Tema 1: Espacio Vectorial Cociente

Queremos matrices sencillas para trabajar.

Definición:

Bloque de Jordan:

$$\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

(reordenación de vectores básicos).

Una matriz de Jordan es aquella que es diagonal con bloques de Jordan:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \forall i \in I \quad \rightarrow \quad J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

En el segundo capítulo veremos cuando se puede conseguir una matriz de este tipo para un homomorfismo.

Con esta idea en mente, definimos:

Definición:
Un $V \subset E$ es un subespacio invariante cuando:

$$\forall v \in V, \quad h(v) \in V \qquad (V_{|h} \text{ h restringido a } V).$$

Esto será útil para buscar dicha matriz.

Recordatorio:

$$f: V \longrightarrow W$$

$$\beta_V = \{v_1, \dots, v_n\} \quad ; \quad \beta_W = \{w_1, \dots, w_m\}$$

1.1 Espacio vectorial cociente

Dado V un $\mathbb{K}$-e.v. y $W \leq V$. Definimos la siguiente relación de equivalencia R.

$$v_1, v_2 \in V \quad ; \quad v_1 R v_2 := v_1 - v_2 \in W$$

Ejercicio propuesto:
R es de equivalencia (vRv ; $vRw \Rightarrow wRv$; vRw y $wRz \Rightarrow vRz$)

Denotamos R por el siguiente símbolo: (" v_1 es congruente con v_2 módulo W ").

$$v_1, v_2 \in V \quad ; \quad v_1 \equiv v_2 \mod (W) := v_1 - v_2 \in W$$

Dada una relación de equivalencia, tenemos las respectivas clases de equivalencia:

$$[v] = \{w \in V \mid vRw\} = \{w \in V \mid v \equiv w \bmod (W)\} =$$

$$[v] = \{w \in V \mid \exists z \in W \text{ t.q. } w - v = z\} =$$

$$[v] = \{w \in V \mid \exists z \in W \text{ t.q. } w = v + z\}$$

De aquí tomamos la siguiente notación, pues es a v, sumarle todos los posibles vectores de W.

$$[v] = v + W \quad (\text{notación})$$

También se representa por:

$$[v] = v + W = \overline{v} \quad (\text{notación})$$

Matiz:

$$v_1 \neq v_2 \not\Rightarrow \overline{v_1} = \overline{v_2}$$

De hecho, la condición necesaria y suficiente para que si se dé (Mat. Bas. año pasado) es la siguiente:

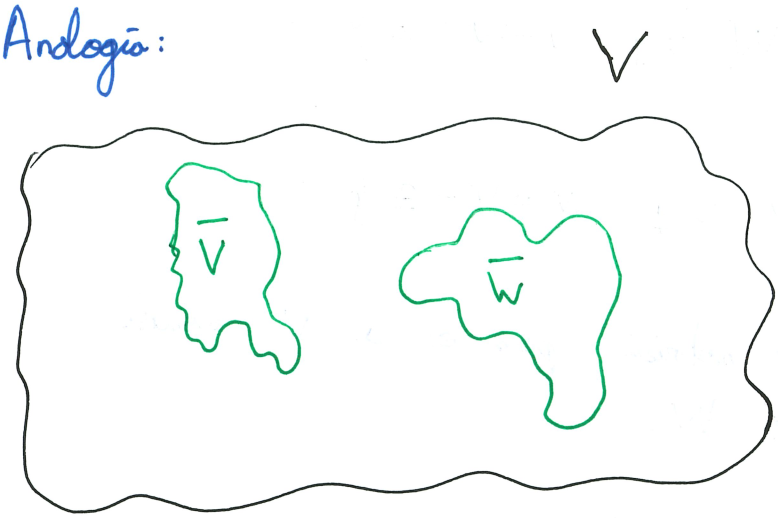
$$\overline{v_1} = \overline{v_2} \iff v_1 - v_2 \in W \quad (\Leftrightarrow v_1 R v_2 \Leftrightarrow v_1 \equiv v_2 \bmod (W))$$

Esto nos permite hablar de espacios vectoriales cocientes.
(El conjunto formado por todas las clases de equivalencia).
(Clases distintas son disjuntas, forman una partición).

La clase cociente, el espacio vectorial cociente es:

$$\frac{V}{W} = \{\overline{v} \mid v \in V\}$$

Analogía:



(en $\overline{v}$, v es un representante de la coclase).

