

Capítulo 3

Cálculo diferencial de funciones de varias variables

3.1. Derivadas parciales. Derivadas direccionales

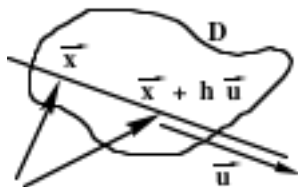
Como es bien sabido, la noción de derivada de una función f está relacionada con la variación $f(x+u) - f(x)$, para valores de u arbitrariamente pequeños.

Observemos que, a diferencia de las funciones de una variable, ahora no tiene sentido la expresión $\frac{f(x+u) - f(x)}{u}$, pues el denominador es un vector. Debemos pues modificar adecuadamente la definición de derivada.

Definición. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si $x \in \text{int } D$ y $u \in \mathbb{R}^m$ es un vector unitario arbitrario, sea $h \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño para que el segmento $[x, x+hu]$ esté contenido en D . Llamamos *derivada direccional* de f en el punto x según la dirección del vector u a

$$f'(x, u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+hu) - f(x)}{h}.$$

El cociente $\frac{f(x+hu) - f(x)}{h}$ representa el promedio de variación de f por unidad de distancia según la dirección del vector u .



Observemos que, si $m = 1$, sólo hay dos vectores unitarios, $u = 1$ y $u = -1$, que corresponden a la única dirección posible en \mathbb{R} . Si $m = 2$, todas las direcciones (o vectores unitarios) pueden escribirse como $(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$, para cada $\vartheta \in [0, \pi)$.

Otras notaciones usuales para la derivada direccional son

$$f'(x, u) = D_u f(x) = f'_u(x).$$

Nota. Si $v \neq 0$ no es un vector unitario, podemos llamar $u = v/\|v\|$, en cuyo caso

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hu\|v\|) - f(x)}{h\|v\|/\|v\|} = \|v\| \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hu\|v\|) - f(x)}{h\|v\|} = \|v\| \cdot f'_u(x).$$

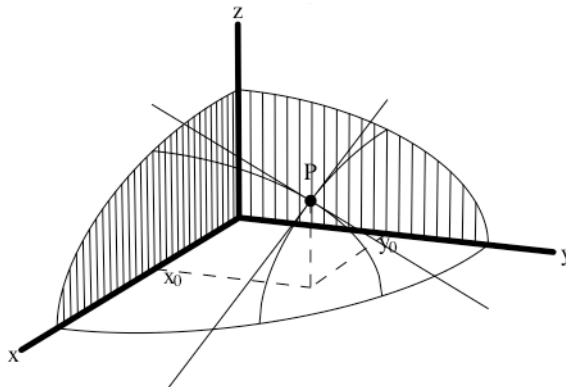
Este límite, que denotaremos por $f'_v(x)$, también recibe el nombre de derivada direccional de f en x según la dirección del vector v aunque este no sea unitario.

En el caso particular de que $u_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ sea el k -ésimo vector unitario coordenado, $f'(x, u_k)$ recibe el nombre de *derivada parcial k -ésima* de f en x , o *derivada parcial respecto a la k -ésima coordenada x_k* , y la notación que utilizaremos es

$$D_k f(x) = f'_k(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} f(x), \quad 1 \leq k \leq m.$$

En este caso, la definición equivale a la definición de derivada de una función de una variable, pues basta suponer constantes el resto de las mismas.

Si $z = f(x, y)$ es una función de dos variables, calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ equivale a cortar la superficie con los planos $y = y_0$ y $x = x_0$, respectivamente, y calcular las pendientes de las rectas tangentes a las curvas obtenidas.



Para los casos más comunes de funciones de dos o tres variables $u = f(x, y, z)$ utilizaremos la notación más difundida

$$D_x f = f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad D_y f = f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad D_z f = f'_z = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Observación. Para calcular las derivadas parciales, basta aplicar las reglas usuales de derivación de funciones de una variable, manteniendo constantes el resto de variables.

Por ejemplo, si $f(x, y, z) = x^2 y + y + \cos(y^2 z)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 2x, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= 1 - 2yz \sin(y^2 z), \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= -y^2 \sin(y^2 z). \end{aligned}$$

Enunciamos algunas propiedades que se deducen de las definiciones anteriores.

- 1) Si $v = -u$, entonces $f'(x, v) = -f'(x, u)$.
- 2) Si descomponemos la función en sus componentes $f = (f_1, \dots, f_n)$, entonces

$$\exists f'(x, u) \iff \exists f'_j(x, u), \forall j = 1, \dots, n.$$

En este caso,

$$f'(x, u) = (f'_1(x, u), \dots, f'_n(x, u)).$$

En particular, las derivadas parciales se obtienen como

$$D_k f(x) = (D_k f_1(x), \dots, D_k f_n(x)), \quad 1 \leq k \leq m.$$

- 3) Si $F(t) = f(x + tu)$, entonces $F'(0) = f'(x, u)$.

En general, $F'(t) = f'(x + tu, u)$.

- 4) Si $f(x) = ax + b$, $f'(x, u) = au$, $\forall x, u \in \mathbb{R}^m$.

- 5) Si $f(x) = \|x\|^2$, entonces $f'(x, u) = 2\langle x, u \rangle$.

Demostración. Por definición,

$$\begin{aligned} f'(x, u) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hu) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|x + hu\|^2 - \|x\|^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle x, hu \rangle + \langle hu, x \rangle}{h} = 2\langle x, u \rangle. \end{aligned}$$

Observaciones.

- a) Puede que existan las derivadas parciales de una función pero no existir derivadas en ninguna otra dirección. Por ejemplo, si $f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x = 0 \text{ ó } y = 0 \\ 1 & \text{en el resto,} \end{cases}$ entonces existen ambas derivadas parciales en el origen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(1, 0)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + k(0, 1)) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 1. \end{aligned}$$

Sin embargo, no existe ninguna otra derivada direccional en el origen porque, si $u = (a, b)$, con $a \neq 0$, $b \neq 0$, entonces $\frac{f(ha, hb) - f(0, 0)}{h} = \frac{1}{h}$, que no tiene límite cuando $h \rightarrow 0$.

- b) La existencia de derivadas direccionales en cualquier dirección no es condición suficiente para la continuidad de una función. Por ejemplo, si $f(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^2}{y^2 + x^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ consideramos un vector unitario arbitrario $u = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$. Definimos

$$F(t) = f(tu) = \frac{t \sin \vartheta \cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta + t^2 \cos^4 \vartheta}.$$

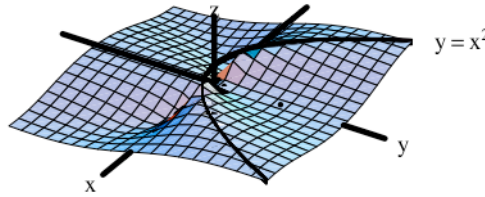
Entonces

$$\begin{aligned} f'((0,0), u) &= F'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \vartheta \cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta + t^2 \cos^4 \vartheta} = \begin{cases} \cos \vartheta \cotg \vartheta & \text{si } \sin \vartheta \neq 0, \\ 0 & \text{si } \sin \vartheta = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Así pues, existe $f'((0,0), u)$ para cualquier dirección u . En particular, son nulas ambas derivadas parciales en el origen. Sin embargo, la función no es continua en el origen pues, aunque los límites iterados en el origen son nulos, si nos aproximamos a lo largo de la parábola $y = x^2$, tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

En la gráfica de la superficie se observa que, a lo largo de la parábola $y = x^2$, la función es constante pero toma el valor $1/2$, mientras que, a lo largo de los ejes de coordenadas, toma el valor cero.



