Álgebra lineal y Geometría II
Gloria Serrano Sotelo
Daniel Hernández Serrano
Departamento de MATEMÁTICAS

TEMA 1. CLASIFICACIÓN DE ENDOMORFISMOS.

Índice

1. Diagonalización por el polinomio característico.

1.1. Vectores y valores propios. Polinomio característico.

Sea E un k-espacio vectorial y $T\colon E \to E$ un endomorfismo de E. Recordemos que un subespacio vectorial V de E es invariante por T si $T(v) \in V$ para todo $v \in V$, es decir, si T restringe a un endomorfismo de V.

Ejemplo 1.1. Si $p(x) \in k[x]$ y T es un endomorfismo de E, $p(T)$ es también un endomorfismo de E y su núcleo $\ker p(T)$ es un subespacio de E invariante por T, pues si $e \in \ker p(T)$ es $p(T)\big(T(e)\big) = T\big(p(T)(e)\big) = 0$, luego $T(e) \in \ker p(T)$.

Definición 1.2. Sea $e \in E$ un vector no nulo. Diremos que e es un **vector propio** de T de **valor propio** $\lambda \in k$ si $T(e) = \lambda e$, o equivalentemente si $e \in \ker(T - \lambda \operatorname{Id})$. Por tanto, $\lambda \in k$ es un valor propio de T si y solo si $\ker(T - \lambda \operatorname{Id}) \neq 0$.

El subespacio $\ker(T - \lambda \operatorname{Id})$ es invariante por T y sus vectores no nulos son los vectores propios de valor propio $\lambda \in k$.

Definición 1.3. Se llama **polinomio característico** del endomorfismo T al polinomio $|x \operatorname{Id} - T|$, siendo T la matriz de T respecto de cualquier base de E. Lo representaremos por $c_T(x)$ y su grado es igual a la dimensión de E.

$$c_T(x) = |x \operatorname{Id} - T| \qquad \operatorname{grad} c_T(x) = \dim_k E$$

Proposición 1.4. *El polinomio característico es invariante por cambios de base.*

Demostración. Sea $T \in \operatorname{End}_k E$ y $\{e_1, ..., e_n\}$ una base de E en la que la matriz del endomorfismo T es A. El polinomio $\det(x\operatorname{Id} - A) = |x\operatorname{Id} - A|$ es invariante por cambios de base, pues si $\bar{A}$ es la matriz de T en otra base y B es la matriz del cambio de base, se verifica:

$$|x\operatorname{Id} - \bar{A}| = |x\operatorname{Id} - B^{-1}AB| = |B^{-1}(x\operatorname{Id} - A)B| = |B^{-1}||(x\operatorname{Id} - A)||B| = |x\operatorname{Id} - A|$$

□

Proposición 1.5. *Los valores propios de T coinciden con las raíces de su polinomio característico.*

Demostración.

$$\begin{aligned}\{\text{valores propios de } T\} &= \{\lambda \in k : \ker(T - \lambda\operatorname{Id}) \neq 0\} = \{\lambda \in k : T - \lambda\operatorname{Id} \text{ no es inyectivo}\} = \\ &= \{\lambda \in k : |T - \lambda\operatorname{Id}| = 0\} = \{\lambda \in k : (-1)^n|\lambda\operatorname{Id} - T| = 0\} = \\ &= \{\lambda \in k : c_T(\lambda) = 0\} = \{\text{raíces en } k \text{ de } c_T(x) = |x\operatorname{Id} - T|\}\end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.6. Calculemos los valores y vectores propios de los endomorfismos de matrices:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \; ; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Como $c_T(x) = |x\operatorname{Id} - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 2 \\ 0 & x+1 & -1 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)(x+1)(x-3)$, se tiene que los valores propios, las raíces de $c_T(x)$, son $\{1, -1, 3\}$. Calculemos los subespacios de vectores propios correspondientes:

- $\ker(T - \operatorname{Id}) = \langle v_1 = (1, 0, 0)\rangle$. En efecto,

$$\operatorname{rg}(A - \operatorname{Id}) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \implies \dim_k \ker(T - \operatorname{Id}) = 1\,, \quad \ker(T - \operatorname{Id}) = \begin{cases} -2y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- $\ker(T + \operatorname{Id}) = \langle v_2 = (1, -2, 0)\rangle$. En efecto,

$$\operatorname{rg}(A + \operatorname{Id}) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2 \implies \dim_k \ker(T + \operatorname{Id}) = 1\,, \quad \ker(T + \operatorname{Id}) = \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- $\ker(T - 3\operatorname{Id}) = \langle v_3 = (-7, 2, 8)\rangle$. En efecto,

$$\operatorname{rg}(A - 3\operatorname{Id}) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \implies \dim_k \ker(T - 3\operatorname{Id}) = 1\,, \ker(T - 3\operatorname{Id}) = \begin{cases} -2x + y - 2z = 0 \\ -4y + z = 0 \end{cases}$$

(b) Como $c_T(x) = |x\operatorname{Id} - A| = (x+3)(x-1)^2$, se tiene que los valores propios son $\{-3, 1 \text{ (doble)}\}$. Calculemos los subespacios de vectores propios correspondientes:

- $\ker(T + 3\operatorname{Id}) = \langle v_1 = (8, -4, 3)\rangle$. En efecto,

$$\operatorname{rg}(A + 3\operatorname{Id}) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2 \implies \dim_k \ker(T + 3\operatorname{Id}) = 1\,, \quad \ker(T + 3\operatorname{Id}) = \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ -x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

- $\ker(T - \operatorname{Id}) = \langle v_2 = (0, 0, 1)\rangle$. En efecto,

$$\operatorname{rg}(A - \operatorname{Id}) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \implies \dim_k \ker(T - \operatorname{Id}) = 1\,, \quad \ker(T - \operatorname{Id}) = \begin{cases} 2x = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

(c) $c_T(x) = |x \operatorname{Id} - A| = (x+3)(x-1)^3$ y solo hay un valor propio (el 1) que es triple. Se tiene que $\operatorname{rg}(A - \operatorname{Id}) = 1 \implies \dim_k \ker(T - \operatorname{Id}) = 1$ y

$$\ker(T - \operatorname{Id}) = \langle v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,1,0) \rangle \,.$$

Nótese que en el caso (a) existe una base de vectores propios pues $\{v_1, v_2, v_3\}$ son linealmente independientes y en esta base la matriz del endomorfismo tiene forma diagonal $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Sin embargo en los casos (b) y (c) solo existen dos vectores propios linealmente independientes.

1.2. Criterio de diagonalización por el polinomio característico.

Definición 1.7. Un **endomorfismo** $T \in \operatorname{End}_k E$ **es diagonalizable** si existe una base de E formada por vectores propios de T, es decir, si existe una base en la que la matriz asociada a T tiene forma diagonal.

Proposición 1.8. *Vectores propios de valores propios diferentes son linealmente independientes.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre el número m de vectores propios linealmente independientes.
Si $m = 1$ y e es un vector propio, es $e \neq 0$ y, por tanto, linealmente independiente. Supongamos cierta la proposición para toda colección de $m-1$ vectores propios de valores propios diferentes. Demostraremos que también lo es en el caso m:
Sean $e_1, \dots, e_m$ m vectores propios de valores propios λ_i diferentes. Si $a_1 e_1 + \cdots + a_m e_m = 0$ para ciertos $a_i \in k$, se verifica:

$$(T - \lambda_1 I)(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_m e_m) = 0 \Rightarrow a_1(\lambda_1 - \lambda_1)e_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_1)e_2 + \ldots + a_m(\lambda_m - \lambda_1)e_m = 0$$

Por hipótesis de inducción es $a_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \ldots = a_m(\lambda_m - \lambda_1) = 0$, y como $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$ ha de ser $a_2 = \ldots = a_m = 0$. Así pues se tiene que $a_1 e_1 = 0$, de donde $a_1 = 0$ pues $e_1 \neq 0$. □

Corolario 1.9. *Si T es un endomorfismo de un espacio vectorial E de dimensión n que tiene n valores propios diferentes, entonces T es diagonalizable.*

Demostración. Existen n vectores propios de valores propios diferentes que, por la proposición anterior, son linealmente independientes, luego forman una base de E. □

Teorema 1.10 (Criterio de diagonalización por el polinomio característico)**.** *Un endomorfismo de un k-espacio vectorial E es diagonalizable si y solo si su polinomio característico descompone en la forma:*

$$c_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_r)^{n_r} \,, \quad \textit{con } n_i = \dim_k \ker(T - \lambda_i I) \ \textit{para } i = 1, \dots, r \,,$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in k$ son los valores propios diferentes de T en el cuerpo k.

