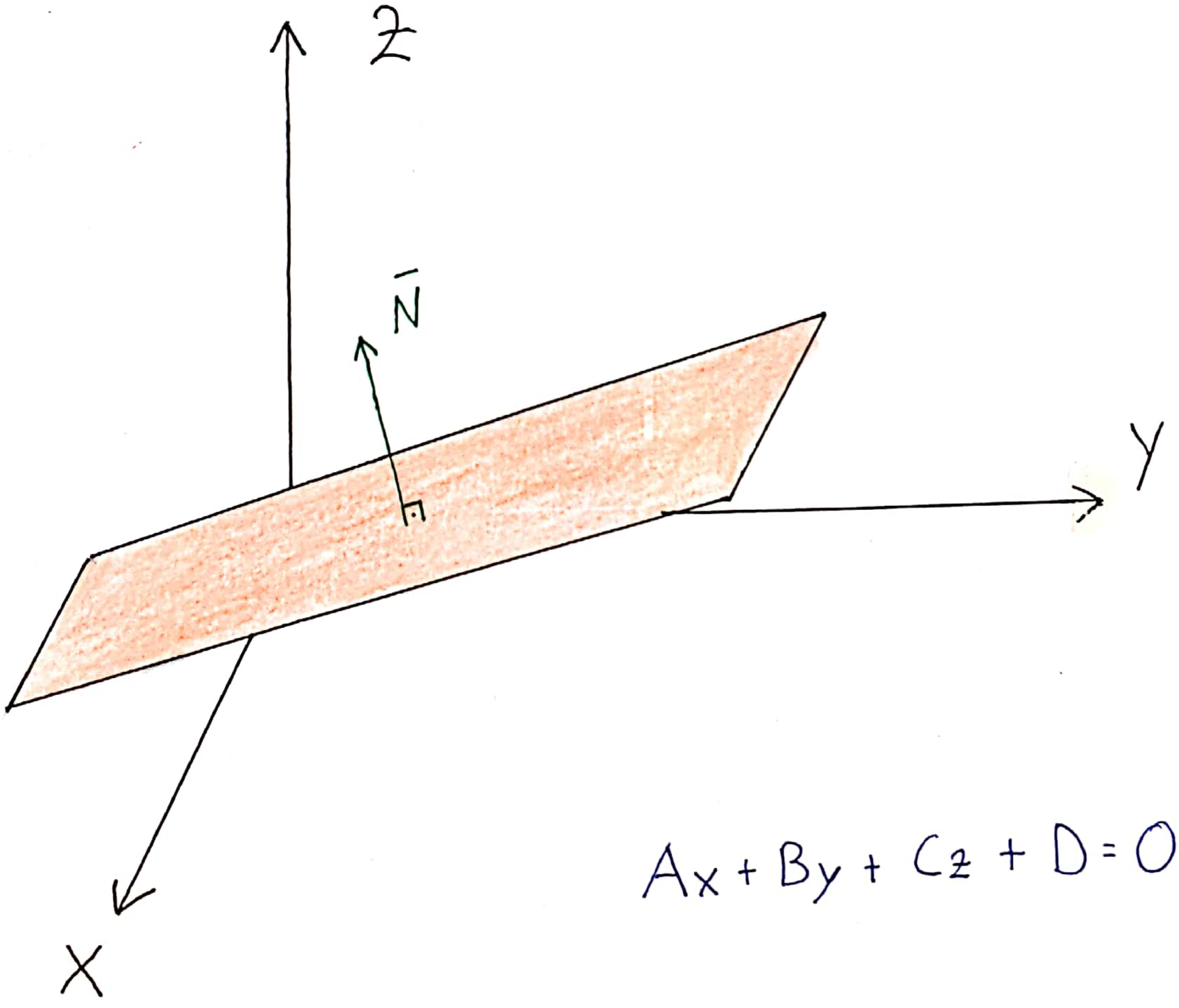
ÁLGEBRA



$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Josu P.Z.

Tema 6

Cuádricas y cónicas

6.1 Introducción

Una cónica es una curva en el plano descrita por polinomios de segundo grado en dos variables.

Una cuádrica es el análogo a una cónica para $\mathbb{R}^3$, (tres variables y segundo grado)(con posible término independiente).

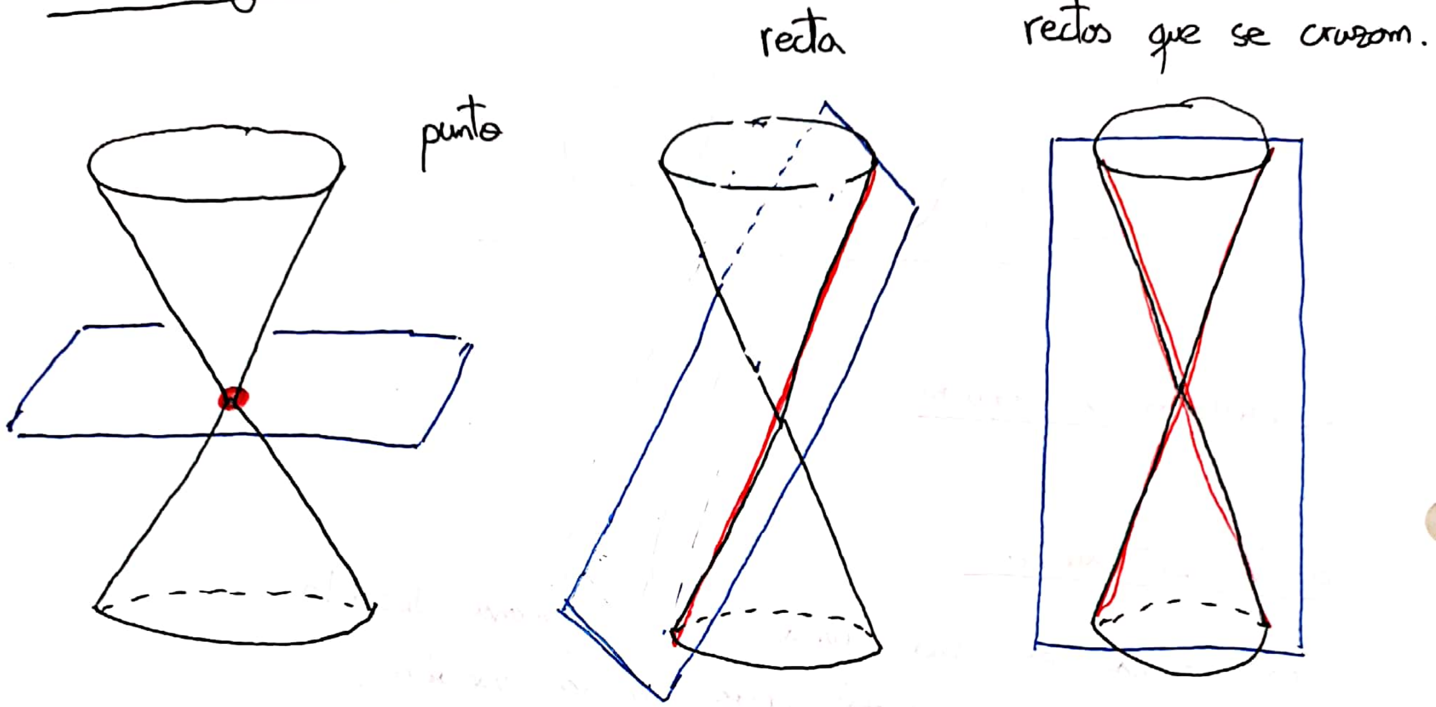
Si tomamos $\mathbb{R}^n$, se llaman hipercuádricas, con n variables y grado 2 (el polinomio).

¿Por qué se llaman cónicas? Porque se obtienen a partir de la intersección entre un cono y un plano.

