TOPOLOGIA. EXAMEN FINAL. 24 DE ENERO DE 2019

1.- Sobre $\mathbb{R}$ se considera la familia de conjuntos:

$$\beta = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Se pide:

(i) probar que β es base para una topología τ sobre $\mathbb{R}$. ¿Es $(\mathbb{R}, \tau)$ de Hausdorff?;

(ii) calcular el interior y el derivado de los siguientes conjuntos en $(\mathbb{R}, \tau)$: $A = [0, 1)$, $B = (-2, 2]$, $C = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ y $D = \{2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

(iii) comparar τ con la topología usual τ_u. ¿Es $1_{\mathbb{R}} \colon (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ continua? ¿Y $f \colon (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$, donde $f(x) = 0$ si $x \in (0, 1)$ y $f(x) = 1$ si $x \notin (0, 1)$?

(iv) ¿Es $(\mathbb{R}, \tau)$ conexo? ¿Y compacto?

2.- Responder las siguientes cuestiones, demostrándolas o dando un contraejemplo:

(i) En (X, τ), sea A un conjunto cerrado, ¿es compacto? ¿Y si B es un conjunto compacto, ¿es cerrado?

(ii) Si $f \colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ es continua y (X, τ_X) es conexo, probar que $f(X)$ también lo es.

(iii) Dar la definición de espacio cociente de un espacio topológico. Si (X, τ) es compacto y $\sim$ es una relación de equivalencia sobre X, ¿el espacio cociente $(X/\sim, \tau_\sim)$ es compacto?

(iv) Dar la definición de espacio producto de dos espacios topológicos. Si (X, τ_X) y (Y, τ_Y) son espacios topológicos y (X, τ_X) es conexo, ¿es el producto $(X \times Y, \tau_{TYC})$ conexo?

(v) Sean (X, τ_1) y (X, τ_2) donde $\tau_1 \subset \tau_2$. Dado $A \subset X$, ¿existe alguna relación entre $\overline{A}^1$ y $\overline{A}^2$?

(vi) En (X, τ), si $\mathcal{B}_x$ es una base local en x, probar que $\mathcal{B}_x = \{\overset{\circ}{B} \colon B \in \mathcal{B}_x\}$ también lo es. Definición de base local

Todas las preguntas valen 1 punto.

Topologia. 24 de enero de 2018.

1. Sobre $\mathbb{R}$ se consideran las familias de conjuntos:

I) $\mathcal{B}_0 = \{\{0\}\}$

II) $\mathcal{B}_1 = \{\mathbb{R}\}$

III) $\mathcal{B}_x = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$, si $x \neq 0, 1$.

Se pide:

1) comprobar que $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ es un sistema fundamental de entornos para una topología τ sobre $\mathbb{R}$. Compararla con τ_{us}. ¿Es $(\mathbb{R}, \tau)$ de Hausdorff? ¿Y de Frechet?

2) Calcular el interior y el derivado de los siguientes conjuntos en $(\mathbb{R}, \tau)$:

$A = [0,1)$, $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $C = \{2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

3) Probar que si $U \in \tau$ y $1 \in U$, entonces es necesariamente $U = \mathbb{R}$. ¿Es $(\mathbb{R}, \tau)$ conexo? ¿Y compacto?

1)
Como no nos dan la topología deberemos utilizar el teorema 2.8:
(B1) $\forall B \in \mathcal{B}_x$, es $x \in B$
- $x = 0$: $\{0\} \in \mathcal{B}_0$ y $x \in \{0\}$
- $x = 1$: $\mathbb{R} \in \mathcal{B}_1 \wedge x \in \mathbb{R}$
- $\forall x \neq 0, 1$: Tomamos un x cualquiera distinto de 0 y 1, luego $\exists B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$, $x \in B$.

(B2) Veamos que para cualesquiera $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, $\exists B_3 \in \mathcal{B}_x$: $B_3 \subset B_1 \cap B_2$
- Si $x = 0$: Solamente hay un elemento, luego $B_1 \cap B_2 \supset B_3 \Rightarrow$ $\Rightarrow B_1 = \{0\} = B_2 \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \{0\} \Rightarrow B_3 = \{0\} \Rightarrow B_3 \subset B_1 \cap B_2$.
- Si $x = 1$: Nuevamente solo hay un elemento, $\mathbb{R}$, luego $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}_1$, $B_1 \cap B_2 = \mathbb{R} \Rightarrow B_3 = \mathbb{R}$ y $B_3 = B_1 \cap B_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow B_3 \subset B_1 \cap B_2$. (necesariamente $B_1 = \mathbb{R} = B_2$) por solamente haber un entorno basico

• $x \neq 0, 1$: Luego sean $B_1 = (x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1)$ y $B_2 = (x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2)$.
Entonces $\exists B_3 = (x-\varepsilon_3, x+\varepsilon_3)$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

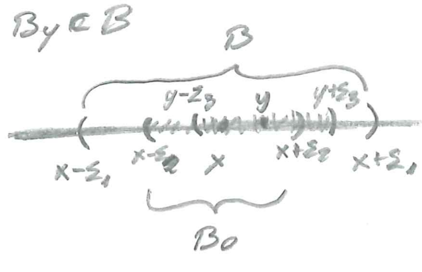
Luego tomando $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ se verifica que $\exists B_3 : B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

(B_3) $\forall B \in \mathcal{B}_x$, $\exists B_0 \in \mathcal{B}_x$ tal que $\forall y \in B_0$ $\exists B_y \in \mathcal{B}_y$ tal que $B_y \subset B$.

• Si $x=0$: Sea $B \in \mathcal{B}_0$ ($B = \{0\}$), tomamos otro $B_0 \in \mathcal{B}_x$, tal que $\forall y \in B_0$, $\exists B_y \in \mathcal{B}_y$ tal que $B_y \subset B$. En este caso, el unico elemento es $\{0\}$, luego $y = 0 \Rightarrow B_y \in \mathcal{B}_y$, $B_y = \{0\} = B \Rightarrow$
$\Rightarrow B_y \subset B$.