$\rightarrow \frac{V}{W} = \{\overline{v}, \overline{w}, \dots\}$

y $\overline{v} \subset V$

Necesitamos suma de coclases y multiplicación por escalar para tener estructura de espacio - cociente.

- $\overline{v} + \overline{w} \underset{\text{def.}}{=} \overline{v+w}$
- $\lambda \in \mathbb{K}$, $\overline{v} \in V/W$; $\lambda \overline{v} \overset{\text{def.}}{=} \overline{\lambda v}$

Tenemos:

$\left(\frac{V}{W}, +, \cdot_{\mathbb{K}}\right)$

- $\frac{V}{W}$ → conjunto de elementos
- $+$ → Ley de composición interna
- $\cdot_{\mathbb{K}}$ → ley de composición externa en $\mathbb{K}$

<u>Ejercicio propuesto</u>:

Demostrar que $\left(\frac{V}{W}, +, \cdot_{\mathbb{K}}\right)$ forma un espacio vectorial ($\mathbb{K}$-e.v.).

(Nota: $\mathbb{K}$ es un cuerpo:

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$

- $\mathbb{K}$ → elementos
- $+$ → suma de escalares
- $\cdot$ → prod. de escalares)

Ejercicio propuesto:

Si $\overline{v} = \overline{v'}$ y $\overline{w} = \overline{w'}$ $\Rightarrow$ $\overline{v+w} = \overline{v'+w'}$. A probar.

(También para el producto: $\overline{v} = \overline{v'} \Rightarrow \overline{\lambda v} = \overline{\lambda v'}$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$).

Con ello queda probado que la definición es consistente, tiene sentido (la suma no depende de los representantes escogidos para cada clase).

Al $\mathbb{K}$-e.v. formado por $(V/W, +, \cdot \mathbb{K})$ lo llamamos **$\mathbb{K}$-e.v. cociente**.

Ejemplo:

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $W = \langle (1,1) \rangle = \{(\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Operar: $\overline{(2,3)} + \overline{(5,1)}$

Tomamos un representante de $(2,3)$, otro de la de $(5,1)$ ellos mismos, los sumamos y tomamos la coclase resultante.

$$\overline{(2,3)} + \overline{(5,1)} = \overline{(2,3)+(5,1)} = \overline{(7,4)}$$

Tomamos otro representante de esa coclase:

$(7,4) - 3(1,1) = (3,0) \Rightarrow \overline{(7,4)} = \underbrace{\overline{(3,0)}}$ es más elegante, tiene más ceros.

Con esta observación:

$$\frac{\mathbb{R}^2}{\langle (1,1) \rangle} = \{\overline{(\lambda, 0)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$ (no hay repeticiones con esa def.)

No hay repeticiones porque: $\overline{(\lambda_1, 0)} = \overline{(\lambda_2, 0)} \Rightarrow$

(siguiente cara)

$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2, 0) \in W \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ como queríamos ver.

Tomando $\lambda = 0 \rightarrow \overline{(0,0)}$ es el neutro de $\left(\frac{\mathbb{R}}{\langle(1,1)\rangle}, +\right)$.

__Proposición:__

Si V es un $\mathbb{K}$-e.v. de dimensión finita, y W es un subespacio de V, entonces:

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$$

__dem.:__

Sea $n = \dim(V)$ y $m = \dim(W)$. Sea $\beta_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base de W. La completamos hasta una base $\beta_V = \{w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_n\}$ de V. Vamos a probar que $\{\overline{w_{m+1}}, \dots, \overline{w_n}\}$ es una base de V/W. Entonces será evidente que $\dim(V/W) = \underbrace{n-(m+1)+1}_{\text{nº vectores de la base.}} = n-m$

Sea $v \in V$. Como β_V es una base de V, entonces:

$v = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m + \lambda_{m+1} w_{m+1} + \dots + \lambda_n w_n$; con $\lambda_i \in \mathbb{K}, \forall i \in I$

Entonces (aplicando $\overline{v+w} = \overline{v} + \overline{w}$ y $\overline{\lambda v} = \lambda \overline{v}$):

$$\overline{v} = \overline{\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n} = \lambda_1 \overline{w_1} + \dots + \lambda_m \overline{w_m} + \lambda_{m+1} \overline{w_{m+1}} + \dots + \lambda_n \overline{w_n} \quad (1)$$

Observamos que $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $\overline{w_i} = \overline{0}$ pues $w_i - 0 = w_i \in W$ (pues $\{w_i\}_{i \in \{1, \dots, m\}}$ es base de W), y $\lambda \cdot \overline{w_i} = \lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}$

Así obtenemos: (siguiente cara).