3.2. Diferenciabilidad

Debido a la existencia de funciones que poseen derivadas direccionales en un punto para cualquier dirección pero no son continuas en dicho punto, el concepto de derivada direccional no es el adecuado para generalizar el de derivada de funciones de una variable.

Es sabido que, si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $x = c$, la función

$$E_c(h) = \begin{cases} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - f'(c) & \text{si } h \neq 0, \\ 0 & \text{si } h = 0, \end{cases}$$

verifica $\lim_{h \rightarrow 0} E_c(h) = 0$. Además

$$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + hE_c(h)$$

(fórmula de Taylor de primer orden), de modo que $hE_c(h)$ representa el error cometido al aproximar $f(c+h) - f(c)$ por $hf'(c)$. Esta misma fórmula demuestra también que dicho error $hE_c(h)$ es un infinitésimo de orden superior a h cuando $h \rightarrow 0$, es decir $\lim_{h \rightarrow 0} hE_c(h)/h = 0$.

Por otra parte, como función de h , la expresión $L_c(h) = h \cdot f'(c)$ es una función lineal.

Teniendo presente lo anterior, se puede dar una definición de derivada que extiende a la definición análoga para funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} .

Definición. Dada una función $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y un punto $x \in \text{int } D$, decimos que f es *diferenciable en x* si existe una aplicación lineal $L_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x+v) = f(x) + L_x(v) + \|v\| \cdot E_x(v),$$

donde $\lim_{v \rightarrow 0} E_x(v) = 0$, lo que equivale a

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(x+v) - f(x) - L_x(v)}{\|v\|} = 0.$$

La función lineal L_x recibe el nombre de *derivada total* o *diferencial total* de f en x , y se denota comúnmente por df_x .

Enunciamos a continuación algunas propiedades de la diferencial que se deducen de la definición.

Proposición 3.2.1. Si descomponemos la función $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ en sus componentes $f = (f_1, \dots, f_n)$, entonces f es diferenciable si y sólo si f_k es diferenciable, para todo $k \in \{1, \dots, n\}$.

Proposición 3.2.2. Si una función es diferenciable en un punto, su diferencial total es única.

Demostración. Supongamos que $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en $x_0 \in \text{int } D$. Si L_1 y L_2 son diferenciales de f en x_0 , entonces

$$\begin{aligned} f(x_0+v) &= f(x_0) + L_1(v) + \|v\| \cdot E_{x_0}(v), \text{ con } \lim_{v \rightarrow 0} E_{x_0}(v) = 0, \\ f(x_0+v) &= f(x_0) + L_2(v) + \|v\| \cdot F_{x_0}(v), \text{ con } \lim_{v \rightarrow 0} F_{x_0}(v) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $L_1(v) - L_2(v) = \|v\|(F_{x_0}(v) - E_{x_0}(v))$.

Dado $y \in \mathbb{R}^m$, elegimos t suficientemente pequeño para que $x_0 + ty \in D$ (por ejemplo, si $B(x_0, \delta) \subset D$, entonces $|t| < \delta/\|y\|$). De este modo, $L_1(ty) - L_2(ty) = \|ty\|(F_{x_0}(ty) - E_{x_0}(ty))$. Por la linealidad de L_1 y L_2 , deducimos que $t(L_1(y) - L_2(y)) = |t| \cdot \|y\|(F_{x_0}(ty) - E_{x_0}(ty))$, de donde $|t| \cdot \|L_1(y) - L_2(y)\| = |t| \cdot \|y\| \cdot \|F_{x_0}(ty) - E_{x_0}(ty)\|$. Teniendo en cuenta que $\lim_{t \rightarrow 0} \|F_{x_0}(ty) - E_{x_0}(ty)\| = 0$, concluimos que

$$\|L_1(y) - L_2(y)\| = \lim_{t \rightarrow 0} \|y\| \cdot \|F_{x_0}(ty) - E_{x_0}(ty)\| = 0,$$

de donde $L_1(y) = L_2(y)$, para todo $y \in \mathbb{R}^m$. □

Proposición 3.2.3. Si f es diferenciable en x_0 , entonces f es continua en x_0 .

Demostración. Como $f(x) - f(x_0) = L(x - x_0) + \|x - x_0\| \cdot E_{x_0}(x - x_0)$, con $\lim_{x \rightarrow x_0} E_{x_0}(x - x_0) = 0$, si tomamos límites a ambos lados de la igualdad teniendo en cuenta que toda función lineal es continua (ver proposición 2.3.15), resulta que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} L(x - x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \|x - x_0\| \cdot E_{x_0}(x - x_0) = 0,$$

de donde $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. \square

Proposición 3.2.4. Si f es diferenciable en x_0 , existen las derivadas direccionales de f en x_0 para cualquier dirección $v \in \mathbb{R}^m$ ($\|v\| = 1$) y además $f'_v(x_0) = df_{x_0}(v)$.

Demostración. Por hipótesis,

$$f(x_0 + hv) = f(x_0) + L_{x_0}(hv) + \|hv\| \cdot E_{x_0}(hv), \text{ con } \lim_{h \rightarrow 0} E_{x_0}(hv) = 0.$$

Teniendo en cuenta que $L_{x_0}(hv) = hL_{x_0}(v)$, de lo anterior se deduce que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(L_{x_0}(v) + \frac{|h|}{h} \cdot \|v\| E_{x_0}(hv) \right).$$

En definitiva, $f'_v(x_0) = L_{x_0}(v)$. \square

Proposición 3.2.5. Si f es diferenciable en x y $v = (v_1, \dots, v_m)$ es un vector arbitrario de \mathbb{R}^m , entonces

$$df_x(v) = \sum_{k=1}^m D_k f(x) \cdot v_k.$$

Demostración. Si expresamos el vector v como combinación lineal de los elementos de la base canónica de \mathbb{R}^m , $v = \sum_{k=1}^m v_k e_k$, debido a la linealidad de L_x resulta que

$$L_x(v) = L_x \left(\sum_{k=1}^m v_k e_k \right) = \sum_{k=1}^m v_k L_x(e_k) = \sum_{k=1}^m v_k f'_k(x),$$

lo que demuestra la proposición. \square

En el caso particular de campos escalares, es decir funciones $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, un pequeño abuso de notación (cuando no hay lugar a confusión) permite expresar la diferencial de forma similar a la notación utilizada para funciones de una variable. Para ello, indicamos una dirección arbitraria mediante el vector $v = (dx_1, \dots, dx_n)$ y escribimos la diferencial como

$$df(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n$$

sin hacer mención explícita de la dependencia de la diferencial con respecto a v .

Definición. Si llamamos vector gradiente de una función $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto x a

$$\nabla f(x) = (D_1 f(x), \dots, D_m f(x)),$$

de lo anterior se deduce la *fórmula de Taylor de primer orden*

$$f(x+v) = f(x) + \langle \nabla f(x), v \rangle + \|v\| \cdot E_x(v) \text{ con } \lim_{v \rightarrow 0} E_x(v) = 0,$$

para funciones $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

Observación. Si $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, como

$$df_x(v) = \langle \nabla f(x), v \rangle = \|\nabla f(x)\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha,$$

donde α es el ángulo entre $\nabla f(x)$ y v , su valor es máximo cuando $\nabla f(x)$ tiene la misma dirección y sentido que v (pues $\cos \alpha = 1$) y su valor es mínimo cuando tiene sentido contrario (ahora $\cos \alpha = -1$). En el primer caso, su valor es $df_x(v) = \|\nabla f(x)\| \cdot \|v\|$.