• Si $x = 1$: Sea $B \in \mathcal{B}_1$ ($B = \{\mathbb{R}\}$), tomamos $B_0 \in \mathcal{B}_1 \Rightarrow B_0 = \{\mathbb{R}\}$, luego $\forall y \in B_0$ ($\forall y \in \mathbb{R}$), $\exists B_y$:
- Si $y = 0 \Rightarrow B_y \in \mathcal{B}_y$, $B_y = \{0\}$ y $B_y \in B$ ($\{0\} \in \mathbb{R}$). ✓
- Si $y = 1 \Rightarrow B_y \in \mathcal{B}_y$, $B_y = \mathbb{R}$ y $B_y = B \Rightarrow B_y \subset B$. ✓
- Si $y \neq 0, 1 \Rightarrow B_y = (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ y todos los elementos de B_y pertenecen a $\mathbb{R}$, luego $B_y \in B$.

• Si $x \neq 0, 1$: Tomamos un B cualquiera tal que $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. $\exists B_0 \in \mathcal{B}_x$ tal que $\forall y \in B_0$, $\exists B_y \in \mathcal{B}_y$ tal que $B_y \subset B$



Tomamos $B \in \mathcal{B}_x$ ($B = (x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1)$) y $B_0 \in \mathcal{B}_x$ ($B_0 = (x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2)$), con $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, luego podemos suponer que tomamos un B_0 tal que $1 \notin B_0$, luego hay posibilidades

1) $y \neq 0, 1 \Rightarrow B_y = (y-\varepsilon_3, y+\varepsilon_3)$, luego $\forall y \in B_y$, $y \in B \Rightarrow$
$B_y \subset B$.

2) $y = 0 \Rightarrow B_y = \{0\}$, y como $y \in B_0$, $B_y \in B_0 \in \mathcal{B}_x$ y $B \in \mathcal{B}_x \Rightarrow$
$B_y \subset B$.

Luego $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ es un S.F.E para una topología τ sobre $\mathbb{R}$.

Ahora vamos a comparar esta topología con τ_u sobre $\mathbb{R}$, cuyo S.F.E es $\mathcal{B}_x^u = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$.

Aplicando el criterio de Hausdorff. $\tau_1 \subset \tau_2 \iff \forall x \in \mathbb{R}$ y cada $B_1 \in \mathcal{B}_x^1$, $\exists B_2 \in \mathcal{B}_x^2$ tal que $B_2 \subset B_1$.

- Si $x=0$: $\left.\begin{array}{l} B \in \mathcal{B}_0^{us} \Rightarrow B = (-\varepsilon, +\varepsilon) \\ B' \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow B' = \{0\} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B' \subset B}$

- Si $x=1$: $\left.\begin{array}{l} B \in \mathcal{B}_1^{us} \Rightarrow B = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \\ B' \in \mathcal{B}_1 \Rightarrow B' = \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in B,\ x \in B' \Rightarrow \underline{B \subset B'}$

- Si $x \neq 0,1$: $\left.\begin{array}{l} B \in \mathcal{B}_x^{us} \Rightarrow B = (x-\varepsilon, x+\varepsilon), \forall \varepsilon > 0 \\ B' \in \mathcal{B}_x \Rightarrow B' = (x-\varepsilon, x+\varepsilon), \forall \varepsilon > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B = B'}$

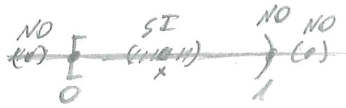
No lo sabemos con certeza pero sí que sabemos que τ_u es un espacio de Hausdorff, luego por teoría si $\tau_u \subset \tau \Rightarrow$ τ es T_2, y podemos ver que $(\mathbb{R}, \tau)$ no es T_2 ya que si tomamos $x \neq y$, con $x, y \in \tau$, luego fijada una base de entornos si x ó y, fuera alguno de los dos igual a uno un entorno básico sería $\mathbb{R}$ y su abierto sería también $\mathbb{R}$ y para cualquier otro abierto $C \in \tau$, $C \subset \mathbb{R}$ y por tanto $(\mathbb{R}, \tau)$ no es $T_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \tau_u \not\subset \tau \Rightarrow \tau \subset \tau_u$.

Luego sabemos que $\tau \subset \tau_u$ y que $(\mathbb{R}, \tau)$ no es un espacio de Hausdorff. Veamos si es de Frechet.

Por la misma razon que antes, sean $x, y \in \mathbb{R} : x \neq y$. Si $x=1$, $x \in U$ tal que $U = \mathbb{R}$, luego como $y \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Entonces, $x \in U$ e $y \in \mathbb{R}$ y en conclusion $(\mathbb{R}, \tau)$ no es de Frechet.

2) Fijada la base de entornos:

$A = [0,1)$



• Si $x=0 \Rightarrow B \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow B = \{0\}$ y $B \subset A$

• Si $x=1 \Rightarrow B \in \mathcal{B}_1 \Rightarrow B = \mathbb{R},\ B \not\subset A$

• Si $x \neq 1,0 \Rightarrow B \in \mathcal{B}_x,\ B = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$,

1) $x \in A \Rightarrow B \subset A$

2) $x \notin A \Rightarrow B \not\subset A$

$\mathring{A} = [0,1)$

$A' = (0,1]$

Para el derivado de A (A'):

• Si $x=0 \Rightarrow B \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow B=\{0\} \Rightarrow (\{0\}-0) \cap A = \emptyset$, luego 0 no es un punto de acumulación

• Si $x=0 \Rightarrow B \in \mathcal{B}_1 \Rightarrow B = \mathbb{R} \Rightarrow (\mathbb{R}-x) \cap A \neq 0$, luego 1 es un punto de acumulación

• Si $x \neq 1,0 \Rightarrow B \in \mathcal{B}_x \Rightarrow B = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$;

- Si $x \in A \Rightarrow ((x-\varepsilon, x+\varepsilon)-x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x$ es un punto de acumulación.
- Si $x \notin A \Rightarrow ((x-\varepsilon, x+\varepsilon)-x) \cap A = \emptyset \Rightarrow$ no es un punto de acumulación.

$B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\mathring{B} = \emptyset$

$B' = \{1\}$

Para el interior:

• Si $x=0 \Rightarrow B \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow B = \{0\},\ B \not\subset A \Rightarrow 0$ no es punto interior

• Si $x=1 \Rightarrow B \in \mathcal{B}_1 \Rightarrow B = \mathbb{R},\ B \not\subset A \Rightarrow 1$ no es punto interior

• Si $x \neq 1,0 \Rightarrow B \in \mathcal{B}_x \Rightarrow B = (x-\varepsilon, x+\varepsilon), \forall \varepsilon > 0$. Luego, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B \not\subset A$.