De (1) $\Rightarrow$

$\overline{v} = \overline{0} + \dots + \overline{0} + \lambda_{m+1}\overline{w_{m+1}} + \dots + \lambda_n \overline{w_n}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{\overline{w_{m+1}}, \dots, \overline{w_n}\}$ es sistema generador de V/W. Veamos que es $\mathbb{K}$-libre y como es ambas, entonces será base.

Supongamos que:

$\lambda_{m+1}\overline{w_{m+1}} + \dots + \lambda_n \overline{w_n} = \overline{0}$ (2) $\Rightarrow$

$\overline{\lambda_{m+1} w_{m+1} + \dots + \lambda_n w_n} = \overline{0}$ $\Rightarrow$

$\lambda_{m+1} w_{m+1} + \dots + \lambda_n w_n \in W \longrightarrow$ Lo expresamos en la β_W:

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$ t.q.:

$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m = \lambda_{m+1} w_{m+1} + \dots + \lambda_n w_n$ $\Rightarrow$

$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m - \lambda_{m+1} w_{m+1} - \dots - \lambda_n w_n = 0$

Observamos que es una $\mathbb{K}$-c.l. de vectores de β_V. Como β_V es base $\Rightarrow$ es $\mathbb{K}$-libre $\Rightarrow$ cualquier $\mathbb{K}$-c.l. igualada a 0 tiene los escalares cero:

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i = 0$. Y en particular, $\lambda_{m+1} = 0, \dots, \lambda_n = 0$

Que es lo que queríamos ver. Volvemos a la ec. (2).

(2) es $\mathbb{K}$-libre $\Rightarrow$ son $\{\overline{w_{m+1}}, \dots, \overline{w_n}\}$ $\mathbb{K}$-libre, y como es s. generador, entonces es base y $\dim(V/W) = n - m$ $\square$

$(\underbrace{n - (m+1) + 1}_{\text{longitud de la base}} = n - m)$

Definición:

Sea V un $\mathbb{K}$- e.v. y $h: V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Un subespacio $W \leq V$ es h-invariante cuando cumple:

$$f(W) \subseteq W \quad \text{(imagen de un conjunto).}$$

Es equivalente a decir:

$$\forall w \in W, \; f(w) \in W$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (y, x-y) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} f((1,0)) &= (0,1) \\ f((0,1)) &= (1,-1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$$

$$P_x(h) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix} = x^2 + x - 1 = 0 \overset{\text{fórmula}}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \Big(x - \underbrace{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}_{\lambda_2}\Big)\Big(x - \underbrace{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}_{\lambda_1}\Big) = 0 \rightarrow \text{Valores propios son } \lambda_1 \text{ y } \lambda_2$$

Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones para hallar los espacios invariantes:

(Lo haremos para $V(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$, para el otro caso es análogo)

$$V\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : A \cdot v = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot v \right\} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda_1 x \\ x - y = \lambda_1 y \end{cases} \quad \left(\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Observamos que como es solución del polinomio característico $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda_1^2 + \lambda_1 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1^2 + \lambda_1 = 1 \Rightarrow \lambda_1(\lambda_1 + 1) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\lambda_1 + 1} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \Rightarrow y = \lambda_1 x \\ \Rightarrow x = y(\lambda_1 + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda_1 x \\ y = \dfrac{x}{\lambda_1 + 1} \end{cases} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} y = \lambda_1 x \\ \cancel{y = \lambda_1 x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left\langle \left(1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \right\rangle = \{ (x, \lambda_1 x) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

Veamos que $\forall v \in V\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $h(v) \in V\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$:

Sea $(x, \lambda_1 x) \in V\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow h(v) = Av = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \lambda_1 x \end{pmatrix} \Rightarrow$

$h(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ x(1 - \lambda_1) \end{pmatrix}$ como $\lambda_1^2 + \lambda_1 = 1 \Rightarrow \lambda_1 \cdot (\lambda_1) = 1 - \lambda_1$

$$\Rightarrow y' = (x(1-\lambda_1)) = \lambda_1 \cdot (\lambda_1 x) = \lambda_1 x' \Rightarrow h(v) \in V\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow V\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ es un espacio invariante.

