

Continuidad de funciones de varias variables

Una vez establecidas las nociones topológicas de los espacios euclídeos, vamos a desarrollar el cálculo infinitesimal de funciones definidas en dichos espacios, de forma paralela al estudio de las funciones reales de una variable real. Para no recargar la notación, ya no colocaremos el símbolo \rightarrow sobre los vectores: el propio contexto nos indicará si se trata de un vector o de un escalar.

2.1. Dominios y curvas de nivel

Muchos problemas geométricos y físicos conducen a funciones de varias variables. Por ejemplo, el área de un rectángulo viene dado por la función $f(x, y) = xy$, donde x es la base e y la altura, la distancia de un punto del espacio $P = (x, y, z)$ al origen corresponde a la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, etc. De ahí que sea necesario extender los conceptos y la teoría de funciones reales de variable real a funciones vectoriales de varias variables.

En general, una función vectorial de m variables $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f(x_1, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_n)$ se escribirá como un vector (f_1, \dots, f_n) de funciones $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_i(x_1, \dots, x_m) = y_i$ ($i = 1, \dots, n$). Destacaremos los casos particulares siguientes:

Si $n = 1$, tenemos una función real de m variables (que llamaremos *campo escalar*).

Si $m = 1$ (y $n > 1$), tenemos una función vectorial de una variable (o *campo vectorial*).

Ejemplos inmediatos de ambos casos son las rectas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ en el espacio tridimensional, definidas por $f(t) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$, y los planos, que son funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x, y) = ax + by + c$.

Los conceptos básicos relativos a propiedades globales de estas funciones son los siguientes:

1. Dominio de f :

$$D(f) = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \exists f(x) \in \mathbb{R}^n\}.$$

2. Rango o imagen de f :

$$\text{Im}(f) = \{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \exists x = (x_1, \dots, x_m) \in D(f), f(x) = y\}.$$

Decimos que una función está *acotada* cuando su imagen es un conjunto acotado.

3. Gráfica de f :

$$G(f) = \{(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{m+n} : (y_1, \dots, y_n) = f(x_1, \dots, x_m)\}.$$

En el caso particular de funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, es importante destacar el concepto de *curvas de nivel*, que son los conjuntos de la forma

$$C_k = \{(x, y) \in D(f) : f(x, y) = k\},$$

para valores $k \in \mathbb{R}$, pues representan el conjunto de puntos del dominio cuya imagen toma el valor constante k . Como en este caso la gráfica de la función es una superficie, las curvas de nivel corresponden a los conjuntos de puntos que están a la misma altura de dicha superficie; permiten ver las variaciones de altitud en un dominio dado y en algunos casos hacerse una idea de la propia superficie.

Por ejemplo, las curvas de nivel del paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ y del cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ son circunferencias. La diferencia está en el crecimiento del radio a medida que aumenta el nivel.

Se definen análogamente las *superficies de nivel* en el caso de funciones $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ como los conjuntos

$$S_k = \{(x, y, z) \in D(f) : f(x, y, z) = k\}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2.2. Cálculo de límites

Consideremos una función arbitraria $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con dominio $D(f) = D$. Sean $S \subset D$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Diremos que $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in S}} f(x) = y_0$ (en palabras, el límite de f en x_0 a lo largo de S es igual a y_0), cuando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(x) \in B(y_0, \varepsilon), \quad \forall x \in (B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \cap S.$$

Equivalentes a este enunciado son los siguientes:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f((B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \cap S) \subset B(y_0, \varepsilon);$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < \|x - x_0\| < \delta, \quad x \in S \implies \|f(x) - y_0\| < \varepsilon;$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < d(x - x_0) < \delta, \quad x \in S \implies d(f(x) - y_0) < \varepsilon.$$

Esta definición es una simple extensión de la definición usual de límite de una función real donde se sustituye la distancia en \mathbb{R} (dada por el valor absoluto) por la distancia en cada uno de los espacios métricos \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n (dada por la correspondiente norma).

Observemos que la definición no tiene sentido si $x_0 \notin S'$ pues, en este caso, $(B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \cap S = \emptyset$ y cualquier punto puede ser el límite de una función en x_0 . En el caso de que $S = D$, y no haya lugar a confusión, escribiremos simplemente $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Enunciamos a continuación las siguientes propiedades básicas del límite.

Teorema 2.2.1 (caracterización mediante sucesiones). Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $D(f) = D$ y sea $x_0 \in D'$. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y_0$$

para toda sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de puntos de $D \setminus \{x_0\}$ que converge a x_0 .

Demostración. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, sabemos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : d(f(x), y_0) < \varepsilon \text{ cuando } 0 < d(x, x_0) < \delta.$$

Sea ahora $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de $D \setminus \{x_0\}$ que converge a x_0 . A partir del δ anterior, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, x_0) < \delta$, $\forall k \geq N$.

Por hipótesis, $d(f(x_k), y_0) < \varepsilon$, $\forall k \geq N$, de modo que $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge a y_0 .