Para el derivado

• Si $x = 0 \Rightarrow C \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow C = \{0\},\ (C-0) \cap B = \emptyset \Rightarrow$ no es punto de acumulación

• Si $x=1 \Rightarrow C \in \mathcal{B}_1 \Rightarrow C = \mathbb{R},\ (C-1) \cap B \neq \emptyset \Rightarrow 1$ es punto de acumulación.

• Si $x \neq 0,1 \Rightarrow C \in \mathcal{B}_x \Rightarrow C = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ¿$(C-x) \cap B \neq \emptyset$? existe algun $\varepsilon>0$ tal que $(C-x) \cap B = \emptyset$.

1) si $x \notin B$, existe algun $\varepsilon > 0$ tal que $(C-x) \cap B = \emptyset$.

2) si $x \in B$, existe algun $\varepsilon > 0$ tal que $(C-x) \cap B = \emptyset$.

• $C = \{2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$:  $\mathring{C} = \emptyset$, $C' = \{1, 2\}$

Para el interior:

• Si $x = 0 \Rightarrow B \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow B = \{0\}$, $B \cap C = \emptyset \Rightarrow B \not\subset C$.

• Si $x = 1 \Rightarrow B \in \mathcal{B}_1 \Rightarrow B = \mathbb{R}$, existen elementos de B que no estan en C, luego $B \not\subset C$

• Si $x \neq 0, 1$: $B \in \mathcal{B}_x$, $B = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$:

- $x = 2 \Rightarrow B$ tiene elementos que no estan en $C \Rightarrow B \not\subset C$.
- $x \in C \Rightarrow B$ tiene elementos que no estan en $C \Rightarrow B \not\subset C$.
- $x \in C \Rightarrow B$ tiene elementos que no estan en $C \Rightarrow B \subset C$.

Para el derivado:

• Si $x = 0 \Rightarrow B \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow B = \{0\}$, $(B - 0) \cap C = \emptyset \Rightarrow 0$ no es un punto de acumulación

• Si $x = 1 \Rightarrow B \in \mathcal{B}_1 \Rightarrow B = \mathbb{R}$, $(B - 1) \cap C \neq 0 \Rightarrow 1$ es punto de acumulacion

• Si $x \neq 0, 1 \Longrightarrow B \in \mathcal{B}_x$, $B = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ (con $\varepsilon > 0$):

- Si $x = 2 \Rightarrow (B - 2) \cap C \neq \emptyset \Rightarrow 2$ es un punto de acumulacion
- Si $x \in C \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) - x) \cap C = \emptyset$
- Si $x \notin C \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) - x) \cap C = \emptyset$

3) Sea $U \in \tau$ y $1 \in U$.

Fijamos un S.F.E., por ejemplo el dado al comienzo del ejercicio. La base de entornos para 1 es $\mathcal{B}_1 = \{\mathbb{R}\}$, por definición de base de entornos $\mathcal{B}_1 \subset N_1$ pero $\mathcal{B}_1 = \{\mathbb{R}\}$, que es el total, entonces $N_1 = \{\mathbb{R}\}$. Por hipotesis $U \in \tau$, aplicando el teorema de sistema de entornos (N5), $U \in N_1$, solo tiene un elemento que es $\mathbb{R}$, luego $U = \mathbb{R}$ ∎

Sabemos que si $\tau_1 \subset \tau_2$, con τ_2 compacto $\Rightarrow \tau_1$ compacto.
τ_u no es compacto, pero no sabemos si puede ser compacto.
Pero tomamos un cubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ tal que $\mathbb{R} = \bigcup_{i \in I} U_i$,
luego $\exists i_0 \in I$ tal que $U_{i_0} \in \tau$. Como hemos demostrado que
si el abierto tiene el elemento 1 y es un abierto, luego tomamos
U_{i_0} tal que $1 \in U_{i_0} \Rightarrow U_{i_0} = \mathbb{R}$, luego hemos encontrado un
subrecubrimiento finito $\Rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ es compacto.

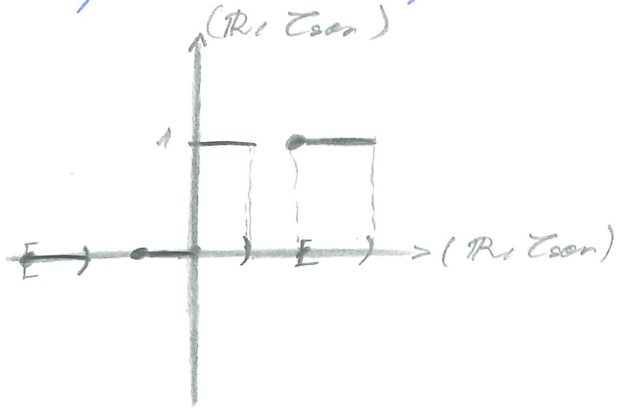
Ahora veamos si $(\mathbb{R}, \tau)$ es conexo por el lema 7.2

si (X, τ_1) es conexo y $\tau_2 \subset \tau_1 \Rightarrow (X, \tau_2)$ es también conexo. Luego como $\tau \subset \tau_u$ y $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es conexo $\Rightarrow$ $(\mathbb{R}, \tau)$ también es conexo.

2. Sea $f: (\mathbb{R}, \tau_{sor}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{sor})$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

¿Es f continua? ¿Es f abierta? ¿Es f cerrada?



Para ver que f es continua aplicaremos la definición 4.1 (continuidad) luego tomamos un entorno $M \in N^{\mathbb{R}}_{f(0)}$, luego debe $\exists N \in N^{\mathbb{R}}_{0}$ y $f(N) \subset M$, luego tomamos un entorno $N = [-1, 1)$ del cero y $f(N) = \{1, 0\}$ y $M = \{0\}$ y $f(N) \not\subset M$ ya que hay elementos de $f(N)$ que no están en M.

* Esto mismo lo podríamos haber hecho por bolas con centro en $x_0 = 0$ y un $\varepsilon > 0$.

Veamos que es abierta para ello hay que ver que lleva abiertos Sorgenfrey en abiertos Sorgenfrey. Pero por la proposición 4.1 son equivalentes el que f sea continua y que dado un abierto en (Y, τ_Y), su imagen recíproca también es abierta pero como no es continua, f no es abierta. El mismo razonamiento podemos seguir para los cerrados.

