Ejercicios T1

1.4

a) $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$

Falso, es la desigualdad triangular:

$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$

b) $|\langle v, w\rangle| = \|v\| \cdot \|w\|$

Falso, desigualdad de Cauchy o def. por cosenos:

$$\begin{cases} |\langle v, w\rangle| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\alpha) & (\alpha \text{ ángulo entre } v \text{ y } w) \\ |\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| & \text{des. de Cauchy} \end{cases}$$

c) $\|v\| \cdot \|w\| = \langle v, w\rangle \Rightarrow v \perp w$

$\|v\| \cdot \|w\| = \langle v, w\rangle \Rightarrow \cos(\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha = 0$ y son paralelos. Falso, $v \perp w \Rightarrow \alpha = 90$

d) $\langle v, v \wedge w\rangle = 0$

Verdadero

e) $\|V\| \cdot \|W\| = \|V \times W\| \Rightarrow V \perp W$

$\|V\| \cdot \|W\| = \|V \times W\| \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha) = 1$ (α ángulo entre v y w)

$\Rightarrow \alpha = 90° = \pi/2$ rad $\Rightarrow V \perp W$. Verdadero

f) $V, W \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \|V\|^2 \cdot \|W\|^2 = (\langle V, W \rangle)^2 + \|V \times W\|^2$

$$(\langle V, W \rangle)^2 = (\|V\| \cdot \|W\| \cdot \cos(\alpha))^2 = \cos^2(\alpha) \cdot [\|V\|^2 \cdot \|W\|^2] \quad (1)$$

$$\|V \times W\|^2 = (\|V\| \cdot \|W\| \cdot \overset{\sin}{\cancel{\cos}}(\alpha))^2 = \sin^2(\alpha) \cdot [\|V\|^2 \cdot \|W\|^2] \quad (2)$$

Sumamos (1) y (2) $\Rightarrow$

$$\|V\|^2 \cdot \|W\|^2 \cdot \overset{1}{\cancel{(\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha))}} = (\langle V, W \rangle)^2 + \|V \times W\|^2 \quad \square$$

(Verdadero).

g) $\langle a, b \rangle = \langle a, c \rangle \Rightarrow b = c$

$$\left.\begin{array}{l} \langle a, b \rangle = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos(\alpha) \\ \langle a, c \rangle = \|a\| \cdot \|c\| \cdot \cos(\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow \|b\| \cdot \cos(\alpha) = \|c\| \cdot \cos(\beta)$$

Por lo tanto es Falso, no necesariamente $b = c$.

h) $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \|a + b\| = \|a - b\|$

$\|a + b\| = \|a - b\| \Rightarrow \|a + b\|^2 = |a - b\|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle a+b, a+b \rangle = \langle a-b, a-b \rangle \Rightarrow \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b \rangle =$

$= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b \rangle \Rightarrow \langle a, b \rangle = -\langle a, b \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle a, b \rangle = 0$ //

$a \perp b \Rightarrow \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow \langle a, b \rangle = 0 \Rightarrow$

$\|a+b\|^2 = \ldots = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\cancel{\langle a,b\rangle}^{0}$

$\|a-b\|^2 = \ldots = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\cancel{\langle a,b\rangle}^{0}$

$\Rightarrow \|a+b\|^2 = \|a-b\|^2 \Rightarrow |\underbrace{\|a+b\|}_{\geq 0}| = |\underbrace{\|a-b\|}_{\geq 0}| \Rightarrow$

$\Rightarrow \|a+b\| = \|a-b\| \quad \square$

Verdadero

j) $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

$(a \times b) \times c =$

$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \times c =$

$= (c_3 \cdot (a_3b_1) - c_1a_1b_3 - c_2a_1b_2 + c_2a_2b_1,$
$c_1a_1b_2 - c_1a_2b_1 - c_3a_2b_3 + c_3a_3b_2,$
$c_2a_2b_3 - c_2a_3b_2 - c_1a_3b_1 + c_1a_1b_3)$

$(a) \times (b \times c) =$

$= a \times (b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1) =$

$= (a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3, \ldots)$

Vemos que no coinciden en la primera coordenada, es Falso.

$\ldots, a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1, a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2)$

El producto vectorial no cumple la propiedad asociativa.

k) $a \neq 0$, $b \neq 0 \Rightarrow a \times = b$ única solución

$a \times X = b \Rightarrow$

$(a_2x_3 - a_3x_2, a_3x_1 - a_1x_3, a_1x_2 - a_2x_1) = (b_1, b_2, b_3)$

Organizamos como ec. lineales:

$$\begin{aligned} -a_2x_1 + a_1x_2 + 0 &= b_3 \\ a_3x_1 + 0 - a_1x_3 &= b_2 \\ 0 + a_3x_2 + a_2x_3 &= b_1 \end{aligned} \longrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} -a_2 & a_1 & 0 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ 0 & -a_3 & a_2 \end{vmatrix} = -a_2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -a_1 \\ -a_3 & a_2 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} a_3 & -a_1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} =$$

$= a_1a_2a_3 - a_1a_2a_3 = 0 \rightarrow$ son linealmente dep $\Rightarrow$

$\Rightarrow Rg(A) \leq 2$ y no tiene una única solución.

e)

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in Ax + By + Cz = 0$ (en $\mathbb{R}^3$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{aligned} A \cdot a_1 + B \cdot a_2 + C \cdot a_3 &= 0 \\ A \cdot b_1 + B \cdot b_2 + C b_3 &= 0 \\ A \cdot c_1 + B \cdot c_2 + C b_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow A \cdot (\overset{\in \mathbb{R}}{a_1 + b_1 + c_1}) + B \cdot (\underbrace{a_2 + b_2 + c_2}^{\in \mathbb{R}}) + C \cdot (a_3 + b_3 + c_3) = 0$

$\cancel{\Rightarrow} \overline{a+b+c} \in Ax + By + Cz = 0$

Un plano $\rightarrow$ dim 2 $\Rightarrow$ tres vectores, tiene que haber combinación lineal

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \mid \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} = \lambda_3\bar{c}$

$\Leftarrow$ Si $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \mid \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} = \lambda_3\bar{c} \Rightarrow \langle\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}\rangle =$

$= \langle\{\bar{a}, \bar{b}\}\rangle$ que es un plano y son coplanares. Tomando $D = 0$, el plano ha de pasar por el origen.

m) $V = \|a\| b + \|b\| a$ biseca α entre a y b

Veamos si se cumple. (Ver solución)

$$\cos(\widehat{Va}) = \frac{\langle V, a \rangle}{\|V\| \cdot \|a\|} = \frac{\langle \|a\| b + \|b\| a, a \rangle}{\|V\| \cdot \|a\|} =$$

$$= \frac{\cancel{\|a\|} \langle a, b \rangle + \|b\| \cdot \|a\|^2}{\cancel{\|a\|} \cdot \sqrt{\langle V, V \rangle}} \longrightarrow$$

(Si $\sqrt{\langle v,v \rangle}$ es complicado, sacar $\langle v,v \rangle$)

$$\langle V, V \rangle = \langle \|a\| b + \|b\| a, \|a\| b + \|b\| a \rangle =$$

$$= 2\|a\|^2 \cdot \|b\|^2 + 2 \|a\| \|b\| \underbrace{\langle a, b \rangle}_{= \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos(\alpha)} \ldots$$

$$\longrightarrow \frac{\overbrace{\langle a, b \rangle}^{\|b\| \cdot \|a\| \cdot \cos(\alpha)} + \|b\| \cdot \|a\|}{\ldots}$$

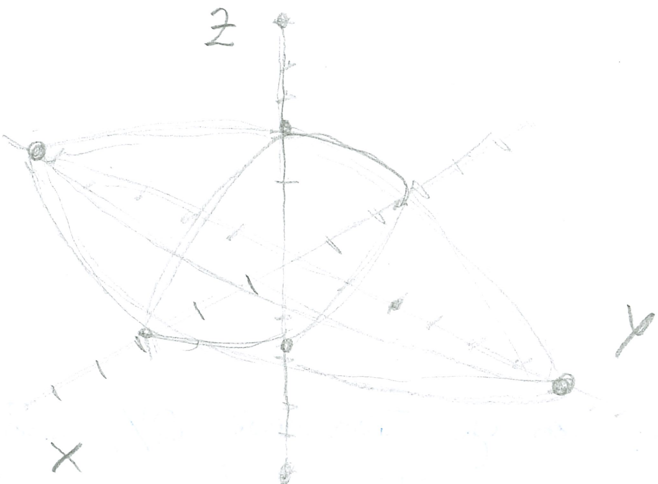
/ (Si $\alpha' = \alpha/2 \Rightarrow \cos(\alpha') = \frac{\cos(\alpha)}{2}$, ~~por aquí no va~~ a ser.)