Recíprocamente, si $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y_0$ pero $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq y_0$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ existe $x \in D$ para el cual $0 < d(x, x_0) < \delta$ pero $d(f(x), y_0) \geq \varepsilon$. Tomando $\delta = 1/k$, encontramos una sucesión $(x_k) \subset D \setminus \{x_0\}$ tal que $0 < d(x_k, x_0) < 1/k$ pero $d(f(x_k), y_0) \geq \varepsilon$, lo que contradice la hipótesis. \square

Ejemplo. La función $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \cdot \cos(x^2+y^2)$ no tiene límite en el origen porque, si consideramos la sucesión $(x_n, y_n) = (1/n, -1/n)$, entonces $\lim(x_n, y_n) = (0, 0)$ y $f(x_n, y_n) = 0$, con lo que $\lim f(x_n, y_n) = 0$.

Sin embargo, si consideramos la sucesión $(x_n, y_n) = (1/n, (1-n)/n^2)$, entonces también $\lim(x_n, y_n) = (0, 0)$ pero $f(x_n, y_n) = \frac{n^2}{2n^2-2n+1} \cdot \cos \frac{2n^2-2n+1}{n^4}$, y $\lim f(x_n, y_n) = 1/2$.

Como consecuencia de este resultado y de la proposición 1.4.1 se deduce la siguiente propiedad.

Teorema 2.2.2. Si existe $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in S}} f(x)$, este límite es único.

Teorema 2.2.3. Sea $T \subset S \subset D$. Entonces

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in S}} f(x) = y_0 \implies \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in T}} f(x) = y_0$$

La demostración se propone en el ejercicio 2.4.

En la práctica este resultado es importante puesto que, si elegimos adecuadamente un subconjunto $T \subset S$ (para el que sea fácil el cálculo del límite), una condición necesaria para que

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in S}} f(x) = y_0$ es que $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in T}} f(x) = y_0$.

Ejemplos.

1) Si existiera

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = L,$$

entonces debería cumplirse que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \in T}} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = L,$$

para todo $T \subset D$. Ahora bien, si elegimos $T = \{(x, mx) : x \neq 0\}$, entonces

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \in T}} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + m^2 x^2}{|x| + |mx|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + m^2)}{|x|(1 + |m|)} = 0.$$

En consecuencia, caso de existir, $L = 0$.

Para probar que, en efecto, $L = 0$, basta observar que

$$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x| \cdot |y| \geq |x|^2 + |y|^2,$$

de donde $\frac{|x|^2 + |y|^2}{|x| + |y|} \leq |x| + |y|$. Así pues, dado $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta = \varepsilon/2$, con lo que, si $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, entonces $|x| < \delta$ y $|y| < \delta$. Por tanto,

$$\left| \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} \right| \leq |x| + |y| < 2\delta = \varepsilon.$$

Será común en este tipo de problemas utilizar trayectorias del tipo $y = mx$. Así, si el límite es el mismo para todas ellas, el resultado es un candidato a ser el límite de la función, pero si dicho límite varía con cada trayectoria, la función no tiene límite.

2) Dada la función $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$, si hacemos $T = \{(x, mx) : x \neq 0\}$, entonces

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \in T}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2mx^2}{x^2(1 + m^2)} = \frac{2m}{1 + m^2}.$$

Como el resultado depende de m , no puede existir $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Observación. El recíproco de la proposición anterior no es cierto (un contraejemplo se muestra en el ejercicio 2.9).

Teorema 2.2.4 (operaciones algebraicas con el límite). *Dadas dos funciones $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $D(f) = D_1$ y $D(g) = D_2$, y un conjunto $S \subset D_1 \cap D_2$, si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in S}} f(x) = y_1$*

y $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in S}} g(x) = y_2$, entonces:

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in S}} (f + g)(x) = y_1 + y_2.$

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in S}} (\lambda f)(x) = \lambda y_1.$

$$c) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in S}} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle.$$

$$d) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in S}} \|f(x)\| = \|y_1\|.$$

Demostración. Los apartados a) y b) son sencillos.

Para probar c), aplicamos la igualdad siguiente:

$$\langle f(x), g(x) \rangle - \langle y_1, y_2 \rangle = \langle f(x) - y_1, g(x) - y_2 \rangle + \langle f(x) - y_1, y_2 \rangle + \langle y_1, g(x) - y_2 \rangle.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\langle f(x), g(x) \rangle - \langle y_1, y_2 \rangle| \\ &\leq \|f(x) - y_1\| \cdot \|g(x) - y_2\| + \|f(x) - y_1\| \cdot \|y_2\| + \|y_1\| \cdot \|g(x) - y_2\| \end{aligned}$$

Por hipótesis, cada uno de los términos del segundo miembro tiende a cero cuando $x \rightarrow x_0$, lo que prueba la proposición.