Por tanto, podemos concluir que f no es continua y que tampoco f es abierta, ni cerrada.

3. Responder las siguientes preguntas, razonandolas adecuadamente.

I) Sea A un subconjunto cerrado en un espacio compacto (X, τ). Probar A es compacto. Reciprocamente, si A es compacto en (X, τ), ¿Es A necesariamente cerrado?

II) Sea $f: (X, \tau_X) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ una aplicación continua y (X, τ) un espacio conexo y compacto. Probar que $f(X) = [a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$

I)
Como tenemos que A es cerrado en un espacio compacto (X, τ), sabemos por la proposición 6.3. sabemos que la compacidad es una propiedad debilmente hereditaria, es decir, que los cerrados de (X, τ) preservan la compacidad, luego podemos concluir que A es compacto. El reciproco, no es necesariamente cierto.

II)
Tenemos que (X, τ) es compacto y conexo. Sabemos por la proposición 6.4. que la imagen de un compacto es compato, luego siendo f continua, tenemos que $(\mathbb{R}, \tau_u)$ tambien es compacto.

Ahora razonando de la misma manera y aplicando el teorema 7.5., que dice que la imagen de un conexo es conexa, podemos concluir que $(\mathbb{R}, \tau_{us})$ tambien es conexo.

* Para compacidad podríamos haber aplicado que $[a, b]$ es compacto por ser un intervalo cerrado y para conexión que simplemente $[a, b]$ es un intervalo en $(\mathbb{R}, \tau_{us})$.

4. Sea (X, τ) un espacio topológico. Sobre $(X \times X, \tau_{TYC})$ se considera la relación de equivalencia $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1 = x_2$. Probar que el espacio cociente es homeomorfo a (X, τ).

Sabemos que una base es β_{TYC} para el espacio topológico $(X \times X, \tau_{TYC})$, donde $\beta_{TYC} = \{ U \times V : U \in \tau, V \in \tau \}$.

Tenemos que ver que son homeomorfos es decir que $\exists f$ tal que $f : (X, \tau) \longrightarrow (X \times X, \tau_{TYC})$ es una aplicación continua, biyectiva y que su imagen recíproca también es continua

Veamos que es inyectiva:
Sean $x_1, x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, dada la relación de equivalencia $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2$, luego f es inyectiva.

Veamos que es sobreyectiva:
Sea $x \in X$, $f(x) = (x, y)$ con $x \in X, y \in X$ por la propiedad reflexiva de la relación de equivalencia $(x, y) \sim (x, y)$ $\Longleftrightarrow x = x$. Por tanto, es sobreyectiva y por tanto f es biyectiva.

Veamos que es continua f:
Dados $U \in \tau$ y $V \in \tau$, $f^{-1}(U \times V) = U$ por la biyectividad $f^{-1}(U \times V) = U \in \tau$.

Veamos que f^{-1} es continua:
Por la biyectividad sabemos que $\exists f^{-1} : (X \times X, \tau) \longrightarrow (X, \tau)$ luego tomamos $f^{-1}(U) \in \tau$, $f^{-1}(f^{-1}(U)) = f(U) = U \times V$: $U \times V \in \tau_{TYC}$, donde $U \in \tau_{TYC}$ y $V \in \tau_{TYC}$. Luego f^{-1} continua.
En conclusión f es un homeomorfismo y por tanto (X, τ) y $(X \times X, \tau_{TYC})$ son homeomorfos.

*También podríamos haber supuesto que $f^{-1} = P_X$ que es la aplicación proyectiva de X.

Topología (23-01-2013)

1. Sobre $\mathbb{R}$ se consideran las familias de conjuntos:

1) Si $x \geq 0$, $\mathcal{B}_x = \{[x, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$

2) Si $x < 0$, $\mathcal{B}_x = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$

Se pide:

I) Comprobar que $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ es un sistema fundamental de entornos para una topología τ sobre $\mathbb{R}$ y compararla con τ_u

II) Calcular el interior y el derivado de los siguientes conjuntos en $(\mathbb{R}, \tau)$: $[0,1]$, $[-1,1]$, $\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}$, $\{-\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}$.

I)

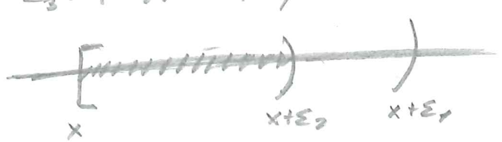
Tenemos que ver que $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ es un S.F.E para una topología τ, luego comprobamos que se verifican las propiedades del teorema 2.8:

B1) $\forall B \in \mathcal{B}_x$, $x \in B$.

- Para $x \geq 0$ tenemos que $B = [x, x+\varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$, $B \in \mathcal{B}_x$ y $x \in B$.
- Para $x < 0$ tenemos que $B = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$, $B \in \mathcal{B}_x$ y $x \in B$.

B2) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, $\exists B_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

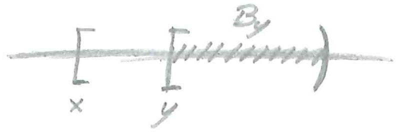
- Para $x \geq 0$ tenemos $B_1 = [x, x+\varepsilon_1)$ y $B_2 = [x, x+\varepsilon_2)$ tal que $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ y $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x \Rightarrow B_1 \cap B_2 = [x, x+\varepsilon_3)$ tal que $\varepsilon_3 \in \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ y $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \Rightarrow B_3 \subset B_1 \cap B_2$



- Para $x < 0$, tenemos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_1 = (x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1)$, $B_2 = (x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2)$, con $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, entonces $\exists B_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_3 = (x-\varepsilon_3, x+\varepsilon_3)$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Luego, $B_3 = (x-\varepsilon_3, x+\varepsilon_3)$, donde $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

B3) $\forall B \in \mathcal{B}_x$, $\exists B_0 \in \mathcal{B}_x$, tal que $\forall y \in B_0$, $\exists B_y \in \mathcal{B}_y$ tal que $B_y \subset B$.

- Para $x \geq 0$, $B = [x, x+\varepsilon) \in \mathcal{B}_x$, $\exists B_0 = B \in \mathcal{B}_x$: $\forall y \in B_0$, $\exists B_y \in \mathcal{B}_y$ tal que $B_y \subset B$.