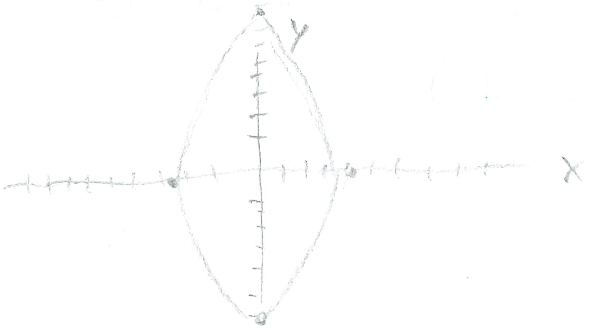
$\cos(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$ iba bien pero lejos

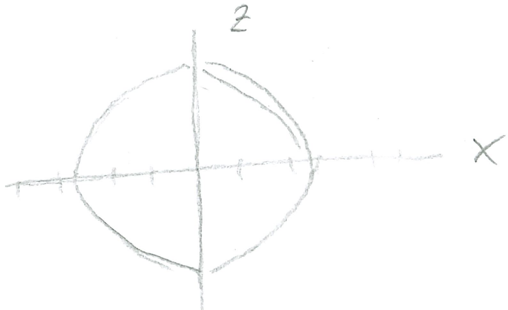
$\boxed{1.1.}$

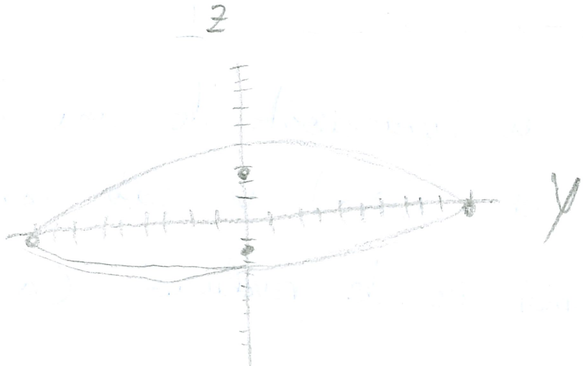
a) $3x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$

Es un elipsoide, centrado en el $(0,0)$ y eje mayor OY.



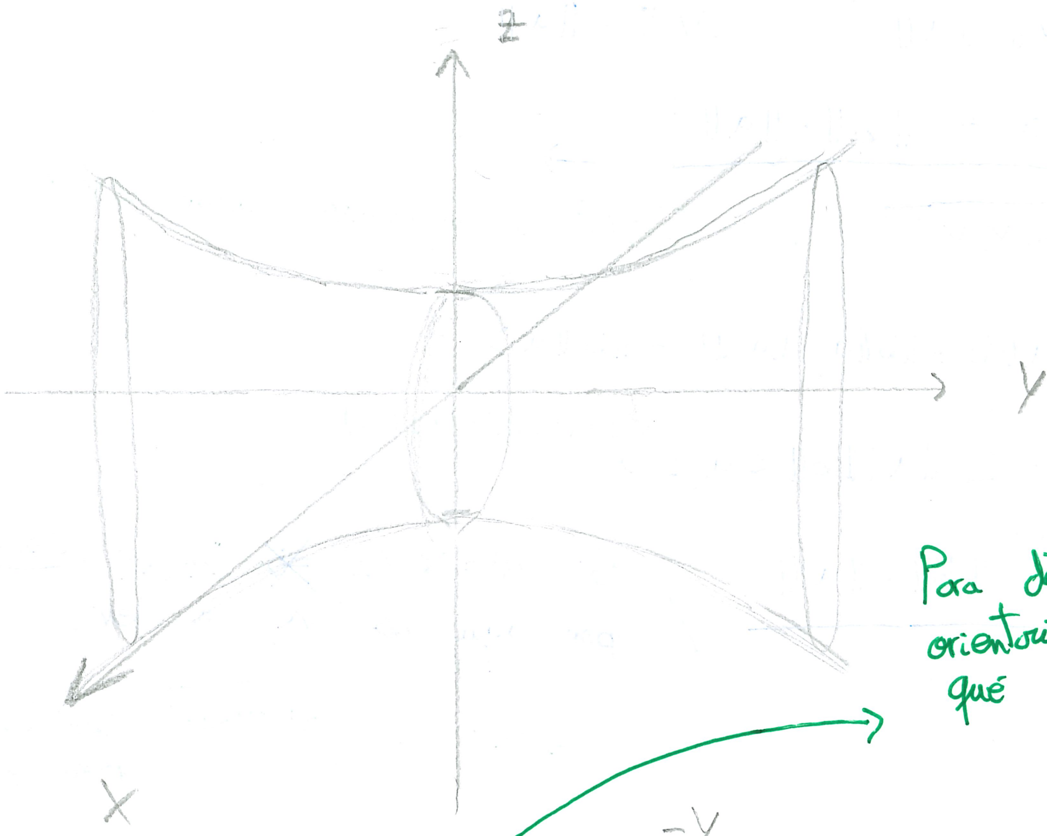




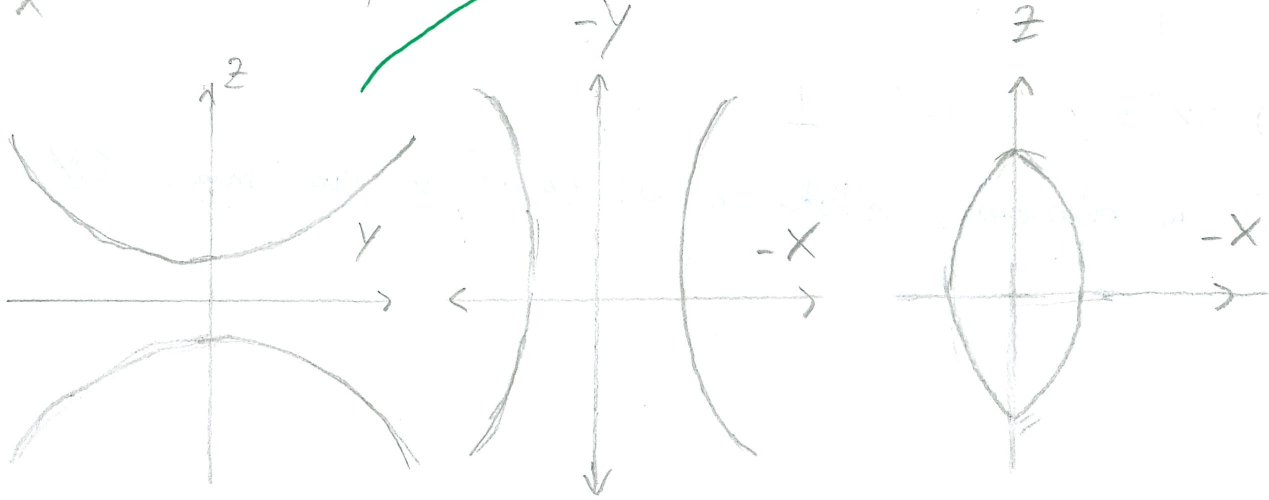


b) $x^2 - 3y^2 + z^2 = 1$

Es un hiperboloide de una hoja con eje transversal OY centrada en el (0,0). Además, es de revolución.



Para determinar orientación, ver con qué ejes corta.