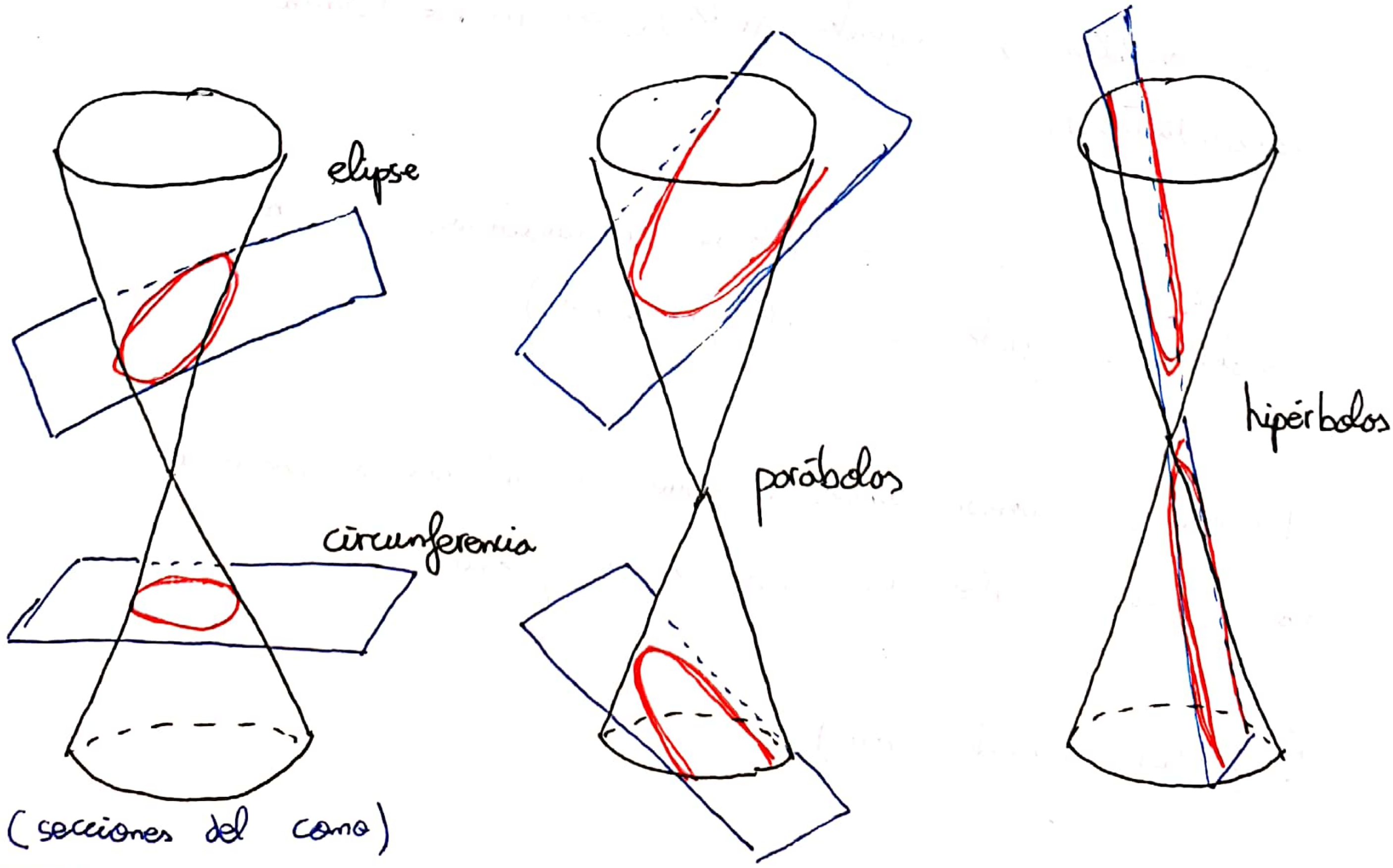
(Ejemplos siguiente cara).

Ejemplos:

Cónicas degeneradas:



Cónicas no degeneradas:



(secciones del cono)

(Imaginarse la sección del cono que queda impresa en el plano que la corta, e imaginarse el cono hueco. Las figuras son hueco si no se especifica lo contrario).

Ejemplo:

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}_c : ((0,0), \{\bar{e_1}, \bar{e_2}\})$ ¿Qué cónica es?

$C : \{(x,y) \mid x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0\}$

$x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow$

Es una circunferencia centrada en $(1,0)$ con radio $r = \sqrt{2}$.

Cambio de coordenadas. (Traslación al centro del círculo)

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y \end{cases} \longrightarrow C : \{(x', y') \mid (x')^2 + (y')^2 = 2\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{el origen visto desde el centro del círculo, traslación}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{no hemos dilatado!}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

homotecia. (isometría)

(Nota: han de ser isometrías porque estas respetan el prod. escalar y por tanto la estructura de e. afín. euclídeo (norma, distancia, etc.).)

Sistema de referencia desde el centro del círculo (buscamos descripción más simple de este).

$R' = ((-1,0), \{(1,0), (0,1)\})$

Ejemplo de un cambio NO válido: (no es isometría).

$$\begin{cases} x' = x+y+1 \\ y' = x-y+1 \end{cases} \rightarrow C = \{(x,y) \mid x^2+y^2+2x-1=0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \{(x',y') \mid (x')^2+(y')^2 = 4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'+y'-2}{2} \\ y = \dfrac{x'-y'}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Nuevo sistema de referencia:

$$R'' = ((-1,0), \{(1/2, 1/2), (1/2, -1/2)\})$$

Sin embargo, $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ no es ortonormal, es afín, pero no afín euclídeo como nos interesa a nosotros.

(Queremos subespacio afín euclídeo del e.a.e. $\mathbb{R}^2$).

¿Qué cambios son "deseables" para el espacio afín euclídeo? (isometrías)

$R_1 = (O_1, \underbrace{\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}}_{\text{ortonormal}})$ y $R_2 = (O_2, \underbrace{\{\vec{w_1}, \dots, \vec{w_n}\}}_{\text{ortonormal}})$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + P_{\beta_2}^{\beta_1} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}_{R_2} \rightarrow \beta_1 \text{ y } \beta_2 \text{ ortonormales} \Rightarrow P_{\beta_2}^{\beta_1} \text{ ortonormal}$$

$\Rightarrow (P^{-1} = {}^tP)$ (Nota: P ortogonal $\Leftrightarrow$ sus columnas forman base ortogonal para el prod. escalar estándar.)

(isometría $\Leftrightarrow$ P ortogonal $\Leftrightarrow$ Respeta esp. af. euc. (norma, dist)).

Scanned by CamScanner

6.2 Ecuación reducida

Definición:

En el espacio afín de $\mathbb{R}^n$, llamaremos cuádrica al conjunto de puntos definido por una ecuación de segundo grado (que en $\mathbb{R}^2$ son cónicos y son curvas, en $\mathbb{R}^3$ superficies).

La ecuación genérica de una cuádrica es:

$$\boxed{a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{1n}x_1x_n + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n +} \rightarrow \text{parte no lineal (cuádrática) } (Q(x_1,\dots,x_n))$$

$$\boxed{+ b_1x_1 + \dots + b_nx_n +} \rightarrow \text{parte lineal}$$

$$\boxed{+ C} \longrightarrow \text{término independiente}$$

$$= 0$$

Ejemplos: $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2 \rightarrow$ (va a ser matriz simétrica)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + \overbrace{a_{12}xy + a_{21}xy}^{2a_{12}xy} + b_1x + b_2y + C = 0$$

$\mathbb{R}^3 \rightarrow$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$
$$+ b_1x + b_2y + b_3z + C = 0$$

Ejemplo:

$x^2 + y^2 + xy + xz = 0 \quad \rightarrow \quad Q(x,y,z) = 0$

$a_{11} = 1 \qquad a_{12} = 1/2 \qquad b_1 = 0 \qquad c = 0$

$a_{22} = 1 \qquad a_{13} = 1/2 \qquad b_2 = 0$

$a_{33} = 0 \qquad a_{23} = 0 \qquad b_3 = 0$

Método para obtener la ecuación reducida:

Primero vamos a modificar la ec. cuádrica para obtener una del tipo: (a modificar la parte no lineal).

$$Q(x_1', \dots, x_n') = \lambda_1 (x_1')^2 + \dots + \lambda_n (x_n')^2 = 0$$

Después vamos a simplificar la parte lineal hasta que desaparezca o quede una única variable.

Para estos cambios, si queremos respetar el contexto de afín euclídeo, necesitamos sistemas de referencia ortonormales. (P ortogonal para los isometrías). (P ortogonal en la ec. de cambio de sistema de referencia).

Proceso:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{de manera que:}$$

$$Q(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Nota: A es simétrica y $\forall i,j \quad a_{ij} = a_{ji}$

Definimos la forma bilineal f con forma cuadrática asociada $q(x_1, \dots, x_n)$ a través de A. (f simétrica).

