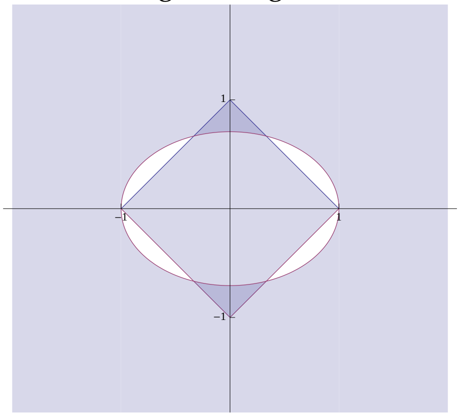
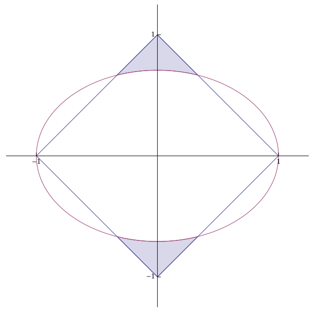
Soluciones

P1) Es fácil deducir que $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leqslant 1\}$ y $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \geqslant 1\}$. En las figuras siguientes se muestran $D_1 \cup D_2$ y $D_1 \cap D_2$, respectivamente.





Por tanto, $D_1 \cup D_2$ es cerrado (incluye los puntos frontera) y $D_1 \cap D_2$ es compacto (es cerrado y acotado). Además, $D_1 \cup D_2$ está acotado. Todas son correctas.

P2) La solución correcta es (a).
Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que $x_n \to 0$. Entonces $f(x_n) \to \infty$. Elegimos la sucesión $\{y_n\}$ tal que $y_n \to 0$ y $g(y_n) > 2f(x_n)$. La sucesión $\{(x_n, y_n)\}$ verifica que $(x_n, y_n) \to (0,0)$ y $f(x_n) - g(y_n) < -f(x_n) \to -\infty$.
Si repetimos la construcción intercambiando los papeles de f y g, llegamos a que existe $(x_n', y_n') \to 0$ pero $f(x_n') - g(y_n') \to \infty$.

P3) Observamos que

$$A = \{x \in \mathbb{R}^m : f(x) = g(x)\} = \{x \in \mathbb{R}^m : (f-g)(x) = 0\} = (f-g)^{-1}(\{0\}).$$

Como $f - g$ es continua, el conjunto $\{0\}$ es cerrado y A es su imagen inversa, A es cerrado.
Sin embargo, puede que A no sea compacto (por ejemplo, si $f(x) = g(x)$ en todo $\mathbb{R}^m$).

P4) La solución correcta es la primera. La imagen de un compacto es un compacto y $f(B) \subset f(\overline{B})$.

P5) Se ve fácilmente que los límites laterales son cero. Sin embargo, si calculamos el límite en la región $S = \{(x,y) \in D : y = x^2 + x^{3k}\}$, resulta

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} \frac{(xy)^k}{y - x^2} = \lim_{x\to 0}(1 + x^{3k-2})^k = 1,$$

de modo que el límite no existe independientemente del valor de $k \in \mathbb{N}$.

P6) Si llamamos $S_1 = \{(x,y) \in D : x > 0\}$ y $S_2 = \{(x,y) \in D : x < 0\}$, entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,k)\\(x,y)\in S_1}} f(x,y) = \varphi(k),$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,k)\\(x,y)\in S_2}} f(x,y) = 2\varphi(k) - k.$$

Será continua si y sólo si $\varphi(k) = k$.

P7) Si escribimos la función en coordenadas polares $u = x\cos y$, $v = x \operatorname{sen} y$, resulta

$$|f(u,v)| = \left|\frac{u^4(\cos^4 v + \operatorname{sen}^4 v) + au^3\cos^2 v \operatorname{sen} v}{u^2(2-\cos v \operatorname{sen} v)}\right| \leqslant \frac{u^2(\cos^4 v + \operatorname{sen}^4 v)}{2-\cos v \operatorname{sen} v} + \frac{|au\cos^2 v \operatorname{sen} v|}{2-\cos v \operatorname{sen} v}.$$

Teniendo en cuenta que $2-\cos v \operatorname{sen} v \geqslant 1$, tenemos la acotación

$$|f(x,y)| \leqslant u^2(\cos^4 v + \operatorname{sen}^4 v) + |au\cos^2 v \operatorname{sen} v|.$$

Por lo tanto,

$$0 \leqslant \lim_{u\to 0} |f(u,v)| \leqslant \lim_{u\to 0}(u^2(\cos^4 v + \operatorname{sen}^4 v) + |au\cos^2 v \operatorname{sen} v|) = 0,$$

para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$.