Demostración.
$\Rightarrow$) Si T es diagonalizable existe una base de vectores propios en la que la matriz A de T es diagonal. Agrupando vectores propios del mismo valor propio podemos suponer que la

matriz A se escribe así:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_r & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n_1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n_2 \\ \vdots \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n_r \end{matrix}$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son los valores propios diferentes y $n_i = \dim_k \ker(T - \lambda_i I)$. El polinomio característico es por tanto:

$$c_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_r)^{n_r}\,, \quad \text{donde } n_i = \dim_k \ker(T - \lambda_i I)\,.$$

$\Leftarrow$) Si $c_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_r)^{n_r}$ y $n_i = \dim_k \ker(T - \lambda_i I)$, resulta:

- $\dim_k E = \operatorname{grad} c_T(x) = n_1 + \ldots + n_r = \dim_k \ker(T - \lambda_1 I) + \ldots + \dim_k \ker(T - \lambda_r I)$.
- Además, como vectores propios de valores propios diferentes son linealmente independientes, la suma $\ker(T - \lambda_1 I) + \ldots + \ker(T - \lambda_r I)$ es directa:

$$\ker(T - \lambda_1 I) + \ldots + \ker(T - \lambda_r I) = \ker(T - \lambda_1 I) \oplus \ldots \oplus \ker(T - \lambda_r I) \subseteq E$$

Por tanto, $E = \ker(T - \lambda_1 I) \oplus \ldots \oplus \ker(T - \lambda_r I)$, y eligiendo una base en cada uno de los subespacios $\ker(T - \lambda_i I)$ se obtiene una base de E formada por vectores propios respecto de T. □

Ejemplo 1.11. Estudiemos si el endomorfismo T de $\mathbb{R}^3$ de matriz $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

$$|xI - T| = \begin{vmatrix} x & -2 & -2 \\ -1 & x+1 & 2 \\ -1 & -1 & x+2 \end{vmatrix} = (x-1)(x+2)^2$$

$$rg(T + 2I) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \ker(T + 2I) = 1.$$

Como para un valor propio falla el criterio del polinomio característico, la matriz no es diagonalizable.

Ejemplo 1.12. Sea T el endomorfismo definido por las ecuaciones $x' = -z, y' = x - z, z' = y - z$. Estudiemos su diagonalización sobre los cuerpos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad c_T(x) = |xI - A| = (x+1)(x^2+1)$$

(a) Sobre $\mathbb{R}$, $c_T(x) = (x+1)(x^2+1)$ es su descomposición en factores primos, luego en $\mathbb{R}$ no diagonaliza pues solo tiene un valor propio real -1.

(b) Sobre $\mathbb{C}$, $c_T(x) = (x+1)(x-i)(x+i)$ es su descomposición en factores primos, luego sobre $\mathbb{C}$ diagonaliza y su forma diagonal es $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

Ejemplo 1.13. Sea T el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x,y,z) = (x-3y+3z, 3x-5y+3z, 6x-6y+4z)\,.$$

Comprobemos que es diagonalizable y calculemos una base de diagonalización. La matriz asociada en la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, y su polinomio característico $c_T(x) = (x+2)^2(x-4)$. Los valores propios son por tanto: $\{-2(\text{doble}), 4\}$ y las dimensiones de los subespacios de vectores propios son:

$$\dim_{\mathbb{R}} \ker(T+2I) = 3 - rg(A+2I) = 2$$
$$\dim_{\mathbb{R}} \ker(T-4I) = 3 - rg(A-4I) = 1$$

Luego es diagonalizable (por el criterio de diagonalización del polinomio característico), pues la dimensión de cada uno de los subespacios propios coincide con la multiplicidad del valor propio correspondiente.
Una base de diagonalización es $\{v_1, v_2, v_3\}$, siendo $\{v_1, v_2\}$ una base de $\ker(T+2I)$ y $\{v_3\}$ una base de $\ker(T-4I)$. Calculemos v_1, v_2 y v_3.
La ecuación implícita de $\ker(T+2I)$ es $x-y+z=0$ de donde se obtiene que una base es $\{v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,1,1)\}$.
Las ecuaciones implícitas de $\ker(T-4I)$ son $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ y por tanto una base es $\{v_3 = (1,1,2)\}$.
En la base obtenida $\{v_1, v_2, v_3\}$ la matriz del endomorfismo T es $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y la matriz B del cambio de base que la relaciona con la matriz original $A = BDB^{-1}$ es $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 1.14. Calcular los endomorfismos diagonalizables T de $\mathbb{R}^3$ que verifican las condiciones:

(a) El plano $\pi \equiv x+y=0$ es un subespacio de vectores propios de T.
(b) $T(1,0,0) = (2,-1,1)$.

Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base en la que vienen dadas las condiciones (a) y (b). Como π es un subespacio de vectores propios es $\pi = \ker(T-\lambda I)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ y una base de π es $\{(1,-1,0) = e_1 - e_2, (0,0,1) = e_3\}$, siendo $T(e_1 - e_2) = \lambda(e_1 - e_2)$ y $T(e_3) = \lambda e_3$. Los vectores $\{e_1, e_1 - e_2, e_3\}$ son linealmente independientes, luego forman una nueva base de $\mathbb{R}^3$. De la condición (b) se sigue que $T(e_1) = 2e_1 - e_2 + e_3 = e_1 + (e_1 - e_2) + e_3$. Así, en la base fijada la matriz de T es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Calculemos el polinomio característico y veamos para qué valores de λ el endomorfismo T es diagonalizable:

- $c_T(x) = (x-1)(x-\lambda)^2$.
- Si $\lambda = 1$ es $c_T(x) = (x-1)^3$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad rg(A-I) = 1 \to \dim\ker(T-I) = 2$$

Por tanto T no es diagonalizable para $\lambda = 1$.

- Para todo $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$ es $c_T(x) = (x-1)(x-\lambda)^2$ (2 valores propios distintos).

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad rg(A-\lambda I) = 1 \Rightarrow \dim\ker(T-\lambda I) = 2$$

Luego en este caso T diagonaliza y su forma diagonal es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

2. Diagonalización por el polinomio anulador.

2.1. Polinomio anulador.

Sea E un k-espacio vectorial de dimensión finita y T un endomorfismo de E.

Proposición 2.1. *Para todo vector no nulo $e \in E$ existe un polinomio $p(x) \in k[x]$ que lo anula, esto es $p(T)e = 0$.*

Demostración. Los vectores $e, T(e), T^2(e), \ldots, T^r(e), \ldots$ no son todos linealmente independientes, pues E es de dimensión finita.
Si m es el menor natural tal que $T^m(e)$ depende linealmente de los anteriores, es decir verifica:

$$T^m(e) = a_0 e + a_1 T(e) + \cdots + a_{m-1} T^{m-1} e\,, \quad (m \leq \dim_k E)$$

El polinomio $p(x) = x^m - a_{m-1}x^{m-1} - \cdots - a_1 x - a_0$ anula al vector e, $p(T)e = 0$. □

Teorema 2.2. *Existen polinomios que anulan a todos los vectores de E.*

Demostración. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E y, para cada $1 \leq i \leq n$, sea $p_i(x)$ un polinomio que anula al vector e_i, que existe por la proposición anterior.
Es claro que el polinomio producto $p(x) = p_1(x) \cdot \ldots \cdot p_n(x)$ anula a todo vector de E. □

Definición 2.3. Se llama **polinomio anulador** o polinomio mínimo de T al polinomio de menor grado que anula a todos los vectores de E. Se representa por $m_T(x)$ y se toma mónico, es decir, con coeficiente de mayor grado uno.

Teorema 2.4. *Cualquier polinomio que anula a todos los vectores de E es un múltiplo del polinomio anulador $m_T(x)$.*

Demostración. Sea $q(x)$ un polinomio que anula a todo vector de E. Como $m_T(x)$ es el de menor grado entre todos los que anulan, podemos dividir $q(x)$ entre $m_T(x)$ y se obtiene:

$$q(x) = m_T(x)c(x) + r(x)\,, \text{ con } r(x) = 0 \text{ ó } \operatorname{grad} r(x) < \operatorname{grad} m_T(x)$$

De donde $r(x) = q(x) - m_T(x)c(x)$, y como $q(x)$ y $m_T(x)$ anulan a todo vector de E también anula $r(x)$, luego $r(x) = 0$ ya que $m_T(x)$ es el de menor grado. □

Ejemplo 2.5. Sea $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}} E$ tal que $T^2 - 5T + 4I = 0$.
El polinomio $x^2 - 5x + 4$ anula a todo vector de E, luego es un múltiplo del polinomio anulador $m_T(x)$. Descomponiendo en factores primos $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$, se tienen las siguientes posibilidades para el polinomio mínimo de T:

$$m_T(x) = \begin{cases} x-1 & (T \text{ es la identidad, } T = I) \\ x-4 & (T \text{ es una homotecia vectorial de razón 4, } T = 4I) \\ (x-1)(x-4) & (T \text{ verifica: } (T-I)(T-4I) = 0) \end{cases}$$

Ejemplo 2.6.