A simétrica $\Rightarrow \exists D \mid D = P^t A P, \quad P \in GL$

Supongamos que $D = \begin{pmatrix} a_{11}' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}' \end{pmatrix}$, entonces:

$$Q(x_1', \dots, x_n') = (x_1', \dots, x_n') D \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = a_{11}'(x_1')^2 + \dots + a_{nn}'(x_n')^2$$

tal y como queríamos.

(Diagonalizando A conseguimos que en la forma cuadrática no haya productos de variables distintos).

Ejemplo:

$\mathbb{R}^3$ y $Q(x,y,z) = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz$

Definimos $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = M_{\beta c}(f)$ con f la forma bilineal simétrica: $\longrightarrow f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow$

$f((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = (x_1, y_1, z_1) A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \longrightarrow$

En nuestro caso:

$q((x_1, y_1, z_1)) = f((x_1, y_1, z_1), (x_1, y_1, z_1)) = (x_1, y_1, z_1) A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

Diagonalizamos $A \longrightarrow$ ~~(Gauss-Jordan?)~~ (método de transf. elementales

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \Bigg| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I}$$

$C_2 = C_2 - C_1$ (en A e I)

$F_2 = F_2 - F_1$ (en A)

$$\longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{D} \Bigg| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{P} \Rightarrow$$

(tampoco nos garantiza nada sobre la base)

(P no es ortogonal ni nada, con este método general conseguimos $D = P^{-1}AP$ y nada más)

$$\Rightarrow D = M_{\beta'}(f) \Rightarrow \beta' = \{(1,0,0), (-1,1,0), (1,1,3)\}$$

$$\Rightarrow Q(x', y', z') = 2(x')^2 + 3(y')^2 + 5(z')^2$$

(respeta que es espacio afín, pero no euclídeo)

Seguimos con el proceso de reducir la ecuación de las cuádricas.

Recordad: $A \in M_n(\mathbb{R})$ matriz simétrica $\Rightarrow$ podemos encontrar una matriz diagonal semejante $(D = P^{-1}AP)$, y además de manera que la matriz de paso sea P ortogonal. Esto es:

$$\exists P \text{ ortogonal} \mid D = P^{-1}AP = P^tAP$$

(P es semejante y congruente).

Como D es congruente con A, D también está asociada a la forma bilineal f. Luego:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Con $(\lambda_i)_{i\in I}$ la familia de los vectores propios. Ese D tendrá asociada una forma cuadrática:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

(λ_i el i-ésimo vector propio).

(*) Son condiciones importantes ambas.

<u>Ejemplo:</u> $(\mathbb{R}^3, \cdot_{st})$

Sea $A = M_{\beta_c}(f') = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $f': \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Consideramos el endomorfismo autoadjunto $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $M_{\beta_c}(f) = A$. A simétrica $\underbrace{\text{y } \beta_c \text{ ortonormal}}_{(*)}$ para $\cdot_{st}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ es autoadjunto.

Podemos encontrar P ortogonal $\mid D = {}^tPAP$ y con $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$,

con $\lambda_{i=1,2,3}$ los valores propios.

$$\chi_A = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-2 & -2 & 2 \\ -2 & x-5 & 4 \\ 2 & 4 & x-5 \end{vmatrix} = \dots =$$

$$= (x-1)^2 (x-10)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 10 \quad \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$V(1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 1 \cdot x\} = \dots =$$

$$= \langle \underbrace{(-2,1,0)}_{w_1}, \underbrace{(2,0,1)}_{w_2} \rangle$$

$$V(10) = \langle \underbrace{(1,2,-2)}_{w_3} \rangle$$

(Nota: nuestras matrices A serán simétricas, pues tratamos con cuádricas.)

Así:

$\beta = \{w_1, w_2, w_3\}$ y :

(Usamos este método para asegurar:
· D tiene λ_i (que no es trivial, no tiene porqué)
· P ortogonal
· Base ortonormal)

$P_{\beta_c \to \beta} \rightarrow P = (w_1, w_2, w_3) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ¿es ortonormal?

$(Px = y)$

$\rightarrow$ ¡Aún no es ortonormal! Hay que hacer Gram-Schmidt

Recordad: Subespacios propios distintos son ortogonales entre sí:
$V(\lambda_i) \perp V(\lambda_j) \ \forall i \neq j$. Los vectores de $V(\lambda_i)$ pueden no ser ortogonales entre sí, hay que coger los vectores con cuidado.

Gram-Schmidt: (ortogonalizar $V(1)$)

$v_1' = v_1 = (-2, 1, 0)$

$v_2' = v_2 - \left(\frac{v_2 \cdot v_1'}{v_1' \cdot v_1'}\right) \cdot v_1' = (2/5, 4/5, 1)$

....

$v_3' = v_3 = (1, 2, -2)$

Ahora normalizados:

$w_1 = \frac{v_1'}{\|v_1\|}$, $w_2 = \frac{v_2'}{\|v_2\|}$, $w_3 = \frac{v_3'}{\|v_3\|}$

$\tilde{\beta} = \{(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0), (\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})\}$

Así:

$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$; $P_{\beta_c \to \tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ (P ortogonal)

$\tilde{D} = {}^t P_{\beta_c \to \tilde{\beta}} \cdot A \cdot P = P^{-1} A P$

Así:

$Q(x', y', z') = (x')^2 + (y')^2 + 10(z')^2$ con cambio:

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{3\sqrt{5}}y' + \frac{1}{3}z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{4}{3\sqrt{5}}y' + \frac{2}{3}z' \\ z = \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + -\frac{2}{3}z' \end{cases}$$

(Así se respeta que es afín euclídeo.)

(Sigue la explicación)

Así hemos llegado a:

$$\underbrace{Q(x_1, \dots, x_n)}_{\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2} + \underbrace{b_1' x_1 + \dots + b_n' x_n}_{\text{lineal}} + \underbrace{c}_{\text{cte}} = 0$$

Para simplificar la parte lineal; queremos que la parte lineal desaparezca, o nos quedemos con un indeterminado como mucho.

Completar cuadrados. Una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c$ puede expresarse como un cuadrado perfecto más 1 cte:

$$ax^2 + bx + c \Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$

Aplicando a nuestra cuádrica, si $\lambda_i \neq 0 \Rightarrow$

$$\lambda_i x_i^2 + b_i x_i = \lambda_i\left[\underbrace{\left(x_i + \frac{b_i}{2\lambda_i}\right)}_{x_i'}^2 - \frac{b_i^2}{4\lambda_i^2}\right]$$

(Nota: no olvidarse de sustituir los x_i viejos por los nuevos x_i' que salen al diagonalizar la matriz para completar el cuadrado con los nuevos pares $b_i' x_i'$).

Resumen:

Normalizar ecuaciones de cuádricas (parte cuadrática)

(1) En espacios afines

Da igual el método que utilicemos para diagonalizar. Recomendado:

$$(A \mid I_n) \longrightarrow (D \mid P)$$

(P matriz cambio de base da las ecuaciones de cambio de sistema de referencia afín).

(2) En espacios afines euclídeos

Necesitamos que sea una isometría (el cambio de sistema de referencia), para respetar la estructura de espacio afín euclídeo (prod. escalar, distancia y norma). Por tanto; ¿método para conseguir mat. diagonal y P ortogonal de cambio de base? Interpretar A como homomorfismo autoadjunto (a partir de forma bi. simétrica). Hallar base formada por vectores propios y en mat. diagonal los valores propios:

$$A \to p_h(x) \to \underbrace{\lambda_i}_{\text{(mat. diag.)}} \to V(\lambda_i) \to$$

$\to \{w_1, \dots, w_n\}$ de manera que:

$$\begin{cases} w_i \cdot w_i = 1 \\ w_i \cdot w_j = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad h(w_k) = \lambda x$$

(Los normalizamos para que no tengan productos cruzados).

Notas varias:

- Para el método (2), $V(\lambda_i) \perp V(\lambda_j) \ \forall i \neq j$
- (2) Al buscar la base de vectores propios: Gram-Schmidt → sin problemas. Sino, recordar que hay que buscar $v_i, v_{i+1} \in V(\lambda_i) \mid v_i \cdot v_{i+1} = 0$ (no está garantizado),

hay que tomar $v_i \in V(\lambda_i)$ y $v_{i+1} \in V(\lambda_i) \cap \langle v_i \rangle^{\perp}$ etc.