Además, si $\nabla f(x) \neq 0$, el vector gradiente apunta en la dirección de mayor crecimiento de f .

Proposición 3.2.6 (condición suficiente de diferenciabilidad). *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que existen las derivadas parciales $D_k f$ ($1 \leq k \leq m$) en una bola de centro x_0 y son continuas en x_0 . Entonces f es diferenciable en x_0 .*

Demostración. Debemos probar que existe una función lineal $L_{x_0} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(*) = \lim_{v \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0 + v) - f(x_0) - L_{x_0}(v)}{\|v\|} \right| = 0.$$

Si representamos $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^m)$ y $v = (v_1, \dots, v_m)$, podemos escribir

$$\begin{aligned} f(x_0 + v) - f(x_0) &= f(x_0^1 + v_1, x_0^2 + v_2, \dots, x_0^m + v_m) - f(x_0^1, x_0^2 + v_2, \dots, x_0^m + v_m) \\ &\quad + f(x_0^1, x_0^2 + v_2, \dots, x_0^m + v_m) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3 + v_3, \dots, x_0^m + v_m) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{m-1}, x_0^m + v_m) - f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{m-1}, x_0^m). \end{aligned}$$

Cada diferencia es una función de una variable, definida en el segmento $[x_0^k, x_0^k + v_k]$, continua y derivable (si v_k es suficientemente pequeño). Por el teorema del valor medio, existe $\vartheta_k \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} &f(x_0^1, \dots, x_0^k + v_k, x_0^{k+1} + v_{k+1}, \dots, x_0^m + v_m) - f(x_0^1, \dots, x_0^k, x_0^{k+1} + v_{k+1}, \dots, x_0^m + v_m) \\ &= f'_k(x_0^1, \dots, x_0^k + \vartheta_k v_k, x_0^{k+1} + v_{k+1}, \dots, x_0^m + v_m) \cdot v_k. \end{aligned}$$

Si definimos $L_{x_0}(v) = \sum_{k=1}^m f'_k(x_0) \cdot v_k$, resulta

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{v \rightarrow 0} \left| \frac{\sum_{k=1}^m [f'_k(x_0^1, \dots, x_0^k + \vartheta_k v_k, x_0^{k+1} + v_{k+1}, \dots, x_0^m + v_m) - f'_k(x_0)] \cdot v_k}{\|v\|} \right| \\ &\leq \lim_{v \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m |f'_k(x_0^1, \dots, x_0^k + \vartheta_k v_k, x_0^{k+1} + v_{k+1}, \dots, x_0^m + v_m) - f'_k(x_0)| \cdot \frac{|v_k|}{\|v\|} \\ &\leq \sum_{k=1}^m \lim_{v \rightarrow 0} |f'_k(x_0^1, \dots, x_0^k + \vartheta_k v_k, x_0^{k+1} + v_{k+1}, \dots, x_0^m + v_m) - f'_k(x_0)|. \end{aligned}$$

Por la continuidad de f'_k , se deduce que dicho límite es cero. \square

Ejemplos.

- 1) La función $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, si $(x, y) \neq (0, 0)$, con $f(0, 0) = 0$, es continua en el origen (ver ejercicio 2.7). Además existen ambas derivadas parciales en el origen. Veamos, sin embargo, que f no es diferenciable en el origen:

$$\lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a,b) - f(0,0) - a \cdot f'_1(0,0) - b \cdot f'_2(0,0)}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} \frac{ab}{a^2 + b^2},$$

el cual no existe. En conclusión, podemos afirmar que alguna de las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ ó $\frac{\partial f}{\partial y}$ no es continua en el origen.

- 2) El recíproco de la proposición anterior no es cierto. En el ejercicio 3.10 se muestra una función diferenciable donde no son continuas las derivadas parciales.

Representación matricial de la diferencial

Debido a que la diferencial de una función es una función lineal, puede definirse mediante su representación matricial con respecto a las bases canónicas de \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n , respectivamente (como vimos en la sección 2.3).

Sea pues $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable en un punto x_0 y $L = df(x_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ su diferencial total en x_0 . Si $\{e_1, \dots, e_m\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^m , entonces

$$L(e_j) = f'_{e_j}(x_0) = D_j f(x_0) = (D_j f_1(x_0), \dots, D_j f_n(x_0)) = \sum_{k=1}^n D_j f_k(x_0) \cdot e_k.$$

Por tanto, la matriz asociada a L con respecto a las bases canónicas, llamada *matriz jacobiana* de f en x_0 es

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x_0) & \dots & D_m f_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n(x_0) & \dots & D_m f_n(x_0) \end{pmatrix}$$

donde f_k ($1 \leq k \leq n$) es la k -ésima función componente de f y $D_j f_k$ ($1 \leq j \leq m$) la j -ésima derivada parcial de f_k .

La fila k -ésima de dicha matriz es $(D_1 f_k(x_0), \dots, D_m f_k(x_0))$ y coincide precisamente con el vector gradiente de f_k en x_0 .

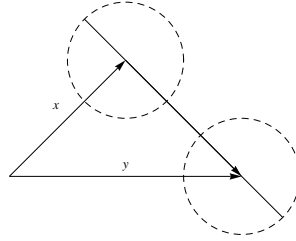
Teorema del valor medio

Un resultado interesante, que extiende en cierto modo al correspondiente para funciones de una variable, es el teorema del valor medio.

Teorema 3.2.7 (del valor medio). *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable en un abierto $D \subset \mathbb{R}^m$. Sean $x, y \in D$ dos puntos tales que el segmento que los une $[x, y]$ está contenido en D . Entonces*

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \exists z \in [x, y] : \langle a, f(y) - f(x) \rangle = \langle a, f'(z, y - x) \rangle.$$

Demostración. Sea $u = y - x$. Como D es abierto, existe $\delta > 0$, tal que $x + tu \in D$ para todo $t \in (-\delta, 1 + \delta)$.



Sea $a \in \mathbb{R}^n$ arbitrario y definimos $F(t) = \langle a, f(x + tu) \rangle$, $t \in (-\delta, 1 + \delta)$. Como F es diferenciable, $F'(t) = \langle a, f'_u(x + tu) \rangle = \langle a, df_{x+tu}(u) \rangle$.

Por el teorema del valor medio, $F(1) - F(0) = F'(c)$ para algún $c \in (0, 1)$. Como $F(1) - F(0) = \langle a, f(y) - f(x) \rangle$ y $F'(c) = \langle a, f'_u(x + cu) \rangle$, queda probado el teorema. \square

Observaciones.

- 1) En el caso particular de que $n = 1$, se puede tomar $a = 1$ y el teorema toma la forma conocida

$$f(y) - f(x) = f'(z, y - x) = \langle \nabla f(z), y - x \rangle.$$

- 2) Si $n \neq 1$, lo anterior puede no ser cierto, como se comprueba con la función $f(t) = (\cos t, \sin t)$: en este caso, $f(2\pi) - f(0) = (0, 0)$, pero, para cualquier $t \in [0, 2\pi]$,

$$f'(t, 2\pi) = 2\pi(-\sin t, \cos t),$$

que es un vector de longitud 2π y, por tanto, no nulo.

Corolario 3.2.8. Si $D \subset \mathbb{R}^m$ es un abierto y convexo, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable en D y $\|df(z)\| \leq k$, $\forall z \in D$, entonces $\|f(y) - f(x)\| \leq k\|y - x\|$, $\forall x, y \in D$.