- Si $T \in End_{\mathbb{R}}E$ verifica $T^2 + T + I = 0$ es $m_T(x) = x^2 + x + 1$, pues este polinomio no factoriza en $\mathbb{R}$.

- Si $T \in End_{\mathbb{Q}}E$ verifica $T^3 + 2I = 0$ es $m_T(x) = x^3 + 2$, pues el polinomio $x^3 + 2$ es irreducible en $\mathbb{Q}$.

Corolario 2.7. *Si V es un subespacio de E invariante por T, el anulador de T en V es un divisor de $m_T(x)$.*

Demostración. $m_T(x)$ anula a todo vector de V luego por el Teorema 2.4 es múltiplo del polinomio anulador de T sobre V. □

Corolario 2.8. *Si λ es un valor propio de T, λ es una raíz de su polinomio anulador.*

Demostración. Si λ es un valor propio de T, $\ker(T - \lambda I)$ es un subespacio de E invariante por T con polinomio anulador $x - \lambda$, luego, por el Corolario 2.7, $x - \lambda$ es un divisor de $m_T(x)$, esto es $m_T(x) = (x - \lambda)q(x)$. □

2.2. Primer Teorema de descomposición. Criterio de diagonalización por el polinomio anulador.

Teorema 2.9. (1^er Teorema de descomposición) *Sea E un k-espacio vectorial de dimensión finita, T un endomorfismo de E y $m_T(x) = p_1(x)^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r(x)^{n_r}$ la descomposición en factores primos de su polinomio anulador. Se verifica que E descompone en suma directa de subespacios invariantes por T:*

$$E = \ker p_1(T)^{n_1} \oplus \cdots \oplus \ker p_r(T)^{n_r}$$

Además, el polinomio anulador de T sobre $\ker p_i(T)^{n_i}$ *es* $p_i(x)^{n_i}$ *y* $\dim_k \ker p_i(T)^{n_i} \geq \operatorname{grad} p_i(x)^{n_i}$, *para $1 \leq i \leq r$.*

Demostración. Escribiendo $p(x) = p_1(x)^{n_1}$ y $q(x) = p_2(x)^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r(x)^{n_r}$, basta demostrar que $E = \ker p(T) \oplus \ker q(T)$.
Como $p(x)$ y $q(x)$ son primos entre sí su máximo común divisor es 1, luego existen polinomios $a(x)$ y $b(x)$ tales que:

$$a(x)p(x) + b(x)q(x) = 1 \tag{2.1}$$

- Veamos que $\ker p(T) \cap \ker q(T) = \{0\}$.
  Si $e \in \ker p(T) \cap \ker q(T) \Rightarrow p(T)e = 0 = q(T)e$, y de la ecuación 2.1 se sigue que $a(T)p(T)e + b(T)q(T)e = e = 0$.
- Probemos que $\ker p(T) + \ker q(T) = E$.
  Para cada $e \in E$ por 2.1 se verifica:

  $$e = a(T)p(T)e + b(T)q(T)e = p(T)(a(T)e) + q(T)(b(T)e) \in \ker p(T) + \ker q(T)$$

  pues $p(T)q(T) = 0$ ya que $m_T(x) = p(x)q(x)$.

• Para cada $i = 1 \ldots r$, $\ker p_i(T)^{n_i}$ es un subespacio invariante por T de anulador $p_i(x)^{n_i}$, pues si su anulador fuese un divisor de $p_i(x)^{n_i}$ sería de la forma $p_i(x)^{m_i}$ con $m_i \leq n_i$, pues $p_i(x)$ es primo. Por tanto, el polinomio $p_1(x)^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_r(x)^{m_r}$ anularía a todo vector de E, ya que $E = \ker p_1(T)^{n_1} \oplus \cdots \oplus \ker p_r(T)^{n_r}$, lo que es absurdo pues es de menor grado que $m_T(x)$.
• Probemos ahora que $\dim_k \ker p_i(T)^{n_i} \geq \operatorname{grad} p_i(x)^{n_i}$, para $1 \leq i \leq r$.
Existe al menos un vector no nulo $e \in \ker p_i(T)^{n_i}$ tal que $p_i(T)^{n_i - 1}(e) \neq 0$, pues en otro caso el anulador de $\ker p_i(T)^{n_i}$ sería $p_i(x)^{n_i - 1}$.
Si escribimos $s = \operatorname{grad} p_i(x)^{n_i}$, los s vectores $e, T(e), T^2(e), \ldots, T^{s-1}(e)$ son linealmente independientes, pues en otro caso se tendría que $a_0 e + a_1 T(e) + \cdots + a_{s-1} T^{s-1}(e) = 0$ con no todos los a_i nulos y por tanto el polinomio $a_0 e + a_1 x + \cdots + a_{s-1} x^{s-1} = 0$, que es de grado menor que s, anularía al vector e, lo que contradice lo supuesto. □

Corolario 2.10. (Criterio de diagonalización por el polinomio anulador) *Un endomorfismo es diagonalizable si y solo si su polinomio anulador descompone en producto de factores lineales diferentes.*

$$T \in \operatorname{End}_k E \text{ es diagonalizable} \Leftrightarrow m_T(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_r), \text{ con } \lambda_i \in k \text{ y } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j$$

Demostración.
$\Rightarrow$ Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in k$ son los valores propios diferentes de T, por el Corolario 2.8, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son raíces del polinomio anulador, esto es, $m_T(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_r)q(x)$. Por otra parte, como T es diagonalizable $E = \ker(T-\lambda_1 I)\oplus\cdots\oplus\ker(T-\lambda_r)$, luego el polinomio $(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_r)$ anula a todo vector de E. Por tanto, tiene que ser $m_T(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_r)$.
$\Leftarrow$ Si $m_T(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_r)$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, por el 1^er teorema de descomposición es $E = \ker(T-\lambda_1 I)\oplus\cdots\oplus\ker(T-\lambda_r)$, lo que prueba que T es diagonalizable.

□

Ejemplo 2.11. Todos los endomorfismos T de un espacio vectorial que verifican la condición $T^3 + 2T^2 - T - 2I = 0$ son diagonalizables.
En efecto, el polinomio $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x+2)(x+1)(x-1)$ anula a todo vector de E, luego es múltiplo del polinomio anulador, y como descompone en producto de factores lineales todos diferentes, T es diagonalizable.

Ejemplo 2.12. Calculemos el polinomio característico del endomorfismo T de $\mathbb{R}^4$ con polinomio anulador $m_T(x) = (x-2)(x-5)$, sabiendo que sólo tiene un vector propio de valor propio 2 linealmente independiente. Por el primer teorema de descomposición T es diagonalizable, $E = \ker(T-2I)\oplus\ker(T-5I)$, y como $\dim\ker(T-2I) = 1$ es $\dim\ker(T-5I) = 3$. Así, su forma diagonal es $D = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 5 & & \\ & & 5 & \\ & & & 5 \end{pmatrix}$ y su polinomio característico $c_T(x) = |xI - D| = (x-2)(x-5)^3$.

Ejemplo 2.13. Todos los endomorfismos T tales que $T^2 = 4I$ son diagonalizables sobre $\mathbb{R}$, pues el polinomio $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ anula a todo vector del espacio, y por tanto su anulador puede ser: $x-2$, $x+2$ o $(x-2)(x+2)$.
Observa que en los dos primeros casos el endomorfismo T es una homotecia de razón 2 y -2, respectivamente, pues que el anulador sea $x \pm 2$ significa que $T = \pm 2I$.

2.3. Polinomio anulador y polinomio característico. Teorema de Caley-Hamilton.

Sea E un k-espacio vectorial de dimensión finita y T un endomorfismo de E.

Proposición 2.14. *Las raíces del polinomio anulador coinciden con las del polinomio característico y son los valores propios de T.*

Demostración. Ya hemos visto que las raíces del polinomio característico son los valores propios de T, y hemos demostrado que si $\lambda \in k$ es un valor propio del endomorfismo λ es una raíz de su polinomio anulador (ver Corolario 2.8). Así pues, queda por demostrar que si $\lambda \in k$ es una raíz del polinomio anulador λ es un valor propio de T:

Si $m_T(x) = (x-\lambda)^m q(x)$, siendo m la multiplicidad de la raíz λ, $(x-\lambda)$ y $q(x)$ son primos entre sí, luego por el primer teorema de descomposición es $E = \ker(T-\lambda I)^m \oplus \ker q(T)$ y existe $e \neq 0$ tal que $e \in \ker(T-\lambda I)^m$ y $(T-\lambda I)^{m-1}(e) \neq 0$, pues el anulador de $\ker(T-\lambda I)^m$ es $(x-\lambda)^m$. Por tanto, el vector $(T-\lambda I)^{m-1}(e)$ es un vector propio de valor propio λ, lo que prueba que λ es un valor propio de T.

