Álgebra lineal y Geometría II
Gloria Serrano Sotelo
Daniel Hernández Serrano
Departamento de MATEMÁTICAS

TEMA 2. MÉTRICAS Y GEOMETRÍA EUCLÍDEA.

Índice

1. Generalidades sobre métricas.

1.1. Métricas.

Sea E una k-espacio vectorial.

Definición 1.1. Una **métrica** T_2 sobre E es una aplicación

$$\begin{aligned} T_2\colon E\times E &\to k\\ (e,e') &\mapsto T_2(e,e') \end{aligned}$$

que es bilineal, es decir, lineal en ambos argumentos:

- $T_2(\lambda e_1+\mu e_2, e)=\lambda T_2(e_1,e)+\mu T_2(e_2,e)$
- $T_2(e,\lambda e_1+\mu e_2)=\lambda T_2(e,e_1)+\mu T_2(e,e_2)$

El escalar $T_2(e,e')$ se llama **producto escalar** del vector e por el vector e'.

Definición 1.2. Si $\{e_1,\dots,e_n\}$ es una base de E, se llama **matriz asociada** a T_2 en esa base a la matriz cuadrada $G=(g_{ij})$ de orden n y coeficientes $g_{ij}=T_2(e_i,e_j)$, $1\le i,j\le n$. Respecto de esta base, la expresión en coordenadas del producto escalar es:

$$T_2(e,e')=T_2(\sum_{i=1}^n x_ie_i,\sum_{j=1}^n x'_je_j)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix'_jT_2(e_i,e_j)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix'_jg_{ij}=(x_1,\dots,x_n)G\begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix}$$

Definición 1.3. Una métrica T_2 es **simétrica** si $T_2(e,e')=T_2(e',e)$ para cualesquiera $e,e'\in E$. Una métrica T_2 es **hemisimétrica** si $T_2(e,e')=-T_2(e',e)$ para cualesquiera $e,e'\in E$. Una métrica es simétrica (respectivamente hemisimétrica) si y solo si su matriz asociada es simétrica: $G=G^t$ (resp. hemisimétrica: $G=-G^t$).

1.2. Cambios de base para métricas.

Sea G la matriz de T_2 respecto de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y $\overline{G}$ la matriz de T_2 en la base $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$. Si B es la matriz de cambio de base (de $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ a $\{e_1, \dots, e_n\}$) se verifica: $\overline{G} = B^t G B$. En efecto,

$$\overline{g_{ij}} = T_2(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = T_2\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ki} e_k, \sum_{s=1}^{n} b_{sj} e_s\right) = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} \sum_{s=1}^{n} b_{sj} g_{ks} = (B^t G B)_{ij}$$

Definición 1.4. Los vectores $e, e' \in E$ son **ortogonales** respecto de T_2 si $T_2(e, e') = 0$.

Definición 1.5. Un vector e se dice que es **isótropo** respecto de T_2 si es ortogonal respecto de sí mismo, es decir, si $T_2(e, e) = 0$.

Ejemplo 1.6. Veamos que la aplicación sobre el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los números complejos $\mathbb{C}$ definida por

$$\begin{aligned} T_2 \colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{R} \\ (z, z') &\mapsto Re(z \cdot z') = \text{parte real de } z \cdot z' \end{aligned}$$

define una métrica simétrica. En efecto, para cualesquiera $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se verifica

$$T_2(\lambda z + \mu z'', z') = Re(\lambda z \cdot z' + \mu z'' \cdot z') = \lambda Re(z \cdot z') + \mu Re(z'' \cdot z') = \lambda T_2(z, z') + \mu T_2(z'', z')$$

Además, se verifica la simetría,

$$T_2(z, z') = Re(z \cdot z') = Re(z' \cdot z) = T_2(z', z)$$

y a partir de ésta y la linealidad en la primera componente se deduce la linealidad en la segunda.

Su matriz asociada en la base $\{1, i\}$ de $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial es

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; : T_2(1,1) = 1, T_2(1, i) = T_2(i, 1) = 0, T_2(i, i) = -1\,.$$

Obsérvese que el vector $1 + i$ es isótropo, pues $T_2(1 + i, 1 + i) = Re(2i) = 0$.

Ejemplo 1.7. La aplicación

$$\begin{aligned} T_2 \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \big((x, y), (x', y')\big) &\mapsto xy' + yx' \end{aligned}$$

define una métrica simétrica sobre $\mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada es

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pues $T_2((1, 0), (1, 0)) = 0, T_2((1, 0), (0, 1)) = 1 = T_2((0, 1), (1, 0)), T_2((0, 1), (0, 1)) = 0$.
Obsérvese que los vectores de la base $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son isótropos.

1.3. Radical, polaridad y subespacio ortogonal.

Definición 1.8. El **radical** de T_2, $\operatorname{Rad} T_2$, es el conjunto de los vectores de E que son ortogonales a todos los demás:

$$\operatorname{Rad} T_2 = \{e \in E \,|\, T_2(e, e') = 0 \text{ para todo } e' \in E\}$$

Obsérvese que los vectores del radical son todos isótropos.

Definición 1.9. Una métrica T_2 es **irreducible** o **no singular** si $\operatorname{Rad} T_2 = \{0\}$.

Definición 1.10. La **polaridad asociada a la métrica** T_2 es la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \phi_{T_2} \colon E &\to E^* \\ e &\mapsto \phi_{T_2}(e) \end{aligned}$$

$\big(\phi_{T_2}(e)\big)(e') := T_2(e, e')$ para cualesquiera $e, e' \in E$.

