Ejercicios T2

1

Identificar los coeficientes de x^n, x^{n-1} y x^0 del polinomio característico. Probar que si A y B son matrices equivalentes $(A = P^{-1}BP)$ entonces $\det(A) = \det(B)$ y $tr(A) = tr(B)$ (traza (A) = suma elementos diagonal matriz A).

Observamos:

$p_A(0) = \det(A - 0I) = \det(A) \Rightarrow$ Si $p_A(x) =$

$c_1 x^n + c_2 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x^1 + c_n$, $p_A(0) = c_n = \det(A)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{El término independiente es } \det(A)}$

De la definición de determinante $\left(d = \sum_{\alpha \in \Sigma} a_{1\alpha(1)} a_{2\alpha(2)} \cdots a_{n\alpha(n)} \right)$ (α permutación de $\underbrace{n \text{ elementos}}$). $n!$ términos (α permutación).

(todas las posibles combinaciones eligiendo un término de cada fila de manera que no se repitan columnas).

Es:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = (a_{11}-x)(a_{22}-x)\cdots(a_{nn}-x) + S$$

En S hay como máximo $n-2$ elementos de la diagonal (no puede tener $n-1$ porque necesariamente de la definición de determinante habría que coger el último elemento restante de la diagonal, y llegar así a n.

Por tanto, $S = q(x)$ de máximo grado $n-2$, y para los coeficientes de n y $n-1$ los hallamos del otro producto, obteniendo:

$$\boxed{\begin{aligned} x^n &\longrightarrow (-1)^n \\ x^{n-1} &\longrightarrow (-1)^{n-1} \cdot (\underbrace{a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}}_{tr(A)}) \end{aligned}}$$

Así es:

$$\boxed{P_A(x) = (-1)^n \cdot x^n + (-1)^{n-1} tr(A) \cdot x^{n-1} + \dots + det(A)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Si } n = 2 \\ &P_A(x) = x^2 - tr(A) x^1 + det(A) \end{aligned}}$$

Además, si B y A son matrices equivalentes, hemos visto en teoría que $P_A(x) = P_B(x) \Rightarrow$ los coeficientes de x^i han de ser iguales $\forall i \in \{0, \dots, n\} \Rightarrow$

$$a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x^1 + a_n = P_A(x)$$
$$b_1 x^n + b_2 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x^1 + b_n = P_B(x)$$

(Equivalentes: $A = P^{-1} B P$)

$\Rightarrow a_i = b_i \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$. En particular:

$$a_1 = b_1 \Rightarrow (-1)^n = (-1)^n$$
$$a_2 = b_2 \Rightarrow \cancel{(-1)^{n-1}} \cdot tr(A) = \cancel{(-1)^{n-1}} tr(B) \Rightarrow \boxed{tr(A) = tr(B)}$$

matrices equivalentes A y B

$$\vdots$$

$$a_n = b_n \Rightarrow \boxed{det(A) = det(B)}$$

(otra demos para igualdad de determinantes matrices equivalentes).

$\boxed{2}$

Calcular la forma canónica de Jordan de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Calculamos el $p_A(x)$.

$$p_A(x) = \det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2-x & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2' = F_2 - \frac{1}{2-x}F_1}$$

$$\begin{vmatrix} 2-x & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2-x & \frac{-3}{2-x} & 3 \\ 0 & 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2-x & 0 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)^4$$

2) Calculamos $\dim(V(2)) = \dim(\ker(f - 2Id))$. ¿Es diagonalizable?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3z = 0 \\ x + 3t = 0 \\ 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3t \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \ker(f - 2Id) = \langle (-3,0,0,1), (0,1,0,0) \rangle$

$\dim(\ker(f - 2Id)) = 2 \neq 4 \Rightarrow$ No es diagonalizable.

Como no es diagonalizable pero los valores propios están en $\mathbb{K}$, buscamos la matriz en la forma canónica de Jordan.

3) Calculamos el pol. min. $(h|V(2))$. Como es un factor lineal, Vamos a ir calculando $(\ker(f-2Id))^n \rightsquigarrow (x-2)^n \quad \forall n \geq 2$ $(n=1)$ ya está hecho. Hasta que para cierto n se anule y entonces lo obtengamos. (Si $(f-2Id)^n = 0$, $p(x) = (x-2)^n$ es anulador de f. Si es el mínimo n, es pol. min (f)).

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{f-2Id}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(f-2Id) \neq 0_{n\times n}$, seguimos calculando:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{(f-2Id)^2}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{(f-2Id)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{(f-2Id)^3}$$

$(f-2Id)^3 = 0_{n\times n}$ y como 3 es el menor m que lo cumple y los divisores de $p(x)$ son del tipo $(x-2)^k$

$\Longrightarrow (x-2)^3 = $ pol. min. $(f|V(2))$.

(Observar: $\dim(\ker(f-2Id)^3) = 4 \rightarrow f-2Id$ es nilpotente de orden 3.)