Demostración. Si $x, y \in D$, entonces $[x, y] \subset D$ por ser convexo. Si elegimos el vector $a = \frac{f(y) - f(x)}{\|f(y) - f(x)\|}$, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y teniendo en cuenta el teorema anterior, resulta que

$$\|f(y) - f(x)\| = |\langle a, f(y) - f(x) \rangle| = |\langle a, f'(z, y - x) \rangle| \leq \|a\| \cdot \|f'(z, y - x)\| \leq k \cdot \|y - x\|,$$

debido a que $\|a\| = 1$. \square

En particular, si $df(z) = 0$, para todo $z \in D$, entonces f es constante.

Si una función de dos variables viene definida mediante una integral, para calcular sus derivadas aplicamos el siguiente resultado:

Proposición 3.2.9 (derivación bajo el signo integral). Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en un conjunto compacto $D \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}$ es también continua en D .

a) Si definimos

$$F(x) = \int_a^b f(x, y) dy,$$

entonces F es derivable y

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$$

b) Si $h_1, h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones derivables, entonces

$$F(x) = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy$$

es también derivable y

$$F'(x) = f(x, h_2(x)) \cdot h_2'(x) - f(x, h_1(x)) \cdot h_1'(x) + \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$$

Demostración. Para la primera parte, por definición de derivada,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} dy \\ &= \int_a^b \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy. \end{aligned}$$

De forma similar, si $F(x) = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy$, entonces

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\int_{h_1(x+h)}^{h_2(x+h)} f(x+h, y) dy - \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_{h_1(x+h)}^{h_1(x)} \frac{f(x+h, y)}{h} dy + \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} dy + \int_{h_2(x)}^{h_2(x+h)} \frac{f(x+h, y)}{h} dy \right). \end{aligned}$$

Aplicando el teorema del valor medio para integrales en el primero y tercer sumandos, se obtiene el resultado. \square

3.3. Derivación de funciones compuestas

Las reglas de derivación para la suma, resta, producto y cociente de funciones de una variable se extienden sin hipótesis adicionales al caso de funciones de varias variables.

El siguiente resultado general especifica las condiciones para la diferenciabilidad de una función compuesta.

Teorema 3.3.1 (regla de la cadena). Sean $g : \Delta \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable en $x_0 \in \text{int } \Delta$ y $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciable en $y_0 = g(x_0) \in \text{int } D$. Entonces $f \circ g$ es diferenciable en x_0 y

$$d(f \circ g)(x_0) = df(y_0) \circ dg(x_0).$$

Demostración. Como $x_0 \in \text{int } \Delta$, existe un vector $u \in \mathbb{R}^m$ tal que $x_0 + u \in \Delta$ y $g(x_0 + u) \in D$. Si llamamos $v = g(x_0 + u) - y_0$ (por la continuidad de g , si $u \rightarrow 0$, sabemos que $v \rightarrow 0$), podemos escribir

$$(f \circ g)(x_0 + u) - (f \circ g)(x_0) = f(y_0 + v) - f(y_0).$$

Por ser g diferenciable en x_0 ,

$$g(x_0 + u) - g(x_0) = v = dg_{x_0}(u) + \|u\| \cdot E_{x_0}(u), \text{ con } \lim_{u \rightarrow 0} E_{x_0}(u) = 0. \quad (3.1)$$

Análogamente, por la diferenciabilidad de f ,

$$f(y_0 + v) - f(y_0) = df_{y_0}(v) + \|v\| \cdot E_{y_0}(v), \text{ con } \lim_{v \rightarrow 0} E_{y_0}(v) = 0.$$

De estas dos igualdades y de la linealidad de df_{y_0} , resulta:

$$\begin{aligned} f(y_0 + v) - f(y_0) &= df_{y_0}(dg_{x_0}(u) + \|u\| \cdot E_{x_0}(u)) + \|v\| \cdot E_{y_0}(v) \\ &= (df_{y_0} \circ dg_{x_0})(u) + \|u\| \cdot E(u), \end{aligned}$$

$$\text{donde } E(u) = \begin{cases} df_{y_0}(E_{x_0}(u)) + \frac{\|v\|}{\|u\|} \cdot E_{y_0}(v) & \text{si } u \neq 0 \\ 0 & \text{si } u = 0. \end{cases}$$

Basta entonces probar que $\lim_{u \rightarrow 0} E(u) = 0$.

El primer sumando tiende a cero por hipótesis. En el segundo sumando, cuando $u \rightarrow 0$, también $v \rightarrow 0$, de modo que $\lim_{v \rightarrow 0} E_{y_0}(v) = 0$. Veamos por último que $\|v\|/\|u\|$ está acotado.

A partir de (3.1), resulta

$$\|v\| \leq \|dg_{x_0}(u)\| + \|u\| \cdot \|E_{x_0}(u)\| \leq \|u\| \cdot (M + \|E_{x_0}(u)\|),$$

donde $M = \sum_{k=1}^n \|\nabla g_k(x_0)\|$ (recordamos que dg_{x_0} es una función lineal).

En definitiva, $\|v\|/\|u\| \leq M + \|E_{x_0}(u)\|$, con lo que se concluye la prueba. \square

Observación. El resultado no es cierto si sólo existen las derivadas parciales de las funciones.

Por ejemplo, la función $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$ posee derivadas parciales en $(0, 0)$ y la función $g(x) = (x, x)$ es derivable en $x = 0$. Sin embargo, la función compuesta $(f \circ g)(x) = x^{2/3}$ no es derivable en $x = 0$.

Forma matricial de la regla de la cadena

Como la matriz asociada a la composición de aplicaciones lineales es el producto de las matrices asociadas a cada una de las funciones, de la fórmula anterior deducimos la llamada *forma matricial de la regla de la cadena*:

$$D(f \circ g)(x_0) = Df(g(x_0)) \cdot Dg(x_0).$$

Desarrollando el producto de estas matrices, podemos expresar el elemento de la fila j -ésima y columna i -ésima de la matriz $D(f \circ g)$ como:

$$D_i(f \circ g)_j(x_0) = \sum_{k=1}^n D_k f_j(g(x_0)) \cdot D_i g_k(x_0), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq p,$$

es decir,

$$\frac{\partial(f \circ g)_j}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j(g(x_0))}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial g_k(x_0)}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Escribimos a continuación el caso particular de una sola variable dependiente.

- a) $p = 1, m > 1$: Si $z = f(y_1, \dots, y_n)$ es una función diferenciable de los argumentos y_1, \dots, y_n , que son a su vez funciones diferenciables de las m variables independientes x_1, \dots, x_m ,

$$y_i = g_i(x_1, \dots, x_m), \quad 1 \leq i \leq n,$$

las derivadas parciales de la función compuesta se calculan con la fórmula:

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_k}(g(x_0)) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x_0), \quad 1 \leq i \leq m.$$

Veamos un ejemplo concreto bastante común:

Si z es una función compuesta de varias variables, por ejemplo $z = f(u, v)$, donde $u = \phi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ (x e y son variables independientes), ϕ y ψ son funciones diferenciables, las derivadas parciales de z con respecto a x e y se expresan así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

- b) $p = 1, m = 1$: Si $z = f(y_1, \dots, y_n)$ es una función diferenciable de los argumentos y_1, \dots, y_n , que son a su vez funciones diferenciables de una variable independiente x ,

$$y_i = g_i(x), \quad 1 \leq i \leq n,$$

la derivada de la función compuesta se puede calcular por la fórmula:

$$(f \circ g)'(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(g(x_0)) \cdot g'_i(x_0) = \nabla f(g(x_0)) \cdot Dg(x_0).$$

En el caso particular de que x coincida con uno de los argumentos, por ejemplo con y_k , la derivada total de la función f con respecto a x será:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot \frac{dy_i}{dx}.$$

Ejemplos.