$B_y = [y, y+\varepsilon') \in \mathcal{B}_y$ y siendo $\varepsilon' = x + \varepsilon - y$, tenemos que $B_y \subset B$.

- Para $x < 0$, $B = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in \mathcal{B}_x$, $\exists B_0 = B \in \mathcal{B}_x$ tal que $\forall y \in B_0$, $\exists B_y \in \mathcal{B}_y$ tal que $B_y \subset B$.

$B_y = (y-\varepsilon', y+\varepsilon')$ con $\varepsilon' = \min\{y-x+\varepsilon, x+\varepsilon-y\}$ se cumple.

Por tanto $\mathcal{B}_x$ es un S.F.E. para una topología sobre $\mathbb{R}$.

Ahora tenemos que comparar la topología generada por el S.F.E $\mathcal{B}_x$ con la topología usual, donde $\mathcal{B}_x^u = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$.
Para compararlas utilizaremos el criterio de Hausdorff (Proposición 2.10) que dice: $\tau_1 \subset \tau_2 \iff \forall x \in \mathbb{R}$ y $\forall B_1 \in \mathcal{B}_x^1$ $\exists B_2 \in \mathcal{B}_x^2$ tal que $B_2 \subset B_1$.

- Para $x < 0$, tenemos siempre que $\mathcal{B}_x = \mathcal{B}_x^u$, luego para compararlos correctamente debemos ver para el otro caso ($x \geq 0$).

¿$\tau_u \subset \tau$? $\iff$ ¿$\forall x \geq 0$ y $\forall B_1 = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, $\exists B_2 = [x, x+\varepsilon')$ tales que $B_2 \subset B_1$?
Si tomamamos $\varepsilon' = \varepsilon \Rightarrow B_2 \subset B_1 \Rightarrow \tau_u \subset \tau$.

¿$\tau \subset \tau_u$? $\iff$ ¿$\forall x \geq 0$ y $\forall B_1 = [x, x+\varepsilon)$, $\exists B_2 = (x-\varepsilon', x+\varepsilon')$ tal que $B_2 \subset B_1$?
Esto no se verifica para ningun $\varepsilon > 0 \Rightarrow \tau \not\subset \tau_u$

Por tanto, podemos concluir que $\tau_u \subset \tau$.

II) $E = \mathbb{Q}$  $\mathring{E} = \emptyset$, $E' = \mathbb{R}$

$A = [0,1]$  $\mathring{A} = [0,1)$, $A' = [0,1)$

$B = [-1,1]$  $\mathring{B} = (-1,1)$, $B' = [-1,1)$

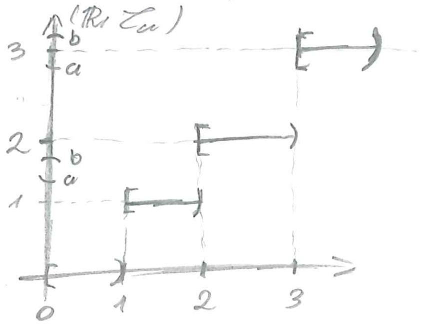
$C = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  $\mathring{C} = \emptyset$, $C' = \{0\}$

$D = \{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  $\mathring{D} = \emptyset$, $D' = \emptyset$

2. Dado $x \in \mathbb{R}$, se llama parte entera de x, $[x]$, al mayor entero que menor o igual que x. Estudiar la continuidad de las funciones $f: (\mathbb{R}, \tau_{sor}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ y $f: (\mathbb{R}, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ si $f(x) = [x]$.

Sabemos que en general una función es continua si $\forall U \in \tau_Y$ $f^{-1}(U) \in \tau_X$ donde $f: (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$

Primera dibujamos la función:



Sabemos que una base para $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$ es $\beta_{sor} = \{[a,b) : a<b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$ y para $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es $\beta_u = \{(a,b) : a<b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$.

Tomamos un intervalo abierto de la topología usual (como en las dos funciones el espacio topológico de llegada es el mismo podemos mirar la continuidad al mismo tiempo de las dos funciones). Pueden suceder dos casos:

I) $(a,b) \cap \mathbb{Z} = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(a,b) = \emptyset$.

II) $(a,b) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset \Rightarrow$ Esta intersección contiene a una familia finita de puntos enteros consecutivos. Si $(a,b) \cap \mathbb{Z} = \{n, \dots, n+k\}$ entonces $f^{-1}(a,b) = [n, n+1) \cup \dots \cup [n+k, n+k+1) = [n, n+k+1)$

a) Si $f:(\mathbb{R},\tau_{sor}) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_u)$

Hemos visto que $f^{-1}(a,b) = \begin{cases} \emptyset \in \tau_{sor} & \text{si } (a,b)\cap\mathbb{Z}=\emptyset \\ [n,n+k+1)\in\tau_{sor} & \text{si } (a,b)\cap\mathbb{Z}\neq\emptyset \end{cases}$

Por tanto, f es continua.

b) Si $f:(\mathbb{R},\tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_u)$, no es continua.

Cogemos $(1,3)\in\tau_u$ y $f^{-1}(1,3)=[1,4)\notin\tau_u$.

3. Sea (X,τ) un espacio topologico, $\sim$ una relacion de equivalencia sobre X y $q:(X,\tau)\longrightarrow X/\sim$ la aplicacion cociente. Se pide:

I) Definir la topología cociente $\tau_\sim$ sobre $X/\sim$.

II) Si $f:(X/\sim,\tau_\sim)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ es una aplicación, probar que f es continua si y solo si $f\circ q$ lo es.

I)

Tenemos (X,τ) y $\sim$ una relación de equivalencia y $q:(X,\tau)\longrightarrow X/\sim$ es la aplicación cociente la topología cociente $\tau_\sim$ sobre $X/\sim$ se define como:

$$\tau_\sim = \{V\subset X/\sim : q^{-1}(V)\in\tau\}$$

II)

Nos piden demostrar la proposición 5.19.:

$\Rightarrow$) Al ser q una función continua por ser la aplicación cociente y por hipotesis f es continua:

$$\left.\begin{array}{c} q \text{ continua} \\ + \\ f \text{ continua} \end{array}\right\} \Rightarrow f\circ q \text{ es continua}$$

5. Estudiar la compacidad y la conexión de $[0,1]\times[0,1]$ en $(\mathbb{R}^2, \tau_u \times \tau_u)$ y en $(\mathbb{R}, \tau_{kol} \times \tau_{kol})$, razonando adecuadamente la respuesta

Como hemos visto en clase:

- Para compactos: Un producto de espacios es compacto si y solo si cada espacio factor lo es. (Teorema 6.6)
- Para conexos: Un producto de espacios es conexo si y solo si cada espacio factor lo es. (Teorema 7.12)

Por tanto:

a) $([0,1]\times[0,1], \tau_u \times \tau_u)$ es <u>compacto</u> por ser $[0,1]$ compacto en $[0,1]$ por ser cerrado y acotado.