4) Hemos descompuesto: (Buscar la

$\mathbb{R}^4 = \ker((f-2Id)^3)$

Buscamos un vector de orden cíclico 3 para que:

$$\mathbb{R}^4 = \underbrace{\mathbb{k}[h-b_i](v_1)}_{\langle v_1,\ (h-b_i)(v_1),\ (h-b_i)^2(v_1)\rangle} \oplus \underbrace{\mathbb{k}[h-b_i](v_2)}_{\langle v_2 \rangle}$$

($\Rightarrow$ Dos bloques de Jordan para el valor 2)

Es decir: $v_1 \in \ker((f-2Id)^3) - \ker((f-2Id)^2)$ y
$v_2 \in \ker(f-2Id)$

(Observar: $v_1 \in \ker(f-2Id)^3 - \ker(f-2Id)^2 \Rightarrow v_1 \notin \ker(f-2Id)$, que si lo hiciera, $(f-2Id)(v_1) = \bar{0} \Rightarrow (f-2Id)^2(v_1) = \bar{0}$ que es falso por hipótesis, es decir, que con esas condiciones y con los teoremas que conocemos, $\{v_1, h(v_1), h^2(v_1), v_2\}$ es $\mathbb{k}$-libre $\Rightarrow$ (maximal) base de $\mathbb{R}^4$). (hay que asegurar v_2 no es $\mathbb{k}$-c.l.

$$\ker((f-2Id)^2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 0$$

$\Rightarrow \ker((f-2Id)^2) = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1) \rangle$

Sea $v_1 \in \underbrace{\ker((f-2Id)^3)}_{\mathbb{R}^4} - \ker((f-2Id)^2)$, $v_1 = (0,0,1,0)$

$$\Rightarrow (h-b_i)(v_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(h-b_i)^2(v_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\ker(f-2Id)$ ya está calculado, tomamos $v_2 = \cancel{(0,1,0,0)} = \frac{1}{6} h^2(v_1)$

$\longrightarrow v_2 = (-3,0,0,1)$

Así, respecto de la base

$$\mathcal{B} = \{ \underset{v_1}{(0,0,1,0)}, \underset{(h-2)(v_1)}{(3,0,0,1)}, \underset{(h-2)^2(v_1)}{(0,6,0,0)}, \underset{v_2}{(-3,0,0,1)} \}$$

$$\downarrow$$

$$(3,0,0,-1)$$

es:

$$M_{\mathcal{B}}(h) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & \\ 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & \\ \hline & & & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

5) Comprobación. Buscar P t.q. $A = P J P^{-1}$ o $J = P^{-1} A P$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1 / v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}c}$$

$$\Rightarrow \underbrace{J}_{\substack{\text{opera en} \\ \mathcal{B}}} = \underbrace{P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}c}}_{\substack{\text{pasa} \\ \mathcal{B} \text{ a } \mathcal{B}c}} \cdot \underbrace{A}_{\substack{\text{opera en} \\ \mathcal{B}c}} \cdot \underbrace{P^{-1}_{\mathcal{B}c \to \mathcal{B}}}_{\substack{\text{vuelve a} \\ \mathcal{B}}}$$

. Calculamos la inversa:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4 \leftrightarrow F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4' = F_4 - 3F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&-1&0&0&0&1\\ 0&0&6&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&6&1&0&0&-3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4' = \frac{1}{6}F_4]{F_3' = \frac{1}{6}F_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&-1&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&\frac{1}{6}&0&0\\ 0&0&0&1&\frac{1}{6}&0&0&-\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{F_2' = F_2+F_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&\frac{1}{6}&0&0&\frac{1}{2}\\ 0&0&1&0&0&\frac{1}{6}&0&0\\ 0&0&0&1&\frac{1}{6}&0&0&-\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$P^{-1}$$

Comprobamos:

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 0&3&0&3\\ 0&0&6&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ \frac{1}{6}&0&0&\frac{1}{2}\\ 0&\frac{1}{6}&0&0\\ \frac{1}{6}&0&0&-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = I_n$$

$$P^{-1}P = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ \frac{1}{6}&0&0&\frac{1}{2}\\ 0&\frac{1}{6}&0&0\\ \frac{1}{6}&0&0&-\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&3&0&3\\ 0&0&6&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = I_n$$

Así:

$$\boxed{P^{-1}AP} = \left(\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ \frac{1}{6}&0&0&\frac{1}{2}\\ 0&\frac{1}{6}&0&0\\ \frac{1}{6}&0&0&-\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2&0&3&0\\ 1&2&0&3\\ 0&0&2&0\\ 0&0&1&2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0&3&0&3\\ 0&0&6&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0&0&2&0\\ \frac{1}{3}&0&1&1\\ \frac{1}{6}&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}&0&0&-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&3&0&3\\ 0&0&6&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2&0&0&0\\ 1&2&0&0\\ 0&1&2&0\\ 0&0&0&2 \end{pmatrix} = \boxed{J}$$