- 1) Si $f(t) = (t, t^2, e^t)$ y $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, entonces $(g \circ f)(t) = g(t, t^2, e^t) = t^2 + t^4 + e^{2t}$.

Además,

$$(g \circ f)'(t) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) = 2x + 2y \cdot 2t + 2z \cdot e^t = 2t + 4t^3 + 2e^{2t}.$$

Por otra parte,

$$(f \circ g)(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, (x^2 + y^2 + z^2)^2, e^{x^2 + y^2 + z^2}),$$

y

$$D(f \circ g)(x, y, z) = \begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4xt & 4yt & 4zt \\ 2xe^t & 2ye^t & 2ze^t \end{pmatrix},$$

donde $t = x^2 + y^2 + z^2$.

- 2) Dadas las funciones $f(r, s, t) = (r + s + t, r - 2s + 3t, 2r + s - t)$ y $g(x, y, z) = x + 2yz$, si llamamos $x = r + s + t$, $y = r - 2s + 3t$, $z = 2r + s - t$, la derivada de $g \circ f$ es igual a

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(r, s, t) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2z & 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2z + 4y & 1 - 4z + 2y & 1 + 6z - 2y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.4. Plano tangente

En esta sección se da la interpretación geométrica de la diferencial, para lo cual consideraremos el caso particular de funciones $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) y llamamos $z_0 = f(x_0, y_0)$, sabemos que

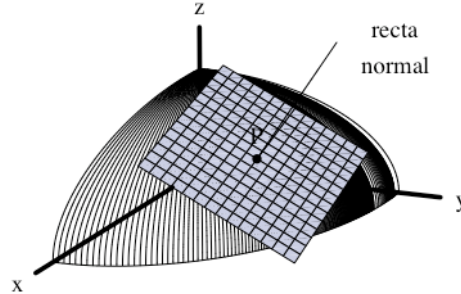
$$z - z_0 = D_1 f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + D_2 f(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + E(x - x_0, y - y_0),$$

donde E es un infinitésimo de orden superior a $\|(x - x_0, y - y_0)\|$.

El plano de ecuación

$$z - z_0 = D_1 f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + D_2 f(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

contiene a las rectas tangentes a las curvas que son la intersección de la superficie con los planos $x = x_0$ e $y = y_0$ (pues el producto escalar de su vector director $(D_1 f(x_0, y_0), D_2 f(x_0, y_0), -1)$ por los vectores directores de dichas tangentes, $(0, 1, D_2 f(x_0, y_0))$ y $(1, 0, D_1 f(x_0, y_0))$, es nulo).



Veamos que dicho plano también contiene a la tangente en el punto (x_0, y_0, z_0) a cualquier curva de la superficie que pase por (x_0, y_0, z_0) . Para ello, si llamamos $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ a la ecuación de dicha curva, donde $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$, su tangente en el punto (x_0, y_0, z_0) tiene como vector director a $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$. El producto escalar de dicho vector con el vector $(D_1f(x_0, y_0), D_2f(x_0, y_0), -1)$ es igual a $D_1f(x_0, y_0) \cdot x'(t_0) + D_2f(x_0, y_0) \cdot y'(t_0) - z'(t_0)$, el cual es nulo pues, de $z = f(x, y)$, resulta $z(t) = f(x(t), y(t))$ y, al derivar:

$$z'(t_0) = D_1f(x_0, y_0) \cdot x'(t_0) + D_2f(x_0, y_0) \cdot y'(t_0).$$

Por esta razón, el plano citado recibe el nombre de *plano tangente* a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) . La recta perpendicular a dicho plano por el punto (x_0, y_0, z_0) se llama *recta normal* a la superficie. La ecuación de la recta normal es, pues,

$$\frac{x - x_0}{D_1f(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{D_2f(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

En general, si una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es la superficie de nivel de una función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, es decir S tiene por ecuación $f(x, y, z) = k$, la ecuación del plano tangente a dicha superficie en un punto (x_0, y_0, z_0) es

$$\langle \nabla f(x_0, y_0, z_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0,$$

lo que significa que el vector gradiente es perpendicular al plano tangente a dicha superficie.

Por otra parte, dadas dos superficies $z = f(x, y)$ y $z = g(x, y)$, si llamamos C a la curva intersección de ambas, como $v_1 = (D_1f(x_0, y_0), D_2f(x_0, y_0), -1)$ y $v_2 = (D_1g(x_0, y_0), D_2g(x_0, y_0), -1)$ son vectores normales a C en el punto (x_0, y_0, z_0) , un vector tangente a C se obtiene como el producto vectorial $v = v_1 \times v_2$.

Por ejemplo, si C es la curva donde el plano $6x + 3y + 2z = 5$ corta al cono $z^2 = 4x^2 + 9y^2$, un vector tangente a C por el punto $(2, 1, -5)$ se obtiene del siguiente modo:

Definimos $f(x, y) = \frac{-6x - 3y + 5}{2}$ y $g(x, y) = -\sqrt{4x^2 + 9y^2}$. Entonces

$$f'_x = 3, f'_y = -3/2, g'_x = \frac{-4x}{\sqrt{4x^2 + 9y^2}}, g'_y = \frac{-9y}{\sqrt{4x^2 + 9y^2}}.$$

Por tanto, $v_1 = (f'_x(2, 1), f'_y(2, 1), -1) = (-3, -3/2, -1)$ y $v_2 = (g'_x(2, 1), g'_y(2, 1), -1) = (-8/5, -9/5, -1)$, con lo que $v = v_1 \times v_2 = (-3/10, -7/5, 3)$ es un vector tangente a la curva.

3.5. Derivadas de orden superior

Dada $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, cada una de las derivadas parciales es, a su vez, una función $D_k f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, ($k = 1, \dots, m$), definida en algún subconjunto de \mathbb{R}^m . Estas funciones se llaman *derivadas parciales de primer orden* de f . A su vez, para cada una de ellas se pueden definir las correspondientes derivadas parciales, que llamaremos *derivadas parciales de segundo orden* de f , y para las que usaremos indistintamente cualquiera de las siguientes notaciones:

$$D_i(D_k f) = D_{ki} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = f_{ki}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq k \leq m.$$

En el caso particular de $i = k$, utilizamos la notación análoga

$$(D_k)^2 f = D_{kk} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = f_{kk}, \quad (k = 1, \dots, m).$$

El proceso de derivación puede repetirse de forma sucesiva y de este modo definir las *derivadas parciales de orden p* de f como

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}$$

para cualquier permutación de los índices $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, m\}$.

Un problema interesante consiste en averiguar bajo qué condiciones existen y son iguales las derivadas cruzadas (aquellas en donde sólo se cambia el orden de la permutación). La respuesta la proporciona el siguiente teorema de Schwarz.

Teorema 3.5.1 (Schwarz). *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, donde D es un conjunto abierto. Si existen las derivadas parciales de primer orden $\partial f / \partial x_k$, $\forall k \in \{1, \dots, m\}$, en alguna bola $B(x_0, r) \subset D$ y existe $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ y es continua en x_0 , entonces existe también $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ y*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0).$$

Demostración. Para facilitar la notación, haremos la demostración para el caso de funciones de dos variables. Así pues, supondremos que $B((x_0, y_0), r) \subset D$, que existen $D_1 f$ y $D_2 f$ en $B((x_0, y_0), r)$ y que existe $D_{12} f(x_0, y_0)$ y es continua en (x_0, y_0) y probaremos que existe $D_{21} f(x_0, y_0)$, con $D_{21} f(x_0, y_0) = D_{12} f(x_0, y_0)$.