□

Teorema 2.15. *Si el polinomio anulador y el polinomio característico de T descomponen sobre k en producto de factores lineales, es decir, tienen todas sus raíces en k, se verifica:*

$$\left.\begin{array}{l} m_T(x) = (x-\lambda_1)^{n_1}\cdots(x-\lambda_r)^{n_r} \\ c_T(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}\cdots(x-\lambda_r)^{m_r} \end{array}\right\} \text{ , siendo } n_i \le m_i \text{ y } \lambda_i \in k$$

Demostración. Por el primer teorema de descomposición, si $m_T(x) = (x-\lambda_1)^{n_1}\cdots(x-\lambda_r)^{n_r}$ es $E = \ker(T-\lambda_1 I)^{n_1} \oplus \cdots \oplus \ker(T-\lambda_r I)^{n_r}$, siendo $(x-\lambda_i)^{n_i}$ el anulador de $\ker(T-\lambda_i I)^{n_i}$ y $\dim_k \ker(T-\lambda_i I)^{n_i} \ge n_i$.
Elegidas bases en cada $\ker(T-\lambda_i I)^{n_i}$, se obtiene una base de E en la que la matriz de T es

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix} \text{ siendo } A_i \text{ la matriz de } T \text{ sobre } \ker(T-\lambda_i I)^{ni}$$

Calculando el característico de A se obtiene: $c_T(x) = c_{A_1}(x)\cdot\ldots\cdot c_{A_r}(x)$, donde $c_{A_i}(x)$ es el polinomio característico de A_i. Como el anulador de A_i es $(x-\lambda_i)^{n_i}$ resulta que $c_{A_i}(x) = (x-\lambda_i)^{m_i}$, siendo $m_i = \dim\ker(T-\lambda_i I)^{n_i}$ y por tanto $m_i \ge n_i$. □

Este teorema demuestra que si k es algebraicamente cerrado el polinomio característico es un múltiplo del polinomio anulador, es decir, el polinomio característico también anula, resultado que se conoce con el nombre de **Teorema de Caley-Hamilton**.

Ejemplo 2.16. Si $\dim E = 4$, $m_T(x) = (x+2)^2(x-4)$ y $\dim\ker(T-4I) = 1$, ¿cuál es su polinomio característico?
Por el primer teorema de descomposición:

$$E = \ker(T+2I)^2 \oplus \ker(T-4I)\,,$$

y como $\dim_{\mathbb{R}} \ker(T-4I) = 1$ es $c_T(x) = (x+2)^3(x-4)$.

Ejemplo 2.17. Si T es diagonalizable con polinomio característico $c_T(x) = (x-1)^2(x-3)^2$, ¿Cuál es su anulador? ¿Y su forma diagonal?

$$m_T(x) = (x-1)(x-3)\,, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.18. Si $\dim E = 6$, $m_T(x) = x^2(x-3)$ y existen sólo dos vectores propios de valor propio 3 linealmente independientes , ¿cuál es su polinomio característico?

$$c_T(x) = x^4(x-3)^2$$

3. Bases y formas de Jordan. Segundo teorema de descomposición.

Definición 3.1. Un vector no nulo $e \in E$ con polinomio mínimo $q(x)$ de grado m genera un subespacio $M_{q(x)} = \langle e, T(e), T^2(e), \ldots, T^{m-1}(e)\rangle$ de anulador es $q(x)$ y dimensión $m = \operatorname{grad} q(x)$, que llamaremos **subespacio monógeno de anulador** $q(x)$. Los subespacios monógenos son los subespacios invariantes por T de dimensión igual al grado de su polinomio anulador.

Definición 3.2. Dado un monógeno $M_{(x-\lambda)^m} = \langle e, T(e), T^2(e), \ldots, T^{m-1}(e)\rangle$ de anulador $(x-\lambda)^m$, se denomina **base de Jordan** de $M_{(x-\lambda)^m}$ a:

$$\{e, (T-\lambda I)(e), (T-\lambda I)^2(e), \ldots, (T-\lambda I)^{m-1}(e)\}\,,$$

siendo $e \in \ker(T-\lambda I)^m$ y $e \notin \ker(T-\lambda I)^{m-1}$.

La **forma canónica de Jordan** de dicho monógeno es la matriz, de la restricción al monógeno del endomorfismo T, asociada a su base de Jordan:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Observación 3.3. Cada monógeno de anulador $(x-\lambda)^m$ contiene un único vector linealmente independiente en $\ker(T-\lambda I)^i \setminus \ker(T-\lambda I)^{i-1}$, $i \leq m$, y en particular un único vector propio de valor propio λ linealmente independiente, precisamente el último vector de su base de Jordan.

Ejemplo 3.4. Sea T un endomorfismo de E y consideremos un monógeno de anulador $(x-2)^3$. Su base de Jordan es $\{e, (T-2I)(e), (T-2I)^2(e)\}$ siendo e un vector de E con polinomio mínimo $(x-2)^3$, lo que significa que $e \in \ker(T-2I)^3$ pero $e \notin \ker(T-2I)^2$.
Su forma canónica de Jordan es $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Definición 3.5. Un monógeno $M_{p(x)}$ de anulador el polinomio irreducible

$$p(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

tiene por **base de Jordan** $\{e, T(e), \ldots, T^{m-1}(e)\}$ y su forma canónica de Jordan es:

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix}$$

Un monógeno $M_{p(x)^r}$ de anulador $p(x)^r$ tiene por **base de Jordan**:

$\{e, T(e), \ldots, T^{m-1}(e), p(T)e, p(T)T(e), \ldots, p(T)T^{m-1}(e), \ldots, p(T)^{r-1}e, p(T)^{r-1}T(e), \ldots, p(T)^{r-1}T^{m-1}(e)\}$

y su forma canónica de Jordan es

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_m & & & \\ \hline 1 & A_m & & \\ \hline & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \\ \hline & & 1 & A_m \end{array}\right)$$

Ejemplo 3.6. Consideremos un monógeno de anulador $p(x)^2 = (x^2+2x+3)^2$. Sobre $\mathbb{R}$ el polinomio $p(x) = x^2+2x+3$ es irreducible.
Su base de Jordan es $\{e, T(e), (T^2+2T+3I)(e), (T^2+2T+3I)(T(e))\}$, donde el vector $e \in \ker(T^2+2T+3I)^2 / \ker(T^2+2T+3I)$.

Su forma canónica de Jordan es $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$, pues $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ es la matriz de T sobre el monógeno de anulador $x^2 + 2x + 3$.

Teorema 3.7 (Segundo Teorema de Descomposición)**.** *Sea T un endomorfismo de E. E descompone en suma directa de subespacios monógenos de anuladores potencias de los factores primos de su anulador.*
Si $m_T = p_1(x)^{m_1} p_2(x)^{m_2} \cdots p_r(x)^{m_r}$ es la descomposición en factores primos del polinomio anulador, por el primer teorema de descomposición es

$$E = \ker p_1(T)^{m_1} \oplus \ker p_2(T)^{m_2} \oplus \ker p_r(T)^{m_r}$$

y cada subespacio de esta descomposición, de la forma $\ker p(T)^m$, descompone en suma directa de monógenos de anuladores $p(x), p(x)^2, \dots, p(x)^m$:

$$\ker p(T)^m = M_{p(x)}^{\oplus \nu_1} \oplus M_{p(x)^2}^{\oplus \nu_2} \oplus \cdots \oplus M_{p(x)^m}^{\oplus \nu_m},$$

donde ν_i es el número de monógenos de anulador $p(x)^i$, para $i = 1, \dots m$, y $\nu_m \neq 0$.

Observación 3.8. Elegidas bases de Jordan para los monógenos de la descomposición del Segundo Teorema de Descomposición, se obtiene una base de Jordan de E y respecto de ella, la matriz de T (la matriz de Jordan de T) es

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_m \end{pmatrix}$$

siendo J_i la matriz de Jordan del monógeno correspondiente.

Observación 3.9. Si $m_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_r)^{n_r}$ la matriz de Jordan de T puede escribirse como $J = D + N$, donde D es una matriz diagonal y N es una matriz nilpotente de orden de nilpotencia $\max_i \{n_i\}$.