Para el apartado d), basta observar que $|\|f(x)\| - \|y_1\|| \leq \|f(x) - y_1\|$. \square

Proposición 2.2.5. Si descomponemos la función $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ en sus componentes $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, donde cada $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$), entonces

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in S}} f(x) = y = (y_1, \dots, y_n) \iff \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in S}} f_i(x) = y_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

La demostración se deduce fácilmente de las desigualdades siguientes:

$$|f_i(x) - y_i| \leq \|f(x) - y\| \leq \sum_{i=1}^n |f_i(x) - y_i|.$$

Los últimos resultados de esta sección proporcionan métodos prácticos para comprobar la existencia de límites de funciones de dos variables y calcular su valor, en caso de existir.

Proposición 2.2.6. Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, si existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$, y existen también los límites de una variable $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$ y $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y)$, entonces existen y son iguales los llamados límites iterados

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right) = L.$$

La demostración de esta proposición se propone en el ejercicio 2.5.

Este resultado nos muestra que para la existencia e igualdad de los límites iterados no es suficiente la existencia del límite de la función: hace falta también la existencia de los límites de funciones de una variable. Sin embargo, es posible que exista el límite de una función pero no exista alguno de los límites iterados. Por ejemplo, si $f(x,y) = x \sin(1/y)$ cuando $y \neq 0$, $f(x,0) = 0$, es claro que $|f(x,y)| \leq |x|$, de modo que existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$. Sin embargo, no existe $\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)$.

Observemos además que el recíproco no es cierto. Por ejemplo, si $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, con $(x, y) \neq (0, 0)$, es fácil comprobar que los límites iterados cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ valen cero. Sin embargo, no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ porque, dado $\varepsilon = 1$, en cualquier bola $B(0, \delta)$ podemos elegir $(x, y) = (\delta/2\sqrt{2}, \delta/2\sqrt{2})$ el cual verifica $f(x, y) = 1/2 > \varepsilon$.

De esta propiedad se deduce en particular que, si existen los límites iterados pero son distintos, entonces no existe el límite de la función.

Resultados similares se pueden obtener para funciones de más de dos variables.

Proposición 2.2.7. Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, si existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$, y g es una función real y continua definida en un entorno de x_0 , tal que $g(x_0) = y_0$, entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, g(x)) = L$.

Demostración. Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta \implies d(f(x, y), L) < \varepsilon.$$

Como g es continua en x_0 , dado δ existe $\gamma > 0$ tal que

$$0 < d(x, x_0) < \gamma \implies d(g(x), g(x_0)) < \delta/\sqrt{2}.$$

Si elegimos $\gamma \leq \delta/\sqrt{2}$, debido a que $y_0 = g(x_0)$, resulta

$$d((x, g(x)), (x_0, g(x_0))) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (g(x) - g(x_0))^2} < \delta.$$

Por tanto, $d(f(x, g(x)), L) < \varepsilon$. □

Ejemplo. La función $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y}$, si $y \neq -x^2$, no tiene límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ porque, dada la función $g(x) = mx^2$, resulta que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, g(x)) = \frac{m}{m+1}$, el cual depende del parámetro m .

Proposición 2.2.8. Sean $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in D'$. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ y g está acotada, entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$.

Demostración. Por hipótesis, existe $M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$, para todo $x \in D$. Además, dado $\varepsilon > 0$, existe U entorno de x_0 tal que

$$|f(x)| < \varepsilon/M, \quad \forall x \in U \cap D, \quad x \neq x_0.$$

Entonces $|f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in U \cap D, \quad x \neq x_0$. □

Por ejemplo, la función $f(x, y) = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, si $(x, y) \neq (0, 0)$, tiene límite cero en el origen porque $\frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = x \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ pero $-2 \leq \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 2$.

Proposición 2.2.9. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$, y x_0 un punto de acumulación de D_i para todo i . Entonces existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ si y sólo si existen $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_i}} f(x)$ ($i = 1, \dots, k$) y todos son iguales.

Demostración. Sea $L = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_i}} f(x)$, $i = 1, \dots, k$. Dado $\varepsilon > 0$, existen $\delta_i > 0$ tales que

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ para todo } x \in B(x_0, \delta_i) \cap D_i, x \neq x_0.$$

Si elegimos $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\}$, dado $x \in B(x_0, \delta) \cap D$, existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $x \in B(x_0, \delta) \cap D_i$, pero también $x \in B(x_0, \delta_i) \cap D_i$. Por tanto, $|f(x) - L| < \varepsilon$.

El recíproco es consecuencia de la proposición 2.2.3. \square

Ejemplos.

1) Para probar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}} - 1 = 0$, observamos en primer lugar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right) = 0.$$

Por lo tanto, si $D_1 = \{(x, y) : x > 0\}$, $D_2 = \{(x, y) : x < 0\}$ y $D_3 = \{(x, y) : x = 0, y \neq 0\}$, entonces $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ y, además, $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \in D_i}} x \sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}} - 1 = 0$ ($i = 1, 2, 3$).

2) Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y} & \text{si } x^2 + y \neq 0, \\ 0 & \text{si } x^2 + y = 0, \end{cases}$$

si $D_1 = \{(x, y) : x^2 + y = 0\}$, entonces $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D_1}} f(x, y) = 0$.

Ahora bien, si $D_2 = \{(x, y) : y = x^2, y \neq 0\}$, entonces

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D_2}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D_2}} \frac{x + x^2}{2x^2} = \infty.$$

Por tanto, no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

2.3. Continuidad

Decimos que una función $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con dominio D es *continua en un punto* $x_0 \in D$ cuando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon), \forall x \in B(x_0, \delta) \cap D,$$

condición equivalente a cualquiera de las siguientes:

- I) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(B(x_0, \delta) \cap D) \subset B(f(x_0), \varepsilon).$
- II) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta, x \in D \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$
- III) $\forall V$ entorno de $f(x_0)$, existe U entorno de x_0 tal que $f(U) \subset V.$

Si $x_0 \in D'$, lo anterior implica que $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D}} f(x) = f(x_0).$

Enunciamos algunas propiedades y caracterizaciones de las funciones continuas.

Teorema 2.3.1 (caracterización por sucesiones). *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in D$. Entonces f es continua en x_0 si y sólo si*

$$\forall \{x_k\}_{k \geq 1} \subset D, x_k \rightarrow x_0 \implies f(x_k) \rightarrow f(x_0),$$

es decir $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k).$

La demostración es análoga a la del teorema 2.2.1. También son sencillas las pruebas de las siguientes propiedades.

Teorema 2.3.2 (continuidad de la función compuesta). *Sean $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ funciones arbitrarias. Si f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en x_0 .*

Proposición 2.3.3. *Sean $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ y g es continua en y_0 , entonces $g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)).$*

Demostración. Sea U es un entorno de $g(y_0)$. Entonces $g^{-1}(U)$ es un entorno de y_0 . Por tanto, existe V entorno de x_0 tal que $f(x) \in g^{-1}(U)$, para todo $x \in V, x \neq x_0$, de donde $g(f(x)) \in U$. \square

Observación. La siguiente propiedad es falsa: *Dados $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ y $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.*

Por ejemplo, sean $f(x, y) = x + y$, $g(x) = 0$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 1$, entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$, y $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, pero no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(f(x, y)).$

Teorema 2.3.4 (continuidad de las operaciones algebraicas). *Sean $f, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ funciones continuas en x_0 . Entonces $f + g, \lambda f, \langle f, g \rangle$ y $\|f\|$ son continuas en x_0 .*

Teorema 2.3.5. *Si $f_k : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq k \leq n$) son las componentes de $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, entonces f es continua en x_0 si y sólo si cada f_k es continua en x_0 .*

Este resultado permite simplificar el estudio de la continuidad de una función al de la continuidad de n funciones reales.

Definimos también el concepto de continuidad global: decimos que una función $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua en un conjunto $A \subset \mathbb{R}^m$ cuando lo es en todos los puntos del conjunto.

Son importantes en este contexto las siguientes propiedades.

Teorema 2.3.6. Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función con dominio $D(f) = D$ abierto. Entonces f es continua en D si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto, para cualquier abierto $U \subset \mathbb{R}^n$.

Demostración. Supongamos que f es continua en D y sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Dado $x \in f^{-1}(U)$, como $y = f(x) \in U$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(y, \varepsilon) \subset U$. Como f es continua en x , existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x, \delta) \cap D) \subset B(y, \varepsilon)$. Por tanto,

$$B(x, \delta) \cap D \subset f^{-1}(f(B(x, \delta) \cap D)) \subset f^{-1}(B(y, \varepsilon)) \subset f^{-1}(U),$$

lo que demuestra que $f^{-1}(U)$ es abierto.

Recíprocamente, sea $x \in D$ y llamamos $y = f(x)$. Dado $\varepsilon > 0$, como $B(y, \varepsilon)$ es un abierto, $f^{-1}(B(y, \varepsilon))$ es abierto. Teniendo en cuenta que $x \in f^{-1}(B(y, \varepsilon))$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(y, \varepsilon))$. Por tanto, $f(B(x, \delta)) \subset B(y, \varepsilon)$, es decir que f es continua en x . \square

Corolario 2.3.7. Una función $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua si y sólo si $f^{-1}(F)$ es cerrado, para cualquier cerrado $F \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.3.8. Sea $M \subset \mathbb{R}^m$ un compacto y $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua en M . Entonces $f(M)$ es compacto.