- Hay matrices diagonales que no tienen λ_i en la diagonal. Nosotros tenemos garantías de que existe una base ... formada por vectores propios, pero no podemos afirmar nada sobre otras bases que diagonalicen la matriz.

- Repasar 2º cuatri año pasado; recordatorio rápido:

- Ortogonal:

  $P^{-1} = P^t \Rightarrow P^{-1} \cdot P = {}^tP \cdot P = I_n \Rightarrow$

  Sus columnas forman base ortonormal para el prod. es. estándar.

- Endomorfismo autoadjunto:

  $h(v) \cdot w = v \cdot h(w)$

- Matriz asociada a una forma bilineal simétrica y cambio de base: con la asociada:

  $\rightarrow \varnothing(u,v) = {}^tM_\beta(u) \cdot M_\beta(\varnothing) \cdot M_\beta(v)$

  $M_\beta(\varnothing) = (\varnothing(e_i, e_j))_{i,j}$

  $\rightarrow M_{\tilde{\beta}}(\varnothing) = {}^tP_{\tilde{\beta} \nearrow \beta} \cdot M_\beta(\varnothing) \cdot P_{\tilde{\beta} \nearrow \beta}$ $\quad (P \cdot X = Y \Rightarrow Y^t = X^t \cdot P^t)$

- Congruentes:

  $A = P^t B P$

- Semejantes:

  $A = P^{-1} B P$

Caso de homomorfismos:

- $M_\beta(h) = (h(e_1), \dots, h(e_n))$ (en columna las imágenes de los v. básicos:

  $X = M_\beta(h) \cdot Y$

- $M_{\tilde{\beta}}(x) = P^{-1}_{\tilde{\beta} \nearrow \beta} \cdot M_\beta(x) \cdot P_{\beta \nearrow \tilde{\beta}}$

- Isometrías.

Por def. respetan el prod. escalar, como consecuencia, respetan la norma y la distancia (y por tanto son hom. que respetan la estructura de espacio afín euclídeo).

$h(v) \cdot h(w) = v \cdot w$

- Diferenciar

- Espacio vectorial $\rightarrow E$
- Espacio euclídeo $\rightarrow (E, \cdot)$ (prod. escalar, norma y dist)
- Espacio afín euclídeo $\rightarrow (\underbrace{A}_{\text{puntos}}, \underbrace{(E,\cdot)}_{\substack{\text{Espacio}\\\text{euclídeo}}}, \underbrace{\varphi}_{\substack{\text{relaciona}\\\text{puntos y}\\\text{vectores}}})$ (prod. escalar, etc.)

- Espacio afín (A, E, φ) (sin prod. escalar, etc.)

- Cambio de coordenadas: (para espacios afines).

$$\underbrace{M_{\tilde{R}}(X)}_{\substack{\text{Nuevas}\\\text{coords}}} = \underbrace{M_{\tilde{R}}(O_R)}_{\substack{\text{Traslación,}\\\text{origen de } R\\\text{visto en el}\\\text{sistema } \tilde{R}.}} + \underbrace{M_{\beta}^{\tilde{\beta}}}_{\substack{\text{Matriz de}\\\text{paso, pasa}\\\text{de } \beta \rightarrow \tilde{\beta}.}} \cdot \underbrace{M_R(X)}_{\substack{\text{Viejas}\\\text{coords}}}$$

- Más de isometrías:

Son del tipo: $Y = A \cdot X + B$ con A matriz ortogonal.

- Diagonalizar matrices: ↳ (o buscar en internet, etc.)

Apuntes de primero carrera / ver ejemplo para caso genérico pág. 8 (nos da matriz diagonal fea y base "fea" (no ortogonales, etc.); caso de consiguiendo base ortonormal formada por vectores propios pág. 9, si la matriz es simétrica ($\Leftrightarrow$ define h autoadjunta, ...).

(Apuntes de clase)

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + c = 0$$

Si $\lambda_i \neq 0$

$$\lambda_i x_i^2 + b_i x_i = \lambda_i \left[\left(x_i + \frac{b_i}{2\lambda_i} \right)^2 - \frac{b_i^2}{4\lambda_i^2} \right] = \lambda_i (x_i')^2 + c_i$$

Con:

$$x_i' = x_i + \frac{b_i}{2\lambda_i} \quad y \quad c_i = -\frac{b_i^2}{4\lambda_i}$$

Basicamente, completar el cuadrado. Es una isometría, por tanto este cambio nos vale para los dos casos (el afín y el afín euclídeo). Estamos cambiando el origen del sistema de referencia. Resumen:

→ Si $\lambda_i = 0$

$x_i' = x_i$

→ Si $\lambda_i \neq 0$

$$x_i' = x_i + \frac{b_i}{2\lambda_i} \iff x_i = x_i' - \frac{b_i}{2\lambda_i}$$

Luego:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \text{ ó } -\frac{b_i}{2\lambda_i} \\ \vdots \\ 0 \text{ ó } -\frac{b_i}{2\lambda_i} \end{pmatrix} + I_n \cdot \begin{pmatrix} x_i' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Hemos conseguido que:

$$\lambda_1 (x_1')^2 + \dots + \lambda_r (x_r')^2 + b_{r+1} \cdot x_{r+1}' + \dots + b_n x_n' + c' = 0$$

Ahora queremos simplificar la parte lineal restante.

Si $b_i = 0$, no hace falta hacer nada (caso trivial).
Si $b_i \neq 0$, haremos un cambio de base (que no va a ser el mismo si estamos en un e.a. o un espacio afín euclídeo).

Si estamos en un espacio afín (no euclídeo).

$$x_i'' = \begin{cases} x_i' & \text{si } i \leq r \\ b_{r+1} \cdot x_{r+1}' + \dots + b_n \cdot x_n' & \text{si } i = r+1 \\ x_i' & \text{si } i > r+1 \end{cases}$$

Es decir, solo cambiamos una única variable. Así obtenemos:

$$\lambda_1 x_1' + \dots + \lambda_r x_r' + x_{r+1}'' + c' = 0$$

Ejemplo: Simplifica la siguiente cuádrica de $\mathbb{R}^4$.

$$2x^2 + y^2 + 3x + 4y + z + 2 = 0$$

No hay términos cruzados xy ó xz o yz, ..., por tanto la parte cuadrática ya está normalizada. Completamos cuadrados:

$$2x^2 + 3x = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) = 2\left((x + 3/4)^2 - 9/16\right) = 2(x+3/4) - 9/8$$
$$y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$$

$$\begin{cases} x' = x + 3/4 \\ y' = y + 2 \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' - 3/4 \\ y = y' - 2 \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + I_n \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

Tenemos:

$$2(x')^2+(y')^2+z'+2t'-41/8=0$$

Simplificamos la nueva parte lineal:

$$\begin{cases} x''=x' \\ y''=y' \\ z''=z'+2t' \\ t''=t' \end{cases} \iff \begin{cases} x'=x'' \\ y'=y'' \\ z'=z''-2t'=z''-2t'' \\ t'=t'' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ t'' \end{pmatrix}$$

Nuestra nueva ecuación:

$$2(x'')^2+(y'')^2+z''-41/8$$

(Explicación)

Si estamos en un espacio afín euclídeo, el planteamiento es el mismo, solo que esta vez queremos una P de paso ortogonal. Para ello:

$$x_1''=x_1'$$
$$\vdots$$
$$x_r''=x_r'$$
$$x_{r+1}''=\alpha\cdot(b_{r+1}\cdot x_{r+1}'+\ldots+b_n\cdot x_n')$$
$$\vdots$$

$x_i''=$ ¿? $\rightarrow$ Las iremos definiendo para conseguir P ortogonal.