<u>Proposición</u>:

Si $h : V \longrightarrow V$ es un endomorfismo y W es h-invariante, entonces h induce un endomorfismo.

$$\begin{aligned} \bar{h} : V/W &\longrightarrow V/W \\ \bar{v} &\longrightarrow \overline{h(v)} \end{aligned} \qquad \left(\bar{h}(\bar{v}) = \overline{h(v)} \right)$$

Recordatorio año pasado:

Subespacio de un valor propio es h-invariante, pero que un subespacio sea h-invariante no implica necesariamente que sea de un valor propio, podría o no serlo.

Una matriz simétrica que tenga los coeficientes en $\mathbb{R}$, es diagonalizable, pero que sea diagonalizable no implica que sea simétrica con coeficientes en $\mathbb{R}$, podría o no serlo.

Sin embargo, una matriz es diagonalizable, si y solo si se cumplen estas dos condiciones: 1) los valores propios de dicha matriz pertenecen al mismo cuerpo $\mathbb{K}$ al que pertenecen los coeficientes de la matriz; 2) la multiplicidad de $(x - \lambda_i)$ coincide con la dimensión del subespacio propio para todo valor propio λ_i.

Observar: simétrica en $\mathbb{R} \Rightarrow$ diagonalizable $\Leftrightarrow$ 1) y 2). Por eso en el ejemplo anterior, al ser simétrica tenía que darse sí o sí 1) y 2), y vemos que es el caso. ¡Cuidado al resolver este tipo de sistemas! Es recomendable anticiparse al resultado del sistema con estos resultados teóricos y así resolviendo a base de buscar ecuaciones que son proporcionales o que son combinaciones lineales de otras etc. ver ejemplo pág. 85 y sino aplicar el método de eliminación de Gauss o cualquier otro.

(Volvemos a la proposición).

demos.:

Veamos que es una definición consistente: $\left(\overline{v_1}=\overline{v_2} \Rightarrow \overline{h}(\overline{v_1}) = \overline{h}(\overline{v_2})\right)$ $\left(\overline{h(v_1)} = \overline{h(v_2)}\right)$ $\overset{\text{def } \overline{h}}{\Leftrightarrow}$

Sup. $\overline{v_1} = \overline{v_2} \Rightarrow v_1 - v_2 \in W \Rightarrow h(v_1 - v_2) \in W$ por ser W h-invariante, y como h es un homomorfismo (es lineal) $\Rightarrow h(v_1) - h(v_2) \in W \Rightarrow \overline{h(v_1)} = \overline{h(v_2)}$, está bien definida.

Veamos que es un homomorfismo, es decir, que es lineal.

Veamos que $\overline{h}$ es lineal: Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $\overline{v_1}, \overline{v_2} \in V/W$.

$$\overline{h}(\lambda\overline{v_1} + \mu\overline{v_2}) = \overline{h}(\overline{\lambda v_1 + \mu v_2}) \overset{\text{def } \overline{h}}{=} \overline{h(\lambda v_1 + \mu v_2)} \overset{h \text{ lineal}}{=}$$

$$= \overline{\lambda h(v_1) + \mu h(v_2)} \overset{\text{clases}}{=} \lambda \overline{h(v_1)} + \mu \overline{h(v_2)} \overset{\text{def } \overline{h}}{=}$$

$$= \lambda \overline{h}(\overline{v_1}) + \mu \overline{h}(\overline{v_2}) \Rightarrow \overline{h} \text{ es lineal.} \quad \square$$

Observamos: dada $h: V \longrightarrow V$ y $W \leq V$. Si restringimos h a W; $h|_W : W \longrightarrow V$ y no nos garantiza que $h|_W$ sea lineal. Pero, si W es invariante $\Rightarrow \mathrm{Im}(f|_W) \subseteq W$. Podemos pensar que

$f|_W : W \longrightarrow W$

Con un subespacio invariante podemos tomar el endomorfismo inducido $\bar{h}$. También podríamos tomar la aplicación restringida. Cosas distintas, ambas herramientas útiles para demostraciones.