4. Aplicaciones de la clasificación de endomorfismos.

4.1. Potencia, inversa y raíces de una matriz.

- **Potencia de una matriz.**
  Si A es diagonalizable, $A = BDB^{-1}$, y tenemos

$$A^n = (BDB^{-1})^n = (BDB^{-1})(BDB^{-1}) \overset{n}{\ldots} (BDB^{-1}) = BD^nB^{-1}$$

  Si A no es diagonalizable y $m_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_r)^{n_r}$, $A = BJB^{-1}$ con $J = D + N$, siendo D diagonal (con entradas diagonales $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ con sus correspondientes multiplicidades) y N nilpotente de orden r. Entonces

$$A^n = BJ^nB^{-1} = (B(D+N)B^{-1})^n = B(D+N)^nB^{-1}$$

  siendo $(D+N)^n = D^n + \binom{n}{1} D^{n-1}N + \binom{n}{2} D^{n-2}N^2 + \ldots + \binom{n}{r-1} D^{n-r+1}N^{r-1}$.
- **Inversa de una matriz.**
  Si A es diagonalizable, $A = BDB^{-1}$,

$$A^{-1} = (BDB^{-1})^{-1} = BD^{-1}B^{-1}$$

  En general, y con $m_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_r)^{n_r}$,

$$A^{-1} = (BJB^{-1})^{-1} = B(D+N)^{-1}B^{-1}.$$

Se puede además usar que si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + x^r$ es un polinomio que anula a A, $p(A) = 0$ (por ejemplo el característico o el anulador), entonces

$$a_0I + a_1A + a_2A^2 + \ldots + A^r = 0 \Rightarrow -a_0I = A(a_1I + a_2A + \ldots + A^{r-1})$$

y por tanto $A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(a_1I + a_2A + \ldots + A^{r-1})$.

- **Raíz de una matriz.**
  $\sqrt[n]{A} \equiv A^{\frac{1}{n}}$ es una matriz X tal que $X^n = A$.
  Si A es diagonalizable, $A = BDB^{-1}$, la matriz $X = BD^{\frac{1}{n}}B^{-1}$ verifica que $X^n = B(D^{\frac{1}{n}})^nB^{-1} = A$, luego efectivamente es una raíz n-ésima.

4.2. Exponencial de una matriz.

El desarrollo en serie de potencias de la exponencial es $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. En este sentido se puede considerar la exponencial de una matriz A, $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$.
Si A es diagonalizable, $A = BDB^{-1}$, con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Entonces $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(BDB^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}BD^nB^{-1} = B(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}D^n)B^{-1} = Be^DB^{-1}$, donde

$$e^D = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r \end{pmatrix}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r^n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\lambda_1^n & & & \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\lambda_r^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_r} \end{pmatrix}.$$

Si A no es diagonalizable y $m_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_r)^{n_r}$, $A = BJB^{-1}$, $e^A = Be^JB^{-1}$ con $e^{(D+N)} = e^D \cdot e^N$ y $e^N = \sum_{n=0}^{r-1} \frac{1}{n!}N^n$, siendo r el orden de nilpotencia de N.

4.3. Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ \ldots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

se puede escribir en forma matricial como $X'(t) = A \cdot X(t)$ donde $A \in M_{n\times n}(k)$, $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$, $X'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))^T$, con $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ funciones diferenciables en la variable t.

La solución general del sistema es $X(t) = e^{At}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, con λ_i constantes arbitrarias.

En efecto, si

$$X(t) = e^{At}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^nt^n\right)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

entonces

$$X'(t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}A^nt^{n-1}\right)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = A\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^nt^n\right)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = AX(t)$$

Por lo anterior tenemos que $X(t) = e^{At}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = Be^{Jt}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}$ con $(\mu_1,\dots,\mu_n)^T = B^{-1}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)^T$ constantes arbitrarias.

4.4. Resolución de ecuaciones diferenciales en el operador derivada D.

Sea E el espacio vectorial de las funciones en una variable que son infinitamente derivables. El operador derivada, D, donde $D(f(x)) = f'(x)$, es un endomorfismo de E.
Una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes es una ecuación del tipo

$$p(D)f(x) = g(x), \text{ siendo } p(x) \in k[x] \text{ y } f, g \in E\,.$$

La ecuación diferencial es homogénea si $g(x) = 0$, y por tanto resolver la ecuación homogénea $p(D)y = 0$ equivale a calcular $\ker p(D)$, que es un subespacio de E invariante por D con polinomio anulador $p(x)$. Supondremos que $p(x)$ descompone en factores primos como sigue:

$$p(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_r)^{n_r}$$

y aplicando el Primer Teorema de Descomposición, se obtiene

$$\ker p(D) = \ker(D-\alpha_1)^{n_1}\oplus\ldots\oplus\ker(D-\alpha_r)^{n_r}\,,$$

y por lo tanto las soluciones de la ecuación homogénea serán las funciones en $\ker p(D)$.
Veamos que cada uno de los subespacios de la descomposición anterior es de dimensión finita y calcularemos explícitamente una base.

Teorema 4.1. *Las funciones $\{e^{\alpha x}, xe^{\alpha x},\dots,x^{n-1}e^{\alpha x}\}$ forman una base del espacio vectorial $\ker(D-\alpha I)^n$.*

Demostración. (a) *Fórmula de conmutación:* Para todo $n \geq 1$ e $y = f(x)$

$$(D-\alpha I)^n(e^{\alpha x}y) = e^{\alpha x}D^n y\,.$$

Por inducción sobre n:
Si $n = 1$, $(D-\alpha I)(e^{\alpha x}y) = D(e^{\alpha x}y) - \alpha e^{\alpha x}y = \alpha e^{\alpha x}y + e^{\alpha x}Dy - \alpha e^{\alpha x}y = e^{\alpha x}Dy$.
Para el caso n, por hipótesis de inducción: $(D-\alpha I)^n(e^{\alpha x}y) = (D-\alpha I)(D-\alpha I)^{n-1}(e^{\alpha x}y) = (D-\alpha I)e^{\alpha x}D^{n-1}y = e^{\alpha x}D^n y$.

(b) Si $\alpha = 0$, es claro que $\ker D^n = \langle 1, x, \dots, x^{n-1}\rangle$.
Sea $y \in \ker(D-\alpha I)^n$, se tiene:
$0 = (D-\alpha I)^n y = (D-\alpha I)^n(e^{\alpha x}e^{-\alpha x}y) = e^{\alpha x}D^n(e^{-\alpha x}y) \Rightarrow D^n(e^{-\alpha x}y) = 0 \Rightarrow e^{-\alpha x}y \in \ker D^n \Rightarrow y \in \langle e^{\alpha x}, xe^{\alpha x},\dots,x^{n-1}e^{\alpha x}\rangle$.

□

Si se conoce una solución particular y_0 de la ecuación diferencial $p(D)y = g(x)$, cualquier otra solución y se obtiene sumando a y_0 un vector de $\ker p(D)$, pues de $p(D)y_0 = g(x)$ y $p(D)y = g(x)$ se obtiene que $y - y_0 \in \ker p(D)$, luego $y \in y_0 + \ker p(D)$.

Ejemplo 4.2. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y'''(x) - 2y''(x) + y'(x) = 2x\,.$$

Se puede escribir como $(D^3 - 2D^2 + D)y(x) = 2x$ y primero se resuelve la ecuación homogénea $p(D)y = 0$, donde $p(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$. Se tiene

$$\ker p(D) = \ker D \oplus \ker(D-I)^2 = \langle 1, e^x, xe^x\rangle$$

De modo que la solución homogénea será $y_h = \lambda + \mu e^x + \gamma xe^x$, $\lambda, \mu, \gamma \in k$.
A continuación calculamos una solución particular y_p:

$$D(D-I)^2 y_p = 2x \Rightarrow y_p = ((D-I)^2)^{-1}(D)^{-1}(2x) =$$
$$((D-I)^2)^{-1}(x^2) = e^x(D^2)^{-1}(e^{-x}x^2) = e^x(-e^{-x})(-x^2-4x-6) = x^2+4x+6$$

La solución general de la ecuación diferencial es por tanto

$$y(x) = x^2 + 4x + 6 + \lambda + \mu e^x + \gamma x e^x,\ \ \lambda, \mu, \gamma \in k$$

5. Problemas resueltos.

5.1. *Calcula los polinomios característico y anulador y aplica el primer Teorema de descomposición al endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ de matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Solución 5.1.
Polinomio característico: $c_T(x) = |xI - A| = (x+2)^2 x(x-1)$, luego las posibilidades para el polinomio anulador son:

$$m_T(x) = \begin{cases} (x+2)x(x-1)\,, & (\text{ en este caso } T \text{ diagonaliza}) \\ \\ (x+2)^2 x(x-1) \end{cases}$$

Se tiene que $\dim_{\mathbb{R}} ker(T+2I) = 2$, pues $\operatorname{rg}(A+2I) = 2$, lo que prueba, utilizando el criterio del característico, que T es diagonalizable. Por tanto el anulador debe ser $m_T(x) = (x+2)x(x-1)$ y el primer teorema da $\mathbb{R}^4 = \ker(T+2I) \oplus \ker T \oplus \ker(T-I)$.

