Seminario 1

Josu Pérez Zarraonandia

C1) En $\mathbb{R}^3$:

a) $n(x,y,z) = |x| + 2|y| + 3|y-z|$

i) ¿$n(x,y,z) = 0 \iff x=y=z=0$?

$\Leftarrow$)

$n(0,0,0) = |0| + 2|0| + 3|0-0| = 0$

$\Rightarrow$)

$n(x,y,z) = 0 \Rightarrow \underbrace{|x|}_{\geq 0} + \underbrace{2|y|}_{\geq 0} + \underbrace{3|y-z|}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} |x| = 0 \Rightarrow x = 0 \\ |y| = 0 \Rightarrow y = 0 \\ |y-z| = 0 \Rightarrow y = z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 0$$

ii) ¿$n(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = |\alpha| \cdot n(x,y,z)$?

$n(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = |\alpha x| + 2|\alpha y| + 3|\alpha y - \alpha z| =$

$= |\alpha||x| + 2|\alpha| \cdot |y| + 3|\alpha(y-z)| =$

$= |\alpha||x| + 2|\alpha||y| + 3|\alpha||y-z| =$

$= |\alpha|(|x| + 2|y| + 3|y-z|) = |\alpha| \cdot n(x,y,z)$

iii) ¿$n(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \leq n(x_1,y_1,z_1) + n(x_2,y_2,z_2)$?

$n(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) =$

$= |x_1+x_2| + 2|y_1+y_2| + 3|y_1+y_2-z_1-z_2| \leq$ ↱ Des. triangular para el valor absoluto en $\mathbb{R}$

$\leq |x_1| + |x_2| + 2|y_1| + 2|y_2| + 3|y_1-z_1| + 3|y_2-z_2| =$ ↱ Reorganizar

$$= \underbrace{|x_1| + 2|y_1| + 3|y_1 - z_1|}_{n(x_1, y_1, z_1)} + \underbrace{|x_2| + 2|y_2| + 3|y_2 - z_2|}_{n(x_2, y_2, z_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \leq n(x_1, y_1, z_1) + n(x_2, y_2, z_2)$$

iv) ¿$n(x,y,z) \geq 0$?

Hemos probado la igualdad. Si no:

$$n(x,y,z) = \underbrace{|x|}_{\geq 0} + 2\underbrace{|y|}_{\geq 0} + 3\underbrace{|y-z|}_{\geq 0} \geq 0$$ (Porque lo es el valor absoluto en $\mathbb{R}$).

Por tanto: $\boxed{a \text{ es norma.}}$

b) $n(x,y,z) = |x| + 2|y| + 3|y+z|$

El caso de b) es análogo al de a). Por tanto,

$\boxed{b \text{ es norma.}}$

c) $n(x,y,z) = |x| - 2|y| + 3|y : z|$

Veamos que no es norma porque no cumple la siguiente propiedad:

i) ¿$n(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$?

$\Rightarrow$)

$n(x,y,z) = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$. Observamos que no.

Ejemplo: para $x = 0$, $y = 3$, $z = 1$:

$$n(x,y,z) = n(0,3,1) = |0| \underbrace{- 2|3|}_{-6} + \underbrace{3|3/1|}_{6} = -6+6 = 0$$

pero $x \neq y \neq z = 0$.

Por tanto, $\boxed{c \text{ no es norma.}}$

d) $n(x,y,z) = |x| + 2|y| + |3y - z|$

i) ¿ $n(x,y,z) = 0 \iff x = y = z = 0$?

$\Leftarrow$)

$x = y = z = 0 \Rightarrow n(x,y,z) = |0| + 2|0| + |3\cdot 0 - 0| = 0$

$\Rightarrow$)

$n(x,y,z) = 0 \Rightarrow \underbrace{|x|}_{\geq 0} + \underbrace{2|y|}_{\geq 0} + \underbrace{|3y - z|}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} |x| = 0 \Rightarrow x = 0 \\ |y| = 0 \Rightarrow y = 0 \\ |3y - z| = 0 \Rightarrow 3y = z \Rightarrow z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 0$$

ii) ¿ $n(x,y,z) \geq 0$?