<u>Proposición:</u>

Sea V un $\mathbb{K}$-e.v. Sea $f \in End_{\mathbb{K}}(V)$ y W un subespacio f-invariante. Sea $\beta_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base de W. La completamos hasta una base $\beta_V = \{w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_n\}$ base de V. Probamos que $\beta_{V/W} = \{\overline{w_{m+1}}, \dots, \overline{w_n}\}$ es base de V/W. Entonces:

$$M_{\beta_V}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \quad \text{con:}$$

$$A = M_{\beta_W}(f|_W) \quad \text{y} \quad C = M_{\beta_{V/W}}(\bar{f})$$

<u>demos.:</u>

Denotamos $M_{\beta_V}(f) = (m_{i,j})_{i,j}$.

Sea $j \in \{1, \dots, m\}$. Entonces: $f(w_j) \overset{\text{def matriz asociada}}{=} \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \cdot w_i \in W$ $\quad (1)$ $\left(\forall j \in \{1, \dots, m\},\ w_j \in \beta_W \Rightarrow \dots \right)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \cdot w_j = \sum_{i=1}^{m} m_{i,j} \cdot w_j$ (pues $\{w_1, \dots, \underline{\underline{w_m}}\}$ es base de W).

(Calculamos $(m_{i,j})_{i,j}$ con los vectores básicos, por def se da (1)).

Por tanto, los primeros m columnas de $M_{\beta_V}(f)$ forman una (de bloques) matriz $\left(\frac{A}{0}\right)$, donde $A = M_{\beta_W}(f|_W)$. (0 = bloque de 0s).

Ahora tomamos $j \in \{m+1, \dots, n\}$. Entonces:

$$f(w_j) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{def matriz} \\ \text{asociada}}}{=} \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \cdot w_i$$

. Tomamos coclases:

$$\overline{f(w_j)} = \overline{\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \cdot w_i} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \cdot \overline{w_i} \rightarrow$$

Como $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ $\overline{w_i} = 0$. Entonces nos quedamos $i \in \{m+1, \dots, n\}$

Pues formaban β_W.

$$\rightarrow = \sum_{i=m+1}^{n} m_{i,j} \cdot \overline{w_i} \text{ y por def. } = \overline{f}(\overline{w_j}) \text{ y}$$

así hemos demostrado que para los $n-m$ últimos columnas, forman una matriz $\left(\frac{B}{C}\right)$, B desconocido y $C = M_{\beta_{V/W}}(\overline{f})$.

(dos bloques porque C es para las filas $i \geq m+1$).

Por tanto, respecto a este tipo de bases de V, es

$$M_{\beta_V}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ 0 & C \end{array}\right) \quad \begin{cases} 0 = \text{bloque de } 0\text{s} \\ A = M_{\beta_V}(f|_W) \\ B \longrightarrow \text{desconocido} \\ C = M_{\beta_{V/W}}(\overline{f}) \end{cases} \quad \square$$

1.2 1er Teorema de Isomorfía de $\mathbb{K}$-e.V.

Teorema (Fundamental de Isomorfía entre $\mathbb{K}$-e.v.):

Si $f: V \longrightarrow W$ es un homomorfismo entre $\mathbb{K}$-e.v., entonces se da el siguiente isomorfismo entre $\mathbb{K}$-e.V.:

$$V/_{\ker(f)} \simeq Im(f) \qquad (Im(f) \subseteq W)$$

dem.:

Definimos:
$$f^*: V/_{\ker(f)} \longrightarrow Im(f)$$
$$\bar{v} \longrightarrow f(v)$$

Veamos que está bien definida. Sea $\bar{v_1} = \bar{v_2} \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \in \ker(f)$

A su vez: $f(v_1 - v_2) = 0 \overset{f \text{ lineal}}{\Longrightarrow} f(v_1) - f(v_2) = 0 \Rightarrow$

$f(v_1) = f(v_2)$ <u>Vale</u>

Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $v_1, v_2 \in V$. Entonces:

$$f^*(\lambda\bar{v_1} + \mu\bar{v_2}) = f^*(\overline{\lambda v_1 + \mu v_2}) \overset{\text{def } f^*}{=} f(\lambda v_1 + \mu v_2) \overset{f \text{ hom.}}{=}$$

$$\lambda f(v_1) + \mu f(v_2) \underset{\text{def } f^*}{=} \lambda f^*(\bar{v_1}) + \mu f^*(\bar{v_2}).$$ <u>Vale</u>

Para ver que es inyectiva, vamos a probar que $\ker(f^*) = \{\bar{0}\}$