Ejemplo (afín euclídeo):

$$2(x')^2 + (y')^2 + z' + 2t' - 41/8 = 0$$

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \\ z'' = \alpha(z' + 2t') \\ t'' = t_1 x' + t_2 y' + t_3 z' + t_4 t' \end{cases} \Rightarrow$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 2\alpha \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = P^t$$

(exigimos esa condición para que P sea ortogonal).

$$\Rightarrow P = (P^t)^t = (P^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & \alpha & c \\ 0 & 0 & 2\alpha & d \end{pmatrix}$$

Ahora bien, si P es ortogonal, sus columnas forman base ortonormal para el producto escalar estándar.

$$\begin{cases} w_1 = (1,0,0,0) \\ w_2 = (0,1,0,0) \\ w_3 = (0,0,\alpha,2\alpha) \\ w_4 = (a,b,c,d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 \cdot w_1 = 1 \\ w_1 \cdot w_2 = 0 \\ w_1 \cdot w_3 = 0 \\ w_1 \cdot w_4 = 0 \Rightarrow a = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_2 \cdot w_2 = 1 \\ w_2 \cdot w_3 = 0 \\ w_2 \cdot w_4 = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_3 \cdot w_3 = \alpha^2 + 4\alpha^2 = 1 \Rightarrow 5\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 = 1/5 \\ w_3 \cdot w_4 = 0 \Rightarrow \alpha c + 2\alpha d = 0 \Rightarrow \underset{\neq 0}{\alpha} (c + 2d) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow c = -2d \end{cases}$$

$$\left\{ w_4 \cdot w_4 = 0 \Rightarrow c^2 + d^2 = 1 \Rightarrow 4d^2 + d^2 = 1 \Rightarrow \Rightarrow d^2 = 1/5 \right.$$

Tenemos cuatro soluciones distintas: $\alpha = \pm\sqrt{1/5}$ y $d = \pm\sqrt{1/5}$.

Ejemplo de una solución: $(\alpha = \sqrt{1/5},\ d = \sqrt{1/5})$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1/5} & -2\cdot\sqrt{1/5} \\ 0 & 0 & 2\cdot\sqrt{1/5} & \sqrt{1/5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \\ z'' = 1/\sqrt{5}\,(z' + 2t') \\ t'' = -2\sqrt{1/5}\,z' + \sqrt{1/5}\,t' \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x'' \\ \vdots \\ t'' \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x' \\ \vdots \\ t' \end{pmatrix}}$$

(1)

Resumen:

Normalizar ecuaciones cuadráticas (parte lineal)

Una vez normalizada la parte cuadrática, independientemente del tipo de espacio afín en el que estemos, hay que: COMPLETAR EL CUADRADO. Reordenamos:

$$\lambda_1 (x_1')^2 + \ldots + \lambda_r (x_r')^2 + \underbrace{b_{r+1} x_{r+1}' + \ldots + b_n x_n'}_{\text{no se puede completar el cuadrado porque } \lambda_i = 0} + C = 0$$

(Si $\exists \lambda_i = 0 \Rightarrow$)

Espacios afines:

Tomamos el cambio de variable:

$$\begin{cases} x_{r+1}'' = b_{r+1} \cdot x_{r+1}' + \ldots + b_n x_n' \\ x_i'' = x_i' \quad \text{si} \quad i \neq r+1 \end{cases}$$

Espacios afines euclídeos:

Como queremos P ortogonal:

$$\begin{cases} x_i'' = x_i \quad i < r+1 \\ x_{r+1}'' = (b_{r+1} \cdot x_{r+1}' + \ldots + b_n x_n') \cdot \alpha \\ x_i'' = a_{i1} \cdot x_1' + a_{i2} x_2' + \ldots a_{ii} x_n' \end{cases}$$

Hay que plantear un sistema

(*)

Hay que plantear un sistema y resolverlo para que se cumpla que:

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ \vdots \\ x_n'' \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \longrightarrow \overset{P^t}{\overset{\shortparallel}{P^{-1}}} \cdot \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ \vdots \\ x_n'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Con $P_{\beta'}^{\beta''}$ matriz de paso ortogonal $({}^tP = P^{-1}$ y sus columnas forman base ortonormal para el prod. escalar estándar, esto último es clave para encontrar la matriz $P)$.

Se plantea a partir de los cambios de variable sabiendo que:

$$\begin{cases} \bullet\ P^{-1} = {}^tP \Rightarrow P^t \cdot P = P^{-1} \cdot P = I_n \quad (\text{útil pero no tanto}) \\ \bullet\ \text{Si } w_i \text{ es la i-ésima columna de } P \Rightarrow \\ \qquad \forall i,\ w_i \cdot w_i = 1 \ \text{ y } \ \forall i \neq j,\ w_i \cdot w_j = 0 \end{cases}$$

(Seguimos con el ejemplo)

(1) caso $(\alpha = 1/\sqrt{5},\ d = -1/\sqrt{5}) \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ \vdots \\ t' \end{pmatrix} = \underset{P^t}{\underset{\shortparallel}{P^{-1}}} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ \vdots \\ t'' \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' \\ z' = \frac{1}{\sqrt{5}}(z'' + 2t'') \\ t' = \frac{2}{\sqrt{5}} z'' - \frac{1}{\sqrt{5}} t'' \end{cases} \longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1/5} & \sqrt{2/5} \\ 0 & 0 & \sqrt{2/5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el nuevo sistema de referencia?

Necesitamos tener en cuenta todos los cambios que hemos hecho.

Obtenemos (siguiente cara).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + I_n \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ t'' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x'' - 3/4 \\ y = y'' - 2 \\ z = 1/\sqrt{5}\, z'' + 2/\sqrt{5}\, t'' \\ t = 2/\sqrt{5}\, z'' - 1/\sqrt{5}\, t'' \end{cases} \Rightarrow \tilde{R} = \left((-3/4, -2, 0, 0), \{e_1, e_2, (0, 0, \tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}), (0, 0, 2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})\} \right)$$

Teoría: Resumiendo nuestra ecuación original ahora tiene la forma:

(1) $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + c = 0$

(2) $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + b \cdot x_{r+1} + c = 0$

Podemos manipular la constante, de manera que:

- Caso 1:

$$\begin{cases} c = 0 \rightarrow \text{no hacemos nada: } \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 = 0 \\ c \neq 0 \rightarrow \text{dividimos entre } -c\text{: } \lambda_1' x_1^2 + \dots + \lambda_r' x_r^2 = 1 \end{cases}$$

- Caso 2:

Tomamos el cambio $b_{r+1} \cdot x_{r+1} + c = -x_{r+1}'$ y el resto los dejamos igual: (*)

$$\lambda_1 (x_1')^2 + \dots + \lambda_r (x_r')^2 = x_{r+1}'$$

Nota: Para saber qué sistema de referencia se corresponde con la ecuación final, debemos realizar todos los cambios uno detrás de otro (ver la parte de arriba de esta cara).

(*) (Para que funcione en el fin euclídeo, dividir antes toda la ecuación por b_{r+1}).

Teorema: Clasificación de los cuádricos en el espacio afín euclídeo.

Sea $\mathbb{R}^n$ un espacio afín euclídeo. Dada una cuádrica, siempre puede encontrarse un sistema de referencia ortonormal para el cual la ecuación reducida será de la forma:

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ x_{r+1} \end{cases}$$

(con $1 \leq r+1 \leq n$)

Teorema: Clasificación de los cuádricos en el espacio afín.

Sea $\mathbb{R}^n$ un espacio afín. Dada la ecuación de una cuádrica, siempre podemos obtener un sist. ref. para el cual su ecuación reducida es de la forma:

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ x_{r+1} \end{cases}$$

Además, $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, $\lambda_i = \pm 1$

¿Por qué vale? Ejemplo para entender:

$$(\underbrace{\sqrt{2} \cdot x}_{x'})^2 - (\underbrace{\sqrt{3} \cdot y}_{y'})^2 = 2$$

(No es una isometría, pero para el caso afín no euclídeo nos vale, en el afín euclídeo no).

Podemos tomar ese cambio porque estamos en el afín. En el afín euclídeo no siempre, pues ha de ser una isometría (P ortogonal), pero como en el euclídeo no hace falta, podemos tomar ese cambio arbitrario.

Corolario: Clasificación de las cónicas en el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^2$.

(1)

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = \begin{cases} 0 \\ \text{ó} \\ 1 \end{cases}$$

1.1 (El origen).

$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$, con $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Es $(0,0)_R$ (es el origen).