La igualdad está vista:

$n(x,y,z) = \underbrace{|x|}_{\geq 0} + \underbrace{2|y|}_{\geq 0} + \underbrace{|3y - z|}_{\geq 0} \geq 0$ (Porque son sumandos positivos. El valor absoluto en $\mathbb{R}$ es ≥ 0).

iii) ¿ $n(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = |\alpha| \cdot n(x,y,z)$?

$n(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = |\alpha x| + 2|\alpha y| + |3\alpha y - \alpha z| =$

$= |\alpha| \cdot |x| + 2|\alpha||y| + |\alpha \cdot (3y - z)| =$

$= |\alpha| \cdot \left[|x| + 2|y| + |3y - z|\right] = |\alpha| \cdot n(x,y,z)$

iv) ¿ $n(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \leq n(x_1, y_1, z_1) + n(x_2, y_2, z_2)$?

$n(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = |x_1 + x_2| + 2|y_1 + y_2| + |3(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)| =$

$= |x_1 + x_2| + 2|y_1 + y_2| + |3y_1 - z_1 + 3y_2 - z_2| \leq$ (por valor absoluto en $\mathbb{R}$, cumple la des. triang.

$\leq |x_1| + |x_2| + 2|y_1| + 2|y_2| + |3y_1 - z_1| + |3y_2 - z_2| =$

$= \underbrace{|x_1| + 2|y_1| + |3y_1 - z_1|}_{n(x_1, y_1, z_1)} + \underbrace{|x_2| + 2|y_2| + |3y_2 - z_2|}_{n(x_2, y_2, z_2)}$

$\square$

Hemos probado:

$$n(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2) \leq n(x_1, y_1, z_1) + n(x_2, y_2, z_2)$$

Como se cumplen todas las propiedades, $\boxed{\text{d) es norma.}}$

C2) En $\mathbb{R}^n$ probar y poner contraejemplo para $\|\cdot\|_1$.

- $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

<u>dem.:</u>

La norma asociada a un producto escalar se define como:

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Por tanto:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \overbrace{\langle x,x\rangle}^{\|x\|^2} + \overbrace{\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle}^{2\langle x,y\rangle} + \overbrace{\langle y,y\rangle}^{\|y\|^2}$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \underbrace{\langle x,x\rangle}_{\|x\|^2} \underbrace{- \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle}_{-2\langle x,y\rangle} + \underbrace{\langle y,y\rangle}_{\|y\|^2}$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

$$+ \quad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

~~Tomando $\mathbb{R}^1$ y $\|\cdot\|_1$, si tomamos $x=2$, $y=1$ $\Rightarrow$~~

$$\cancel{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \Rightarrow}$$

$$\cancel{|2+1|^2 + |2-1|^2 = 2|2|^2 + 2|1|^2 \Rightarrow}$$

$$\cancel{9 + 1 =}$$

En $\mathbb{R}^2$ y $\|\cdot\|_1$, tomando $(1,0)$ y $(0,1)$ $\rightarrow$

$$\|(1,1)\|^2 + \|(1,-1)\|^2 = 4+4 = 8$$

$$2\|(0,1)\|^2 + 2\|(1,0)\|^2 = 2+2 = 4$$

$\rightarrow$ No son iguales

C3) Probar:

$x, y \in \mathbb{R}^n$. $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0 : x = \lambda y$

demos.:

$\Leftarrow$) Hip.: $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0 : x = \lambda y$

Observamos que $x = \lambda y \Rightarrow \|x\| = \|\lambda y\| = |\lambda| \|y\| \Rightarrow$

$|\lambda| = \frac{\|x\|}{\|y\|} \Rightarrow |\lambda|^2 = \lambda^2 = \frac{\|x\|^2}{\|y\|^2}$