La **matriz asociada a la polaridad**, respecto de una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E y su base dual $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ en E^*, coincide con la **traspuesta de la matriz de** T_2, G^t. En efecto, sus columnas son las coordenadas de $\phi_{T_2}(e_j)$ en la base $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ y por lo tanto, el coeficiente (i,j) de la matriz es $\phi_{T_2}(e_j)(e_i) = T_2(e_j, e_i) = g_{ji}$.

Proposición 1.11. *El radical de una métrica T_2 es el núcleo de su polaridad.*

Demostración.

$$\begin{aligned}\ker \phi_{T_2} &= \{e \in E \,|\, \phi_{T_2}(e) = 0\} = \\ &= \{e \in E \,|\, \phi_{T_2}(e)(e') = 0 \text{ para todo } e' \in E\} = \\ &= \{e \in E \,|\, T_2(e, e') = 0 \text{ para todo } e' \in E\} = \operatorname{Rad} T_2\end{aligned}$$

□

Definición 1.12. Sea V un subespacio vectorial de E y T_2 una métrica sobre E. Se define su **subespacio ortogonal** como:

$$V^\perp = \{e \in E \,|\; T_2(e, v) = 0 \text{ para cualquier } v \in V\}\,.$$

$V^\perp$ es un subespacio de E, pues es cerrado por combinaciones lineales: para todos $e, e' \in V^\perp$ y todos $\lambda, \mu \in k$ se tiene que $T_2(\lambda e + \mu e', v) = \lambda T_2(e, v) + \mu T_2(e', v) = 0$ para cada $v \in V$, luego $\lambda e + \mu e' \in V^\perp$.

Proposición 1.13 (Caracterización del subespacio ortogonal)**.** *El subespacio ortogonal, $V^\perp$, coincide con la antiimagen por la polaridad del subespacio incidente, V^0:*

$$V^\perp = \phi_{T_2}^{-1}(V^0)$$

Demostración.

$$\phi_{T_2}^{-1}(V^0) = \{e \in E \,|\, \phi_{T_2}(e) \in V^0\} = \{e \in E \,|\, \phi_{T_2}(e)(v) = T_2(e, v) = 0, \forall v \in V\} = V^\perp$$

□

Proposición 1.14. *Sea E un k-espacio vectorial de dimensión finita y T_2 una métrica irreducible. Entonces su polaridad es un isomorfismo y*

$$\dim_k V^\perp = \dim_k E - \dim_k V\,.$$

Demostración. En efecto, como T_2 es irreducible por definición su radical es cero, luego la polaridad $\phi_{T_2}\colon E \to E^*$ es inyectiva ya que su núcleo es cero, $\ker \phi_{T_2} = \operatorname{Rad} T_2 = \{0\}$. Como $\dim_k E = \dim_k E^*$ la polaridad es también epiyectiva y por lo tanto $\phi_{T_2}\colon E \simeq E^*$ es un isomorfismo.
Se tiene entonces que:

$$\dim_k V^\perp = \dim_k V^\circ = \dim_k E - \dim_k V$$

□

Observación 1.15. T_2 es irreducible si y sólo si su matriz asociada G es no singular, es decir, si $\det G \neq 0$.

Ejemplo 1.16. Sea $E = \langle e_1, e_2\rangle$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 2. Calculemos $\langle e_1\rangle^\perp$ y $\langle e_2\rangle^\perp$ para las métricas sobre E cuyas matrices en esta base son

$$a)\, G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad b)\, G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad c)\, G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

En los tres casos la polaridad es un isomorfismo pues $\det G \neq 0$, luego $\dim_k \langle e_1\rangle^\perp = 1$ y $\dim_k \langle e_2\rangle^\perp = 1$.
a) $\langle e_1\rangle^\perp = \langle e_1\rangle$ pues $T_2(e_1, e_1) = 0$ y $\langle e_2\rangle^\perp = \langle e_2\rangle$ ya que $T_2(e_2, e_2) = 0$.
b) $\langle e_1\rangle^\perp = \langle e_1\rangle$ pues $T_2(e_1, e_1) = 0$ y $\langle e_2\rangle^\perp = \langle e_2 - 2e_1\rangle$ ya que $T_2(e_2, e_2 - 2e_1) = T_2(e_2, e_2) - 2T_2(e_2, e_1) = 2 - 2 = 0$.

c) $\langle e_1\rangle^\perp = \langle e_1 + 2e_2\rangle$ ya que $T_2(e_1, e_1 + 2e_2) = T_2(e_1, e_1) + 2T_2(e_1, e_2) = 2 - 2 = 0$ y $\langle e_2\rangle^\perp = \langle e_2 + 2e_1\rangle$ pues $T_2(e_2, e_2 + 2e_1) = T_2(e_2, e_2) + 2T_2(e_2, e_1) = 2 - 2 = 0$.

Ejemplo 1.17. En $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica de matriz $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1.- Comprobar que es un métrica simétrica e irreducible.
2.- Calcular $T_2(e, e')$ siendo $e = 2e_1 - e_3$ y $e' = 3e_1 - 4e_3$.
3.- Calcular el subespacio ortogonal a $\langle e_3\rangle$. ¿Son suplementarios $\langle e_3\rangle$ y $\langle e_3\rangle^\perp$?
4.- Calcular el subespacio ortogonal al plano π de ecuación $x + y - z = 0$. ¿Son suplementarios π y $\pi^\perp$?

Solución.