Sea (h, k) un vector tal que $(x_0, y_0) + (h, k) \in B((x_0, y_0), r)$ y definimos la función

$$\Phi(h, k) = [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)] - [f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)]$$

que escribiremos como $\Phi(h, k) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$, donde $\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$.

Como φ es derivable (pues depende de la primera variable de f), podemos aplicar el teorema del valor medio. Entonces existe $\vartheta_1 \in (0, 1)$ tal que $\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = h \cdot \varphi'(x_0 + \vartheta_1 h)$.

Así pues,

$$\Phi(h, k) = h \cdot (D_1 f(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + k) - D_1 f(x_0 + \vartheta_1 h, y_0)).$$

Como D_1f es derivable respecto a su segunda variable, aplicamos nuevamente el teorema del valor medio. Resulta así que existe $\vartheta_2 \in (0, 1)$ tal que

$$\Phi(h, k) = h \cdot k \cdot D_{12}f(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + \vartheta_2 k).$$

Por ser $D_{12}f$ continua en (x_0, y_0) ,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Phi(h, k)}{h \cdot k} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} D_{12}f(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + \vartheta_2 k) = D_{12}f(x_0, y_0).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Phi(h, k)}{h \cdot k} &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{h} \left[\frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k} - \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [D_2f(x_0 + h, y_0) - D_2f(x_0, y_0)] = D_{21}f(x_0, y_0), \end{aligned}$$

lo que demuestra la igualdad $D_{12}f(x_0, y_0) = D_{21}f(x_0, y_0)$. \square

Un resultado similar, cuya demostración puede encontrarse en [Ma], es el siguiente.

Teorema 3.5.2 (Young). *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, donde D es un conjunto abierto. Si existen las derivadas parciales de primer orden $\partial f / \partial x_k$, $\forall k \in \{1, \dots, m\}$, en alguna bola $B(x_0, r) \subset D$ y son diferenciables en x_0 , entonces*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0).$$

Ejemplos. Si falla alguna de las hipótesis, podemos encontrar casos en el que las derivadas cruzadas no coinciden y también es posible que exista una de ellas pero no la otra.

- 1) Consideremos la función $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$, si $(x, y) \neq (0, 0)$, y $f(0, 0) = 0$. En primer lugar, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0.$$

Por otra parte, aplicando las reglas usuales de derivación, si $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k^5/k^4}{k} = -1, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^5/h^4}{h} = 1. \end{aligned}$$

Observamos que las derivadas cruzadas no coinciden en el origen, porque no son diferenciables.

2) Sea ahora la función $f(x, y) = \frac{x - \operatorname{sen} x}{y - \operatorname{sen} y}$, si $y \neq 0$, y $f(x, 0) = -1$. En primer lugar, si $y \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - \operatorname{sen} h}{h(y - \operatorname{sen} y)} = 0.$$

$$\text{Si } y = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1 + 1}{h} = 0.$$

$$\text{Por tanto, } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{k} = 0.$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, k) - f(x, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{x - \operatorname{sen} x}{k - \operatorname{sen} k} + 1}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x + k - \operatorname{sen} k}{k(k - \operatorname{sen} k)},$$

que no existe. Por tanto, tampoco existe $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Definición. Diremos que una función es de clase $C^{(p)}$ en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^m$, denotado como $f \in C^{(p)}(D)$, cuando existen y son continuas todas las derivadas parciales de orden p de f en D . En particular, $C^{(0)}$ es la clase de funciones continuas y $C^{(\infty)}$ representa la clase de funciones con derivadas continuas de cualquier orden. Así por ejemplo, como ya demostramos en la proposición 3.2.6, una función de clase $C^{(1)}$ es diferenciable. Es fácil también probar que $C^{(p)}(D) \subset C^{(p-1)}(D)$, $\forall p > 0$.

Del teorema anterior, es evidente que, si $f \in C^{(2)}(D)$, entonces también se verifica la igualdad de las derivadas parciales cruzadas.

Análogamente, se prueba que, si $f \in C^{(k)}(D)$, son iguales todas las derivadas cruzadas de orden k , es decir

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{p(1)}} \dots \partial x_{i_{p(k)}}},$$

donde $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$ y $\{p(1), \dots, p(k)\}$ es cualquier permutación de $\{i_1, \dots, i_k\}$.

3.6. Fórmula de Taylor

Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en un punto x_0 . Por definición de diferenciabilidad, sabemos que

$$f(x) = f(x_0) + \langle Df(x_0), x - x_0 \rangle + R_1(x, x_0),$$

donde el resto $R_1(x, x_0)$ verifica que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x, x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$ y, si llamamos $x - x_0 = (h_1, \dots, h_m)$, podemos escribir

$$\langle Df(x_0), x - x_0 \rangle = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot h_i.$$

La fórmula

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot h_i + R_1(x, x_0),$$

recibe el nombre de *fórmula de Taylor de primer orden* de la función f en el punto x_0 pues permite aproximar la función mediante un polinomio de primer grado en m variables.

Una extensión de esta fórmula puede obtenerse mediante derivadas de orden superior como se demuestra a continuación.

Teorema 3.6.1. *Supongamos que $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ está definida en un abierto $D \subset \mathbb{R}^m$. Si f y todas sus derivadas parciales de orden menor o igual que p son diferenciables en D y dos puntos $x_0, x \in D$ verifican que el segmento que los une está contenido en D , si llamamos $x - x_0 = h = (h_1, \dots, h_m)$, entonces:*

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ \sum_{i=1}^m D_i f(x_0) \cdot h_i + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^m D_{ij} f(x_0) \cdot h_i h_j + \dots \\ &+ \frac{1}{p!} \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m D_{i_1 \dots i_p} f(x_0) \cdot h_{i_1} \dots h_{i_p} + R_p(x_0, h), \end{aligned}$$

donde $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_p(x_0, h)}{\|h\|^p} = 0$.

Demostración. Definimos la función $g(t) = f(x_0 + th)$, $0 \leq t \leq 1$.

Por hipótesis, g tiene derivadas continuas hasta el orden p en $[0, 1]$. Podemos aplicar la fórmula de Taylor para funciones de una variable:

$$g(1) = g(0) + \sum_{k=1}^p \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{(p+1)}(\vartheta)}{(p+1)!}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} g(0) &= f(x_0), \\ g'(0) &= \sum_{i=1}^m D_i f(x_0) \cdot h_i, \\ g''(0) &= \sum_{i,j=1}^m D_{ij} f(x_0) \cdot h_i h_j, \\ &\dots \\ g^{(p)}(0) &= \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m D_{i_1 \dots i_p} f(x_0) \cdot h_{i_1} \dots h_{i_p}. \end{aligned}$$

Sustituyendo las derivadas en la fórmula anterior se obtiene la correspondiente fórmula de Taylor para funciones de m variables. \square

En particular, si $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase $C^{(2)}$ en un punto x_0 (lo que significa que existen y son continuas las derivadas parciales de segundo orden de la función en dicho

punto), entonces la *fórmula de Taylor de segundo orden* de la función f en el punto x_0 es la siguiente:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \cdot h_i \cdot h_j + R_2(x, x_0),$$

con $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_2(x, x_0)}{\|x - x_0\|^2} = 0$ y $x - x_0 = (h_1, \dots, h_m)$.

Si definimos la *matriz hessiana* de f en el punto x_0 como

$$Hf(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,m},$$

la fórmula de Taylor de segundo orden se puede escribir como

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} (x - x_0) \cdot Hf(x_0) \cdot (x - x_0)^T + R_2(x, x_0),$$

donde denotamos por $(x - x_0)^T$ a la matriz columna formada por las componentes del vector $x - x_0$.

Vamos a encontrar una expresión para el resto en algunos casos particulares.