Tomamos:

$\langle 0, 0 \rangle = \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - \lambda \langle x, y \rangle - \lambda \langle y, x \rangle$

$+ \lambda^2 \langle y, y \rangle = \|x\|^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle + \frac{\|x\|^2}{\|y\|^2} \|y\|^2 =$

$= 2\|x\|^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow$

tomando val. abs

$\Rightarrow \|x\|^2 = \lambda \langle x, y \rangle \Rightarrow |\underbrace{\|x\|^2}_{\geq 0}| = \cancel{|\lambda|}^{\|x\|/\|y\|} \cdot |\langle x, y \rangle| \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x\|^{\cancel{2}} \cdot \frac{\|y\|}{\cancel{\|x\|}} = |\langle x, y \rangle| \Rightarrow |\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$

Entonces:

$\langle x+y, x+y \rangle = \|x+y\|^2 = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle =$

$= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$

Pero: $|\lambda| = \frac{\|x\|}{\|y\|} \Rightarrow \begin{cases} \lambda > 0, \ \lambda = \frac{\|x\|}{\|y\|} \Rightarrow \langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \\ \lambda < 0, \ \lambda = -\frac{\|x\|}{\|y\|} \Rightarrow \langle x, y \rangle = -\|x\| \cdot \|y\| \end{cases}$

$\begin{cases} \lambda > 0 \Rightarrow \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \\ \lambda < 0 \Rightarrow \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = (\|x\| - \|y\|)^2 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \lambda > 0 \Rightarrow \|x+y\| = |\|x\| + \|y\|| = \|x\| + \|y\| \\ \lambda < 0 \Rightarrow \|x+y\| = |\|x\| - \|y\|| \end{cases}$

Es decir, si $\lambda < 0$ no va a ser cierto. Ejemplo en $\mathbb{R}^2$:

Si tomamos $x = (1,0)$, $y = (-1,0)$:

$\|x+y\| = \|(1,0)+(-1,0)\| = 0$

$\|x\| + \|y\| = \|(1,0)\| + \|(-1,0)\| = 1+1 = 2 \neq 0 = \|x+y\|$

¡No se da siempre!

Sin embargo:

$\big| \|x\| - \|y\| \big| = |1-1| = 0 = \|x+y\|$

C4) $A \subset \mathbb{R}^n$

a) ¿$A = \text{int}(A) \cup \text{fr}(A)$?

Por doble inclusión:

¿$\subset$?

Tomamos $a \in A \Rightarrow \forall r > 0,\ B(a,r) \cap A \neq \emptyset$. Tenemos dos casos:

$B(a,r) \subset A \Rightarrow a \in \text{int}(A)$

$B(a,r) \not\subset A \Rightarrow B(a,r) \cap A^c \neq \emptyset \Rightarrow a \in \text{fr}(A)$

¿$\supset$?

Es evidente que $\text{int}(A) \subset A$. Dado $a \in \text{int}(A)$, $\exists r > 0: B(a,r) \subset A$

$\Rightarrow a \in B(a,r) \subset A \Rightarrow a \in A$.

Tomamos $x \in \text{fr}(A) \Rightarrow \forall r > 0: B(x,r) \cap A \neq \emptyset,\ B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset$

De aquí no podemos afirmar que $x \in A$. Ejemplo:

$A = \{a \in \mathbb{R}: a < 0\}$ $\text{fr}(A) = \{0\}$. $0 \in \text{fr}(A)$ pero $0 \notin A$

Por tanto esta inclusión no es sierta $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{No es cierto.}}$

b) ¿$A \subset A'$?

$A' = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0,\ B^*(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$

No necesariamente, contraejemplo:

$A = [0,1] \cup \{3\}$

Observamos que $\exists r = 1,\ B^*(3,1) \cap A = \emptyset \Rightarrow 3 \notin A'$ pero $3 \in A$.