Y $[0,1]\times[0,1]$ es <u>conexo</u> por ser $[0,1]$ conexo en $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

b)

$[0,1]\times[0,1]$ es <u>compacto</u> en $(\mathbb{R}^2, \tau_{kol} \times \tau_{kol}) \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow [0,1]$ es compacto en $(\mathbb{R}^2, \tau_{kol})$. Y lo es, pues si:

$[0,1] \subset \bigcup_{i\in I} (a_i, \infty)$, $\exists\, a_{i_0} \in \mathbb{R} : 0 \in (a_{i_0}, \infty)$, y entonces

$[0,1] \subset (a_{i_0}, \infty)$.

$[0,1]\times[0,1]$ es <u>conexo</u> en $(\mathbb{R}^2, \tau_{kol} \times \tau_{kol}) \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow [0,1]$ es conexo en en $(\mathbb{R}, \tau_{kol})$, y lo es, pues $\tau_{kol} \subset \tau_u$ y aplicando el lema 7.2 que dice que "si (X, τ_1) es conexo y $\tau_2 \subset \tau_1 \Rightarrow (X, \tau_2)$ es también conexo". Y $[0,1]$ es conexo en $(\mathbb{R}, \tau_u) \Rightarrow [0,1]$ es conexo en $(\mathbb{R}, \tau_{kol})$.

$\Leftarrow$) La hipótesis es que $f \circ q$ es continua, tenemos que ver si f continua:

¿f continua? $\Leftrightarrow$ ¿$\forall V \in \tau_Y$, $f^{-1}(V) \in \tau_X$?

Sea $V \in \tau_Y \xRightarrow[\text{continua}]{f \circ q} (f \circ q)^{-1}(V) \in \tau_X$

$(f \circ q)^{-1}(V) = q^{-1}(f^{-1}(V)) \in \tau \xLeftrightarrow[q \text{ identificación}]{} q^{-1}(V) \in \tau_X$

11. Sea (X, τ) un espacio topológico compacto y $A \subset X$. Probar:

I) (A, τ_A) no tiene porque ser compacto.

II) Si A es cerrado, entonces (A, τ_A) es compacto.

I)

(A, τ_A) no tiene por que ser compacto, lo demostramos con un contraejemplo:

$([0,1], \tau_u)$ es compacto en $(\mathbb{R}, \tau_u)$ porque sus compactos son los cerrados y acotado. Y $((0,1), \tau_u)$ no es cerrado y no es compacto, por el hecho de no ser $(0,1) \subset [0,1]$ y no es compacto, por el hecho de no ser cerrado.

II)

Nos piden la demostración de la proposición 6.3:

¿A compacto?

Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, $U_i \in \tau$ tales que $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

$X = A \cup (X-A) \subset (\bigcup_{i \in I} U_i) \cup \underbrace{(X-A)}_{\in \tau}$. $\mathcal{V} = \{U_i : i \in I\} \cup \{X-A\}$ cubrimiento de X por abiertos de $\tau \xRightarrow[(X,\tau) \text{ compacto}]{} \exists \{i_1, \dots, i_n\} : X = A \cup (X-A)$,

$X \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \cup (X-A) \Rightarrow A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

Topología (20-01-2016)

1. Sobre $\mathbb{R}$, se considera la familia de conjuntos $\mathcal{B}_x = \{(x-\varepsilon, x] : \varepsilon > 0\}$.
Se pide:

I) Comprobar que $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ es un sistema fundamental de entornos para una topología τ sobre $\mathbb{R}$. Compararla con τ_u y τ_{Sor}. ¿Es $(\mathbb{R}, \tau)$ de Hausdorff?

II) Calcular el interior y el derivado de los siguientes conjuntos en $(\mathbb{R}, \tau)$: $A = [-1, 1]$, $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $C = \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ y $D = \mathbb{Q}$

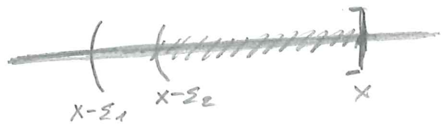
I) Para comprobar que $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ es un S.F.E sobre una topología τ, tenemos que aplicar el teorema 2.8:

B1) $\forall B \in \mathcal{B}_x$, $x \in B$

Es claro que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in (x-\varepsilon, x]$ que es un entorno basico que pertenece a $\mathcal{B}_x$.

B2) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, $\exists B_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$

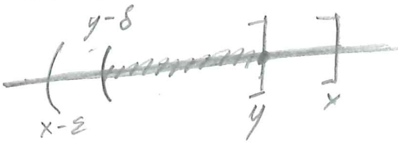
Sean $B_1 = (x-\varepsilon_1, x]$ y $B_2 = (x-\varepsilon_2, x]$, con $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ y $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$.
$(x-\varepsilon_1, x] \cap (x-\varepsilon_2, x] = \underbrace{(x-\varepsilon_3, x]}_{B_3}$



Luego, $(x-\varepsilon_1, x] \cap (x-\varepsilon_2, x]$ tal que $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$

B3) $\forall B \in \mathcal{B}_x$, $\exists B_0 \in \mathcal{B}_x$ tal que $\forall y \in B_0$, $\exists B_y \in \mathcal{B}_y$ tal que $B_y \subset B$.

Sea $B = (x-\varepsilon, x] \in \mathcal{B}_x$, con $\varepsilon > 0$, ~~tomamamos~~ tomamos $B_0 = B$ y sea $y \in B_0$, entonces tomamos un $B_y \in \mathcal{B}_y$,



luego $\exists \delta > 0$ tal que $(y-\delta, y] \subset (x-\varepsilon, x] \Rightarrow$
$\Rightarrow B_y \subset B$. (se toma $\delta \le y - x + \varepsilon$).