1.- Es simétrica pues $G = G^t$ y es irreducible porque $\det G \neq 0$.
2.-

$$T_2(e, e') = (2 \quad 0 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 6$$

3.- $\dim\langle e_3\rangle^\perp = 2$ y como $T_2(e_3, e_1) = 0$ y $T_2(e_3, e_3) = 0$ se sigue que $\langle e_3\rangle^\perp = \langle e_1, e_3\rangle$. Los subespacios $\langle e_3\rangle$ y $\langle e_3\rangle^\perp$ no son suplementarios, de hecho $\langle e_3\rangle \subset \langle e_3\rangle^\perp$.
4.- El subespacio incidente con el plano π es $\pi^0 = \langle \omega = (1, 1, -1)\rangle$, luego $\pi^\perp = \phi_{T_2}^{-1}(\langle\omega\rangle)$ y como ϕ_{T_2} es un isomorfismo, pues T_2 es irreducible, se tiene que $\pi^\perp$ es la recta $\langle G^{-1}\omega = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\rangle$, $\pi^\perp = \langle(3, -1, -1)\rangle$.
El plano π y la recta $\pi^\perp$ son suplementarios, pues el vector $(3, -1, -1)$ no está en el plano.

2. Geometría Euclídea.

2.1. Métricas euclídeas.

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Definición 2.1. Una métrica T_2 sobre E es **definido positiva** si:

- $T_2(e, e) \geq 0$ para todo $e \in E$.
- $T_2(e, e) = 0$ si y solo si $e = 0$.

Definición 2.2. Una métrica T_2 sobre E es **euclídea** si es simétrica y definido positiva.

Si T_2 es euclídea representaremos el producto escalar $T_2(e, e')$ por $e \cdot e'$. En la práctica utilizaremos, sin demostrar, que una métrica T_2 es euclídea si y solo si los menores diagonales de su matriz, respecto de cualquier base, son estrictamente positivos.
Nótese que todo subespacio V de un espacio euclídeo (E, T_2) es a su vez un espacio euclídeo $(V, T_{2|V})$ con la restricción de la métrica de E.

Ejemplo 2.3. Sea $E = \langle 1, x, x^2\rangle$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a dos. Comprobemos que el producto

$$p(x) \cdot q(x) = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \text{ para cada } p(x), q(x) \in E$$

define un producto escalar euclídeo.
Puede comprobarse fácilmente que el producto definido es una métrica, y que además es simétrica.
Los productos escalares de los polinomios de la base de E son

$$1 \cdot 1 = 1;\ 1 \cdot x = \frac{1}{2} = x \cdot 1;\ 1 \cdot x^2 = x^2 \cdot 1 = \frac{1}{3};\ x \cdot x = \frac{1}{3};\ x \cdot x^2 = x^2 \cdot x = \frac{1}{4};\ x^2 \cdot x^2 = \frac{1}{5}$$

y la matriz $G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ de la métrica en esa base tiene todos sus menores diagonales positivos:

$$1 > 0; \; \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{12} > 0; \; |G| = \frac{1}{2160} > 0$$

Proposición 2.4. *El radical de una métrica euclídea es cero. En consecuencia, la polaridad asociada a la métrica euclídea T_2 es un isomorfismo.*

Demostración. Si $e \in \operatorname{Rad} T_2$ se verifica que $T_2(e, e') = e \cdot e' = 0$ para todo $e' \in E$. En particular, $e \cdot e = 0$ y por tanto $e = 0$ pues T_2 es definido positiva. Luego $\ker \phi_{T_2} = \operatorname{Rad} T_2 = \{0\}$, es decir ϕ_{T_2} es inyectiva, y como $\dim E = \dim E^*$ también es epiyectiva. □

Teorema 2.5. *Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, V un subespacio de E y T_2 una métrica euclídea sobre E. El subespacio V y su ortogonal $V^\perp$ respecto de T_2 son suplementarios:*

$$E = V \oplus V^\perp .$$

Demostración.

- Como la polaridad es un isomorfismo por la proposición anterior, tenemos que
$$\dim_k V^\perp = \dim_k V^\circ = \dim_k E - \dim_k V$$
y por tanto $\dim V^\perp + \dim V = \dim E$.
- Veamos que $V \cap V^\perp = \{0\}$.
  En efecto, si $e \in V \cap V^\perp$ como $e \in V$ y $e \in V^\perp$ entonces $e \cdot e = 0$, de donde $e = 0$ ya que T_2 es definido positiva.

□

2.2. Módulo de un vector. Ángulo definido por dos vectores.

Definición 2.6. Se llama **módulo** o longitud del vector $e \in E$ **respecto de la métrica euclídea** T_2 al número real positivo $|e| = \sqrt{T_2(e, e)} = \sqrt{e \cdot e}$.

Proposición 2.7. *El módulo de un vector tiene las siguientes propiedades:*

(*a*) *$|e| \geq 0$ para todo $e \in E$ y $|e| = 0$ si y sólo si $e = 0$.*
(*b*) *$|\lambda e| = |\lambda||e|$ cualesquiera que sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $e \in E$.*
(*c*) *Desigualdad de Minkowski: $|e \cdot e'| \leq |e||e'|$.*
(*d*) *Desigualdad de Schwartz: $|e + e'| \leq |e| + |e'|$.*
(*e*) *Teorema de Pitágoras: $|e + e'|^2 = |e|^2 + |e'|^2$ si y sólo si $e \cdot e' = 0$.*