$\boxed{\text{No es cierto.}}$

c) A abierto $\Leftrightarrow A = \mathrm{int}(A) \overset{¿?}{\Leftrightarrow} A \cap fr(A) = \emptyset$

$\Rightarrow)$

Sup.: que $A = \mathrm{int}(A) = \{a \in \mathbb{R}^n : \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A\}$

Veamos que $A \cap fr(A) = \emptyset$. Tomamos $y \in fr(A) \Rightarrow$

$\forall r > 0,\ B(y,r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(y,r) \cap A^c \neq \emptyset \Rightarrow$

$B(y,r) \not\subset A$, pues $\exists z \in B(y,r)$ t.q. $z \in A^c$ y $z \notin A$.

Pero como $a = \mathrm{int}(A)$ y $\forall r > 0,\ B(y,r) \cap A^c \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow y \notin A. \Rightarrow A \cap fr(A) = \emptyset$

$\Leftarrow)$

Sup.: $A \cap fr(A) = \emptyset$. Veamos que $A = \mathrm{int}(A)$. $A \supset \mathrm{int}(A)$ es trivial. Veamos si $\mathrm{int}(A) \supset A$. Dado $x \in A$, sabemos que $x \notin fr(A) \Rightarrow \exists r > 0 : B(x,r) \subset A$ o $B(x,r) \subset A^c$. Si fuera $B(x,r) \subset A^c \Rightarrow x \notin A$ y llegaríamos a un absurdo $\Rightarrow$

$B(x,r) \subset A \Rightarrow A \subset \mathrm{int}(A) \Rightarrow A = \mathrm{int}(A)$

Así queda demostrada la doble implicación.

d) A es cerrado $\iff A = \bar{A} \overset{¿?}{\iff} fr(A) \subset A$

$\Rightarrow$)

Sup. $A = \bar{A} \Rightarrow \forall a \in A,\ \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

Tomamos $y \in fr(A) \Rightarrow \forall r > 0,\ B(y,r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(y,r) \cap A^c \neq \emptyset$

En particular, se da que $\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$

$y \in \bar{A} = A \Rightarrow fr(A) \subset A$

$\Leftarrow$)

Sup. $fr(A) \subset A \Rightarrow \forall a \in fr(A),\ \forall r > 0,\ B(a,r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(a,r) \cap A^c \neq \emptyset$

Veamos si $A = \bar{A}$. $\bar{A} \supset A$ es trivial. Veamos si $\bar{A} \subset A$.

Tomamos $x \in \bar{A} \Rightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Dos casos:

Si $B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset \Rightarrow x \in fr(A) \subset A \Rightarrow x \in A$.

Si $B(x,r) \cap A^c = \emptyset \Rightarrow B(x,r) \subset A \Rightarrow x \in int(A) \subset A \Rightarrow x \in A$

$\Rightarrow x \in A \Rightarrow \bar{A} \subset A \Rightarrow A = \bar{A}$

Probada la doble inclusión. La afirmación es cierta.

C5) $A, B \subset \mathbb{R}^2$.

a) A acotado $\Rightarrow A'$ compacto

Sup.: $\exists M > 0$ t.q. $A \subset B((0,0), M)$. Veamos que A' es compacto porque es $\forall B \subset A'$ (B infinito), $B' \neq \emptyset$, $\exists z \in B'$, $z \in B$.

Vamos a probar que A' está acotado. Red. abs. Supongamos que $\exists x \in A'$ t.q. $x \notin B((0,0),M)$. Por una parte, $\forall r > 0,\ B^*(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Por otra $\forall y \in B^*(x,r),\ \|y - (0,0)\| \geq M$.

Es decir, $\exists y \in A$ t.q. $y \in B((0,0),M)^c \subset A^c$ que es absurdo.

La contradicción proviene de suponer que A' no está acotado

$\Rightarrow \quad A' \subset B((0,0), M)$

No sé como demostrar $A' = \overline{A'}$ o $(A')' \subset A$!
(que A' es cerrado).

Si tomo $B \subset A'$ infinito, puedo acotarla y por Bolzano Weierstrass $B' \neq \emptyset$, pero no sé como demostrar que $\exists x \in B'$ t.q. $x \in A'$.

b) $B = \overline{B} \Rightarrow fr(B) \subset B$

Sup. $B = \overline{B} \Rightarrow \forall x \in B,\ B(x,r) \cap B \neq \emptyset \quad \forall r > 0$

Sea $y \in fr(B) \Rightarrow \forall r > 0,\ B(y,r) \cap B \neq \emptyset \wedge B(y,r) \cap B^c \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall r > 0,\ B(y,r) \cap B \neq \emptyset \Rightarrow y \in \overline{B} = B \Rightarrow fr(B) \subset B \ \square$

c) B acotado $\Rightarrow \overline{B}$ compacto

Tengo problemas similares a b)

d) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$\supset$)

Dado $x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow \forall r>0,\ B(x,r) \cap A \cup B \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow (B(x,r) \cap A) \cup (B(x,r) \cap B) \neq \emptyset \Rightarrow$ Al menos uno de los dos es no vacío. Sup. $B(x,r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$

$x \in \bar{A} \Rightarrow x \in \bar{A} \cup \bar{B}$

$\subset$)

Sea $x \in \bar{A} \cup \bar{B} \Rightarrow$ Sin pérdida de generalidad, $x \in \bar{A} \Rightarrow$

$\forall r>0 \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset \quad \Rightarrow (\underbrace{B(x,r)} \cap A) \cup (B(x,r) \cap B) \neq \emptyset$

$(A' \cup B' = \emptyset \Rightarrow A' = B' = \emptyset) \Rightarrow \forall r>0,\ B(x,r) \cap (A \cup B) \neq \emptyset \Rightarrow$

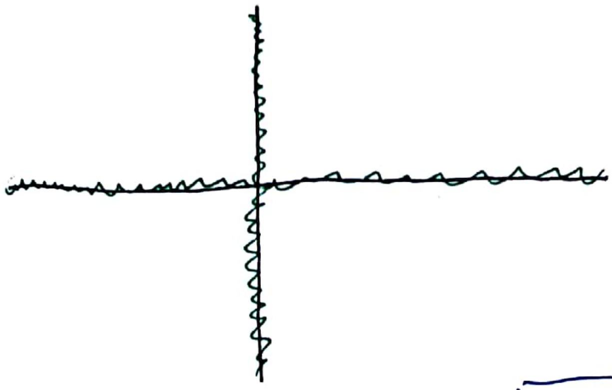
$x \in \overline{A \cup B}$

Demostrado por doble inclusión.

Scanned by CamScanner

C6)

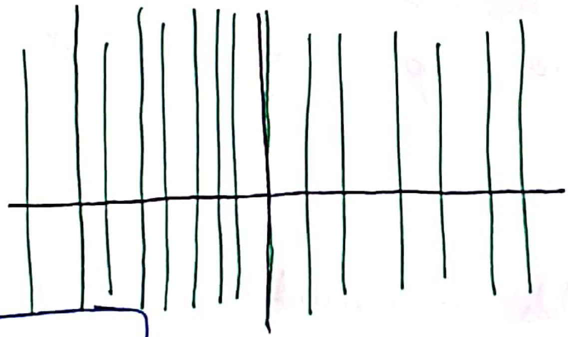
a) $A = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$



$A = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x=0 \text{ ó } y=0\}$ $\boxed{\text{No es abierto.}}$

$\forall r>0,\ B((0,0),r)\cap A^c \neq \emptyset \Rightarrow (0,0)\in A$ pero $(0,0)\notin \text{int}(A)$

b) $B = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x\in \mathbb{Q}\}$



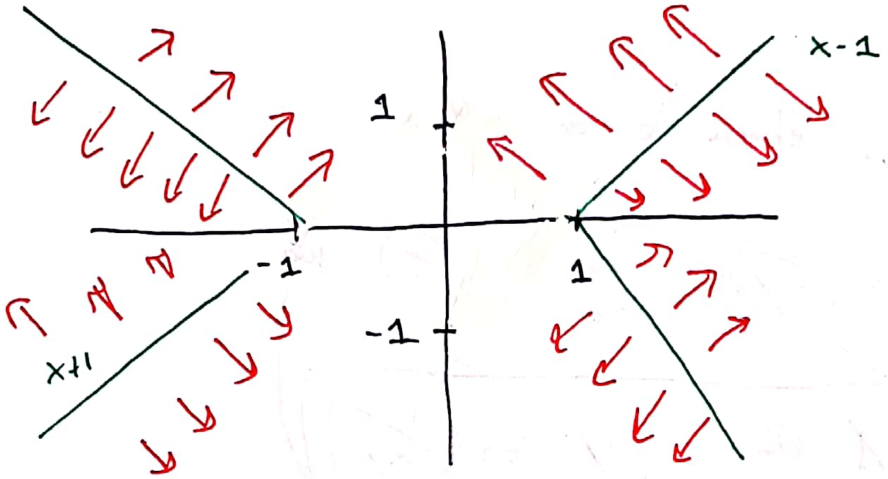
$\boxed{\text{No es abierto.}}$

Tomamos $(0,0)$. $\forall r>0$, $\exists x\in \mathbb{I}$ t.q. $(x,0)\in B((0,0),r)$

$\Rightarrow B((0,0),r) \not\subset \mathbb{Q}\times\mathbb{R}$ (hay infinitos irracionales cerca de un racional, $\mathbb{R}$ es denso.

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - |y| \neq 1\}$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - |y| > 1 \text{ ó } |x| - |y| < 1\}$

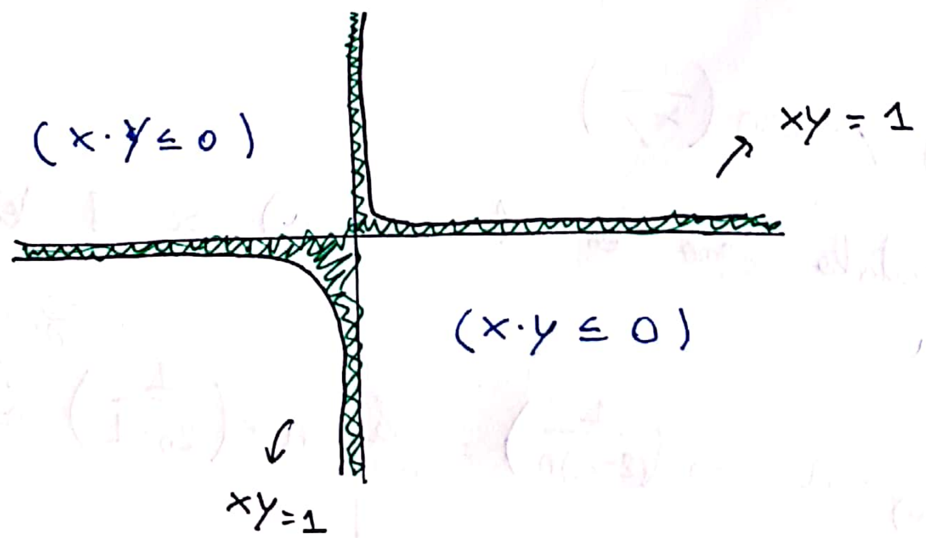


1^{er} Cuad: $\begin{cases} y < 1 - x \\ y > 1 - x \end{cases}$ 2^{do} Cuad: $\begin{cases} y > -1 - x \\ y < -1 - x \end{cases}$

3^{er} Cuad: $\begin{cases} y < 1 + x \\ y > 1 + x \end{cases}$ 4^{o} Cuad: $\begin{cases} y > 1 - x \\ y < 1 - x \end{cases}$

$\boxed{\text{Si es abierto,}}$ porque en $\mathbb{R}^2$ basta que C^c sea cerrada y si lo es pues $C^c = \overline{C^c} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - |y| = 1\}$

d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < xy < 1\}$



$\boxed{\text{Si es abierto}}$ porque $\text{int}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < xy < 1\}$ y $\text{int}(D) = D$.

C7)

a) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\mathbb{R}^2}} y\cdot \text{sen}\left(\frac{1}{xy}\right)$

Si este límite existiera, debería de ser igual a

$$\cancel{\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in \mathbb{R}\times 1\subset\mathbb{R}^2}} y\cdot \text{sen}\left(\frac{1}{xy}\right) = \lim_{x\to 0} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}$$ ~~que no existe~~ $\cancel{\Rightarrow \boxed{\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\cdot \text{sen}\left(\frac{1}{xy}\right)}}$

Si existiera:

$$0 \leq \left| \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\cdot \text{sen}\left(\frac{1}{xy}\right) \right| \leq \left| \lim_{y\to 0} y\cdot 1 \right| = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\cdot \text{sen}\left(\frac{1}{xy}\right) = 0}$$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,\infty)} y\cdot \text{sen}\left(\frac{1}{xy}\right)$

No puedo acotarlo como en el caso a). Si $\exists$, debería ser igual a:

$$\lim_{(2-1/n,\,n)\to(2,\infty)} n\cdot \text{sen}\left(\frac{1}{(2-1/n)n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\,\text{sen}\left(\frac{1}{2n-1}\right) \overset{\text{inf. equ.}}{\approx}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2} \quad //$$

(No puedo asegurar que $\exists$, pero si lo hace es $1/2$).

Scanned by CamScanner

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$

Si $\exists L \Rightarrow L = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in T\subset\mathbb{R}^2}} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$, $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}$

$\Rightarrow L = \lim_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{2}} =$

$= e^{\lim_{x\to 0}(x/2)} = 1$

A su vez, tomando $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=-x+x^2\}$

$L = \lim_{x\to 0} (1+x^3-x^2)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3-x^2}{x^2}\right)} = e^{-1}$

$e^{-1}\neq 1 \Rightarrow \boxed{\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}}$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,\infty)} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$

Si $\exists L$ debería de existir en $T_1\subset\mathbb{R}^2$, $(x=\frac{1}{y})$ y $T_2\subset\mathbb{R}^2 (x=-\frac{1}{y})$

- $\lim_{\substack{x\to 0 \\ T_1}} (\underbrace{1+1}_{2})^{\frac{1}{x+1/x}} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ T_1}} 2^{\frac{x}{x^2+1}} = 1$

- $\lim_{\substack{x\to 0 \\ T_2}} (\underbrace{1-1}_{0})^{\frac{1}{x-1/x}} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ T_2}} 0^{\frac{x}{x^2-1}}$ que $\nexists$

$\Rightarrow \boxed{\nexists \lim_{(x,y)\to(0,\infty)} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}}$

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{|x|+|y|}$

Si $\exists$, debería existir para $x=y$:

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|x^2|}}{|x|+|y|} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{|x|}}{2\cancel{|x|}} = \frac{1}{2}$$

y para $4x=y$

$$\lim_{(x,4x)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|4x^2|}}{|x|+|4x|} = \frac{|2|\cdot\cancel{|x|}}{5\cdot\cancel{|x|}} = \frac{|2|}{5} \neq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{|x|+|y|}}$$

g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2|x|^3-|y|^2}{|x|+|y|}$

Si $\exists L$, debería existir para $x=y$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2|x|^3-|x|^2}{2|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2}|x|^3-|x|^2}{\cancel{2}|x|} = \lim_{x\to 0} |x|^2 - \frac{|x|}{2} = 0$$

Puedo afirmar que si existe es 0, pero nada más.