Demostración. Sea \mathcal{F} un recubrimiento por abiertos de $f(M)$, es decir $f(M) \subset \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$. Como f es continua en M , por el teorema 2.3.6, $f^{-1}(A)$ es abierto, para todo $A \in \mathcal{F}$. Además, $\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}\}$ es un recubrimiento por abiertos de M , con lo que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $M \subset f^{-1}(A_1) \cup \dots \cup f^{-1}(A_p)$. Entonces

$$f(M) \subset f(f^{-1}(A_1) \cup \dots \cup f^{-1}(A_p)) = f(f^{-1}(A_1)) \cup \dots \cup f(f^{-1}(A_p)) \subset A_1 \cup \dots \cup A_p.$$

En conclusión, $f(M)$ es compacto. \square

Corolario 2.3.9 (teorema de Weierstrass). Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ continua en un compacto $M \subset \mathbb{R}^m$. Entonces f alcanza los valores máximo y mínimo, es decir

$$\exists x_1, x_2 \in M : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in M.$$

Demostración. Por el teorema anterior, $f(M)$ es cerrado y acotado, de modo que f está acotada en M . Esto implica que existen $s = \sup f(M)$ y $t = \inf f(M)$. Por tanto, s y t son puntos de adherencia de $f(M)$. Como $f(M)$ es cerrado, $s, t \in f(M)$, es decir $s = \max f(M)$ y $t = \min f(M)$. \square

Teorema 2.3.10 (continuidad de la función inversa). Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ inyectiva. Si $D \subset \mathbb{R}^m$ es compacto y f continua en D , entonces f^{-1} es continua en $f(D)$.

Demostración. Dado cualquier conjunto cerrado $C \subset D$, probaremos que $f(C)$ es cerrado en \mathbb{R}^n .

Por ser D compacto, y C cerrado, entonces C es compacto, de donde $f(C)$ es compacto (por el teorema 2.3.8). En particular, $f(C)$ es cerrado. \square

También la propiedad de conexión se mantiene mediante las funciones continuas.

Teorema 2.3.11. Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua en $M \subset \mathbb{R}^m$. Si M es conexo, $f(M)$ es también conexo.

Continuidad uniforme

Un concepto más preciso corresponde al de continuidad uniforme, que definimos a continuación.

Definición. Decimos que una función $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *uniformemente continua* en $A \subset \mathbb{R}^m$ cuando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x_1 - x_2\| < \delta \implies \|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon, \forall x_1, x_2 \in A.$$

Es evidente que toda función uniformemente continua es continua. Una especie de recíproco es el siguiente resultado.

Teorema 2.3.12 (Heine-Cantor). *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y $A \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto compacto. Entonces f es uniformemente continua en A .*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $d(f(y), f(x)) < \varepsilon/2$ si $y \in B(x, r) \cap A$.

La colección $\{B(x, r/2) : x \in A\}$ forma un recubrimiento por abiertos de A . Por la compacidad de A , existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset \bigcup_{k=1}^p B(x_k, r_k/2)$.

Dado $u \in B(x_k, r_k) \cap A$, sabemos que $d(f(u), f(x_k)) < \varepsilon/2$.

Sea $\delta = \min\{r_1/2, \dots, r_p/2\}$. Dados $a, b \in A$, con $d(a, b) < \delta$, sabemos que existe $k \in \{1, \dots, p\}$ tal que $a \in B(x_k, r_k/2)$, de donde $f(a) \in B(f(x_k), \varepsilon/2)$. Por la desigualdad triangular,

$$d(b, x_k) \leq d(b, a) + d(a, x_k) < \delta + r_k/2 \leq r_k,$$

es decir $b \in B(x_k, r_k) \cap A$, con lo que $f(b) \in B(f(x_k), \varepsilon/2)$.

Aplicamos de nuevo la desigualdad triangular para obtener

$$d(f(a), f(b)) \leq d(f(a), f(x_k)) + d(f(x_k), f(b)) < \varepsilon,$$

lo que confirma la continuidad uniforme de f . □

De forma análoga al caso de las funciones continuas, se puede probar la siguiente caracterización de la continuidad uniforme mediante sucesiones.

Proposición 2.3.13. *Dada una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, f es uniformemente continua si y sólo si para cualquier par de sucesiones $(x_k), (y_k) \subset D$ tales que $(x_k - y_k) \rightarrow 0$, se verifica que $(f(x_k) - f(y_k)) \rightarrow 0$.*

Demostración. Si f es uniformemente continua, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - y\| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Dadas las sucesiones $(x_k), (y_k) \subset D$, si $(x_k - y_k) \rightarrow 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - y_k\| < \delta$, $\forall k \geq k_0$. Por tanto, $|f(x_k) - f(y_k)| < \varepsilon$, es decir $(f(x_k) - f(y_k)) \rightarrow 0$.

Recíprocamente, si f no es uniformemente continua, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existen $x_k, y_k \in D$ con $\|x_k - y_k\| < 1/k$ pero $|f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon$.

Encontramos así un par de sucesiones $(x_k), (y_k)$ tales que $(x_k - y_k) \rightarrow 0$ pero $|f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon$, con lo que $(f(x_k) - f(y_k))$ no tiende a 0. □

Proposición 2.3.14 (teorema del punto fijo). Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una contracción, es decir $\exists \alpha \in (0, 1)$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m.$$

Entonces f es uniformemente continua y existe un único punto $p \in \mathbb{R}^m$ tal que $f(p) = p$ (dicho punto se llama punto fijo de f).