Por tanto, $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ es un S.F.E. sobre una topología τ, tal que $\tau = \{U \in \mathbb{R} : \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0$ con $(x-\varepsilon, x] \subset U\}$.

Ahora para comparar las topologías, como conocemos sus bases aplicaremos el criterio de Hausdorff (Proposición 2.10):

$\mathcal{B}_x^{u} = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$

$\mathcal{B}_x^{sor} = \{[x, x-\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$

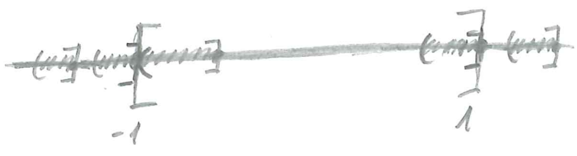
$\mathcal{B}_x = \{(x-\varepsilon, x] : \varepsilon > 0\}$

1.) Comparamos $\mathcal{B}_x^{u}$ y $\mathcal{B}_x$: y para $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varepsilon$ tal que $(x-\varepsilon, x] \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ y para $(x-\varepsilon, x)$ y $\forall \delta > 0$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \not\subset (x-\delta, x+\delta)$, luego $\tau_u \subsetneq \tau$.

2.) Comparamos $\mathcal{B}_x^{sor}$ y $\mathcal{B}_x$:
Dado $(x-\varepsilon, x]$, $\forall \delta > 0$ $(x-\varepsilon, x] \not\subset [x, x+\delta)$. $(\tau_{sor} \not\subset \tau)$.
Ahora dado $[x, x+\varepsilon)$, $\forall \delta > 0$ $[x, x+\varepsilon) \not\subset (x-\delta, x]$. $(\tau \not\subset \tau_{sor})$.

Como $\tau_u \subset \tau$ y $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es T_2, $(\mathbb{R}, \tau)$ también es T_2.

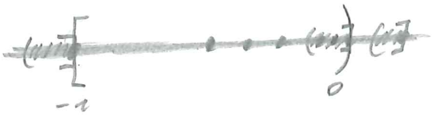
II)

$A = [-1, 1]$


$\mathring{A} = (-1, 1]$
$A' = (-1, 1]$

$B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$


$\mathring{B} = \emptyset$
$B' = \emptyset$

$C = \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$


$\mathring{C} = \emptyset$
$C' = \{0\}$

$D = \mathbb{Q}$


$\mathring{D} = \emptyset$
$D' = \mathbb{R}$

2. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función parte entera. Responder a las siguientes preguntas:

I) ¿Es $f: (\mathbb{R}, \tau_{sor}) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ una funcion continua?

II) Demostrar que $[0,1]$ no es compacto $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$

III) Usar (II) para probar que $1_{\mathbb{R}}: (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau_{sor})$ no es continua, enunciando el resultado teorico que se esta utilizando.

I)

Basta con ver que $\forall (a,b) \in \tau_u$, $f^{-1}(a,b) \in \tau_{sor}$. Pero:

a) si $\mathbb{Z} \cap (a,b) = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(a,b) = \emptyset \in \tau_{sor}$

b) si $\mathbb{Z} \cap (a,b) \neq \emptyset$ es $\mathbb{Z} \cap (a,b) = \{n, n+1, \dots, n+k\}$ y $f^{-1}(a,b) = [n, n+k-1) \in \tau_{sor}$. Luego f es continua

II)

Basta con dar un cubrimiento por abiertos que no tenga subrecubrimiento finito

$$[0,1] = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 - \tfrac{1}{n}) \right) \cup [1,2))$$

De este cubrimiento no puede quitarse ningun abierto.

III)

Si $1_{\mathbb{R}}: (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau_{sor})$ si $1_{\mathbb{R}}$ fuera continua, $[0,1]$ es compacto $1_{\mathbb{R}}([0,1])$ tambien deberia ser compacto en $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$ pero como hemos visto en el apartado anterior $[0,1]$ no es compacto en $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$.

* $1_{\mathbb{R}}([0,1]) = [0,1]$.

3. Sean (X, τ) un espacio topológico. Probar que $f: (X, \tau) \to (X \times X, \tau_{TYC})$ $(\tau_{TYC} = \tau \times \tau)$ definida por $f(x) = (x, x)$ es un embebimiento (es decir, una función continua, inyectiva y que restringida a su imagen es un homeomorfismo).

Tenemos que probar que $f: (X, \tau) \to (X \times X, \tau_{TYC})$ es un embebimiento.

En primer lugar vemos que es inyectiva. Si $(x, x) = (y, y) \Rightarrow$
$\Rightarrow x = y$.

En segundo lugar tenemos que probar que f es continua. Luego, dado un abierto en $(X \times X, \tau_{TYC})$ su imagen recíproca debe ser abierta en (X, τ). Por tanto, $f^{-1}(U \times V) = \{x \in X : f(x) = (x, x) \in U \times V\}$, $f^{-1}(U \times V) = U \cap V$.

Si $U \times V \in \beta_{TYC}$, como $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$. Luego, f es continua.

En último lugar comprobamos que su imagen restringida es un homeomorfismo.

$f(U) = U \times U$, si $U \in \tau$, luego f es abierta. Si tomamos
$f_0: (X, \tau) \to (f(X), \tau_{f(X)})$, $\forall U \in \tau$, $f_0(U) = \underbrace{(U \times U) \cap f(X)}_{\in \tau_{f(X)}}$

Luego también es un homeomorfismo y entonces podemos concluir que f es un embebimiento.

4. Dado un espacio topológico (X, τ), se pide:

I) Si A es conexo, ¿es $\mathring{A}$ conexo? ¿y $\bar{A}$?

II) Si A es compacto, ¿es $\mathring{A}$ compacto? ¿y $\bar{A}$?

III) Si (X, τ) es de Hausdorff y A es compacto, ¿es $\mathring{A}$ compacto? ¿y $\bar{A}$?

I) No tiene ~~por~~ que ser conexo $\mathring{A}$, basta con tomar en $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$
$A = \bar{B}((-1,0),1) \cup \bar{B}((1,0),1)$, que es conexo (por ser unión de dos conexos con un punto en común. Pero,
$\mathring{A} = B((-1,0),1) \cup B((1,0),1)$ no es conexo.

Por el teorema 7.11, la clausura de un conjunto conjunto conexo es un con conjunto conexo.