1.2 (Dos rectas)

$\lambda_1 x^2 - \lambda_2 y^2 = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Son dos rectas

1.3 (Elipse, circunferencia si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ son $\lambda_1 = \lambda_2$)

$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Elipse o circunferencia ($\lambda_1 = \lambda_2$)

1.4 (Hipérbola)

$\lambda_1 x^2 - \lambda_2 y^2 = 1$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Hipérbola

(2)

$$\lambda x^2 = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ y \end{cases}$$

2.1 (Recta doble)

$\lambda_1 x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow$ recta doble.

2.2 (Dos rectas paralelas)

$\lambda_1 x^2 = 1 \Rightarrow |x| = a \Rightarrow$ dos rectas paralelas.

2.3 (Parábola)

$\lambda_1 x^2 = y \Rightarrow$ parábola

Corolario: (clasificación de las cuádricas en $\mathbb{R}^3$)

Dada una cuádrica de $\mathbb{R}^3$, necesariamente será:

i) un punto, una recta o un plano.

ii) una de la de las hojas.

Nota:

En el espacio afín no euclídeo no hay distinción entre elipse y circunferencia (siempre se puede pasar de la elipse a la circunferencia con cambios de variable).

Nota:

$ax^2 + \dots \longrightarrow \dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{a}\right)}$ (importante para ejes, focos, etc.).

Nota:

Suponemos $\mathbb{R}^5$ con; (esto vale para generalizar el proceso anterior).

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a & f \\ 0 & 1 & 0 & b & g \\ 0 & 0 & \alpha & c & h \\ 0 & 0 & 2\alpha & d & i \\ 0 & 0 & 2\alpha & e & j \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = \alpha(z' + 2t' + 2w') \\ t = ax' + by' + cz' + dw' + et' \\ w = fx' + gy' + hz' + iw' + jt' \end{cases}$$

Ejercicios:

Enunciado general: dada la ecuación de una hiper-cuádrica en $\mathbb{R}^n$, obtener la ecuación reducida, el nuevo sistema de referencia, y decir qué tipo de hiper-cuádrica es, en los contextos afines y o afines euclídeos.

Ejemplos: $\mathbb{R}^2$

i) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 8 = 0$ (dos rectas paralelas).

ii) $7x^2 - 12xy - 2y^2 - 16x + 28y - 8 = 0$ (hipérbola)

iii) $11x^2 - 6xy + 19y^2 + 6x - 38y + 15 = 0$ (elipse)

Ejemplos: $\mathbb{R}^3$

i) $8x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy + 4xz - 8yz - 2x - 20y + 10z + 13 = 0$

ii) $4x^2 + 9y^2 + 4yz + 6z^2 + 8x + 40y + 20z + 34 = 0$

iii) $4xy + z^2 - 1 = 0$

iv) $4xy - z^2 + 1 = 0$

v) $2x^2 + 4xy - 4xz + y^2 - 6yz + z^2 - 2y - 2z = 0$

vi) $x^2 + x + 4y + 3z - 1 = 0$

vii) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2z^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 8z - 8 = 0$

viii) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2x + y + z = 0$

(Espacio afín o afín euclídeo).

Ejer en $\mathbb{R}^3$ (i): (Afín)

$$\underbrace{8x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy + 4xz - 8yz}_{\text{Parte cuadrática (Q)}} \underbrace{- 2x - 20y + 10z}_{\text{Parte lineal (L)}} + \underbrace{13}_{\text{cte}} = 0$$

1) Simplificar la parte cuadrática.

Consideramos f forma bilineal simétrica $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ con

$$M_{\beta_c}(f) = A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Buscamos D asociada a f. (Filas solo en A, columnas en ambas).

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{matrix}}_{A} \left| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_n} \right.\right) \xrightarrow[\text{(En A)}]{F_2' = F_2 - F_3} \left(\begin{matrix} 8 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & -9 \\ 2 & -4 & 5 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right.\right) \xrightarrow[\text{En A e I}]{C_2' = C_2 - C_3}$$

$$\left(\begin{matrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 18 & -9 \\ 2 & 1 & 5 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix} \right.\right) \xrightarrow[\text{(En A)}]{F_3' = 2F_3 + F_2} \left(\begin{matrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 18 & -9 \\ 4 & 0 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix} \right.\right)$$

(Fila, columna, Fila, columna, ...)(Hay que hacer los mismos cambios en fila y columna y solo los de columna aplicar en ambos).
(Ir intercalando cambio fila y cambio columna).

$$\xrightarrow[\text{A los 2}]{C_3' = 2C_3 + C_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{A los 2}]{C_3' = 2C_3 - C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3' = 2F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{D} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{P}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - z' \\ y = y' + 2z' \\ z = -y' + 2z' \end{cases}$$

En estas nuevas coordenadas, la parte cuadrática se convierte en:

$$Q(x', y', z') = (x', y', z') D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 8(x')^2 + 18(y')^2$$

Y la lineal:

$$L(x', y', z') = -2(x' - z') - 20(y' + 2z') + 10(-y' + 2z') =$$

$$= -2x' - 30y' - 22z'$$

Por tanto, la cuádrica es:

$$\text{Cuad.}(x', y', z') := Q(x', y', z') + L(x', y', z') + \overset{13}{\overset{\shortparallel}{C}} = 0 \Rightarrow$$

$$8(x')^2 + 18(y')^2 - 2x' - 30y' - 22z' + 13 = 0$$

Completar el cuadrado:

$$8(x')^2 - 2(x') = 8\left(x' - \tfrac{1}{8}\right)^2 - \tfrac{1}{8}$$

$$18(y')^2 - 30(y') = 18\left(y' - \tfrac{5}{6}\right)^2 - \tfrac{25}{2}$$

Tomamos:

$$\begin{cases} x' = x'' + 1/8 \\ y' = y'' + 5/6 \\ z' = z'' \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 5/6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

La nueva ecuación resulta:

$$8(x'')^2 - 1/8 + 18(y'')^2 - 25/2 - 22(z'') + 13 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8(x'')^2 + 18(y'')^2 - 22(z'') + \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow$$

(Dividimos /22 para que sea cambio ortogonal, ver notas)

$$\Rightarrow \frac{4}{11}(x'')^2 + \frac{9}{11}(y'')^2 - z'' + \frac{3}{176} = 0$$

Tomamos:

$$\begin{cases} x'' = x''' \\ y'' = y''' \\ z'' = -\frac{3}{176} + z''' \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3/176 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}$$

La nueva ecuación es:

$$\frac{4}{11}(x''')^2 + \frac{9}{11}(y''')^2 = z''' \quad (\text{paraboloide elíptico}).$$

Último cambio: (para conseguir $|\lambda_i| = 1$).

$$\begin{cases} x''' = \frac{\sqrt{11}}{2} x^{IV} \\ y''' = \frac{\sqrt{11}}{3} y^{IV} \\ z''' = z^{IV} \end{cases}$$

(Nota: este cambio no valdría para espacio afín euclídeo.)

Obtenemos este cambio de coordenadas:

$$\boxed{(x^{IV})^2 + (y^{IV})^2 = (z^{IV}) \rightarrow \text{paraboloide elíptico}}$$

El sistema de referencia lo obtenemos así:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1/8 \\ 5/6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/8 \\ 5/6 \\ -5/6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 5/6 \\ -5/6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3/176 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/8 \\ 5/6 \\ -5/6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/176 \\ -6/176 \\ -6/176 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \sqrt{11}/2 \; x^{IV} \\ \sqrt{11}/3 \; y^{IV} \\ z^{IV} \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 25/176 \\ 211/264 \\ -229/264 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{11}/2 \; x^{IV} \\ \sqrt{11}/3 \; y^{IV} \\ z^{IV} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

(Nota:

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{11}/2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{11}/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{IV} \\ y^{IV} \\ z^{IV} \end{pmatrix}$$

↓

$$\left(\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{11}/2 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{11}/3 & -2 \\ 0 & -\sqrt{11}/3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{IV} \\ y^{IV} \\ z^{IV} \end{pmatrix} \right)$$

$(R_C = (O_{nuevo})_C + P_{nuevo \to C}(R_{nuevo}))$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \frac{25}{176} + \frac{\sqrt{11}}{2} x^{IV} - z^{IV} \\ y = \frac{211}{264} + \frac{\sqrt{11}}{3} y^{IV} + 2z^{IV} \\ z = -\frac{229}{264} - \frac{\sqrt{11}}{3} y^{IV} + 2z^{IV} \end{cases}}$$

Y el sistema de referencia es:

$$\boxed{\tilde{R} = \left(\left(\frac{25}{176}, \frac{211}{264}, \frac{-229}{264} \right), \left\{ \left(\frac{\sqrt{11}}{2}, 0, 0\right), \left(0, \frac{\sqrt{11}}{3}, -\frac{\sqrt{11}}{3}\right), (1,-2,-2) \right\} \right)}$$

(Cuidado al sacar el nuevo origen y los vectos nuevos, que son las columnas de P pues:

$v_1 = (\sqrt{11}/2, 0, 0)_{R\text{canónico}} = R_C$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{11}/2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{11}}{3} & -2 \\ 0 & -\sqrt{11}/3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{11}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$ Vemos que pasa de coordenadas de $\tilde{R}$ a R, por eso

cogemos esos vectores para la base de $\tilde{R}$ y por eso es matriz de Paso $P_{\tilde{\beta} \to \beta c}$).