Demostración. Para probar que f es uniformemente continua, basta tomar, dado cualquier $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon/\alpha$ y comprobar directamente la definición de continuidad uniforme.

Para cada $x \in \mathbb{R}^m$ arbitrario, definimos la sucesión

$$p_0 = x, \quad p_1 = f(x), \dots, p_k = f(p_{k-1}).$$

Veamos que dicha sucesión es de Cauchy. Para ello, sean $j, k \in \mathbb{N}$ con $j > k$:

$$\begin{aligned} \|p_k - p_{k+1}\| &\leq \alpha \|p_{k-1} - p_k\| \leq \dots \leq \alpha^k \|p_0 - p_1\| \\ \Rightarrow \|p_j - p_k\| &\leq \sum_{i=k}^{j-1} \|p_i - p_{i+1}\| \leq \|p_0 - p_1\| \cdot \sum_{i=k}^{j-1} \alpha^i \\ &< \|p_0 - p_1\| \cdot \sum_{i=k}^{\infty} \alpha^i = \|p_0 - p_1\| \cdot \frac{\alpha^k}{1 - \alpha}, \end{aligned}$$

expresión que tiende a cero cuando $k \rightarrow \infty$, debido a que $\alpha < 1$.

Como en \mathbb{R}^m toda sucesión de Cauchy es convergente, existe $p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k$. Resulta además, debido a la continuidad de f , que

$$f(p) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} p_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(p_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_{k+1} = p.$$

Veamos por último que sólo puede haber un punto fijo:

Si existieran $p, p' \in \mathbb{R}^m$ tales que $f(p) = p$, $f(p') = p'$, entonces

$$\|p - p'\| = \|f(p) - f(p')\| \leq \alpha \|p - p'\| \Rightarrow \|p - p'\| = 0 \Rightarrow p = p'.$$

En definitiva, f tiene un único punto fijo. □

Funciones lineales

Terminaremos el capítulo mostrando una clase importante de funciones continuas, como son las funciones lineales.

Definición. Una función $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *lineal* si

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Toda función lineal tiene una representación matricial, que se obtiene del modo siguiente:

Sean $\{u_1, \dots, u_m\}$ y $\{v_1, \dots, v_n\}$ bases ortonormales de \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n , respectivamente. Dado

cualquier $x \in \mathbb{R}^m$, sabemos que $x = \sum_{i=1}^m x_i u_i$, donde $x_i = \langle x, u_i \rangle$, $i = 1, \dots, m$.

Por la linealidad de f , deducimos que $f(x) = \sum_{i=1}^m x_i f(u_i)$. Ahora bien, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f(u_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j$. En definitiva, resulta que $f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ji} v_j$. Esto significa que las coordenadas de $f(x)$ respecto a la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ se obtienen mediante el producto

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

donde las columnas son las componentes de las imágenes de la base $\{u_1, \dots, u_m\}$ en función de la base $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Hemos obtenido así la matriz $A = (a_{ij})$ llamada *matriz asociada a la aplicación lineal f* con respecto a las bases $\{u_i\}$ y $\{v_j\}$.

Por otra parte, sean $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ son funciones lineales cuyas matrices asociadas son $A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$ y $B = (b_{ki})_{\substack{k=1, \dots, p \\ i=1, \dots, n}}$, respectivamente.

Como

$$(ST)(e_j) = S\left(\sum_{i=1}^n a_{ij} f_i\right) = \sum_{i=1}^n a_{ij} S(f_i) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^p b_{ki} g_k\right) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ij}\right) g_k,$$

la matriz asociada a la composición ST es el producto $B \cdot A$.

Proposición 2.3.15. *Toda función lineal $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es uniformemente continua.*

Demostración. Para probarlo, sean $x, y \in \mathbb{R}^m$ y $\{e_1, \dots, e_m\}$ la base canónica de \mathbb{R}^m . Entonces podemos escribir $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^m y_i e_i$.

Si llamamos $M = \max\{\|f(e_i)\| : i = 1, \dots, m\}$, por la linealidad de f ,

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|f(x - y)\| = \left\| \sum_{i=1}^m (x_i - y_i) f(e_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |x_i - y_i| \cdot \|f(e_i)\| \leq M \sum_{i=1}^m |x_i - y_i| \leq mM \|x - y\|. \end{aligned}$$

De aquí se deduce la continuidad uniforme de f . □

Como consecuencia de esta propiedad, se puede probar la equivalencia de todas las normas definidas en \mathbb{R}^n .

Proposición 2.3.16. *Todas las normas sobre \mathbb{R}^n son equivalentes.*

Demostración. Probaremos que la norma euclídea $\|\cdot\|_2$ es equivalente a cualquier otra. Por la transitividad de la relación de equivalencia, esto basta para que dos normas arbitrarias sean equivalentes entre sí.