5.2. *Sea $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$ con polinomio anulador $m_T(x) = x^2(x-1)$ y con dos vectores propios de valor propio 1 linealmente independientes. ¿Cuál es su polinomio característico? ¿Es diagonalizable? ¿Cuántos vectores propios de valor propio 0 hay linealmente independientes? ¿Es T un isomorfismo?*

Solución 5.2.
Por el primer teorema de descomposición: $\mathbb{R}^4 = \ker T^2 \oplus \ker(T-I)$ y como $\dim_{\mathbb{R}} \ker(T-I) = 2$ es $c_T(x) = x^2(x-1)^2$.
No es diagonalizable ya que el anulador no descompone en producto de factores lineales diferentes, tiene una raíz doble.
Como 0 es un valor propio $\ker T \neq \{0\}$, además, como $\dim_{\mathbb{R}} \ker(T-I) = 2$ la dimensión de $\ker T$ es a lo sumo dos, pero dos no puede ser pues entonces existiría una base de vectores propios (recuerda que vectores propios de valores propios diferentes son linealmente independientes), es decir, T sería diagonalizable. Por tanto, $\dim_{\mathbb{R}} \ker T = 1$, es decir, sólo hay un vector propio de valor propio 0 linealmente independiente.
T no puede ser un isomorfismo ya que $\ker T \neq \{0\}$.

5.3. *Sea T un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ con dos valores propios diferentes y que no es diagonalizable. Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones:*

- (a) *Si T es un isomorfismo, ¿puede ser $x(x-3)^2$ su polinomio anulador?*
- (b) *¿Pueden ser $c_T(x) = (x-2)(x-5)^3$ y $m_T(x) = (x-2)(x-5)$?*
- (c) *Si $m_T(x) = (x-1)^2(x-2)$, ¿pueden existir dos vectores propios de valor propio 2 linealmente independientes? ¿y tres? En caso afirmativo, calcula el característico.*

Solución 5.3.

- (a) No, pues 0 sería un valor propio y entonces $\ker T \neq \{0\}$.
- (b) No, si $m_T(x) = (x-2)(x-5)$ el endomorfismo T sería diagonalizable.
- (c) Por el primer teorema $\mathbb{R}^4 = \ker(T-I)^2 \oplus \ker(T-2I)$ y $\dim_{\mathbb{R}} \ker(T-I)^2 \geq 2$, $\dim_{\mathbb{R}} \ker(T-2I) \geq 1$, luego $\dim_{\mathbb{R}} \ker(T-2I)$ puede ser 1 ó 2. Es decir puede haber dos vectores propios de valor propio 2 linealmente independientes, pero no tres. Si $\dim_{\mathbb{R}} \ker(T-2I) = 2$ el polinomio característico es $c_T(x) = (x-1)^2(x-2)^2$.

5.4. *Sea T un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ con dos valores propios reales distintos tal que $T^3-2T^2=0$ y $\dim_{\mathbb{R}}\ker T=2$. Demuestra que T es diagonalizable. ¿Cuál es su polinomio anulador? ¿Y su polinomio característico?*

Solución 5.4. El polinomio $x^3-2x^2=x^2(x-2)$ anula a todo vector de $\mathbb{R}^3$, luego su anulador $m_T(x)$ es un divisor . Los valores propios son 0 y 2, pues tiene dos diferentes, y como $\dim_{\mathbb{R}}\ker T=2$ y vectores propios de valores propios diferentes son linealmente independientes tiene que ser $\dim_{\mathbb{R}}\ker(T-2I)=1$, luego $\mathbb{R}^3=\ker T\oplus\ker(T-2I)$, es decir, T es diagonalizable. Su polinomio anulador es $m_T(x)=x(x-2)$, su forma canónica $D=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&2\end{pmatrix}$ y $c_T(x)=x^2(x-2)$.

5.5. *Cuántos endomorfismos de $\mathbb{R}^4$ hay que no sean equivalentes y cuyo polinomio anulador sea $(x+2)^2(x-1)$. Escribe su descomposición en monógenos, forma de Jordan J y la base de Jordan en función de los generadores de los monógenos.*

Solución 5.5.

- Anulador: $m_T(x)=(x+2)^2(x-1)$.
- Primer Teorema de descomposición: $\mathbb{R}^4=\ker(T+2I)^2\oplus\ker(T-I)$,
  con $\dim\ker(T+2I)^2\geq 2$ y $\dim\ker(T-I)\geq 1$.
  Luego se pueden presentar los casos:
  (*a*) $\dim\ker(T+2I)^2=2$ y $\dim\ker(T-I)=2$, que por el Segundo Teorema da las siguientes descomposición en monógenos, base de Jordan y forma canónica:

  $\mathbb{R}^4=M_{(x+2)^2}\oplus M_{(x-1)}\oplus M'_{(x-1)}$

  $\{e,(T+2I)e,v,v'\}, e\in\ker(T+2I)^2, e\notin\ker(T+2I), \{v,v'\}$ base de $\ker(T-I)$

  $$J=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\1&-2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

  (*b*) $\dim\ker(T+2I)^2=3$ y $\dim\ker(T-I)=1$. Descomposición en monógenos, base de Jordan y forma canónica:

  $\mathbb{R}^4=M_{(x+2)^2}\oplus M_{(x+2)}\oplus M_{(x-1)}$

  $\{e,(T+2I)e,e',v\}, e\in\ker(T+2I)^2, e\notin\ker(T+2I), e'\in\ker(T+2I)$,
  con $(T+2I)e$ y e' linealmente independientes , $v\in\ker(T-I)$

  $$J=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\1&-2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

5.6. *Calcula la forma de Jordan y la base de Jordan del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ de matriz*

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&2&-1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Calcula la potencia A^{100} y la exponencial e^A

Solución 5.6.

- Polinomio característico: $c_T(x) = |xI - A| = (x-3)(x-2)^2$.
  $\dim\ker(T-2I) = 1$, pues $\operatorname{rg}(A-2I) = 2$.
  Luego T no diagonaliza y por tanto su anulador es $m_T(x) = (x-3)(x-2)^2$.
- Primer teorema de descomposición: $\mathbb{R}^3 = \ker(T-3I) \oplus \ker(T-2I)^2$.
  Como $\dim\ker(T-3I) = 1$ debe ser $\dim\ker(T-2I)^2 = 2$. Luego los subespacios $\ker(T-3I)$ y $\ker(T-2I)^2$ son monógenos, pues su dimensión coincide con el grado de su anulador, luego
- 2° teorema de descomposición: $\mathbb{R}^3 = M_{(x-3)} \oplus M_{(x-2)^2}$.
- Forma de Jordan: $J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- Base de Jordan:

$$\{e, v, (T-2I)v\}\,,\ \text{con } e \in \ker(T-3I),\ v \in \ker(T-2I)^2 \text{ y } v \notin \ker(T-2I)$$

  (Observa que e y v son los generadores de los monógenos $\ker(T-3I)$ y $\ker(T-2I)^2$ respectivamente)
  Calculemos $\ker(T-3I)$, $\ker(T-2I)$ y $\ker(T-2I)^2$:

$$\ker(T-3I) = \langle (1,0,0) \rangle$$
$$\ker(T-2I) = \langle (1,1,0) \rangle\,; \quad \ker(T-2I)^2 = \langle (1,1,0), (0,1,1) \rangle$$

  Y la base de Jordan es:

$$\{e = (1,0,0), v = (0,1,1), (T-2I)v = (-1,-1,0)\}$$

- Matriz de cambio de base y comprobación:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ ; B^{-1}AB = J$$

- Potencia $A^{100} = (BJB^{-1})^{100} = BJ^{100}B^{-1}$.
  Exponencial $e^A = e^{BJB^{-1}} = Be^JB^{-1}$.
  Descomponiendo J en suma de una diagonal D y una nilpotente N se tiene:

$$J = D + N = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \text{con } N^2 = 0.$$

$$J^{100} = (D+N)^{100} = D^{100} + 100N = \begin{pmatrix} 3^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 100 & 2^{100} \end{pmatrix}$$

$$e^J = e^{D+N} = e^D \cdot e^N = e^D(I+N) = \begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \end{pmatrix}$$

  Así, resulta:

$$A^{100} = BJ^{100}B^{-1} = \begin{pmatrix} 3^{100} & 3^{100} + 2^{100} & 3^{100} - 2^{100} - 100 \\ 0 & 2^{100} & -100 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{pmatrix}$$

$$e^A = Be^JB^{-1} = \begin{pmatrix} e^3 & e^3 + e^2 & e^3 - 2e^2 \\ 0 & e^2 & -e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

5.7. *Sea T un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ con sólo dos vectores propios de valores propios distintos linealmente independientes y cuyo polinomio característico es $(x+3)^2(x+5)^2$. Calcula su polinomio anulador, la descomposición en monógenos, la forma de Jordan y la base de Jordan en función de los generadores de los monógenos.*

Solución 5.7. Como cada monógeno contiene un único vector propio, en la descomposición sólo puede haber dos monógenos, luego necesariamente ha de ser $\mathbb{R}^4 = M_{(x+3)^2} \oplus M_{(x+5)^2}$. Se deduce que $m_T(x) = (x+3)^2(x+5)^2$ y la forma de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix};$$

Base de Jordan: $\{e, (T+3I)e, v, (T+5I)v\}$,
con $e \in \ker(T+3I)^2$ y $e \notin \ker(T+3I)$, $v \in \ker(T+5I)^2$ y $v \notin \ker(T-2I)$

5.8. *Sea T un endomorfismo de de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E de dimensión 3 tal que $T^3 = 4T$.*

(a) *Demuestra que T es diagonalizable.*

(b) *Calcula la forma diagonal de T si además se sabe que $\ker T = 0$ y $\dim\ker(T-2I) = 2$. ¿Cuál es su polinomio anulador? ¿Y su polinomio característico?*

Solución 5.8.