Utilizamos la función ya definida $g(t) = f(x_0 + th)$ y calculamos su derivada:

$$g'(t) = \sum_{i=1}^m D_i f(x_0 + th) \cdot h_i.$$

Si integramos entre 0 y 1 ambos lados de la expresión, resulta:

$$g(1) - g(0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^m \int_0^1 D_i f(x_0 + th) \cdot h_i dt.$$

Ahora integramos por partes llamando $u = D_i f(x_0 + th) \cdot h_i$ y $v = t - 1$. Se obtiene:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^m \left(D_i f(x_0) \cdot h_i + \sum_{j=1}^m \int_0^1 (1-t) D_{ij} f(x_0 + th) \cdot h_i h_j dt \right).$$

Así pues, el último sumando da una fórmula explícita del resto en la fórmula de Taylor de primer orden.

Más importante en las aplicaciones es el resto de segundo orden. Para ello, en la fórmula

$$R_1(x, x_0) = \sum_{i,j=1}^m \int_0^1 (1-t) D_{ij} f(x_0 + th) \cdot h_i h_j dt$$

integramos respecto a t en el intervalo $[0, 1]$ con $u = D_{ij}f(x_0 + th) \cdot h_i h_j$ y $v = -(t-1)^2/2$:

$$\begin{aligned} R_1(x, x_0) &= - \sum_{i,j=1}^m D_{ij}f(x_0 + th) \cdot h_i h_j \cdot \frac{(t-1)^2}{2} \Big|_0^1 \\ &\quad + \sum_{i,j,k=1}^m \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2} D_{ijk}f(x_0 + th) \cdot h_i h_j h_k dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m D_{ij}f(x_0) \cdot h_i h_j + \sum_{i,j,k=1}^m \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2} D_{ijk}f(x_0 + th) \cdot h_i h_j h_k dt. \end{aligned}$$

Obtenemos así $R_2(x, x_0) = \sum_{i,j,k=1}^m \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2} D_{ijk}f(x_0 + th) \cdot h_i h_j h_k dt$ y, si suponemos que el integrando es una función continua de t (para lo que basta que $f \in C^{(3)}$), también será acotada y $|R_2(x, x_0)| \leq \|h\|^3 \cdot M$, con lo que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|R_2(x, x_0)|}{\|h\|^2} = 0$.

Otra fórmula explícita para el error en el caso de que la función sea de clase $C^{(3)}$ en un entorno del punto x_0 se obtiene a partir de la fórmula anterior aplicando el teorema del valor medio para integrales. De este modo, existe c , contenido en el segmento que une x_0 con x , tal que

$$R_2(x, x_0) = \left(\int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2} dt \right) \cdot \sum_{i,j,k=1}^m D_{ijk}f(c) \cdot h_i h_j h_k = \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(c) \cdot h_i \cdot h_j \cdot h_k.$$

3.7. Ejercicios

Ejercicio 3.1. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = e^{xy}$.

c) $f(x, y, z) = \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

b) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$.

d) $f(x, y, z) = x^{y^z}$.

Ejercicio 3.2. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\alpha(|x| + |y|)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ \beta & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Hallar la relación entre α y β para que existan las derivadas parciales de f en $(0, 0)$.

Ejercicio 3.3. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en los puntos indicados y respecto a los vectores unitarios dados:

a) $f(x, y) = x + 2xy - 3y^2$, $P = (1, 2)$, $u = (3/5, 4/5)$.

b) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$, $P = (1, 0)$, $u = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.

c) $f(x, y) = e^x \cos \pi y$, $P = (0, -1)$, $u = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

Ejercicio 3.4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = x/y$, si $y \neq 0$ y $f(x, 0) = 0$. Estudiar las derivadas direccionales de f en $(0, 0)$ respecto a cualquier vector de \mathbb{R}^2 . Comprobar que no es continua y que no está acotada en un entorno de $(0, 0)$.

Ejercicio 3.5. Sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy = 0 \\ 1 & \text{si } xy \neq 0. \end{cases}$$

Estudiar sus derivadas direccionales en $(0, 0)$ respecto a cualquier vector de \mathbb{R}^2 . Comprobar que no es continua pero sí está acotada.

Ejercicio 3.6. Sea $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \quad h(0, 0) = 0.$$

Estudiar las derivadas direccionales de f en $(0, 0)$. Comprobar que no es continua.

Ejercicio 3.7. Estudiar la diferenciabilidad en el origen de las siguientes funciones:

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x|y|)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + xy + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$d) f(x, y) = \begin{cases} \sin(xy) \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$e) f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^\alpha \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ejercicio 3.8. Sea $f(x, y) = x \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$. Comprobar que es continua en $(0, 0)$. Estudiar su diferenciabilidad en $(0, 0)$.

Ejercicio 3.9. Sea $f(x, y) = \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$. Comprobar que es continua en $(0, 0)$. Calcular las derivadas direccionales de f . Estudiar su diferenciabilidad en el origen.

Ejercicio 3.10. Sea $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$. Calcular las derivadas parciales y estudiar su continuidad en el origen. Estudiar su diferenciabilidad en el origen.

Ejercicio 3.11. Sea $f(x, y) = \begin{cases} (e^{x+y}, \sin(x-y), x^2 \sin(1/x)) & \text{si } x \neq 0 \\ (e^y, \sin(-y), 0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$ Estudiar su diferenciabilidad en el origen.

Ejercicio 3.12. Sea $g(x, y, z) = (\cos yz, xyz, \frac{1}{z})$ si $z \neq 0$, $g(x, y, 0) = (1, 0, 0)$. Estudiar su diferenciabilidad en el origen.

Ejercicio 3.13. Sea $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^3 + y^6}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$. Calcular las derivadas direccionales en el origen.

Ejercicio 3.14. Sea $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$. Calcular las derivadas parciales y estudiar su continuidad en el origen. Estudiar su diferenciabilidad en el origen.

Ejercicio 3.15. Sea

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^4} & \text{si } x^2 + y^4 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^4 = 0. \end{cases}$$

Calcular si existen $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Estudiar su diferenciabilidad.

Ejercicio 3.16. Calcular a, b, c para que la derivada direccional de la función $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ en el punto $(1, 2, -1)$ tenga un valor máximo de 64 en una dirección paralela al eje OZ.

Ejercicio 3.17. Sean $f_1, \dots, f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Si definimos $f : (a, b) \times \dots \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n),$$

probar que f es diferenciable en $(a, b) \times \dots \times (a, b)$ y $df_x(y) = \sum_{i=1}^n f'_i(x_i) \cdot y_i$.

Ejercicio 3.18. Hallar las matrices asociadas a la diferencial de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$.

d) $f(x, y) = x^{y+z}$.

b) $f(x, y, z) = (z \sin x, z \sin y)$.

c) $f(x, y) = (\sin(xy), \cos(xy), x^2y^2)$.

e) $f(x, y, z) = (z^{xy}, x^2, \operatorname{tg}(xyz))$.

Ejercicio 3.19. Hallar las diferenciales de las funciones compuestas:

a) $z = f(u, v)$, $u = x + y$, $v = x - y$.

b) $w = f(u, v)$, $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$.

c) $z = f(u, v)$, $u = xy$, $v = x/y$.

Ejercicio 3.20. Sea $f(x, y, z) = (\sin(xy + z), (1 + x^2)^{yz})$ y sea $g(u, v) = (u + e^v, v + e^u)$.

- a) Demostrar que f es derivable en $(1, -1, 1)$ y calcular $Df(1, -1, 1)$.
 b) Demostrar que g es derivable en $(0, 1/2)$ y calcular $Dg(0, 1/2)$.
 c) Calcular $D(g \circ f)(1, -1, 1)$.

