Seminario T6

Josu Pérez Zarraonandia

Simplificar la siguiente cuádrica:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2xz + 2yz + z^2 + \sqrt{6}\,x = 0$$

1) Espacio afín no euclídeo:

Nuestra cuádrica es:

$$f((x,y,z)) = Q((x,y,z)) + L((x,y,z)) = 0$$

Vamos a simplificar la parte cuadrática. Definimos una forma bilineal g tal que:

$$g((x,y,z),(x,y,z)) = Q((x,y,z)) \Rightarrow M_{\beta c}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como es simétrica con coeficientes en $\mathbb{R}$, es diagonalizable.

La diagonalizamos por el método de Gauss:

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_n}\right) \xrightarrow{F_2' = F_2 + F_1} \left(\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \xrightarrow{C_2' = C_2 + C_1}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \xrightarrow{F_3' = F_3 + F_1} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \xrightarrow{C_3' = C_3 + C_1}$$

(siguiente cara)

$$\xrightarrow{C_3' = C_3 + C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ de manera que:

$$\underbrace{}_{D} \quad \underbrace{}_{P}$$

$$D = {}^tPAP \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta manera, hemos simplificado la ecuación, que ahora es:

$Q((x', y', z')) = (x')^2$ con:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + y' + z' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Así:

$$f((x', y', z')) = (x')^2 + \sqrt{6}(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x')^2 + \sqrt{6}(x') + \sqrt{6}(y') + \sqrt{6}(z') = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x' + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \sqrt{6}(y') + \sqrt{6}(z') - \frac{\cancelto{3}{6}}{\cancelto{2}{4}} = 0$$

Tomamos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{6}}{2} + x'' \\ y' = y'' \\ z' = z'' \end{cases}$$

De manera que:

$$f((x'', y'', z'')) = (x'')^2 + \underbrace{\sqrt{6}(y'') + \sqrt{6}(z'')}_{L((x'', y'', z''))} - \frac{3}{2} = 0$$

Simplificamos la parte lineal con este cambio:

$$\begin{cases} x''' = x'' \\ y''' = \sqrt{6}\,(y'') + \sqrt{6}\,(z'') \\ z''' = z'' \end{cases} \iff \begin{cases} x'' = x''' \\ y'' = \frac{y'''}{\sqrt{6}} - z''' \\ z'' = z''' \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}$$

Así:

$$f((x''', y''', z''')) = (x''')^2 + y''' - \frac{3}{2} = 0$$

Tomamos el último cambio:

$$\begin{cases} x''' = x^{IV} \\ y''' = \frac{3}{2} - y^{IV} \\ z''' = z^{IV} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{IV} \\ y^{IV} \\ z^{IV} \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$f((x^{IV}, y^{IV}, z^{IV})) = (x^{IV})^2 - (y^{IV}) = 0 \Rightarrow \boxed{(x^{IV})^2 = (y^{IV})}$$

Es un $\boxed{\text{cilindro parabólico}}$.

Veamos cuál es el nuevo sistema de referencia, sabiendo que para el cambio de coordenadas es:

$$M_{\beta_c}(x) = M_{\beta_c}(O\tilde{R}) + P_{\tilde{\beta}}{}^{\beta_c} \cdot M_{\tilde{\beta}}(x)$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{IV} \\ y^{IV} \\ z^{IV} \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{6}} \\ \frac{3}{2\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{IV} \\ y^{IV} \\ z^{IV} \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{= \begin{pmatrix} \frac{-3}{2\sqrt{6}} \\ \frac{3}{2\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{IV} \\ y^{IV} \\ z^{IV} \end{pmatrix}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \frac{-3}{2\sqrt{6}} + x^{IV} - \frac{y^{IV}}{\sqrt{6}} + 0 \\ y = \frac{3}{2\sqrt{6}} + 0 - \frac{y^{IV}}{\sqrt{6}} - z^{IV} \\ z = 0 + 0 + 0 + z^{IV} \end{cases}}$$

Y el nuevo sistema es:

$$\boxed{\tilde{R} = \left(\left(\frac{-3}{2\sqrt{6}}, \frac{3}{2\sqrt{6}}, 0 \right), \left\{ (1,0,0), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0 \right), (0,-1,1) \right\} \right.}$$

Procedemos ahora a hacerlo en el espacio afín euclídeo.

2) Espacio afín euclídeo:

Nuestra cuádrica es:

$$f((x,y,z)) = Q((x,y,z)) + L((x,y,z)) = 0$$

Procedemos a simplificar la parte cuadrática. Para ello definimos una forma bilineal g tal que:

$$g((x,y,z),(x,y,z)) = Q((x,y,z)) \Rightarrow M_{\beta c}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definimos un endomorfismo h tal que $M_{\beta c}(h) = M_{\beta c}(g)$.