(a) De $T^3 = 4T$ se sigue que el polinomio $x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$ anula a todo vector de E, luego es un múltiplo de su polinomio anulador. Es decir, las posibilidades para $m_T(x)$ son x, $x-2$, $x+2$, $x(x-2)$, $x(x+2)$, $(x-2)(x+2)$ y $x(x-2)(x+2)$. En cualquier caso, $m_T(x)$ tiene todas sus raíces reales y simples, luego T diagonaliza sobre $\mathbb{R}$.

(b) Si $\ker T = 0$, el escalar 0 no puede ser un valor propio de T, luego $m_T(x) = (x-2)(x+2)$ y por el primer teorema $E = \ker(T-2I) \oplus \ker(T+2I)$, siendo $\dim\ker(T+2I) = 1$ ya que $\dim\ker(T-2I) = 2$. La base de diagonalización es $\{v_1, v_2, v_3\}$, con $\ker(T-2I) = \langle v_, v_2\rangle$ y $\ker(T+2I) = \langle v_3\rangle$. La forma diagonal es $D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$ y el polinomio característico $c_T(x) = (x-2)^2(x+2)$.

5.9. *Clasifica el endomorfismo T de $\mathbb{R}^3$ tal que la restricción de T al plano $x - y + z = 0$ es una homotecia de razón 3 y $T(1,-1,1) = (3,0,3)$.*

Solución 5.9. Una base del plano es $\{v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,1,1)\}$ y como el vector $v_3 = (1,-1,1)$ no está en el plano los vectores $\{v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,-1,1)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. En esta base se tiene:

$$T(v_1) = 3v_1\,, \quad T(v_2) = 3v_2\,, \quad T(v_3) = (3,0,3) = v_1 + v_2 + 2v_3$$

Luego la matriz de T en esa base es $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Su polinomio característico $c_T(x) = |xI - A| = (x-3)^2(x-2)$ y como $\mathrm{rg}(A - 3I) = 1$ resulta que $\dim\ker(T-3I) = 2$ y, por el criterio del característico, el endomorfismo T es diagonalizable y su forma diagonal es $\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$.

5.10. *Clasifica los isomorfismos de* $\mathbb{R}^3$ *que no son homotecias y tales que* $T^3 - 3T^2 + 2T = 0$.

Solución 5.10. $m_T(x)$ es un divisor de $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$, pero no puede contener el factor x, pues es un isomorfismo y los isomorfismos no pueden tener el valor propio 0. Además, como no es una homotecia no puede ser ni $x-1$ ni $x-2$, luego sólo hay una posibilidad para el anulador $m_T(x) = (x-1)(x-2)$, luego es diagonalizable. Salvo cambios de base, existen dos isomorfismos con ese polinomio anulador, cuya forma canónica depende de las dimensiones de los subespacios de vectores propios:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \ ; \quad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

5.11. *Sea E el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3 y D el endomorfismo de E que el operador derivada define. Clasifica los endomorfismos* D, $D - 3I$ *y* D^2.

Solución 5.11. $E = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$

(a) Si $T = D$, $T^4 = 0$ es la menor potencia que anula a todo vector de E, pues $D^4 p(x) = 0$ para todo $p(x) \in E$. Luego, $m_T(x) = x^4$.
- Primer Teorema: $E = \ker T^4$
- Segundo Teorema: $E = M_{(x^4)}$
- Base de Jordan: $\{e, Te, T^2e, T^3e\}$, siendo e cualquier vector de E que no esté en el $\ker T^3$.
- Forma de Jordan: $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Si $T = D - 3I$ es $(T + 3I)^4 = D^4 = 0$, luego el anulador es $m_T(x) = (x+3)^4$.
- Primer Teorema: $E = \ker(T + 3I)^4$
- Segundo Teorema: $E = M_{(x+3)^4}$
- Base de Jordan: $\{e, (T+3I)e, (T+3I)^2e, (T+3I)^3e\}$, siendo e cualquier vector de E que no esté en el $\ker(T+3I)^3$.
- Forma de Jordan: $J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

(c) Si $T = D^2$ es $T^2 = D^4 = 0$, luego el anulador es $m_T(x) = x^2$.
- Primer Teorema: $E = \ker T^2$, y como $\dim \ker T = 2$ pues $\ker T = \ker D^2 = \langle 1, x \rangle$ sólo puede haber dos monógenos en la descomposición:
- Segundo Teorema: $E = M_{(x^2)} \oplus M'_{(x^2)}$
- Base de Jordan: $\{e, Te, v, Tv\}$, siendo e y v vectores linealmente independientes de E que no estén en el $\ker T$.
- Forma de Jordan: $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5.12. *Estudiar en función de los distintos valores del parámetro a la diagonalización del endomorfismo T de matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 2a \\ 1 & a & 2a \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para los valores de a en los que diagonaliza, calcular una base de diagonalización.

Solución 5.12.
Polinomio característico y valores propios de T:

$$c_T(x) = |xI - A| = (x-a)^2(x-1)\,,\ \text{Valores propios: } \{a, a, 1\}$$

Se presentan pues dos casos:

(a) Si $a = 1$, los tres valores propios son iguales, $c_T(x) = (x-1)^3$ y $\dim\ker(T - I) = 2$, pues $\operatorname{rg}(A - I) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$. Por el criterio del característico, T no diagonaliza.

(b) Si $a \neq 1$, los valores propios son $\{a, a, 1\}$, $c_T(x) = (x-a)^2(x-1)$ y $\dim\ker(T - aI) = 2$, pues $\operatorname{rg}(A - aI) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a \\ 1 & 0 & 2a \\ -1/2 & 0 & -a \end{pmatrix} = 1$. En este caso T diagonaliza.

Calculemos una base de diagonalización:

$\ker(T - aI) \equiv x + 2az = 0$; $\ker(T - aI) = \langle v_1 = (0, 1, 0), v_2 = (2a, 0, -1)\rangle$

$\ker(T - I) \equiv \begin{cases} x + (a-1)y + 2az = 0 \\ -1/2x - z = 0 \end{cases}$; $\ker(T - I) = \langle v_3 = (2, 2, -1)\rangle$

La base de diagonalización calculada es: $\{v_1 = (0, 1, 0), v_2 = (2a, 0, -1), v_3 = (2, 2, -1)\}$.

Y en esta base la matriz de T es: $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.13. *Sea $M_{2\times 2}(k)$ el espacio vectorial de la matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes en k. Estudiar la diagonalización del endomorfismo:*

$$\begin{aligned} T_A \colon M_{2\times 2}(k) &\to M_{2\times 2}(k) \\ B &\mapsto A \cdot B \end{aligned}$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in k$.

Solución 5.13. Calculemos la matriz asociada a T_A respecto de la base $\left\{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$:

$$\left.\begin{array}{l} T_A(A_1) = A \cdot A_1 = A_1\,; \quad T_A(A_2) = A \cdot A_2 = A_2 \\ T_A(A_3) = A \cdot A_3 = A_1 + aA_3\,; \quad T_A(A_4) = A \cdot A_4 = A_2 + aA_4 \end{array}\right\} T_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Polinomio característico: $c_{T_A}(x) = |xI - T_A| = (x-1)^2(x-a)^2$.
Valores propios: $\{1, 1, a, a\}$.
Se presentan dos casos:

(a) Si $a = 1$, $c_{T_A}(x) = (x-1)^4$ y $\dim\ker(T_A - I) = 2$, luego T_A no es diagonalizable.

(*b*) Si $a \neq 1$, $c_{T_A}(x) = (x-1)^2(x-a)^2$, siendo $\dim\ker(T_A - I) = 2$ y $\dim\ker(T_A - aI) = 2$. En este caso es diagonalizable y su forma diagonal es $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & a & \\ & & & a \end{pmatrix}$. Calculemos una base de diagonalización $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$:

$$\ker(T_A - I) \equiv \begin{cases} z = 0 \\ t = 0 \end{cases} ;\ker(T_A - I) = \langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\ker(T_A - aI) \equiv \begin{cases} (1-a)x + z = 0 \\ (1-a)y + t = 0 \end{cases} ;\ker(T_A - aI) = \langle v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} \rangle$$

5.14. *Demostrar que para todo endomorfismo de* $\mathbb{C}^2$ *de determinante* 1 *y traza* **distinta** *de* ± 2 *existe una base en la que su matriz es* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$.

Solución 5.14. Hay que demostrar que existe una base de $\mathbb{C}^2$ en la que T diagonaliza, siendo sus valores propios uno inverso del otro y distintos. Como $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado el polinomio característico de T es de la forma $c_T(x) = (x - z_1)(x - z_2)$ con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Ya que el determinante de T es 1 se tiene que $z_2 = 1/z_1$. Si $z_1 = z_2$, se sigue que $z_1^2 = 1$, luego $z_1 = \pm 1$ lo que contradice que la traza sea distinta de ± 2. Por lo tanto $z_1 \neq z_2$, es decir T tiene dos valores propios distintos, siendo además uno inverso del otro. Existe entonces una base respecto de la cual T diagonaliza siendo la matriz asociada como la del enunciado.

5.15. *Sea* T *el endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$ *cuya matriz en cierta base es:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- *Clasificar el endomorfismo* T *y calcular explícitamente una base de diagonalización o de Jordan según sea el caso.*
- *Calcular* A^{125}.

Solución 5.15.

- Polinomio característico de T, $c_T(x) = |xI - A| = (x-3)^2(x-5)$.
  $\dim\ker(T - 3I) = 1$, pues $\mathrm{rg}(A - 3I) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2$. Por el criterio del característico, T no es diagonalizable. Luego el polinomio anulador es $m_T(x) = (x-3)^2(x-5)$.
- Primer teorema de descomposición: $\mathbb{R}^3 = \ker(T - 3I)^2 \oplus \ker(T - 5I)$,
  siendo $\dim\ker(T - 3I)^2 = 2$ y $\dim\ker(T - 5I) = 1$.
- Segundo teorema de descomposición: $\mathbb{R}^3 = M_{(x-3)^2} \oplus M_{(x-5)}$.
- Forma de Jordan y base de Jordan:
  $J = \begin{pmatrix} 3 & & \\ 1 & 3 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$, en la base $\{e, (T-3I)e, e'\}$ siendo $e \in \ker(T - 3I)^2$ pero $e \notin \ker(T - 3I)$ y $e' \in \ker(T - 5I)$.

$$\ker(T - 3I)^2 \equiv \{-4x + 4z = 0\} = \langle (0,1,0), (1,0,1) \rangle ; \quad \ker(T - 5I) = \langle (0,0,1) \rangle$$

La base de Jordan es $\{e = (1,0,1), (T-3I)e = (1,1,0), e' = (0,0,1)\}$ y la matriz de cambio de base es $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = B \cdot J \cdot B^{-1}$.

- Como $A^{125} = B \cdot J^{125} \cdot B^{-1}$, bastará calcular J^{125}. Para ello descomponemos J en suma de una matriz diagonal D y una nilpotente N que conmutan (es decir $ND = DN$). $J = D + N = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, con $N^2 = 0$. Entonces

$$
\begin{aligned}
J^{125} = (D+N)^{125} &= \binom{125}{0} D^{125} + \binom{125}{1} D^{124} \cdot N = D^{125} + 125 D^{124} \cdot N \\
&= \begin{pmatrix} 3^{125} & & \\ & 3^{125} & \\ & & 5^{125} \end{pmatrix} + 125 \begin{pmatrix} 0 & & \\ 3^{124} & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3^{125} & & \\ 125 \cdot 3^{124} & 3^{125} & \\ & & 5^{125} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

5.16. *Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y T el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por:*

$$T(e_1) = 3e_1\,, \quad T(e_2) = 2e_2 - e_1\,, \quad T(e_3) = e_2 + 2e_3\,.$$

- *Clasificar el endomorfismo T y calcular explícitamente una base de diagonalización o de Jordan según sea el caso.*
- *Calcular la exponencial de la matriz asociada a T.*

Solución 5.16. La matriz asociada a T respecto de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ es $T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Entonces el polinomio característico es $c_T(x) = \begin{vmatrix} x-3 & 1 & 0 \\ 0 & x-2 & -1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)^2(x-3)$.

Calculamos los respectivos subespacios de vectores propios.

- $\ker(T-2I) = \left\{(x,y,z) \colon \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{aligned} x - y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} = \langle (1,1,0) \rangle$.
- $\ker(T-3I) = \left\{(x,y,z) \colon \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{aligned} -y &= 0 \\ -y + z &= 0 \end{aligned} \right\} = \langle (1,0,0) \rangle$.

Luego no diagonaliza, y en consecuencia $m_T(x) = (x-2)^2(x-3)$. Además se tiene para la descomposición en monógenos:

$$\mathbb{R}^3 = M_{(x-2)^2} \oplus M_{(x-3)}$$

Una base de Jordan será $\{e, (T-2I)e, e'\}$ siendo $e \in \ker(T-2I)^2$ pero $e \notin \ker(T-2I)$ y $e' \in \ker(T-3I)$.

Necesitamos calcular el siguiente núcleo:

- $\ker(T-2I)^2 = \left\{(x,y,z) \colon \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{x - y - z = 0\} = \langle (1,1,0), (1,0,1) \rangle$.

Tomando $e = (1,0,1)$ se tiene que una base de Jordan es: $\{(1,0,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$. En dicha base la matriz de Jordan asociada el endomorfismo T es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

Para calcular e^A tenemos en cuenta que $A = BJB^{-1}$ siendo $B \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrix de cambio de base. Usando el desarrollo en serie de la exponencial se tiene que $e^A = B \cdot e^J \cdot B^{-1}$. Así basta calcular e^J y para hacer esto escribimos J como suma de una matriz diagonal D y una nilpotente N, con $(N^2 = 0)$, tales que $ND = DN$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta el desarrollo en serie de la exponencial se tiene que

$$e^J = e^D e^N = e^D(Id + N) = \begin{pmatrix} e^2 & & \\ & e^2 & \\ & & e^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & & \\ e^2 & e^2 & \\ & & e^3 \end{pmatrix}.$$

5.17. *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:*

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + 4y + z$$
$$\frac{dz}{dt} = 3z$$

Solución 5.17. Matricialmente el sistema puede expresarse de la forma $X'(t) = A \cdot X(t)$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X'(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}.$$

Ya que la solución del sistema es $X(t) = e^{At} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$, siendo λ_i constantes, tenemos que calcular e^{At}. Para hacer esto usamos la matriz de Jordan correspondiente a A.
El polinomio característico es $c_T(x) = |xI - A| = (x-3)^3$.
El polinomio anulador es $m_T(x) = (x-3)^3$, pues $(A-3I)^3 = 0$ es la primera potencia de que se anula, luego $\mathbb{R}^3 = \ker(T-3I)^3 = M_{(x-3)^3}$.
Una base de Jordan será de la forma $\{e, (T-3I)e, (T-3I)^2e\}$, siendo $e \in \ker(T-3I)^3$ pero $e \notin \ker(T-3I)^2$. Podemos tomar, por ejemplo, $e = (0,0,1)$. Respecto de dicha base la matriz de Jordan correspondiente a A es $J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Esto es $A = B \cdot J \cdot B^{-1}$, siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz de cambio de base asociada a la base de Jordan.

Poniendo $J = D + N$ con $D = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ diagonal, $N = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente ($N^3 = 0$) tales que $DN = ND$, y usando el desarrollo en serie de la exponencial, se obtiene que

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{3t} & & \\ & e^{3t} & \\ & & e^{3t} \end{pmatrix} (Id + Nt + N^2 \frac{t^2}{2}) = \begin{pmatrix} e^{3t} & & \\ & e^{3t} & \\ & & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ t & 1 & \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego $e^{At} = B \begin{pmatrix} e^{3t} & & \\ te^{3t} & e^{3t} & \\ \frac{t^2}{2}e^{3t} & te^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix} B^{-1}$.

La solución general del sistema será:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= B \begin{pmatrix} e^{3t} & & \\ te^{3t} & e^{3t} & \\ \frac{t^2}{2}e^{3t} & te^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix} B^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \\ &= B \begin{pmatrix} e^{3t} & & \\ te^{3t} & e^{3t} & \\ \frac{t^2}{2}e^{3t} & te^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{ siendo } \alpha_i \text{ constantes }). \end{aligned}$$

Operando se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= e^{3t}(\frac{t^2}{2}\alpha_1 + t\alpha_2 + \alpha_3) \\ y &= e^{3t}(\frac{t^2}{2}\alpha_1 + t(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_2 + \alpha_3)) \\ z &= e^{3t}\alpha_1 \end{aligned}$$