Demostración. (*a*) Se deduce de que T_2 es definido positiva.
(*b*) $|\lambda e| = \sqrt{T_2(\lambda e, \lambda e)} = \sqrt{\lambda^2 T_2(e, e)} = |\lambda|\sqrt{T_2(e, e)} = |\lambda||e|$.
(*c*) Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y $e, e' \in E$ se tiene que $(e + \lambda e') \cdot (e + \lambda e') = |e|^2 + \lambda^2 |e'|^2 + 2\lambda e \cdot e' \geq 0$, luego el discriminante de la ecuación de segundo grado en λ, $|e'|^2 \lambda^2 + 2e \cdot e' \lambda + |e|^2 = 0$ debe ser negativo o nulo, esto es, $4(e \cdot e')^2 - 4|e|^2|e'|^2 \leq 0$, de lo que se deduce que $(e \cdot e')^2 \leq |e|^2|e'|^2$ y por tanto $|e \cdot e'| \leq |e||e'|$.
(*d*) Utilizando (*c*) resulta

$$|e + e'|^2 = |e|^2 + |e'|^2 + 2e \cdot e' \leq |e|^2 + |e'|^2 + 2|e \cdot e'| \leq$$
$$|e|^2 + |e'|^2 + 2|e||e'| = (|e| + |e'|)^2 ,$$

luego $|e + e'| \leq |e| + |e'|$.
(*e*) $|e + e'|^2 = |e|^2 + |e'|^2 + 2e \cdot e' = |e|^2 + |e'|^2 \Leftrightarrow e \cdot e' = 0$.

□

Definición 2.8. Un vector $u \in E$ es **unitario** respecto de la métrica euclídea si tiene módulo 1 o, lo que es equivalente, si $u \cdot u = 1$.

Normalizar un vector es convertirlo en otro de módulo 1. Dado un vector no nulo $e \in E$ se pueden construir dos vectores unitarios: $u = \frac{e}{|e|}$ y $-u = -\frac{e}{|e|}$.
De la desigualdad de Minkowsky se sigue que $-1 \leq \frac{e \cdot e'}{|e||e'|} \leq 1$ y las igualdades se dan si e y e' son vectores proporcionales con diferente o igual sentido respectivamente. Por tanto, tiene sentido definir

$$\cos(e, e') = \frac{e \cdot e'}{|e||e'|}$$

2.3. Bases ortogonales y ortonormales. Ortonormalización de Gramm-Schmidt.

Sea (E, T_2) un espacio euclídeo, esto es, un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E con una métrica euclídea T_2.

Definición 2.9. Una **base** $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E es **ortogonal** si sus vectores son ortogonales dos a dos, esto es, si $e_i \cdot e_j = 0$ para $i \neq j$.
Una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E es **ortonormal** si es ortogonal y de vectores unitarios.

Dada una base ortogonal se puede construir una base ortonormal normalizando sus vectores, es decir, dividiéndolos por su módulo.

Proposición 2.10 (Existencia de bases ortonormales)**.** *En todo espacio euclídeo (E, T_2) existen bases ortogonales.*

Demostración. Lo haremos por inducción sobre la dimensión n del espacio euclídeo E. Si $n = 1$ no hay nada que demostrar.
Para $n > 1$ supongámoslo cierto para $n - 1$. Sea e un vector no nulo de E y consideremos el subespacio $\langle e \rangle \subset E$ que genera. Por el Teorema 2.5 se tiene que $E = \langle e \rangle \oplus \langle e \rangle^\perp$ y, como $\langle e \rangle^\perp$ es un espacio euclídeo (con la métrica restricción) de dimensión $n - 1$, por hipótesis de inducción $\langle e \rangle^\perp$ posee una base ortornormal $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$. Entonces $\{\frac{e}{|e|}, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ es una base ortonormal de E. □

Corolario 2.11. *En todo espacio euclídeo (E, T_2) existen bases respecto de las cuales la matriz de T_2 es la identidad.*

Ejemplo 2.12. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ se considera la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ dada por las condiciones

$$|e_1| = |e_2| = 2,\ |e_3| = 1,\ \angle(e_1, e_2) = \angle(e_2, e_3) = 60,\ \angle(e_1, e_3) = 90$$

(a) Calcula la matriz de la métrica euclídea en esa base.
(b) Calcula una base ortogonal y la matriz de la métrica euclídea respecto de ella.
(c) Calcula una base ortonormal y la matriz de la métrica euclídea respecto de ella.
(d) Calcula el plano que pasa por el origen y es perpendicular a la recta $\langle e_1 + e_2 - e_3 \rangle$.

Solución

(a) Los productos escalares de los vectores de la base son

$$e_1 \cdot e_1 = |e_1|^2 = 4,\ e_2 \cdot e_2 = |e_2|^2 = 4,\ e_3 \cdot e_3 = |e_3|^2 = 1$$
$$e_1 \cdot e_2 = |e_1||e_2| \cos(e_1, e_2) = 2,\ e_1 \cdot e_3 = 0, e_2 \cdot e_3 = |e_2||e_3| \cos(e_1, e_2) = 1$$

y la matriz $G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Como los vectores e_1 y e_3 son ortogonales, basta calcular un vector v que genere el subespacio ortogonal al plano $\langle e_1, e_3 \rangle$.

La ecuación del plano $\langle e_1, e_3\rangle$ es $y=0$, luego su subespacio incidente está generado por la forma lineal de coordenadas $(0,1,0)$ y por tanto su ortogonal, $\langle e_1, e_3\rangle^\perp$ es la recta $\langle G^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/4\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}\rangle$.

Así podemos tomar como generador de esta recta el vector $v=(1,-2,2)$ y los vectores $\{e_1,e_3,v\}$ forman una base ortogonal, en la que la matriz de la métrica euclídea es $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&8\end{pmatrix}$, pues $e_1\cdot e_1=4$, $e_3\cdot e_3=1$, $v\cdot v=\begin{pmatrix}1&-2&2\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=8$.