Como $M_{\beta c}(h)$ es simétrica, h es autoadjunto. Como $M_{\beta c}(h)$ es simétrica respecto a una base ortonormal para el producto escalar estándar, entonces sabemos que existe una base formada por vectores propios ortonormal para el producto escalar estándar que diagonaliza la matriz (la diagonal son los valores propios). La buscamos.

Primero calculamos los valores propios:

$$P_h(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & -1 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)((x-1)^2-1) - 1\cdot(x-\cancel{1}+\cancel{1}) +$$

$$+ 1\cdot(-\cancel{1}-x+1) \Rightarrow (x-1)(x^2-2x+\cancel{1}-\cancel{1}) - x - x =$$

$$= x(x^2-2x) - x^2 + \cancel{2x} - \cancel{2x} = x(x^2-2x-x) =$$

$$= x^2(x-3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ y } \lambda_2 = 3$$

Calculamos los subespacios fundamentales y tomamos vectores ortogonales de ellos:

$V(3) = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = 3v\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 3x \\ -x + y + z = 3y \\ -x + y + z = 3z \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x - y - z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases} \xrightarrow[E_3' = E_3 + E_2]{} \begin{cases} -2x - y - z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \\ \cancel{-2x - y - z = 0} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ z = x + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ z = x + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = y \end{cases}$

$\Rightarrow V(3) = \{(-\lambda, \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -1, -1) \rangle$

Tomamos $v_1 = (1, -1, -1)$ $\quad (\dim(V(3)) = 1)$

$V(0) = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = \bar{0}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ \cancel{-x + y + z = 0} \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x = y + z \\ \cancel{x = y + z} \end{cases} \Rightarrow V(0) = \{(\lambda + \mu, \lambda, \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} =$

$= \langle (1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$

Tomamos $v_2 = (1, 1, 0)$ $\quad (v_2 \in V(0)$ y $v_1 \in V(3) \Rightarrow v_2 \perp v_1)$

Tomamos $V_3 \in V(0) \cap \langle V_2 \rangle^{\perp}$ con $\langle V_2 \rangle^{\perp} = \{ v \in \mathbb{R}^3 : V_2 \cdot V = 0 \}$

$\Rightarrow (1,1,0) \cdot (x,y,z) = 0 \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow x=-y$

$$\begin{cases} 1) & x = -y \\ 2) & x = y+z \end{cases} \Rightarrow 2y+z=0 \Rightarrow z=-2y$$

$\Rightarrow V_3 \in \{(-\lambda, \lambda, -2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-1,2) \rangle$

Tomamos $V_3 = (1,-1,2)$

Por construcción: $V_1 \cdot V_2 = V_1 \cdot V_3 = V_2 \cdot V_3 = 0$.

Normalizamos para que $V_1 \cdot V_1 = V_2 \cdot V_2 = V_3 \cdot V_3 = 1$

$W_1 = V_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$; $W_2 = V_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$; $W_3 = V_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$

Así, la base $\{w_1, w_2, w_3\}$ es ortonormal, de manera que:

$D = {}^tPAP = P^{-1}AP$ con $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Así, tomando:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z' \\ y = -1/\sqrt{3}\,x' + 1/\sqrt{2}\,y' - 1/\sqrt{6}\,z' \\ z = -1/\sqrt{3}\,x' + 0 + 2/\sqrt{6}\,z' \end{cases}$$

La parte cuadrática es:

$$Q((x', y', z')) = 3(x')^2$$

y

$$f((x', y', z')) = 3(x')^2 + \sqrt{6}(x) =$$

$$= 3(x')^2 + \sqrt{2}(x') + \sqrt{3}(y') + (z') = 0$$

$$\Rightarrow 3\left((x')^2 + \frac{\sqrt{2}}{3}(x')\right) + \sqrt{3}(y') + (z') = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\left((x') + \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2 + \sqrt{3}(y') + (z') - \frac{1}{6} = 0$$

Tomamos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f((x', y', z')) = 3(x'')^2 + \underbrace{\sqrt{3}(y'') + (z'')}_{L((x'', y'', z''))} - \frac{1}{6} = 0$$

Ahora queremos simplificar la parte lineal con una P ortogonal tal que $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}$. Usaremos que P ortogonal es $P^{-1} = {}^tP$ y si w_i es la i-ésima columna de P, entonces $\{w_i\}_{i\in\{1,2,3\}}$ forma una base ortonormal para el producto escalar estándar: (siguiente cara).