Para ello consideramos la aplicación identidad $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, con $\|\cdot\|$ arbitraria. Por ser f lineal, como hemos visto en la proposición anterior, existe $M > 0$ tal que

$$\|x\| \leq M \cdot \|x\|_2.$$

Sabemos también que f es continua. Como además la aplicación $\|\cdot\| : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua (ver ejercicio 2.30), la composición $\|f\|$ es continua. El conjunto $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ es cerrado y acotado, luego compacto. Como toda función continua sobre un compacto alcanza el valor mínimo, existe una constante $m = \min\{\|x\| : x \in B\}$.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ un elemento no nulo; entonces $x/\|x\|_2 \in B$, luego $\|x\|/\|x\|_2 \geq m$, es decir

$$\|x\| \geq m \cdot \|x\|_2$$

(si $x = 0$ esta desigualdad es obviamente cierta).

En definitiva, existen dos constantes $m, M > 0$ tales que

$$m \cdot \|x\|_2 \leq \|x\| \leq M \cdot \|x\|_2,$$

es decir ambas normas son equivalentes. □

2.4. Ejercicios

Ejercicio 2.1. Describir los conjuntos de nivel $f(x_1, \dots, x_n) = k$, para los valores de k indicados, de las siguientes funciones:

- a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $k = -2, -1, 0, 1, 2$.
 b) $f(x, y) = e^{xy}$, $k = e^{-2}, e^{-1}, 1, e, e^2$.
 c) $f(x, y) = \cos(x + y)$, $k = -1, 0, 1/2, \sqrt{2}/2, 1$.

Ejercicio 2.2. Construir las curvas de nivel de las siguientes funciones:

- a) $f(x, y) = x^2 + y^2$.
 b) $f(x, y) = x^y$.
 c) $f(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$.
 d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
 e) $f(x, y, z) = \text{sign} \sin(x^2 + y^2 + z^2)$.

Ejercicio 2.3. Determinar los campos de existencia de las siguientes funciones:

- a) $f(x, y) = x + \sqrt{y}$.
 b) $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$.
 c) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.
 d) $f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$.
 e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$.
 f) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$.
 g) $f(x, y) = \sqrt{y \sin x}$.
 h) $f(x, y, z) = \ln(x/yz)$.
 i) $f(x, y, z) = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2)$.
 j) $f(x, y) = \arcsen \frac{x}{y^2} + \arcsen(1 - y)$.
 k) $f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$.
 l) $f(x, y, z) = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
 m) $f(x, y) = \arctg \frac{x - y}{1 + x^2 y^2}$.

Ejercicio 2.4. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $T \subset S \subset D$. Probar que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in S}} f(x) = y_0 \implies \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in T}} f(x) = y_0.$$

Ejercicio 2.5. Se considera la función $z = f(x, y)$. Supongamos que existen

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \quad \text{y} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y).$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right) = L.$$

Ejercicio 2.6. Hallar los límites iterados de $f(x, y)$ en (a, b) para:

$$a) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, \quad a = \infty, \quad b = \infty.$$

$$c) f(x, y) = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2x + y} \quad a = \infty, \quad b = \infty.$$

$$b) f(x, y) = \frac{x^y}{1 + xy}, \quad a = \infty, \quad b = 0.$$

$$d) f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy}, \quad a = 0, \quad b = \infty.$$

$$e) f(x, y) = \log_x(x + y), \quad a = 1, \quad b = 0.$$

Ejercicio 2.7. Hallar los siguientes límites o justificar su existencia:

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{\operatorname{sen} x \cdot \ln(1 + y)}.$$

$$c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{xy}.$$

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x}.$$

$$d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Ejercicio 2.8. Sea $A = \{(x, y) : y = 4x\}$ y

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \frac{x + y}{x - y}, e^{x + y} \right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0, 1) & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Calcular $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in A}} f(x, y).$

Ejercicio 2.9. Hallar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ donde $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \text{ ó } y \geq x^2, \\ 1 & \text{si } 0 < y < x^2. \end{cases}$

Ejercicio 2.10. Calcular $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ en los siguientes casos.

$$a) f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}.$$

$$b) f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}.$$

$$c) f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

$$d) f(x, y) = (1/x) \operatorname{sen} xy, \text{ si } x \neq 0 \text{ y } f(0, y) = y.$$

$$e) f(x, y) = x \operatorname{sen}(x/y), \text{ si } y \neq 0 \text{ y } f(x, 0) = 0.$$

Ejercicio 2.11. Hallar los siguientes límites:

- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}.$
- b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin(1/x) \sin(1/y).$
- c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \sin(x+y) \right).$
- d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}.$
- e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}.$
- f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}.$
- g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}}{x^4 + y^4}.$
- h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + x^2 y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}.$
- i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, a)} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$

Ejercicio 2.12. Dado el conjunto $A = (0, \infty) \times [0, 2\pi)$, sea $g : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función definida por $g(u, v) = (u \cos v, u \sin v)$.