(c) Normalizando los vectores de la base ortogonal obtenemos una base ortonormal

$$\{\frac{e_1}{|e_1|},\frac{e_3}{|e_3|},\frac{v}{|v|}\}=\{\frac{1}{2}e_1,e_3,\frac{1}{\sqrt{8}}v\}.$$

Respecto de esta base la matriz de la métrica euclídea es la identidad.

(d) El plano π que pasa por el origen y es perpendicular a la recta $\langle e_1+e_2-e_3\rangle$ es $\langle e_1+e_2-e_3\rangle^\perp$. Para cada $e=(x,y,z)\in\pi$ se tiene que verificar

$$0=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\5\\0\end{pmatrix}$$

es decir, la ecuación de π es $6x+5y=0$.

Definición 2.13. Sean $u,e\in E$, la **proyección ortogonal** e' de e sobre u se define por las condiciones

$$\left.\begin{array}{l}e'=\lambda u\\(e-e')\cdot u=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}e'\cdot u=\lambda u\cdot u\\e\cdot u=e'\cdot u\end{array}\right\}\Rightarrow\lambda=\frac{e\cdot u}{u\cdot u}$$

de las que se deduce que $e'=\frac{e\cdot u}{u\cdot u}u$.

Ortonormalización de Gramm-Schmidt.

Se puede ortonormalizar una base $\{e_1,\dots,e_n\}$ del espacio euclídeo (E,T_2). Para ello construiremos primero una base ortogonal $\{u_1,\dots,u_n\}$:

- $u_1=e_1$
- u_2 es e_2 menos la proyección ortogonal de e_2 sobre u_1:
$$u_2=e_2-\frac{e_2\cdot u_1}{u_1\cdot u_1}u_1$$
- Se construye u_3 restando de e_3 sus proyecciones ortogonales sobre los vectores anteriores, u_1 y u_2:
$$u_3=e_3-\frac{e_3\cdot u_1}{u_1\cdot u_1}u_1-\frac{e_3\cdot u_2}{u_2\cdot u_2}u_2$$
- Procediendo de esta manera se obtiene:
$$u_n=e_n-\frac{e_n\cdot u_1}{u_1\cdot u_1}u_1-\ldots-\frac{e_n\cdot u_{n-1}}{u_{n-1}\cdot u_{n-1}}u_{n-1}$$

La base ortonormalizada es $\{\frac{u_1}{|u_1|},\dots,\frac{u_n}{|u_n|}\}$.

2.4. Distancia en el espacio euclídeo. Subvariedades afines perpendiculares.

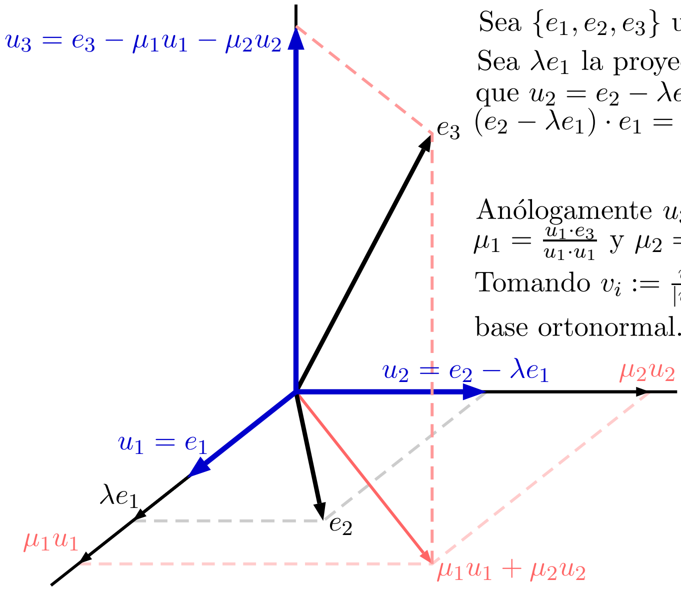
Sea (E,T_2) un espacio euclídeo.

Definición 2.14. Se define la **distancia** entre dos vectores $e,e'\in E$ como el módulo del vector diferencia $e-e'$:

$$d(e,e')=|e'-e|$$

Proposición 2.15. *La distancia verifica las siguientes propiedades:*

(a) *$d(e,e')\geq 0$ y $d(e,e')=0$ si y sólo si $e=e'$.*



Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base en el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \cdot)$.
Sea λe_1 la proyección ortogonal de e_2 en e_1, se tiene: que $u_2 = e_2 - \lambda e_1$ es ortogonal a $u_1 = e_1$, luego $(e_2 - \lambda e_1) \cdot e_1 = 0 \implies \lambda = \frac{e_1 \cdot e_2}{e_1 \cdot e_1}$

Anólogamente $u_3 = e_3 - \mu_1 u_1 - \mu_2 u_2 \perp \langle u_1, u_2 \rangle$, luego: $\mu_1 = \frac{u_1 \cdot e_3}{u_1 \cdot u_1}$ y $\mu_2 = \frac{u_2 \cdot e_3}{u_2 \cdot u_2}$
Tomando $v_i := \frac{u_i}{|u_i|}$ tenemos que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal.

FIGURA 1. Ortonormalización de Gramm-Schmidt.