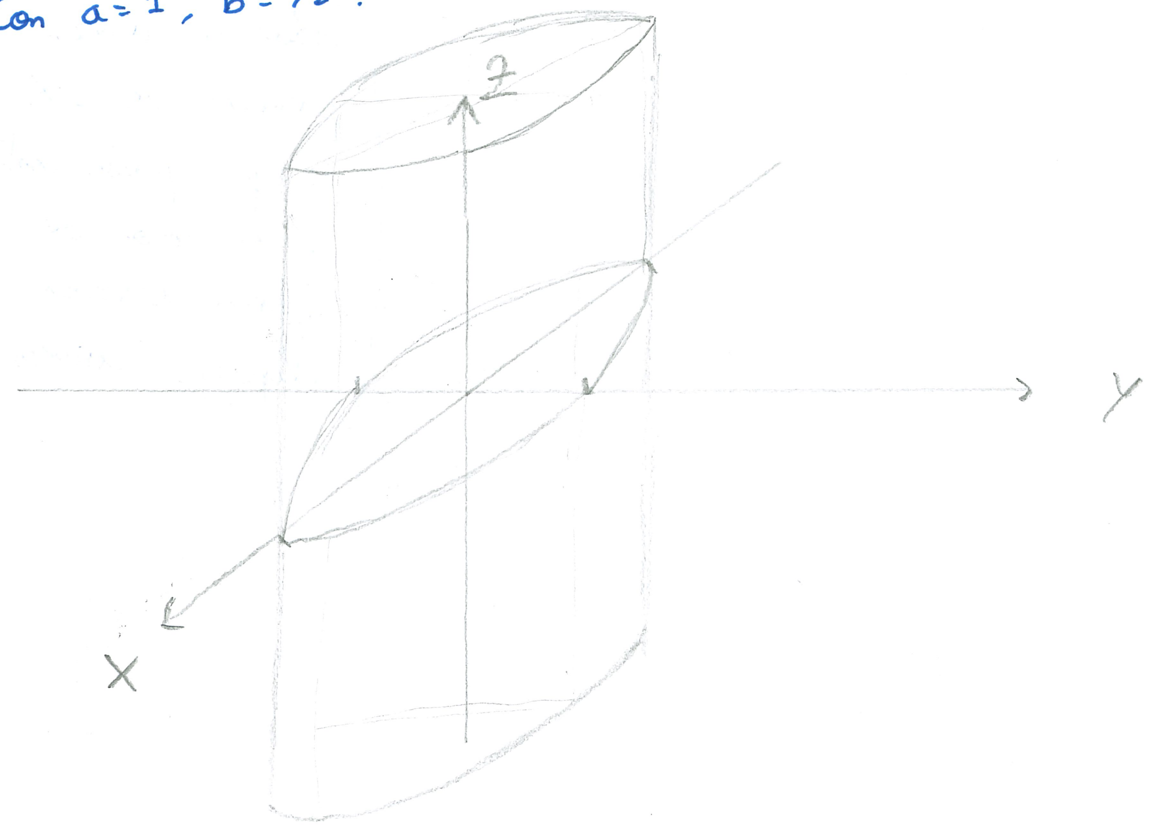


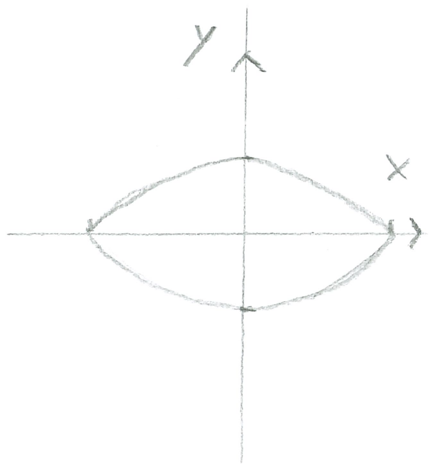
c) $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$

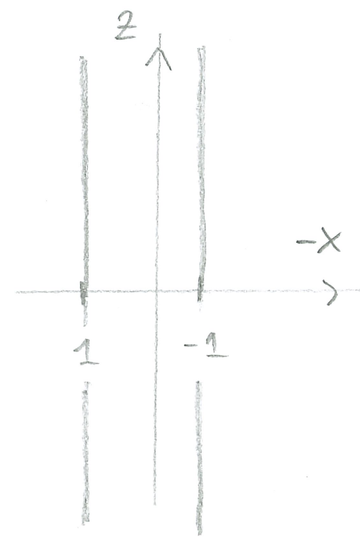
Es un hiperboloide de una hoja, con eje transversal OY, centrada en el (0,0) y solo corta al eje OY en el (0,1,0). Además, es de revolución ($a = b = c = 1$).

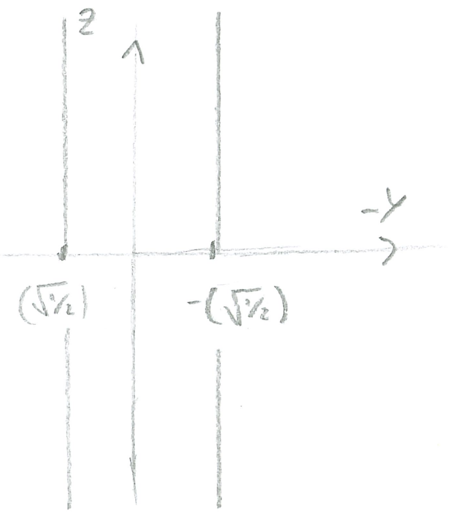
d) $x^2 + 2y^2 = 1$

Es un cilindro elíptico centrado en el $(0,0,0)$ y que corta a los ejes en $(1,0,0)$ y $(0, 1/2, 0)$. (Eje transversal Oz).
Con $a = 1$, $b = 1/2$.









$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

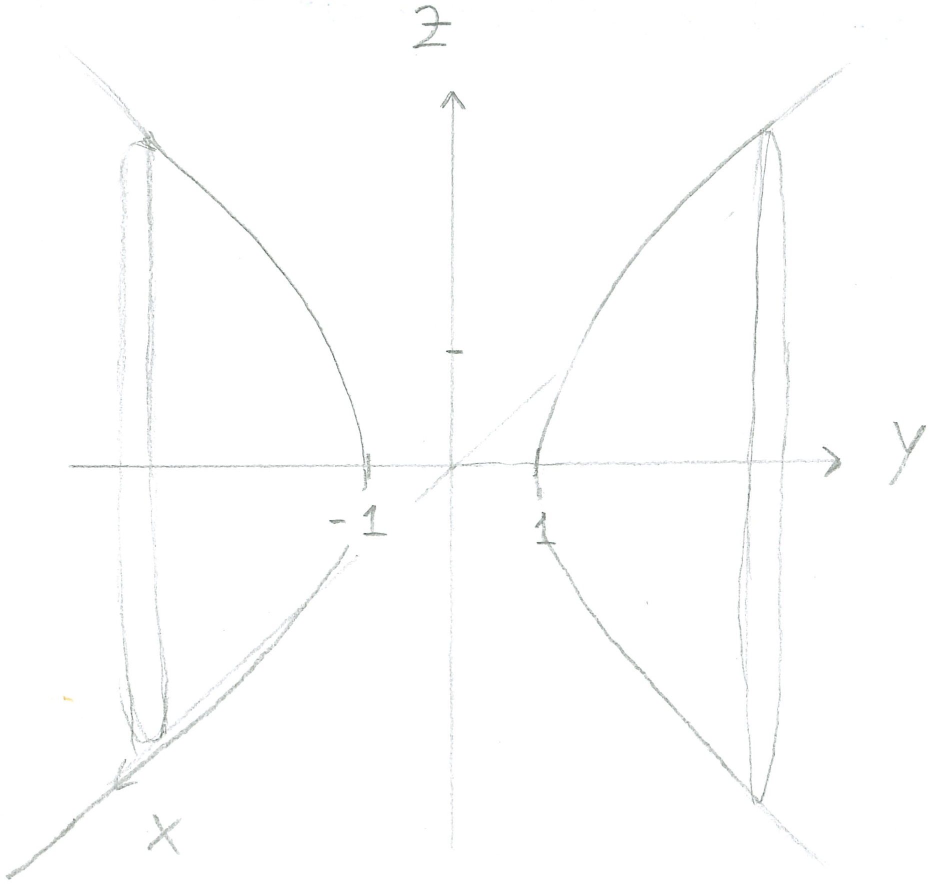
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow x^2 = 1$

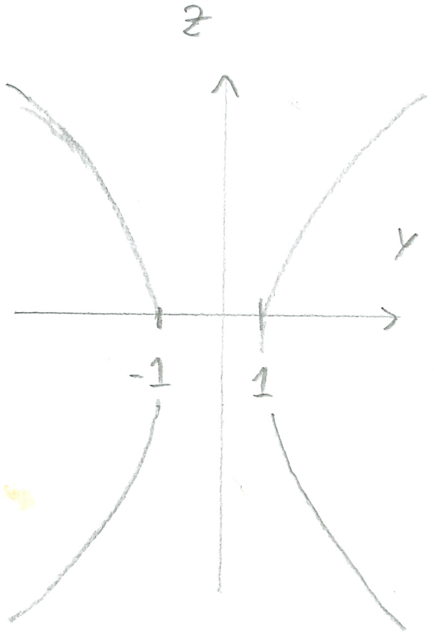
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

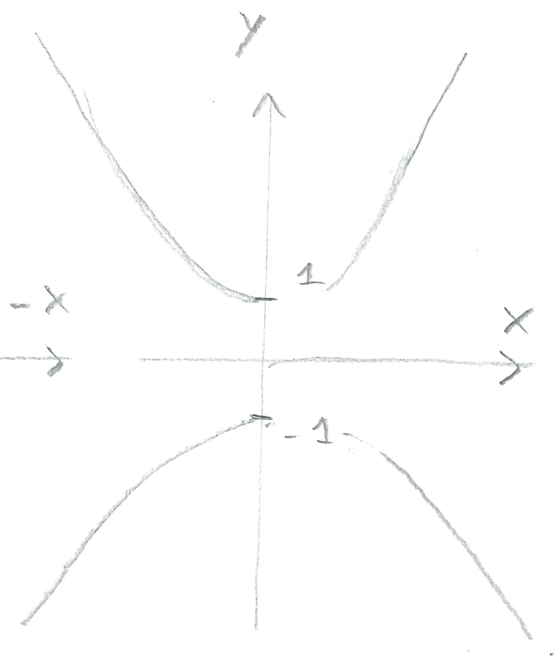
$\rightarrow 2y^2 = 1$, $|y| = |\sqrt{1/2}|$

c) Dibujo: $(-x^2+y^2-z^2=1)$



(Nota: en planos paralelos al ZX sí que puede cortar, y en caso de hacerlo aparecen elipses.)





$$\begin{cases} -x^2+y^2-z^2=1 \\ x=0 \quad \text{(plano ZY)} \end{cases}$$

$\longrightarrow y^2-z^2=1$

(hipérbola)

$$\begin{cases} -x^2+y^2-z^2=1 \\ y=0 \quad \text{(plano ZX)} \end{cases}$$

$\rightarrow -(\underbrace{x^2+z^2}_{\geq 0})=1$

¡No corta al plano!

$$\begin{cases} -x^2+y^2-z^2=1 \\ z=0 \quad \text{(plano XY)} \end{cases}$$

$\rightarrow -x^2+y^2=1$

(hipérbola)

1.9 ¿Cuáles son distancias? (I)

$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

a) $d(x,y) = |x-y|^2$

i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$(\Leftarrow)$

$x = y \Rightarrow d(x,x) = |x-x|^2 = |0|^2 = 0$.

$(\Rightarrow)$

$d(x,y) = 0 \Rightarrow |x-y|^2 = 0 \Rightarrow |x-y| = 0 \Rightarrow (x-y) = 0$

$\Rightarrow x = y$ //

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

$d(x,y) = |x-y|^2 = |(-1)(y-x)|^2 = (1|y-x|)^2 = |y-x|^2 = d(y,x)$

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

$|x-y|^2 \leq |x-z|^2 + |y-z|^2$ ¿? (1)

$\left(\underbrace{|x-y|}_{\geq 0} = |x-z-(y-z)| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y| = \underbrace{|x-z|}_{\geq 0} + \underbrace{|y-z|}_{\geq 0} \right)$

(Tenemos $|x-y| \geq 0 \in \mathbb{R}$, $|x-z| \geq 0 \in \mathbb{R}$ y $|y-z| \geq 0 \in \mathbb{R}$ con $a \leq b + c$.)

Contraejemplo para 1: $(100-0)^2 > (100-99)^2 + (99)^2$

$10000 > 1 + 9801 = 9802$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{a No es distancia}}$

Propuesto 2 :

(Análogamente, $\|a+b\| = \|a\|+\|b\| \Rightarrow \langle a,b\rangle = \|a\|\|b\|$, así relacionamos ambos ejercicios)

$$\|a+b\| < \|a\|+\|b\| \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\|a+b\|^2 = \langle a+b, a+b\rangle = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a,b\rangle$$

$$(\|a\|+\|b\|)^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\|\|b\|$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\|a+b\|}_{\geq 0} < \underbrace{\|a\|+\|b\|}_{\geq 0} \overset{\uparrow}{\Leftrightarrow} \|a+b\|^2 < (\|a\|+\|b\|)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\|a\|^2} + \cancel{\|b\|^2} + 2\langle a,b\rangle < \cancel{\|a\|^2} + \cancel{\|b\|^2} + 2\|a\|\|b\|$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2}\langle a,b\rangle < \cancel{2}\|a\|\|b\| \Leftrightarrow \boxed{\langle a,b\rangle < \|a\|\|b\|}$$

Propuesto 1 : (Solución pizarra)

$$\langle a,b\rangle = \|a\|\cdot\|b\| \overset{?}{\Rightarrow} a = \lambda b$$

(1)

$$0 \leq \|a+\lambda b\|^2 = \langle a+\lambda b, a+\lambda b\rangle = \|a\|^2 + 2\lambda\langle a,b\rangle + \lambda^2\|b\|^2$$

(es una ec. de 2º grado) $\overset{\text{hip.}}{=} \|a\|^2 + 2\lambda\|a\|\|b\| + \lambda^2\|b\|^2 =$

$$= (\|a\| + \lambda\|b\|)^2$$

$\|a\|\|b\|^2$ por hip.

Vemos su discriminante $= 4\langle a,b\rangle^2 - 4\|a\|^2\|b\|^2 = 0 \Rightarrow$

Solo tiene una única solución. En ese caso:

$$0 = \|a\| + \lambda\|b\| \Rightarrow \lambda_0 = -\frac{\|a\|}{\|b\|}$$

Volviendo al principio:

$$0 = \|a+\lambda_0 b\|^2 \Rightarrow a + \lambda_0 b = 0 \Rightarrow a = -\lambda_0 b = \frac{\|a\|}{\|b\|} b \quad \square$$

$\boxed{1.9}$ (II)

b) $d(x,y) = x^3 - y^3$

i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

$\Rightarrow)$

$x^3 - y^3 = 0 \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$

$\Leftarrow)$

$x = y \Rightarrow d(x,y) = x^3 - y^3 = x^3 - x^3 = 0$ //

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

Veamos que no se cumple con un contraejemplo:

$d(1,-1) = 1^3 - (-1)^3 = 2$

$d(-1,1) = (-1)^3 - (1)^3 = -1 - 1 = -2$

$\boxed{\text{No es distancia}}$

d) $d(x,y) = |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)|$

~~(Sin pérdida de generalidad $x, y \in [-\pi, \pi]$)~~

~~Si $x = -y \Rightarrow tg(x) = -tg(-x) = -tg(y) = \alpha$~~

~~En ese caso: Si $x = tg(\alpha)$ e $y = -tg(\alpha) = tg(-\alpha)$~~

~~$\Rightarrow \operatorname{arctg}(x) = \alpha$ y $\operatorname{arctg}(y) = -\alpha \Rightarrow$~~

~~$d(x,y) = |\alpha - (-\alpha)| = 2\alpha$~~

~~Pero, si $x = tg(-\alpha)$ e $y = tg(\alpha) \Rightarrow d(x,y) = |-\alpha$~~

i) ¿ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$?

$\Leftarrow)$

$x=y \Rightarrow \text{arctg}(x) = \text{arctg}(y) \Rightarrow |\text{arctg}(x) - \text{arctg}(y)| = 0$

$\Rightarrow)$

$d(x,y) = 0 \Rightarrow |\text{arctg}(x) - \text{arctg}(y)| = 0 \Rightarrow \text{arctg}(x) = \text{arctg}(y)$

Como la aplicación arctg es inyectiva $\Rightarrow x=y$

($\text{arctg}(x)' = \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ es siempre creciente,

por tanto, $x \neq y \Rightarrow x > y$ (o vice versa) $\Rightarrow \text{arctg}(x) > \text{arctg}(y)$

y $\text{arctg}(x) \neq \text{arctg}(x)$ (es inyectiva)). //

ii) ¿ $d(x,y) = d(y,x)$?

$d(x,y) = |\text{arctg}(x) - \text{arctg}(y)| = |(-1)[\text{arctg}(y) - \text{arctg}(x)]| =$

$= |\text{arctg}(y) - \text{arctg}(x)| = d(y,x)$ //

iii) ¿ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$?