- a) Demostrar que g es inyectiva y continua.
- b) Calcular la imagen de g y la imagen inversa del conjunto $B((0, 0), r) \setminus \{(0, 0)\}$.
- c) Dada $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sea $F = f \circ g$. Probar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L$ si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < u < \delta, 0 \leq v < 2\pi \implies |F(u, v) - L| < \varepsilon.$$

Ejercicio 2.13. Utilizando el ejercicio anterior, calcular $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ para las funciones siguientes:

- a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2(x^3 + y^2) + x^4}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
- b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y + x \sin y}{\sqrt{x^2 + y^2} - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Ejercicio 2.14. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

- a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^2 - y}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$

$$b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^2(x - y)}{|x| + |y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x + \operatorname{sen}(x + y)}{x + y} & \text{si } x + y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x + y = 0. \end{cases}$$

$$d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$e) f(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq |y| \\ y & \text{si } |x| > |y|. \end{cases}$$

$$f) f(x, y) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) + y & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$$g) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{e^{x+y} - 1} & \text{si } x > -y \\ 2x & \text{si } x = -y \\ \frac{\operatorname{sen}(x^2 - y^2)}{x + y} & \text{si } x < -y. \end{cases}$$

$$h) f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{2x - y + z - 2}{x + y - z - 1} & \text{si } x + y - z \neq 1 \\ 0 & \text{si } x + y - z = 1. \end{cases}$$

Ejercicio 2.15. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y} & \text{si } y \neq -x^2 \\ 0 & \text{si } x^2 + y = 0. \end{cases}$$

$$d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$e) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f) f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$g) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$h) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{4x^2 + y^2 - 1} & \text{si } 4x^2 + y^2 \neq 1 \text{ y } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } 4x^2 + y^2 = 1 \text{ ó } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$i) f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x} & \text{si } y^2 \neq 2x \\ 1 & \text{si } y^2 = 2x. \end{cases}$$

$$j) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\sin \pi y} & \text{si } y \notin \mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$k) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 1 & \text{si } x+y = 0. \end{cases}$$

$$l) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{y - x^2 + 2} & \text{si } y - x^2 + 2 \neq 0 \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

$$m) f(x, y) = \begin{cases} \frac{3(x+y)}{x^3 + y^3} & \text{si } x^3 + y^3 \neq 0 \\ 1 & \text{si } x^3 + y^3 = 0. \end{cases}$$

$$n) f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2 y}{(x-1)^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (1, 0). \end{cases}$$

Ejercicio 2.16. Determinar $f(0, 0)$ para que la función f definida para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ por

$$f(x, y) = \frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$$

sea continua en $(0, 0)$.

Ejercicio 2.17. Sea la función f definida para $y \neq 0$ por

$$f(x, y) = \frac{1 - \cos \sqrt{xy}}{y}.$$

¿Es posible determinar $f(x, 0)$ para que f sea continua?

Ejercicio 2.18. Sea $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Buscar un abierto G tal que $h^{-1}(G)$ no sea abierto y un cerrado F tal que $h^{-1}(F)$ no sea cerrado.

Ejercicio 2.19. Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si $f(x_0) > 0$, demostrar que f es positiva en un entorno de x_0 .

Ejercicio 2.20. Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ continua y sea $\alpha < \beta$. Demostrar que $\{x \in \mathbb{R}^m : \alpha \leq f(x) \leq \beta\}$ es un cerrado de \mathbb{R}^m .

Ejercicio 2.21. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función lineal tal que $f(1, 0) = (2, 1, 0)$ y $f(0, 1) = (1, 0, -1)$. Hallar la matriz asociada a f y demostrar que no todo vector de \mathbb{R}^3 es imagen de algún vector de \mathbb{R}^2 .

Ejercicio 2.22. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función lineal. Demostrar que existen vectores no nulos en \mathbb{R}^3 que tienen por imagen el vector nulo en \mathbb{R}^2 .

Ejercicio 2.23. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función lineal cuya matriz asociada es $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Demostrar que

$$f(x) \neq 0 \text{ cuando } x \neq 0 \iff ad - cb \neq 0.$$

Ejercicio 2.24. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función lineal cuya matriz asociada es $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $ad - bc \neq 0$. Demostrar que f es biyectiva y calcular f^{-1} , comprobar que es lineal y hallar la matriz asociada.

Ejercicio 2.25. Estudiar la continuidad uniforme de la función $f(x, y) = x + \frac{y}{x}$ en su dominio de definición.

Ejercicio 2.26. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uniformemente continua en D . Demostrar que, si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces $\{f(x_n)\}$ también es de Cauchy.

Ejercicio 2.27. Sea $D = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| < 1\}$. Demostrar que $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ se puede extender a una función continua sobre $D_1 = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \leq 1\}$ si y sólo si f es uniformemente continua sobre D .

Ejercicio 2.28. Dar un ejemplo de función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que se verifique

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

y no tenga puntos fijos. ¿Contradice esto el teorema del punto fijo?

Ejercicio 2.29. Sea $B \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto acotado y $f : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función uniformemente continua sobre B . Demostrar que f es acotada.

Ejercicio 2.30. Probar que la aplicación $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua.