(W)$.

Proposición 5.12. *Si* $\mathbb{S}$ *es un subespacio proyectivo de* V *tal que* $\mathbb{S} = \mathbb{P}(W)$*, entonces:*

$$dim(\mathbb{S}) = dim(W) - 1$$

5.4. Homografías

Definición 5.13. *Sean V y W dos K-espacios vectoriales, y sea el isomorfismo $f : V \longrightarrow W$. Entonces una homografía se define como la aplicación F de la forma:*

$$F : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(W)$$

tal que $F(\langle \overrightarrow{v} \rangle) = \langle (\overrightarrow{v}) \rangle, \forall v \in V$. Si en particular $V = W$, la llamaremos transformación proyectiva.

6. CÓNICAS Y CUÁDRICAS

6.1. Clasificación afín y métrica de las cónicas y cuádricas

Observación 6.1. *Recordad que las coordenadas están asociadas a un sistema de referencia, por lo que aunque la ecuación de una curva cambie al cambiar el sistema de referencia, la curva no cambiará.*

Definición 6.2. *Una cónica es una curva dada por una ecuación de segundo grado sobre el plano. Hay tres tipos de cónica no degenerada: elipses, hipérbolas y parábolas.*

Definición 6.3. *Una cuádrica es una superficie dada por una ecuación de segundo grado sobre $\mathbb{R}^n$, donde $n \geq 3$. Las cuádricas vienen definidas por ecuaciones de la forma:*

$$a_{1,1}x_1^2 + ... + a_{n,n}x_n^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + ... + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n + b_1x_1 + ...b_nx_n + c = 0$$

Observación 6.4. *Nuestro objetivo será, a través de cambios de coordenadas, simplificar las ecuaciones hasta el punto de poder reconocer el tipo de cuádrica que describen.*

Observación 6.5. *Obsérvese que la diferencia entre trabajar en el espacio afín y en el espacio métrico (afín euclídeo) es que en el afín se admiten todos los cambios de coordenadas lineales, mientras que en el métrico trabajaremos con sistemas de referencia ortonormales, por lo que exigiremos que la matriz de cambio de base P sea ortogonal.*

Teorema 6.6. ***Método de ortonormalización de Gram-Schmidt.*** *En todo espacio euclídeo V existe una base ortonormal. Además, partiendo de una base cualquiera $B = \{v_1, ..., v_n\}$ de V, podemos obtener una base ortogonal $B' = \{v_1', ..., v_n'\}$ eligiendo los vectores de la siguiente forma:*

$$v_1' = v_1, \quad v_i' = v_i - \left(\frac{v_i \cdot v_1'}{v_1' \cdot v_1'}\right) v_1' - \left(\frac{v_i \cdot v_2'}{v_2' \cdot v_2'}\right) v_2' - ... - \left(\frac{v_i \cdot v_{n-1}'}{v_{n-1}' \cdot v_{n-1}'}\right) v_{n-1}' \quad \forall i \in \{2, ..., n\}$$

Finalmente, a partir de B' podemos obtener una base ortonormal $B'' = \{w_1, ..., w_n\}$ haciendo:

$$w_i = \frac{v_i'}{||v_i'||} \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

Teorema 6.7. ***Reducción de una forma cuadrática a la suma de cuadrados.*** *Sea $Q : V \longrightarrow K$ una forma cuadrática. Entonces existe una base B de V para la cual las expresiones de vectores en coordenadas de Q vienen dadas como suma de cuadrados, esto es:*

$$Q(v) = a_{1,1}x_1^2 + ... + a_{n,n}x_n^2,$$

siendo $X = (x_1, ..., x_n)^T$ las coordenadas del vector v en la base B.

Teorema 6.8. ***Clasificación de las cuádricas en el espacio métrico.*** *Dada cualquier métrica de $\mathbb{R}^n$, siempre podemos encontrar un sistema de referencia ortonormal para el cual las ecuaciones de las cuádricas son de la forma:*

$$\lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_s x_s^2 = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ x_{s+1} \end{cases} \quad \text{con} \quad s \leq n.$$

Teorema 6.9. ***Clasificación de las cuádricas en el espacio afín.*** *Dada cualquier métrica de $\mathbb{R}^n$, siempre podemos encontrar un sistema de referencia para el cual las ecuaciones de las cuádricas son de la forma:* $\lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_s x_s^2 = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ x_{s+1} \end{cases}$ *con* $s \leq n \wedge \lambda_i = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$