~~No necesariamente: ejemplo, $d(-\pi, \pi)$~~ $= 2$

$$d(x,y)^2 = (|\text{arctg}(x) - \text{arctg}(y)|)^2 = (\text{arctg}(x) - \text{arctg}(y))^2 =$$

$$= \text{arctg}(x)^2 - 2\,\text{arctg}(x)\,\text{arctg}(y) + \text{arctg}(y)^2$$

$$(d(x,z) + d(z,y))^2 = (|\text{arctg}(x) - \text{arctg}(z)| + |\text{arctg}(z) - \text{arctg}(y)|)^2 =$$

$$= \text{arctg}(x)^2 - 2\,\text{arctg}(x)\,\text{arctg}(z) + \text{arctg}(z)^2 + \text{arctg}(z)^2 + \text{arctg}(y)^2 +$$

$$- 2\,\text{arctg}(y)\,\text{arctg}(z) + 2\,|\text{arctg}(x) - \text{arctg}(z)|\,|\text{arctg}(z) - \text{arctg}(y)|$$

$$d(x,y) = |\text{arctg}(x) - \text{arctg}(z)|$$

Siguiente cara

$$d(x,y) = |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)| = |\operatorname{arctg}(x) \underbrace{- \operatorname{arctg}(z) + \operatorname{arctg}(z)}_{0} - \operatorname{arctg}(y)| \overset{(1)}{\leq}$$

$$\leq |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(z)| + |\operatorname{arctg}(z) - \operatorname{arctg}(y)| =$$

$$= d(x,z) + d(z,y) \quad \square$$

Por tanto $\boxed{\text{sí es distancia.}}$

(1)

Sabemos que $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $|a+b| \leq |a| + |b|$. Tomamos $a = \underbrace{\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(z)}_{\in \mathbb{R}}$ y $b = \underbrace{\operatorname{arctg}(z) - \operatorname{arctg}(y)}_{\in \mathbb{R}}$ y entonces aplicamos.

1.10

a) $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$

i) ¿$\|x\| = 0 \iff x = 0$?

$\Rightarrow$)

$\|x\| = 0 \Rightarrow \underbrace{|x_1|}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{|x_n|}_{\geq 0} = 0$, $\forall i, |x_i| \geq 0 \Rightarrow$ ha de ser $\forall i\ |x_i| = 0$ (red abs, $\exists i_0 \mid |x_{i_0}| > 0 \Rightarrow \|x\| \gneq 0$ # por hipótesis $\Rightarrow \forall i\ |x_i| = 0$) $\Rightarrow |x_i| = 0 \Rightarrow x_i = 0\ \forall i \Rightarrow$

$\Rightarrow x = (0, \dots, 0) \Rightarrow x = 0$ //

($\Leftarrow$)

$x = 0 \Rightarrow \|x\| = |0| + \dots + |0| = 0$ //

ii) $¿\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$?

$$\|\lambda x\| = |\lambda x_1| + |\lambda x_2| + \dots + |\lambda x_n| =$$

$$= |\lambda||x_1| + \dots + |\lambda||x_n| =$$

$$= |\lambda|\left[|x_1| + \dots + |x_n|\right] =$$

$$= |\lambda| \cdot \|x\| \quad //$$

iii) $¿\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$?

Aplicamos $|a+b| \leq |a| + |b|$ en cada término.

$$\|x+y\| = |x_1+y_1| + \dots + |x_n+y_n| \leq$$

$$\leq |x_1| + |y_1| + \dots + |x_n| + |y_n| =$$

$$= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| + |y_1| + |y_2| + \dots + |y_n| =$$

$$= \|x\| + \|y\|$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Sí es norma.}}$

b) $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$

i) $¿\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$?

$\Rightarrow$)

$\|x\| = 0 \Rightarrow \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\} = 0 \Rightarrow \forall i \in I,\ 0 \leq |x_i| \leq \max = 0$

$\Rightarrow |x_i| = 0 \Rightarrow x_i = 0\ \forall i \in I \Rightarrow x = 0$

$\Leftarrow$)

$x = 0 \Rightarrow \max\{|x_i| : i \in I\} = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \quad //$

ii) $¿\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$?

$$\|\lambda x\| = \max\{|\lambda \cdot x_i| : 1 \leq i \leq n\} = |\lambda \cdot x_{i_0}| = |\lambda| \cdot |x_{i_0}|$$

Veamos que $|x_{i_0}| = \max\{|x_i| : i \in I\}$. Por red abs.

Si $\exists i_0' : |x_{i_0'}| > |x_{i_0}| \Rightarrow |\lambda| \cdot |x_{i_0'}| > |\lambda||x_{i_0}|$

$\Rightarrow |\lambda x_{i_0'}| > |\lambda x_{i_0}|$. Que es absurdo pues

$|\lambda x_{i_0}| = \max\{|\lambda \cdot x_i| : 1 \leq i \leq n\}$. Esta contradicción

parte de suponer $\exists i_0' : |x_{i_0'}| > |x_{i_0}|$, por tanto ha de

darse $\forall i \ |x_{i_0}| \geq |x_{i_0'}| \Rightarrow |x_{i_0}| = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |x_{i_0}| = \|x\|$ Por tanto:

$|x_{i_0}| \cdot |\lambda| = |\lambda \cdot x_{i_0}| \Rightarrow \|x\| \cdot |\lambda| = \|\lambda x\|$ //

iii) ¿ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$?

des. triangular valor absoluto

$\|x + y\| = \max\{|x_i + y_i| : 1 \leq i \leq n\} = |x_{i_0} + y_{i_0}| \leq$

$|x_{i_0}| + |y_{i_0}|$. $\forall i$, $|x_{i_0}| \leq |x_{i_0'}|$ con $|x_{i_0'}| = \max\{|x_i| : i \in I\} = \|x\|$

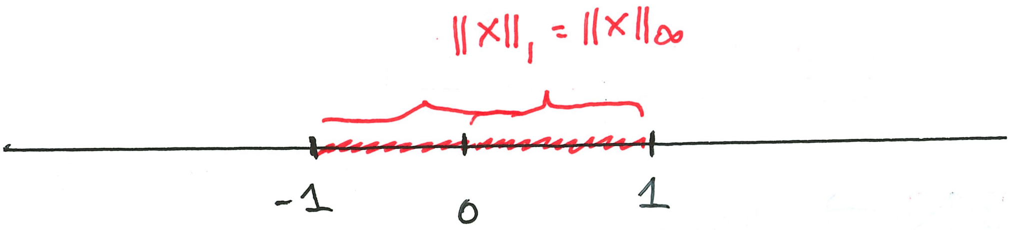
y análogamente para y $\Rightarrow$ $|x_{i_0}| + |y_{i_0}| \leq |x_{i_0'}| + |y_{j_0'}|$

Es decir:

$|x_{i_0} + y_{i_0}| \leq |x_{i_0'}| + |y_{j_0'}| \Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ //

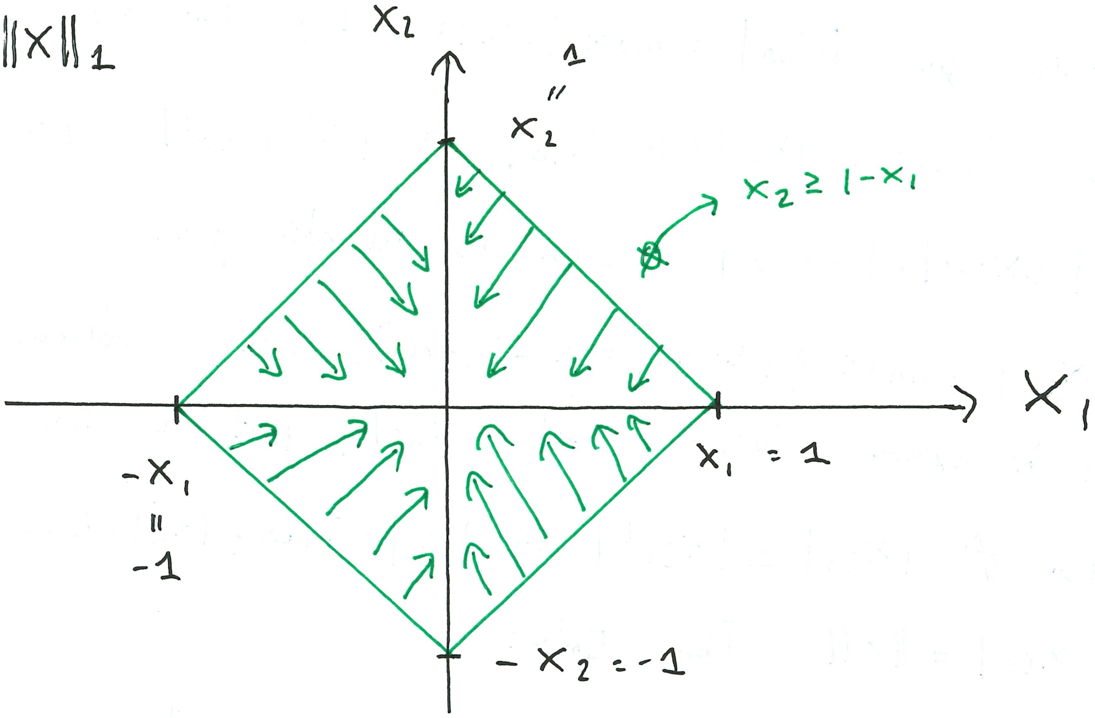
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Sí es norma.}}$ $\square$

En $\mathbb{R}$: $B(0, 1)$



En $\mathbb{R}^2$: $\|x\|_1$

$B(0,1)$



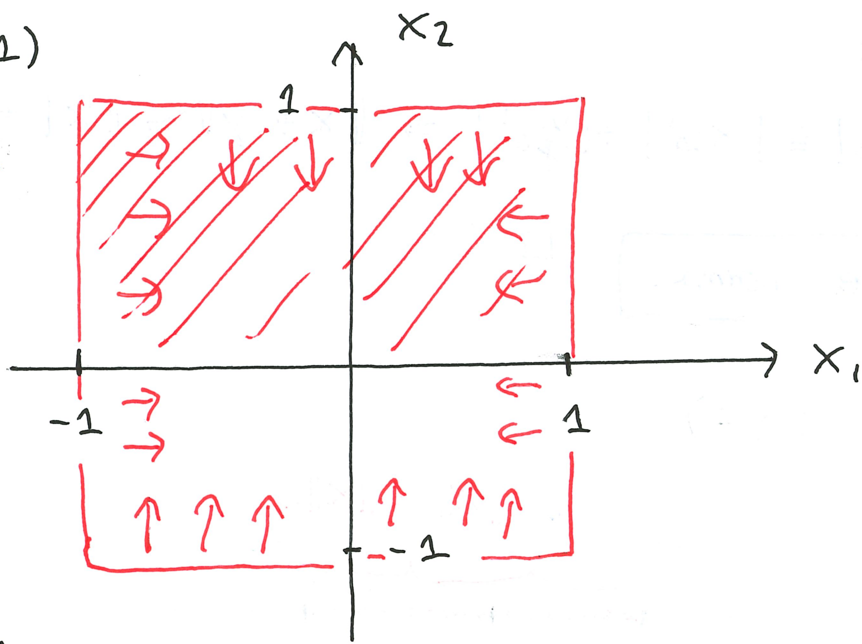
($|x_1| + |x_2| \leq 1 \Rightarrow$

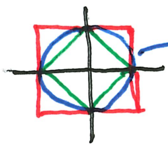
1er cuad: $x_1 + x_2 \leq 1 \Rightarrow x_2 \leq 1 - x_1$ (recta)
2do cuad: $-x_1 + x_2 \leq 1 \Rightarrow x_2 \leq 1 + x_1$ (recta)
3er cuad: $-x_1 - x_2 \leq 1 \Rightarrow x_2 \geq -x_1 - 1$ (recta)
4º cuad: $x_1 - x_2 \leq 1 \Rightarrow x_2 \geq x_1 - 1$ (recta))

(Análogamente en $\mathbb{R}^3$ un paralepípedo)

$\|x\|_\infty$, $B(0,1)$

($\max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1$

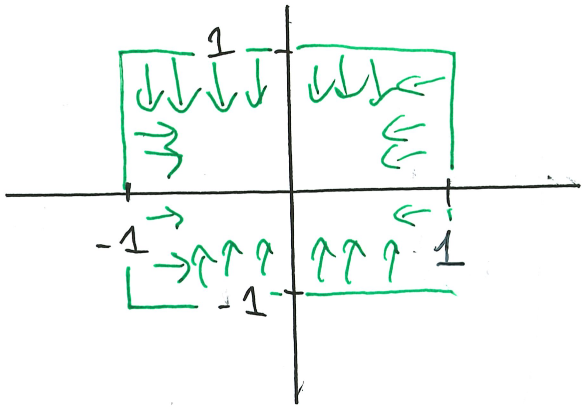


Superpuestos:  $\rightarrow$ $\|x\|_p$

Sigue aquí

$\boxed{1.13}$

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ y \leq 1\}$



Veamos si es abierto: $\text{int}(A) = A$ $\quad (\text{int}(A) \subset A)$

$\text{int}(A) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \exists r > 0 : B(x,r) \subset A\}$

Observamos que no lo es porque: $\forall (x,y) \mid |x| = 1$ o $|y| = 1$,

$B((x,y),r) \not\subset A$, pues $\exists\ ((x \pm r/2, y)$ o $(x, y \pm r/2))$ t.q.

$(x \pm r/2,\ y \pm r/2) \in B((x,y),r)$ pero $(x \pm r/2,\ y \pm r/2) \notin A$.

$\boxed{\text{No es abierto.}}$

$\boxed{\text{int}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1,\ |y| < 1\}}$

Veamos si es cerrado: $\bar{A} = A$ $\quad (\bar{A} \supset A)$

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$.

Veamos que $\bar{A} \subset A$. Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \in \bar{A} \Rightarrow$

$\forall r > 0 : B((x,y),r) \cap A \neq \emptyset$. Sup. $(x,y) \notin A$. Tomamos

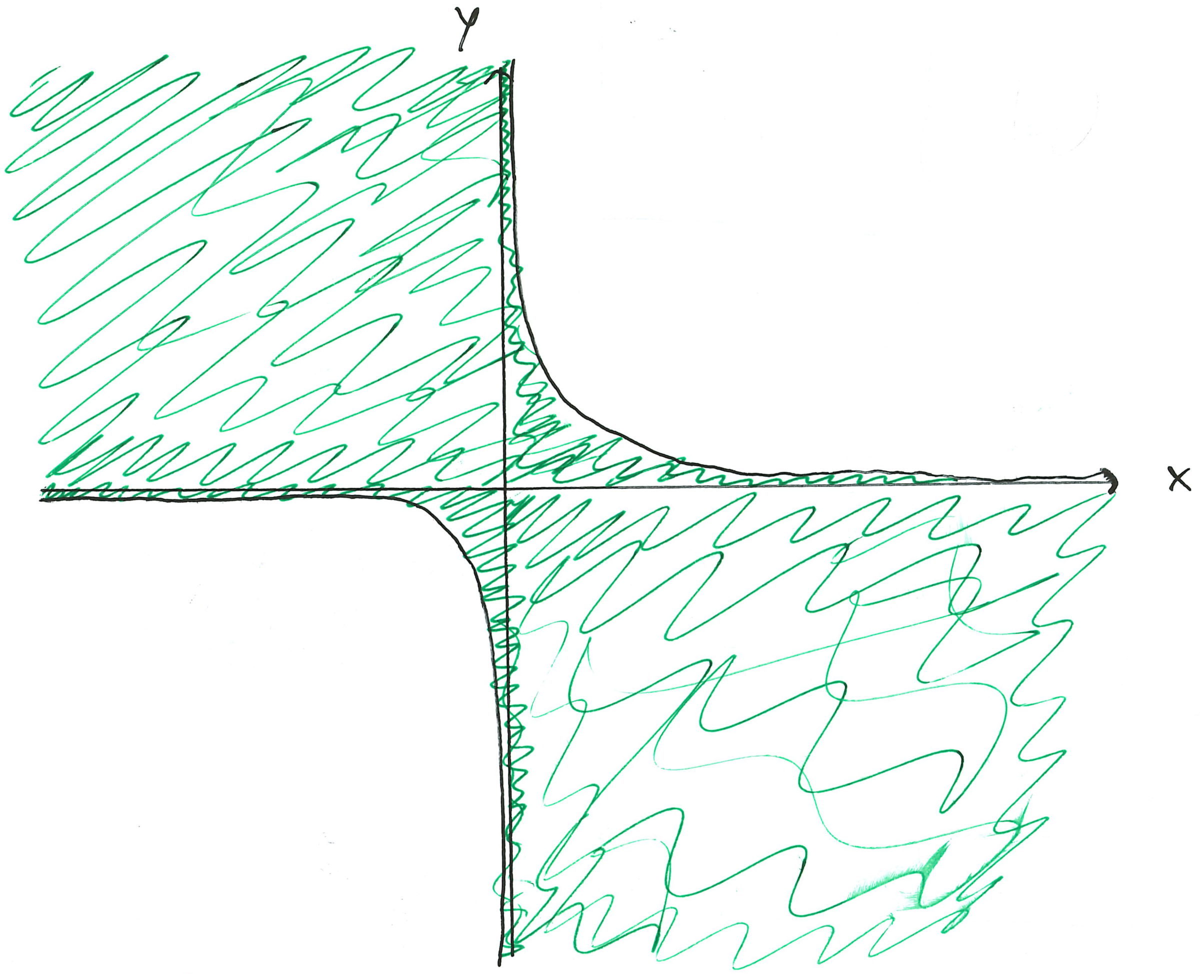
$p = \min\{d((x,y),(x_i,y_i))\}$ t.q. $(x_i,y_i) \in A \Rightarrow$ si $r = \frac{p}{2}$, (1)

$B((x,y),r) \cap A = \emptyset$ que es abs. por hip. $\Rightarrow (x,y) \in A$

$\Rightarrow \boxed{\bar{A} = A \text{ y es cerrado.}}$

Se da 1) porque $|x| \leq 1$ y $|y| \leq 1$ si no, en $|x| < 1$ y $|y| < 1$ no podríamos usar ese razonamiento pues $(1,1) \in \bar{A}$.

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}$ (I)



1^er^ cuad: $y < \frac{1}{x}$

2^d^ cuad: $xy < 0 < 1$

3^er^ cuad: $xy < 1$ (dividir $\frac{1}{x}$, como $x<0$ $\Rightarrow$) $y > \frac{1}{x}$

4º cuad: $xy < 0 < 1$

Mínimo distancia a función $1/x$

$int(C) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \exists r > 0 : B(x,r) \subset C\}$

Evidente, $int(C) \subset C$. Veamos $int(C) \supset C$.

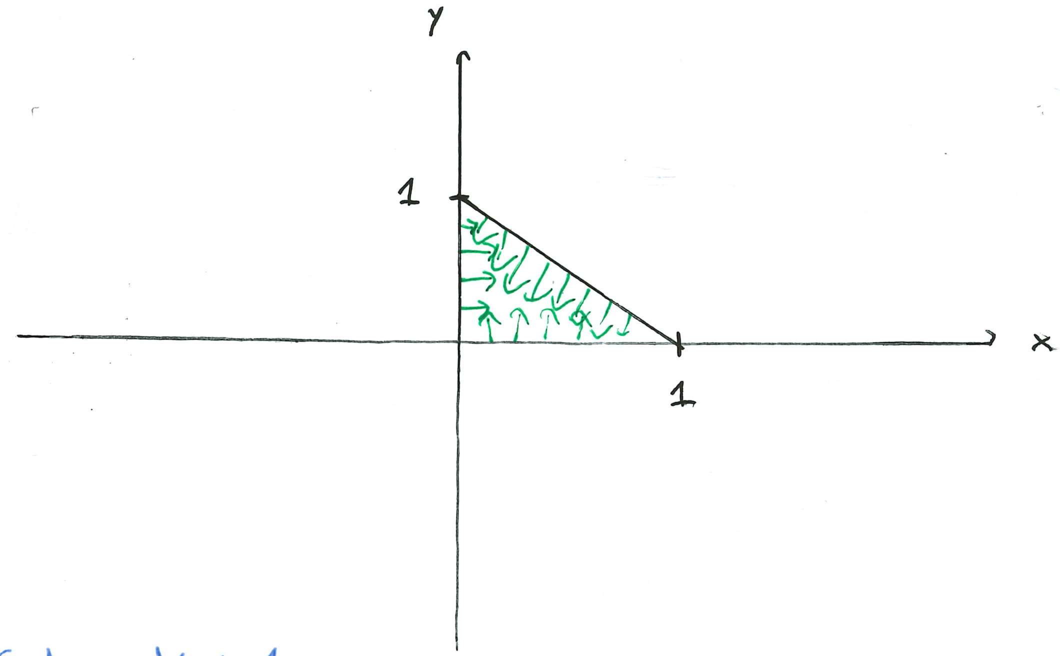
Sea $(x,y) \in C \Rightarrow xy < 1$. Tomamos $p = \min\{d((x,y),(x_i, 1/x_i))\}$

De esta manera, $\forall (x',y') \in B((x,y), p/2)$, $x' \cdot y' < 1$ pues si no, su distancia a (x,y) será $\geq p/2$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow B((x,y),p/2) \subset C \Rightarrow (x,y) \in int(C) \Rightarrow \boxed{C = int(C)}$

y C es abierto.

e) $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ y>0,\ x+y<1\}$



1er Cuadr : $y < 1-x$

¿Abierto?

$int(E) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \exists r>0 : B(x,r)\subset E\}$

$int(E)\subset E$ trivial ($x\notin E \Rightarrow B(x,r)\not\subset E$ pues $x\notin E$).
($\Rightarrow B(x,r)\subset E \Rightarrow x\in E \Rightarrow int(E)\subset E$)

¿$E\subset int(E)$?

Sea $(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ y>0,\ x+y<1$. Tomamos

$P_1 = \min\{\underbrace{d((x,y),(\lambda,0))}_{\text{dist mínima a eje OX}} \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$, $P_2 = \min\{\underbrace{d((x,y),(0,\lambda))}_{\text{dist. mínima a eje OY}} \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$.

$P_3 = \min\{\underbrace{d((x,y),(\lambda,1-\lambda))}_{\text{dist mínima a la recta } y=1-x} \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$

Tomamos $\rho = \min\{P_1, P_2, P_3\} \Rightarrow \forall (x',y')\in B((x,y),\rho/2)$,
$x'\geq 0$, $y'\geq 0$ y $x'+y'<1$ por construcción $\Rightarrow (x',y')\in E$
$\Rightarrow B((x,y),\rho/2)\subset E \Rightarrow (x,y)\in int(E) \Rightarrow \boxed{E = int(E)}$

$\boxed{\text{(Es abierto)}}$.

Observar que si hubiera sido $x \geq 0, y \geq 0$ o $(x+y \geq 1)$, entonces no habría sido abierto, pues $\exists (0,0) \in C$ t.q. $\forall \varepsilon > 0$, $(0+\varepsilon, 0-\varepsilon) \in B((0,0), \varepsilon)$ pero $(\underbrace{0-\varepsilon}_{<0}, \underbrace{0-\varepsilon}_{<0}) \notin E \Rightarrow$

$(0,0) \notin int(E) \Rightarrow \boxed{int(E) \subsetneq E}$ $\boxed{\text{no abierto}}$

con $\boxed{int(E) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x+y < 1\}}$

Seguimos con $x \geq 0, y \geq 0$ y $x+y < 1$ veamos si es cerrado. (Observamos que no, pues en el complementario $x+y \leq 1$ y los puntos de la recta no pertenecen a $int(E^c) \Rightarrow$ E^c no es abierto y E no es cerrado).

$\overline{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \forall r > 0, B((x,y), r) \cap E \neq \emptyset\}$ ($\overline{E} \supset E$ trivial)

$((x,y) \in B((x,y)) \cap E \Rightarrow (x,y) \in \overline{E} \Rightarrow \overline{E} \supset E)$.

Veamos que $\overline{E} \not\subset E$. Sea $(0,1) \notin E$, pues $y = 1-x$ y no cumple una condición: $\forall \varepsilon > 0$, $B((0,1), \varepsilon)$ (si $\varepsilon > 1$, $\varepsilon' = \frac{1}{\varepsilon}$)

con $(0, 1-\varepsilon) \in B((0,1), \varepsilon)$ y $0 \geq 0$, $1-\varepsilon \geq 0$

y $1-\varepsilon < 1-0 \Rightarrow (0, 1-\varepsilon) \in E \Rightarrow (0,1) \in \overline{E}$ y $(0,1) \notin E$

por tanto $\boxed{E \neq \overline{E} \text{ y no es cerrado.}}$

$$\boxed{\overline{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}}$$

c) (II)

$\overline{C} \supset C$ trivial. Veamos que $\overline{C} \not\subset C$.