Recordatorio: Cómo diagonalizar una f. bi. s.

Sea $A = M_{\beta c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $f(e_1, e_1)$

$f(e_3, e_2)$

Viendo esa matriz, podemos tomar los siguientes vectores ortogonales:

$$\begin{cases} v_1 = e_3 & (v_1 \cdot v_1 = -1) \\ v_2 = e_2 & (v_2 \cdot v_2 = 1) \\ v_1 \cdot v_2 = e_3 \cdot e_2 = 0 \end{cases}$$

No es • st, es el • definido por f

Buscamos $v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle^\perp \Rightarrow \begin{cases} \cancel{(x,y,z)\cdot(1,1,0) = 0} \to y = 0 \\ (x,y,z)\cdot(0,0,1) = 0 \to z = 0 \end{cases}$

$\longrightarrow v_3 \cancel{= (1,0,0) \to v_3 \cdot v_3 \to (1,0,0)\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$

$(x_1, x_2, x_3) A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_3 = -2x_1$

$(x_1, x_2, x_3) A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_1$

$\longrightarrow (x_1, -2x_1, -2x_1) A \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -2x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$(\cancel{-4x_1 + 4x_1}^{\,0}, \cancel{2x_1 - 2x_1}^{\,0}, \cancel{-2x_1 + 2x_1}^{\,0}) \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -2x_1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow$ son isótropos ($\lambda = 0, \exists V(0)$).

Así:

$\beta = \{(0,1,0), (0,0,1), (1,-2,-2)\}$ ortogonal

$M_{\beta_c}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow P_{\beta \to \beta_c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow$ (pensar P como en pág. 30)

Esto solo vale para espacios afines porque es base ortogonal y no ortonormal. Observar que P no es ortogonal.

(Siguiente cara resumen del proceso).

También podemos diagonalizar la matriz con el método $(A|I_n) \rightarrow (D|P)$. Ejemplo pág. 26. Funciona porque al ser simétrica, los cambios de columnas que vienen por los de filas hacen más ceros en las posiciones simétricas y no los deshacen.

Resumen de teoría:

Normalizar la ecuación de una cuádrica.

$$C(x) = Q(x) + L(x) + C = x_1^2 + \dots + x_n^2 + b_1 x_1 + \dots$$
$$+ b_n x_n + c = 0$$

1) Espacio afín (no euclídeo)

1.1

Normalizar $Q(x)$.

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i^2 + \sum_{i \leq j}^{n} 2\lambda_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

Definimos forma bi. simétrica f, tal que: $M_{\beta_c}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_{12} & \cdots \\ \lambda_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \lambda_n \end{pmatrix} = A$

tal que: $Q(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

La diagonalizamos con el método de Gauss (hacer una transformación de filas en A y seguido hacer la misma para columnas en B y A). También vale el método de buscar una base ortonormal. (*)

$$(A | I_n) \longrightarrow (A | B) \longrightarrow (D | P) : \underline{D = {}^tPAP}$$

Con: $P_{\tilde{\beta} \to \beta_c} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ (comprobar esto). (Ejemplo pág. 26).

Después del cambio P:

$$Q'(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \cdot (x_i')^2 \quad \text{y}$$

$$C(x) = Q'(x) + L'(x) + C = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \cdot (x_i')^2 + b_1' x_1' + \dots + b_n' x_n' + c = 0$$

((*) Mirando la matriz e ir tomando vectores de subespacios ortogonales. Pág. 30)

1.2

Normalizar $L(x) + C$.

Primero completar el cuadrado para obtener:

$$Q''(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i' \cdot \left(x_i' + \frac{b_i'}{2\lambda_i'}\right)^2$$

$$L''(x) = b_i' \cdot x_{r+1}' + \dots + b_n' \cdot x_n' + c'$$

Tomamos:

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b_i'}{2\lambda_i'} \\ \vdots \\ -\frac{b_r'}{2\lambda_r'} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1'' \\ \vdots \\ x_n'' \end{pmatrix}$$

Así:

$$C(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i' \cdot x_i'' + \sum_{i=r+1}^{n} b_i' \cdot x_i'' + c'$$

Ahora: (1) (El paso de la constante se puede hacer separado después).

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ \vdots \\ x_n'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -c' \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 & \\ & \ddots & -b_{r+1} & -b_{r+2} & \dots & -b_n \\ 0 & & \ddots & & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1''' \\ \vdots \\ x_{r+1}''' \\ \vdots \\ x_n''' \end{pmatrix}$$

Y así obtenemos finalmente:

$$C(x) = \lambda_1' \cdot x_1''' + \dots + \lambda_n' \cdot x_r''' = -x_{r+1}''' \quad \begin{cases} \acute{o} = 0 \\ \acute{o} = 1 \end{cases}$$

Nota: en (1) hay que tomar el siguiente cambio de variable y luego despejar las variables ''.

$$x_i''' = \begin{cases} x_i'' & \text{si } i \neq r+1 \\ -(b_{r+1} \cdot x_{r+1}'' + \dots + b_n x_n' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1'' = \dots ''' \\ x_n'' = \dots ''' \end{cases}$$

2) Espacio afín (euclídeo).

2.1

Mismo objetivo que en 1.1, pero queremos respetar que sea espacio afín euclídeo (y que mantenga las distancias). Por eso necesitamos que los cambios sean isométricos. Es decir, P ortogonales (columnas forman base ortonormal para prod. esc. estándar).

Para diagonalizar, buscamos una base ortonormal formada por vectores propios, para el endomorfismo autoadjunto que define A:

$p(x) \longrightarrow \{\lambda_i\} \longrightarrow V_i \to v_1, v_2 \mid v_1, v_2 \in V(\lambda_i),\ v_2 \in v_1^{\perp} \subset V(\lambda_i),$
$v_3 \in V(\lambda_{i+1}), \ldots \longrightarrow \{v_i\} \longrightarrow w_i = \frac{v_i}{\sqrt{g(v_i, v_i)}} \to \{w_i\} = \tilde{\beta}$ //

$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_n \end{pmatrix}$; $D = {}^tPAP = P^{-1}AP$, $P_{\tilde{\beta} \nearrow \beta_c}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

2.2

La parte de completar el cuadrado sigue igual. Pero para el cambio:

$$\begin{cases} x_1''' = x_1'' \\ \vdots \\ x_r''' = x_r'' \\ x_{r+1}''' = (b_1' \cdot x_{r+1}'' + b_2' \cdot x_{r+2}'' + \ldots + b_n x_n'') \cdot \alpha \\ x_{r+2}''' = a_{r+2,1} \cdot x_{r+1}'' + \ldots + a_{r+2,n} \cdot x_n'' \\ \vdots \\ x_n''' = a_{n,1} \cdot x_{r+1}'' + \ldots + a_{r+2,n} \cdot x_n'' \end{cases}$$

Si $P \to \begin{pmatrix} x_1''' \\ \vdots \\ x_n''' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1'' \\ \vdots \\ x_n'' \end{pmatrix}$. Entonces queremos que sea ortogonal y resolvemos el sistema para que lo cumpla.

$$P^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ & & \alpha b_1' & \alpha b_2' \cdots & \alpha b_n' \\ \vdots & & a_{r+2,1} & a_{r+2,2} \cdots & a_{r+2,n} \\ 0 & & a_{n,1} & a_{n,2} \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \to$$ Forzamos a que sea ortogonal, para ello:

- $P^{-1} = {}^tP$ y ${}^tPP = P^{-1}P = I_n$
- Si w_i es la i-ésima columna de P:

$$\begin{cases} w_i \cdot_{st} w_i = 1 & \forall i \\ w_i \cdot_{st} w_j = 0 & \forall i \neq j \end{cases}$$

(Nota: para sacar P, tener en cuenta cuál pasa de $\beta'' \to \beta'''$, si es ${}^tP$ o si es P. Columnas de P forman base ortonormal para el prod escalar $\Rightarrow$ lo hacen filas de ${}^tP$. Ver ejemplo pág. 18 para aclarar).