(*b*) $d(e, e') = d(e', e)$
(*c*) *Desigualdad triangular:* $d(e, e'') \leq d(e, e') + d(e', e'')$

Demostración. Se siguen de las propiedades del módulo (Proposición 2.7).
Si $e \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ y $e' \equiv (x'_1, \ldots, x'_n)$ son las coordenadas de e y e' en una base de E y G es la matriz de T_2 es dicha base, se tiene que:

$$d(e, e') = \sqrt{(x'_1 - x_1, \ldots, x'_n - x_n) G \begin{pmatrix} x'_1 - x_1 \\ \vdots \\ x'_n - x_n \end{pmatrix}}\,.$$

Cuando la base tomada sea ortonormal, es decir, cuando respecto de esta base $G = \mathrm{Id}$, se tiene:

$$d(e, e') = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + \cdots + (x'_n - x_n)^2}\,.$$

Ejemplo 2.16. Calculemos la matriz del producto escalar euclídeo de $\mathbb{R}^3$ en la base dada por las condiciones

$$|e_1| = 2, |e_2| = |e_3| = 1, d(e_1, e_2) = 2 = d(e_1, e_3), d(e_2, e_3) = \sqrt{2}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} 4 = d(e_1, e_2)^2 = |e_1 - e_2|^2 = |e_1|^2 + |e_2|^2 - 2e_1 \cdot e_2 \Rightarrow e_1 \cdot e_2 = 1/2 \\ 4 = d(e_1, e_3)^2 = |e_1 - e_3|^2 = |e_1|^2 + |e_3|^2 - 2e_1 \cdot e_3 \Rightarrow e_1 \cdot e_3 = 1/2 \\ 2 = d(e_2, e_3)^2 = |e_2 - e_3|^2 = |e_2|^2 + |e_3|^2 - 2e_2 \cdot e_3 \Rightarrow e_2 \cdot e_3 = 0 \end{aligned}$$

Luego la matriz es $G = \begin{pmatrix} 4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Definición 2.17. La *distancia entre dos variedades afines H y H'* es el mínimo de las distancias entre sus puntos:

$$d(H, H') := \min_{P \in H, P' \in H'} d(P, P') = \min_{P \in H, P' \in H'} |P - P'|\,.$$

Definición 2.18. Sea $H = e_0 + V$ una subvariedad afín de E, de vector de posición e_0 y subespacio director V. *La subvariedad afín que pasa por el punto P y es perpendicular a H viene dada por*

$$H_P^\perp = OP + V^\perp$$

Como (E, T_2) es euclídeo tenemos que $E = V \oplus V^\perp$ (Teorema 2.5), luego las subvariedades H y $H_P^\perp$ se cortan en un único punto, $Q = H \cap H_P^\perp$, que llamaremos *proyección ortogonal de P sobre H.*

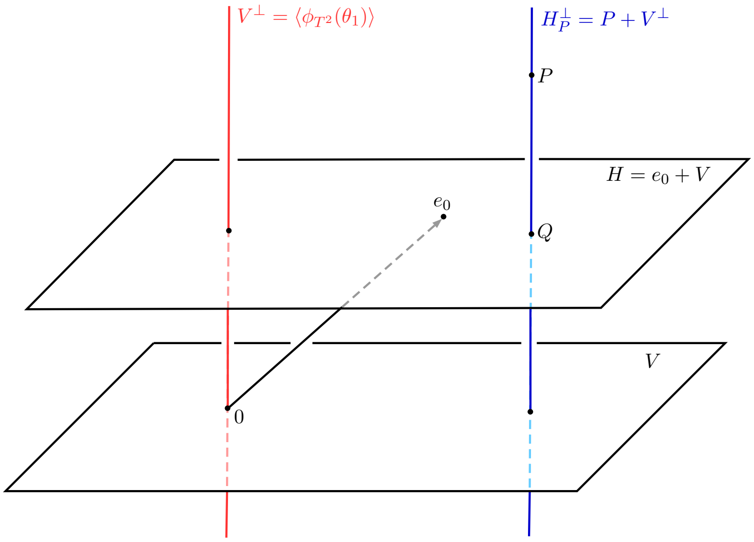


FIGURA 2. $H^\perp$ variedad afín perpendicular a H que pasa por P donde θ_1 forma una base de V° y T^2 denota la metrica contravariada inducida por la métrica euclídea T_2.

Observación 2.19. Si $\dim_k E = n$, $\dim_k V = m$ y $\{\theta_1, \ldots, \theta_{n-m}\}$ es una base del incidente V° al subespacio director V de H, un vector e vive en H si y solo si

$$\theta_1(e - e_0) = 0, \ldots, \theta_{n-m}(e - e_0) = 0\,,$$

que son las ecuaciones implícitas de H. Fijada la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y su base dual $\{w_1, \ldots, w_n\}$, si $e \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ son las coordenadas de e en la base de E y $\theta_i \equiv (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n})$ las de θ_i en la base dual, las ecuaciones implícitas se escriben:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = d_1 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n-m,1}x_1 + \cdots + a_{n-m,n}x_n = d_{n-m} \end{cases}$$

donde $d_i = \theta_i(e_0)$. Dado que $V^\perp = \phi_{T_2}^{-1}(V^\circ)$ y que la polaridad es un isomorfismo (G es invertible), se tiene entonces que $\{\phi_{T_2}^{-1}(\theta_1), \ldots, \phi_{T_2}^{-1}(\theta_{n-m})\}$ son una base de $V^\perp$ y las coordenadas $(c_{i,1}, \ldots, c_{i,n})$ de cada $\phi_{T_2}^{-1}(\theta_i)$ en la base fijada de E se calculan entonces por la fórmula:

$$\begin{pmatrix} c_{i,1} \\ \vdots \\ c_{i,n} \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{pmatrix}.$$

Proposición 2.20. *La distancia de un punto P a una subvariedad afín H es*

$$d(P, H) = d(P, Q)\,,$$

siendo Q la proyección ortogonal de P sobre H.