$\overline{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \forall r > 0 : B((x,y), r) \cap C \neq \emptyset$

Podemos tomar el $(1,1) \notin C$. $\forall \varepsilon > 0$, si $\varepsilon > 1$ tomamos $1/\varepsilon$

$\exists\ (1, 1-\varepsilon) \in B((1,1), \varepsilon)$ y $(1, 1-\varepsilon) \in C \Rightarrow$

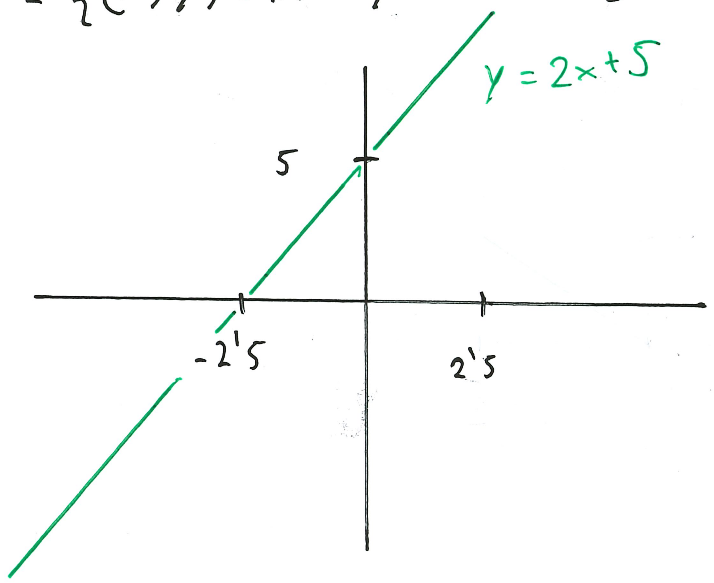
$\Rightarrow B((1,1), \varepsilon) \cap C \neq \emptyset \Rightarrow (1,1) \in \overline{C}$. $(1,1) \notin C$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\overline{C} \neq C \text{, no es cerrado.}}$

$$\boxed{\overline{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\}}$$

1.14

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x+5\}$



Observamos:

$\text{int}(B) = \emptyset \Rightarrow$ $\boxed{B \text{ no es abierto.}}$

Veamos si es NO conexo, es decir: $\exists\ X, Y \in \mathbb{R}^2$ t.q.

$X \cap B \neq \emptyset$, $Y \cap B \neq \emptyset$, $(X \cap B) \cap (Y \cap B) = \emptyset$ $(X \cap B) \cup (Y \cap B) = B$

En efecto: $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$

Son dos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que cumplen esas propiedades

$\Rightarrow$ $\boxed{B \text{ es } \cancel{\text{no}} \text{ conexo.}}$ X no es abierto. No $\exists X, Y \Rightarrow$

$\Rightarrow$ B es conexo

$fr(B) = B$

$ext(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 2x-5\}$

$\overline{B} = B$

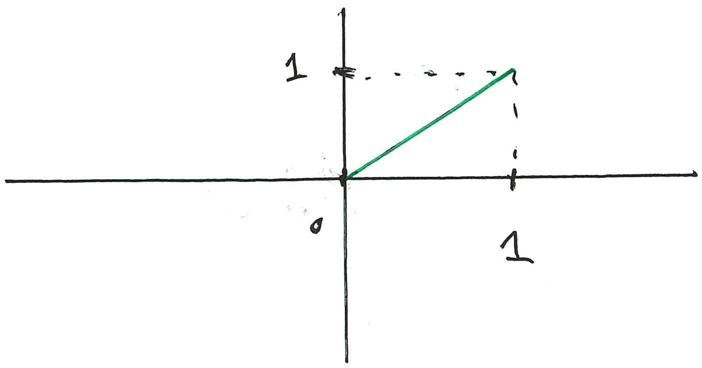
$B' = B$

No es acotado. Dado $x_{max} = M \Rightarrow (M+1, 2\cdot(M+1)+5) \in B$

Dado $y_{max} = M \Rightarrow \left(\frac{M+1-5}{2}, M+1\right) \in B$

Para que sea compacto ha de ser cerrado y acotado, pero no lo es.

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = x\}$



$int(C) = \emptyset$

¿Es conexo? Veamos si es no conexo. En efecto, si tomamos $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1/2\}$ y $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1/2\}$, entonces:

$X \cap C \neq \emptyset$, $Y \cap C \neq \emptyset$, $(X \cap C) \cap (Y \cap C) = \emptyset$ y $(X \cap C) \cup (Y \cap C) = C$

$\Rightarrow$ Es ~~no conexo~~. X no es abierto. No $\nexists X, Y \Rightarrow$ Es conexo

$fr(C) = C$

$ext(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \text{si } 0 \leq x \leq 1, y \neq x\}$

(si no da igual).

100

$\overline{C} = C$ (es cerrado)

$C' = C$

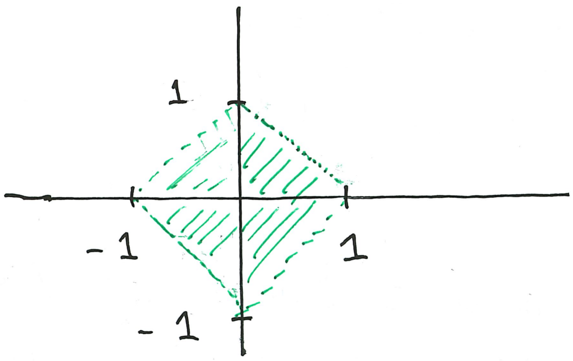
Es acotado pues $\forall (x,y) \in C$, $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.
$\forall (x,y) \in C$, $\exists B(0,2)$ t.q. $(x,y) \in B(0,2)$.

Es cerrado y acotado $\Rightarrow$ es compacto.

1.17

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1,\ y \in \mathbb{Q}\}$

· ¿ $\overline{A}$?



1er cuad: $y < 1 - x$
3er cuad: $-y < 1 + x \Rightarrow$
$y > -1 - x$
2do cuad: $-x + y < 1 \Rightarrow$
$y < 1 + x$
4º cuad: $x - y < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow y > 1 - x$

$\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \forall r > 0,\ (B(\vec{x}, r) \setminus \quad) \cap A \neq \emptyset\}$

(Sea $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$. Veamos que $\overline{A} = B$.)

Si $(x,y) \in B \Rightarrow |x| + |y| \leq 1 \Rightarrow \forall r > 0$, $B(\vec{x}, r)$ contiene

$$\boxed{\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}}$$

Es A $\boxed{\text{acotado ?}}$ $\boxed{\text{Si,}}$ $\forall (x,y) \in A$, $\boxed{(x,y) \in B(\vec{0}, 1)}$.

Como es cerrado y acotado $\Rightarrow$ $\boxed{\text{es compacto.}}$

¿Es conexo? No. $\boxed{\cancel{\text{Es no conexo.}}}$ Podemos tomar:

$X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|<1 \ , \ y = 1/n \ \ n\in\mathbb{N}\}$
$Y = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|<1, \ \ y\in\mathbb{Q} \ \text{t.q.} \ y\neq 1/n\}$

$X\cap A\neq\emptyset, \quad Y\cap A\neq\emptyset, \ (X\cap A)\cap(X\cap Y)=\emptyset,$

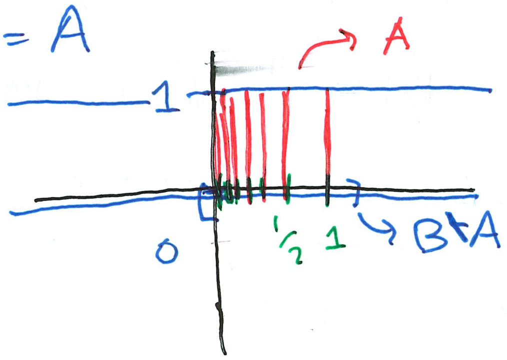
$(X\cap A)\cup(Y\cap A) = A \longrightarrow$ (~~Es no~~ | X, Y no son abiertos!

$\boxed{\text{Es conexo.}}$

1.19

$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x = 1/n, \ n\in\mathbb{N}, \ y\in[0,1]\}$ y
$B = A\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1], \ y=0\}.$
Probar que A es no conexo pero que B es conexo.

i)
Veamos que A es no conexo. Es decir: $\exists\, X, Y\subset\mathbb{R}^n$ abiertos tales que $A\cap X\neq\emptyset$, $A\cap Y\neq\emptyset$, $(A\cap X)\cap(A\cap Y)=\emptyset$ y $(A\cap X)\cup(A\cap Y) = A$



Son abiertos, no incluyen a sus fronteras, etc.

Tomamos $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|<2, \ x<3/4\}$ ($x\leq 1/2$ pero no, $x<3/4$).
e $Y = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|<2, \ x>3/4\}$ (abiertos)

$X\cap A\neq\emptyset$, $(X\cap A)\cap(Y\cap A)=\emptyset$, $(X\cap A)\cup(Y\cap A) = A$
$Y\cap A\neq\emptyset$, ($x>3/4 \ \# \ x<3/4$) $\Longrightarrow$ $\boxed{A \text{ es no conexo}}$

ii)

Supongamos que sí se da que $\exists X, Y$ abiertos tales que $X \cap A \neq \emptyset$, $Y \cap A \neq \emptyset$, $(X \cap A) \cap (Y \cap A) = \emptyset$, $(X \cap A) \cup (Y \cap A) = A$.

(Ver soluciones)