Ejercicio 3.21. Describir $\frac{\partial h}{\partial x}$ para:

- a) $h(x, y) = f(x, u(x, y))$.
 b) $h(x) = f(x, u(x), v(x))$.
 c) $h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y), w(x))$.

Ejercicio 3.22. Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie definida por

$$f(x, y) = \ln(x^2 + 2xy + 1) + \int_0^x \cos^2 t \, dt$$

en el punto correspondiente a $(1, 1)$.

Ejercicio 3.23. Hallar el plano tangente a la superficie $z = 2x^2 + y^2$ en $(x, y) = (1, 0)$ y a la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $(x, y) = (0, -2)$.

Ejercicio 3.24. Hallar las rectas tangentes a las curvas parametrizadas siguientes:

- a) $g(t) = (t, t^2, t^3)$ en $g(0)$ y $g(1)$.
 b) $g(t) = (t - 1, t^2, 2)$ en $g(0)$ y $g(1)$.
 c) $g(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, t)$ en $g(\pi/2)$ y $g(\pi)$.

Ejercicio 3.25. Hallar los planos tangentes a las superficies parametrizadas siguientes:

- a) $h(s, t) = (s, t, s^2 + t^2)$ en $h(0, 0)$ y $h(1, 1)$.
 b) $h(s, t) = (s + t, s - t, s^2 - t^2)$ en $h(0, 0)$ y $h(1, 2)$.
 c) $h(s, t) = (s \cos t, s \sin t, t)$ en $h(1, 0)$ y $h(2, \pi/2)$.

Ejercicio 3.26. Decimos que una función $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es homogénea de grado α cuando

$$f(tx_1, \dots, tx_m) = t^\alpha f(x_1, \dots, x_m)$$

para todo $t > 0$, siempre que $(x_1, \dots, x_m), (tx_1, \dots, tx_m) \in D$.

- a) Si f es una función diferenciable y homogénea de grado α , probar que f'_1, \dots, f'_m son funciones homogéneas de grado $\alpha - 1$.
- b) Si f es diferenciable, demostrar que f es homogénea de grado α si y sólo si verifica la identidad de Euler siguiente:

$$(*) \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_m \frac{\partial f}{\partial x_m} = \alpha f(x_1, \dots, x_m).$$

[Indicación: Considerar la función $F(t) = \frac{f(tx_1, \dots, tx_m)}{t^\alpha}$.]

- c) Si $z = f(x, y)$ es homogénea de grado α y definimos $F(x, y) = f(f(x, y), f(x, y))$, probar que F es homogénea de grado α^2 .

Ejercicio 3.27. Estudiar la homogeneidad y comprobar la identidad de Euler para las siguientes funciones:

a) $f(x, y, z) = (x - 2y + 3z)^2$.

b) $f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

c) $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{y/z}$.

Ejercicio 3.28. Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{sen}(x/y) & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0, \end{cases}$$

calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. ¿A qué se debe el resultado?

Ejercicio 3.29. Hallar las derivadas parciales de primer y segundo orden de las siguientes funciones:

a) $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

e) $u = x^y$.

b) $u = xy + x/y$.

f) $u = \ln(x + y^2)$.

c) $u = \frac{\cos x^2}{y}$.

g) $u = \operatorname{arc tg}(y/x)$.

d) $u = \operatorname{tg}(x^2/y)$.

h) $u = \operatorname{arc tg} \frac{x+y}{1-xy}$.

Ejercicio 3.30. Si $z = f(x, y)$, con $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, entonces $z = g(u, v) = f(u \cos v, u \operatorname{sen} v)$. Expresar $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ y $\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ en función de las derivadas parciales de f .

Ejercicio 3.31. Si $f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ comprobar que $D_{12}f(0, 0) \neq D_{21}f(0, 0)$.

Ejercicio 3.32. Dada $f(x, y) = x^{y^2}$, comprobar que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Ejercicio 3.33. Dada la función $f(x, y, z) = ze^{xy} + x^2yz^3$, comprobar que $f_{xyz} = f_{zyx}$.

Ejercicio 3.34. Dada la ecuación $[F(x) + G(y)]^2 e^{z(x, y)} = 2F'(x)G'(y)$, probar que $D_{21}z \neq 0$.

Ejercicio 3.35. Dada la función $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{k}{\sqrt{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{n-2}}}$ ($k \in \mathbb{R}$), hallar el valor de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x),$$

con $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Ejercicio 3.36. Dada la función $u = u(r, s)$ de clase $C^{(2)}$, si $x = 2r - s$, $y = r + 2s$, averiguar el valor de $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ en función de las derivadas con respecto a r y s .

Ejercicio 3.37. Sea $f(x, y) = e^x \sin(xy)$, donde $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$. Si llamamos k a la función compuesta $k(s, t) = f(g(s, t), h(s, t))$, calcular $\frac{\partial^2 k}{\partial s \partial t}$.

Ejercicio 3.38. Suponiendo que ϕ y ψ son funciones diferenciables un número suficiente de veces, comprobar que:

a) $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ si $z = \phi(x^2 + y^2)$.

b) $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$ si $z = \frac{y^2}{3x} + \phi(xy)$.

c) $x \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial u}{\partial y} + \beta z \frac{\partial u}{\partial z} = nu$ si $u = x^n \phi(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta})$.

d) $(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$ si $z = e^y \phi(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})$.

e) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ si $u = \phi(\frac{y}{x}) + x\psi(\frac{y}{x})$.

$$f) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ si } u = x\phi(x+y) + y\psi(x+y).$$

Ejercicio 3.39. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones con derivadas segundas continuas. Definimos $F(x, y) = f(x + g(y))$. Verificar si es cierta la igualdad $D_1 F \cdot D_{12} F = D_2 F \cdot D_{11} F$.

Ejercicio 3.40. Si $w(x, y) = f(x+y) + g(x-y)$, comprobar que $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f''(u) + g''(v)$, donde $u = x + y$, $v = x - y$.

Ejercicio 3.41. Si $w = \sin(x + ct) + \cos(2x + 2ct)$, comprobar que $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Ejercicio 3.42. Si f y g son funciones reales de una variable real que tienen derivadas de orden 2 continuas, se define

$$y(x, t) = f(x + at) + g(x - at).$$

Probar que y verifica la “ecuación de la cuerda vibrante” $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

Ejercicio 3.43. Averiguar cuáles de las siguientes funciones verifican la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$:

a) $u(x, y) = e^x \sin y$.

b) $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

c) $u(x, y) = f(x - y) + g(x + y)$ donde f y g son funciones reales diferenciables.

Ejercicio 3.44. Dada $f(x, y) = y^n e^{-x^2/4y}$, hallar n para que se verifique

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Ejercicio 3.45. Escribir el desarrollo de Taylor de segundo orden de las funciones siguientes en un entorno del punto indicado:

a) $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ en el punto $(-2, 1)$.

b) $f(x, y) = \sin(x + 2y)$ en el punto $(0, 0)$.

c) $f(x, y) = e^x \cos y$ en el punto $(0, 0)$.

d) $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos y$ en el punto $(1, 0)$.

e) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \cdot \cos(x+y)$ en el punto $(0, 0)$.

f) $f(x, y) = x^y$ en el punto $(1, 1)$.

Ejercicio 3.46. Sea la función $f(x, y) = e^{ax+y^2} + b \cdot \sin(x^2 + y^2)$. Determinar los valores de a y b para que el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el origen sea horizontal y el polinomio de Taylor de segundo orden centrado en el origen tome el valor 6 en el punto $(1, 2)$.