Demostración. Como $Q \in H$ podemos escribir $H = Q + V$, luego:

$$d(P,H) := \min_{P' \in H} d(P,P') = \min_{v \in V} d(P, Q+v)\,.$$

Ahora bien, como $Q - P \in V^{\perp}$ para todo $v \in V$ se tiene que:

$$d(P,Q+v) = \sqrt{(Q+v-P)\cdot(Q+v-P)} = \sqrt{(Q-P)^2 + v^2} \geq \sqrt{(Q-P)^2} = d(P,Q)\,,$$

de lo que se concluye que la menor de las distancias se obtiene en Q. □

Distancia de un punto a un hiperplano.
Usando lo anterior vamos a dar una fórmula para calcular la distancia de un punto a un hiperplano. Para hacerlo, es útil definir antes la métrica contravariada.
Toda métrica euclídea $T_2\colon E \times E \to k$ induce una métrica en el dual $T^2\colon E^* \times E^* \to k$, que llamaremos *métrica contravariada*, definida por

$$T^2(w,w') := T_2(\phi_{T_2}^{-1}(w), \phi_{T_2}^{-1}(w'))\,.$$

T^2 está bien definida pues al ser T_2 euclídea por la Proposición 2.4 su polaridad ϕ_{T_2} es un isomorfismo (es decir, existe $\phi_{T_2}^{-1}$), y es bilineal por ser $\phi_{T_2}^{-1}$ lineal y T_2 bilineal. Por reflexividad la polaridad de T^2, $\phi_{T^2}\colon E^* \to E^{**} \simeq E$, es $\phi_{T^2} = \phi_{T_2}^{-1}$ y su matriz asociada en la base fijada es G^{-1}.
Además, si e y e' son los únicos vectores de E tales que $w = \phi_{T_2}(e)$ y $w' = \phi_{T_2}(e')$, podemos escribir:

$$e \cdot e' = T_2(e,e') = \phi_{T_2}(e)(e') = w(e') = e'(w) = \phi_{T^2}(w')(w) = T^2(w',w) = w' \cdot w\,.$$

Sea $H = e_0 + V$ un hiperplano y sea $P \in E$ un punto que no está en H. Calculemos la distancia de P a H. Como $\dim_k V = n-1$ entonces $\dim_k V^{\circ} = 1$, sea entonces $\{\theta_1\}$ una base de V°. Se tiene que una base de $V^{\perp}$ es $\{\phi_{T_2}^{-1}(\theta_1)\} = \{\phi_{T^2}(\theta_1)\}$ y denotemos $\bar{e}$ al único vector de E tal que $\theta_1 = \phi_{T_2}(\bar{e})$.
Tenemos que $Q - P \in V^{\perp} = \langle \bar{e} \rangle$ y por tanto $Q = P + \lambda\bar{e}$ para cierto $\lambda \in k$, que podemos determinar usando el hecho de que al ser $Q - e_0 \in V$, entonces:

$$\begin{aligned} 0 = \theta_1(Q-e_0) &= \theta_1(P+\lambda\bar{e}-e_0) = \theta_1(P-e_0) + \lambda\theta_1(\bar{e}) = \theta_1(P-e_0) + \lambda\phi_{T_2}(\bar{e})(\bar{e}) = \\ &= \theta_1(P-e_0) + \lambda T_2(\bar{e},\bar{e}) = \theta_1(P-e_0) + \lambda T^2(\theta_1,\theta_1) = \theta_1(P-e_0) + \lambda\theta_1\cdot\theta_1\,, \end{aligned}$$

luego $\lambda = -\frac{\theta_1(P-e_0)}{\theta_1\cdot\theta_1}$
En consecuencia:

$$\begin{aligned} d(P,H) = d(P,Q) = d(P, P - \frac{\theta_1(P-e_0)}{\theta_1\cdot\theta_1}\cdot\bar{e}) &= \sqrt{\Big(-\frac{\theta_1(P-e_0)}{\theta_1\cdot\theta_1}\cdot\bar{e}\Big)^2} \\ = \sqrt{\Big(\frac{\theta_1(P-e_0)}{\theta_1\cdot\theta_1}\Big)^2\bar{e}\cdot\bar{e}} = \sqrt{\Big(\frac{\theta_1(P-e_0)}{\theta_1\cdot\theta_1}\Big)^2\theta_1\cdot\theta_1} &= \frac{|\theta_1(P-e_0)|}{\sqrt{\theta_1\cdot\theta_1}} \end{aligned}$$

Sea $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base de E y $\{w_1,\dots,w_n\}$ su base dual. Tomando coordenadas respecto de estas bases sea $P \equiv (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in E_{\{e_i\}}$ y $\theta_1 \equiv (a_1,\dots,a_n) \in E^*_{\{w_i\}}$. La ecuación del hiperplano H es:

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = d$$

con $\theta_1(e_0) = d$ y $w(P-e_0) = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n - d$. Entonces:

$$d(P,H) = \frac{|a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n - d|}{\sqrt{(a_1,\dots,a_n)G^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}}$$

Ejemplo 2.21. Respecto de la métrica con matriz asociada $G = \begin{pmatrix} 4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcular la distancia del punto $P = (1,1,1)$ a la recta $r \equiv x+1 = -y = z$.

- La subvariedad afín que pasa por P y es ortogonal a la recta r es el plano $\pi = OP + \langle \omega \rangle^0$, donde $\omega = Ge$, siendo $e = (1,-1,1)$ un vector director de r.

$$Ge = \begin{pmatrix} 4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

  $\pi \equiv 8x - y + 6z = 10$.

- Calculamos $Q = r \cap \pi$.

$$\left.\begin{array}{l} Q \in r \Rightarrow Q = (-1+\lambda, -\lambda, \lambda) \\ Q \in \pi \Rightarrow 8(-1+\lambda) + \lambda + 3\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2} \end{array}\right\} = Q = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$$

- $d(P,r) = d(P,Q) = |PQ| = |(-1/2, -5/2, 1/2)| = \frac{\sqrt{134}}{4}$

$$|PQ|^2 = |(-1/2,-5/2,1/2)|^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & -5/2 & 1/2 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{67}{8}$$

3. Problemas propuestos.

3.1. *Dado un k-espacio vectorial E de dimensión 3, demuestra que la aplicación:*

$$E \times E \to k$$
$$((x,y,z),(x',y',z')) \mapsto xx' + yy' + 3zz' - 2xz' - 2zx'$$

define una métrica simétrica.

3.2. *Dar las ecuaciones de las métricas definidas por las matrices:*

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

Calcula su radical y decide si son o no irreducibles.

3.3. *Sea $\{e_1, e_2\}$ una base del k-espacio vectorial E y T_2 la métrica cuya matriz asociada en dicha base es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz de T_2 en la base $e_1' = 3e_1 + 2e_2$, $e_2' = e_1 + e_2$.*

3.4. *En un k-espacio vectorial E de dimensión 3, se considera la métrica T_2 cuya matriz asociada en la base dada es $T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular la restricción de T_2 al subespacio generado por los vectores $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = 2e_1 + e_2 - 2e_3$.*

3.5. *Sobre el $\mathbb{R}$-espacio vectorial E de dimensión 4, con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, se considera la métrica de matriz:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(*a*) *Calcular el radical de T_2.*
(*b*) *Calcular la expresión de T_2 en la base $\{e_1 - e_3, e_2 - e_4, e_1 + e_2 + e_3, e_2 - e_3 - e_4\}$.*

3.6. *Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3, se considera una métrica euclídea en E cuya matriz asociada en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ es:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) *Calcula la restricción de esta métrica al subespacio $\bar{E}$ de E generado por los vectores $\{\bar{e}_1 = e_1 + e_2, \bar{e}_2 = e_3\}$.*
(b) *Calcula una base ortonormal de $\bar{E}$.*

3.7. *En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ calcula la matriz de la métrica euclídea en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ definida por:*

$$|e_1| = 1,\ |e_2| = 2,\ |e_3| = \sqrt{2},\ \angle(e_1, e_2) = 45^o,\ \angle(e_1, e_3) = 45^o,\ \angle(e_2, e_3) = 45^o$$

(a) *Calcula una base ortogonal y la matriz de la métrica en dicha base.*
(b) *Calcula una base ortonormal y la matriz de la métrica en dicha base.*

3.8. *En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con la métrica habitual calcula los ángulos que forma la recta:*

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{5}$$

con los ejes coordenados.

3.9. *En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ calcula la matriz de la métrica euclídea en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ definida por:*

$$|e_1| = 1,\ |e_2| = 2,\ |e_3| = \sqrt{2},\ \angle(e_1, e_2) = 90^o,\ \angle(e_1, e_3) = 45^o,\ \angle(e_2, e_3) = 60^o$$

Dados los vectores $e = 2e_1 - 3e_2$ y $e' = e_1 + e_2 - e_3$ calcula su producto escalar $e \cdot e'$ y el ángulo que determinan.

3.10. *En un plano euclídeo se da una base con las condiciones siguientes:*

$$|e_1| = 1,\ |e_2| = 2,\ \angle(e_1, e_2) = 60^o$$

Calcula la matriz de la métrica en esta base y el ángulo que determinan las rectas de ecuaciones $3x + 2y = 0$, $x - y = 0$, siendo $\{x, y\}$ las coordenadas en esa base.

3.11. *En el espacio euclídeo tridimensional se considera el sistema de referencia de base $\{e_1, e_2, e_3\}$ dada por las condiciones:*

$$|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1,\ \angle(e_1, e_2) = 60^o,\ \angle(e_1, e_3) = \angle(e_2, e_3) = 90^o$$

Calcula la distancia entre los puntos P y Q de coordenadas en este sistema de referencia $P = (1, 1, 0)$ y $Q = (-2, 3, 1)$.

3.12. *Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y corta perpendicularmente a la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$.*

3.13. *Determinar la ecuación del plano que pasa por el punto $(2, -3, -4)$ y es perpendicular a los planos $\pi_1 \colon x + 2y - z = 0$, $\pi_2 \colon 7x - 2y + z = 0$.*

3.14. *En un plano euclídeo se da una base $\{e_1, e_2\}$ con las condiciones $|e_1| = 2$, $|e_2| = \sqrt{2}$, $\angle(e_1, e_2) = 45^o$. Calcula la ecuación de la circunferencia de radio unidad y centro el punto $P = 2e_1 + e_2$.*

3.15. *En el espacio $\mathbb{R}^3$ se considera una métrica euclídea T_2 definida en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ por las condiciones:*

$$|e_1| = |e_2| = \sqrt{2},\ |e_3| = 2,\ \angle(e_1, e_2) = 60^o,\ \angle(e_1, e_3) = \angle(e_2, e_3) = 90^o\,.$$

(a) *Calcula la matriz asociada a la métrica euclídea en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.*
(b) *Calcula la distancia del punto $P = (2, 1, 1)$ al plano de ecuación implícita $x - y + z = 1$.*