Hasta ahora tenemos:

$$C(x) = \lambda_1(x_1''')^2 + \cdots + \lambda_r(x_r''')^2 + b x_{r+1}''' + c = 0$$

Dividimos toda partida de b, para que el siguiente cambio (y el último sea ortonormal), y nos quedarían λ_1/b).

$$\begin{pmatrix} x_1''' \\ \vdots \\ x_n''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \pm c \end{pmatrix} + I_n \begin{pmatrix} x_1^{iv} \\ \vdots \\ x_n^{iv} \end{pmatrix}$$

(Por eso I_n dividimos entre b, para que sea ortonormal, sino quedaría $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & b & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ que no nos vale.

(Nota: para hallar el último sistema de referencia y deshacer todos los cambios) (hasta llegar a x_1^{IV} o el último)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B_1 + P_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = B_1 + P_1 \left[B_2 + P_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1'' \\ \vdots \\ x_n'' \end{pmatrix} \right] = (\dots)$$

$$= \left[B_1 + P_1 \cdot B_2 \right] + P_1 P_2 \begin{pmatrix} x_1'' \\ \vdots \\ x_n'' \end{pmatrix} = B + P \begin{pmatrix} x_1'' \\ \vdots \\ x_n'' \end{pmatrix}$$

Eso o sustituir en las ecuaciones uno a uno. Mejor matricialmente.

El sistema de referencia nuevo es:

Si v_i es la i-ésima columna de P:

$$\begin{cases} \beta_{\text{canónico}} = ((0, \dots, 0), \{e_1, \dots, e_n\}) \to \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \tilde{\beta} = ((B), \{v_1, \dots, v_n\}) \to \begin{pmatrix} x_1'' \\ \vdots \\ x_n'' \end{pmatrix} \end{cases}$$

//

Ejercicio: $(x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 8 = 0)$ (Afín euclídeo)

$$M_{\beta_c}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A = x(x-5) \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases} \to D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

¡ortonormal!

$V(0) = \langle (-2, 1) \rangle \to$ (normalizamos) $\langle (\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) \rangle \to P_{\tilde{\beta}}^{\beta_c} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$V(5) = \langle (1, 2) \rangle \to$ " $\langle (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) \rangle$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} x' + \frac{2}{\sqrt{5}} y' \end{cases} \xrightarrow{\text{Ecuación}} L(x', y') = \dots = -\frac{30}{\sqrt{5}} y'$$

La ecuación: $5(y')^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}y' + 8 = 0 \longrightarrow$

$\longrightarrow 5(y' - 3/\sqrt{5})^2 - 1 = 0$ Por tanto el sistema:

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = -3/\sqrt{5} + y' \end{cases}$$

Ecuación:

$5(y'')^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (y'')^2 - 1/5 = 0 \Leftrightarrow (y'')^2 = 1/5$ ó

$(y'' + 1/\sqrt{5})(y'' - 1/\sqrt{5}) = 0 \rightarrow$ $\boxed{\text{Dos rectas paralelas}}$

Ejercicio: $(x^2 + x + 4y + 3z - 1 = 0)$ (Afín euclídeo) (1 componente cuadrado, 1 lineal. Parece cilindro parabólico)

Nos dan la parte cuadrática hecha.

$$x^2 + x = (x + 1/2)^2 - 1/4 \rightarrow \begin{cases} x' = x + 1/2 \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = x' - 1/2 \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x')^2 + 4y' + 3z' - 5/4 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = \alpha(4y' + 3z') \\ z'' = ax' + by' + cz' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4\alpha & 3\alpha \\ a & b & c \end{pmatrix} \text{ y } P \text{ ortogonal} \Rightarrow$$

exigimos $P^{-1} = {}^tP \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 4\alpha & b \\ 0 & 3\alpha & c \end{pmatrix}$, $\Rightarrow w_i \cdot w_i = 1$ y $w_i \cdot w_j = 0$

$(1,0,0)\cdot(1,0,0) = 1$

$(1,0,0)\cdot(0,4\alpha,3\alpha) = 0$

$(1,0,0)\cdot(a,b,c) = a \Rightarrow a = 0$

$(0,4\alpha,3\alpha)\cdot(0,4\alpha,3\alpha) = 25\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = + 1/5$

$(0,4\alpha,3\alpha)\cdot(a,b,c) = \alpha(4b + 3c) = 0 \Rightarrow 4b = -3c$

$(a,b,c)\cdot(a,b,c) = b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow \frac{9}{16}c^2 + c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 4/5$

$\Rightarrow b = \mp 3/5$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x' = x'' \\ y' = \frac{4}{5}y'' + \frac{3}{5}z'' \\ z' = \frac{3}{5}y'' - \frac{4}{5}z'' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x''' = x'' \\ y''' = -(y'' - 1/4) \\ z''' = z'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = x''' \\ y'' = -y''' + 1/4 \\ z'' = z''' \end{cases} \rightarrow \frac{1}{5}(x''')^2 = y'''$$

Cilindro parabólico con $R = ((3/5, 6/5), \tilde{B})$.

Ejer para el seminario: (para el lunes)

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2xz + 2yz + z^2 + \sqrt{6}\,x = 0$$

(Simplificar y buscar sistema de referencia).

(Afín) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2z^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 8z - 8 = 0$

Definimos la forma bilineal simétrica f tal que: $M_{B_C}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Simétrica $\Rightarrow$ diagonalizable (en $\mathbb{R}$). Lo hacemos.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2' = F_2 - \frac{1}{3}F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_2' = C_2 - \frac{1}{3}C_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 8/3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podríamos hacer los siguientes cambios elementales para "simplificar" las matrices: $F_2' = 3F_2 + 0$ y $C_2' = 3C_2 + 0$ $\rightarrow D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

De la misma manera, podríamos haber llegado a:

$$D = \begin{pmatrix} 8/3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad y \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x' \\ y = -\frac{1}{3}x' + y' \\ z = z' \end{cases} \Rightarrow Q(x',y',z') = \frac{8}{3}(x')^2 + 3(y')^2 - 2(z')^2$$

$$L(x',y',z') = \frac{8\sqrt{2}}{3}(x') - 2\sqrt{2}(y') + 8(z')$$

La nueva ecuación es:

$$\frac{8}{3}(x')^2 + 3(y')^2 - 2(z')^2 + \frac{8\sqrt{2}}{3}(x') - 2\sqrt{2}(y') + 8(z') = 0$$

Completamos cuadrados:

$$\frac{8}{3}\left(x' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{4}{3} \quad ; \quad 3\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{2}{3} \quad ; \quad -2(z'-2)^2 + 8$$

$$\begin{cases} x' = x'' - \sqrt{2}/2 \\ y' = y'' - \sqrt{2}/2 \\ z' = z'' + 2 \end{cases} \Longrightarrow \text{La ec.: } \frac{4}{3}(x'')^2 + \frac{3}{2}(y'')^2 - (z'')^2 = 1.$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{3}{4}x''' \\ y'' = \frac{2}{3}y''' \\ z'' = -z''' \end{cases} \Rightarrow \boxed{(x''')^2 + (y''')^2 - (z''')^2 = 1}$$

Hiperboloide de una hoja.

Los cambios:

$$\begin{cases} x = x' = x'' - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x''' - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{1}{3}x' + y' = -\frac{1}{3}\left(x'' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(y'' + \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{6}x''' + \sqrt{\frac{2}{3}}\,y''' + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z = z' = z'' + 2 = z''' + 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\tilde{R} = \left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right), \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right), \left(0, \sqrt{2/3}, 0\right), (0,0,1)\right\}\right)}$$

(Dependiendo lo que hayamos hecho, obtendremos un sistema de referencia u otro).

40