$$\begin{cases} x''' = x'' \\ y''' = \alpha(\sqrt{3}\,y'' + z'') \\ z''' = a x'' + b y'' + c z'' \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \underbrace{P^{-1}}_{\overset{\shortparallel}{tP}} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

con $tP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\sqrt{3} & \alpha \\ a & b & c \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \alpha\sqrt{3} & b \\ 0 & \alpha & c \end{pmatrix}$

$w_1 \cdot w_1 = 1$, se cumple

$w_1 \cdot w_2 = 0$, se cumple

$w_1 \cdot w_3 = 0 \Rightarrow a = 0$

$w_2 \cdot w_2 = 1 \Rightarrow 3\alpha^2 + \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm\frac{1}{2} \to \alpha = \frac{1}{2}$

$w_2 \cdot w_3 = 0 \Rightarrow \alpha(\sqrt{3}b + c) = 0 \Rightarrow c = -\sqrt{3}\,b$

$w_3 \cdot w_3 = 1 \Rightarrow b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow b^2 + 3b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm\frac{1}{2}$

tomamos $b = \frac{1}{2} \Rightarrow c = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Así obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

La ecuación que nos resulta es:

$$f((x''', y''', z''')) = 3(x''')^2 + \cancel{\tfrac{1}{\alpha}}\,2\,(y''') - \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}(x''')^2 + (y''') - \frac{1}{12} = 0$$

El último cambio a tomar (siguiente cara)

$$\begin{cases} x''' = x^{IV} \\ y''' = \frac{1}{12} - y^{IV} \\ z''' = z^{IV} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/12 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{ortogonal}} \begin{pmatrix} x^{IV} \\ y^{IV} \\ z^{IV} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f((x^{IV}, y^{IV}, z^{IV})) = \frac{3}{2}(x^{IV})^2 - (y^{IV}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{3}{2}(x^{IV})^2 = 2\,(y^{IV})}$$

Es un cilindro parabólico.

Calculamos el nuevo sistema de referencia:

$$\left(M_{\beta c}(x) = M_{\beta c}(O_R) + P_{\tilde{\beta} \to \beta c} \cdot M_{\tilde{\beta}}(x) \right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt3 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt6 \\ -1/\sqrt3 & 1/\sqrt2 & -1/\sqrt6 \\ -1/\sqrt3 & 0 & 3/\sqrt6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt3 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt6 \\ -1/\sqrt3 & 1/\sqrt2 & -1/\sqrt6 \\ -1/\sqrt3 & 0 & 2/\sqrt6 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -1/3\sqrt2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-1}{3\sqrt6} \\ \frac{1}{3\sqrt6} \\ \frac{1}{3\sqrt6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt3 & 1/\sqrt6 & 1/\sqrt6 \\ -1/\sqrt3 & 1/\sqrt2 & -1/\sqrt6 \\ -1/\sqrt3 & 0 & 2/\sqrt6 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt3/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-1}{3\sqrt6} \\ 1/3\sqrt6 \\ 1/3\sqrt6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt3 & \sqrt6/3 & \frac{1-\sqrt3}{2\sqrt6} \\ -1/\sqrt3 & \sqrt6/6 & \sqrt2/2 \\ -1/\sqrt3 & 1/2 & -\sqrt3/2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1/12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{IV} \\ y^{IV} \\ z^{IV} \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-1}{3\sqrt6} \\ \frac{1}{3\sqrt6} \\ 1/3\sqrt6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt6/36 \\ \sqrt6/72 \\ 1/24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt3 & -\sqrt6/3 & \frac{1-\sqrt3}{2\sqrt6} \\ -1/\sqrt3 & -\sqrt6/6 & \sqrt2/2 \\ -1/\sqrt3 & -1/2 & -\sqrt3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{IV} \\ y^{IV} \\ z^{IV} \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} -\sqrt6/36 \\ 5\sqrt6/72 \\ \frac{3+4\sqrt6}{72} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt3 & -\sqrt6/3 & \frac{1-\sqrt3}{2\sqrt6} \\ -1/\sqrt3 & -\sqrt6/6 & \sqrt2/2 \\ -1/\sqrt3 & -1/2 & -\sqrt3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{IV} \\ y^{IV} \\ z^{IV} \end{pmatrix}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{R} = \left(\left(\frac{-\sqrt6}{36}, \frac{5\sqrt6}{72}, \frac{3+4\sqrt6}{72} \right), \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt3}, \frac{-1}{\sqrt3}, \frac{-1}{\sqrt3} \right), \left(\frac{-\sqrt6}{3}, \frac{-\sqrt6}{6}, \frac{-1}{2} \right), \left(\frac{1-\sqrt3}{2\sqrt6}, \frac{\sqrt2}{2}, \frac{-\sqrt3}{2} \right) \right\} \right)}$$