II) No tiene por que ser compacto. Por ejemplo $[0,1]$ es compacto en $(\mathbb{R}, \tau_u)$, por ser cerrado y acotado, pero $\mathring{\overline{[0,1]}} = (0,1)$ que no es compacto en $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

La clausura tampoco tiene porque ser compacta: en $(\mathbb{R}, \tau_{kd})$
$[0,\infty)$ es compacto (si $[0,\infty) = \bigcup_{i \in I} (a_i, \infty)$ $\exists i_0 \in I : 0 \in (a_{i_0}, \infty) \Rightarrow$
$\Rightarrow [0,\infty) \subset (a_{i_0}, \infty)$). Pero $\overline{[0,\infty)} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ no es compacto.
($\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, \infty)$ no tiene subrecubrimiento finito).

III)
$\mathring{A}$ no tiene porque ser compacto, utilizando el contraejemplo del apartado (II).
Si (X, τ) es T_2, A compacto $\Rightarrow A = \bar{A}$ (Proposición 6.9)

Topología (25-01-2017)

1. Sobre $\mathbb{R}^2$ se considera la familia de conjuntos

$$\beta = \{ [a,b) \times [c,\infty) \mid a,b,c \in \mathbb{R} \}$$

Se pide:

I) Comprobar que β es base de una topología τ sobre $\mathbb{R}^2$. Compararla con τ_u. ¿Es $(\mathbb{R}^2, \tau)$ de Hausdorff? ¿Y de Frechet?

II) Calcular el interior y el derivado de los siguientes conjuntos en $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

$$A = \{(0,0)\} \quad y \quad B = \{(x,y) \mid y \geq x^2\}$$

I) Sabemos por teoría que cuando no nos dan la topología, para comprobar que es base tenemos que ver que cumple lo siguiente:

1) $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{B\in\beta} B$

¿$\bigcup_{a,b,c\in\mathbb{R}} [a,b) \times [c,\infty) = \mathbb{R}^2$? Lo probamos por doble inclusión:

$\subseteq$) Esta inclusión es clara.

$\supseteq$) ¿$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $a,b,c \in \mathbb{R}$ tal que $x \in [a,b] \times [c,\infty)$? Si tomamos la función suelo de x tenemos que $\lfloor x \rfloor = (\lfloor x_1 \rfloor, \lfloor x_2 \rfloor) \leq x$ y si cogemos un intervalo de la forma

$[\lfloor x_1 \rfloor, \lfloor x_2 \rfloor + 1) \times [\lfloor x_2 \rfloor, \infty) = I$

Vemos claramente que cualquier $x \in I \in \beta$. Se da la doble inclusión y por tanto la igualdad.

2) Comprobamos que $\forall B_1, B_2 \in \beta$ y $\forall x \in B_1 \cap B_2$, $\exists B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Sean $\underbrace{[a_1,b_1) \times [c_1,\infty)}_{B_1}$, $\underbrace{[a_2,b_2) \times [c_2,\infty)}_{B_2} \in \beta$ y $x \in [a_1,b_1) \times [c_1,\infty) \cap [a_2,b_2) \times [c_2,\infty)$. Si tomamos

$B_3 = [\max\{a_1,a_2\}, \min\{b_1,b_2\}) \times [\max\{c_1,c_2\}, \infty) \in \beta$.

Por tanto ya hemos probado que es una base para una topología τ. Ahora tenemos que compararla con la topología usual. Sabemos que:

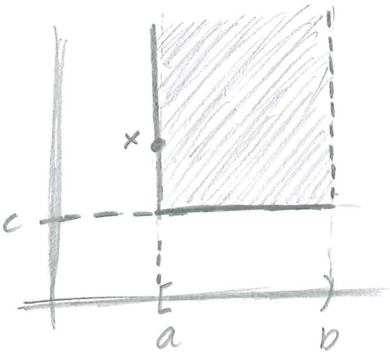
$(\mathbb{R}^2, \tau)$ con $\beta = \{[a,b) \times [c,\infty) : a,b,c \in \mathbb{R}\}$ es una base para la topología.

$(\mathbb{R}^2, \tau_u)$ con $\beta_{us} = \{(a,b) \times (c,d) : a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ es base para τ_{us}.

Sabemos por teoría (definición 2.5) que dadas dos bases β_1 y β_2 para las topologías τ_1 y τ_2 sobre X, se dice que $\tau_2 \subset \tau_1 \iff \forall B_2 \in \beta_2, \forall x \in B_2\ \exists B_1 \in \beta_1$ tal que $x \in B_1 \subset B_2$:

- ¿$\tau_{us} \subset \tau$? $\iff \forall (a,b)\times(c,d) \in \beta_{us}$, $x \in (a,b)\times(c,d)$, ¿$\exists [e,f) \times [g,\infty) \in \beta$ tal que $x \in [e,f) \times [g,\infty) \subset (a,b)\times(c,d)$? No, es imposible que un rectangulo de ese estilo este contenido en otro rectangulo y que sea finito

- ¿$\tau \subset \tau_{us}$? $\iff \forall [a,b) \times [c,\infty) \in \beta$, $\forall x \in [a,b)\times[c,\infty)$, ¿$\exists (d,e)\times(f,g) \in \beta_{us}$ tal que $x \in (d,e) \times (f,g) \subset [a,b) \times [c,\infty)$? No ya que si $x \in (a, x_2)$, $\nexists B_1 \in \beta_{us}$ tal que $x \in B_1 \subset [a,b) \times [c,\infty) \Rightarrow \tau \not\subset \tau_{us}$.



Luego las topologías no son comparables.

Ahora debemos ver si $(\mathbb{R}^2, \tau)$ es de Hausdorff (o equivalentemente a T_2). Sabemos que un espacio topologico (X, τ) es T_2 si: $\forall x \neq y$, $\exists U, V \in \tau$ tal que $U \cap V = \emptyset$ y tal que $x \in U$, $y \in V$.
Tambien sabemos que si (X, τ) es $T_2 \Rightarrow (X, \tau)$ es de Frechet (T_1)

Al haber probado que β es base para una topología la pregunta que nos hacemos ahora es: ¿Que topología induce esta base? Pues la siguiente:

$$\tau_\beta = \{U \subset X : \exists \{B_i\}_{i \in I} \subset \beta : U = \bigcup_{i \in I} B_i\}$$

Esto no nos ayuda en nada para ver si es T_1 o T_2. La miramos fijandonos en las bases: $\beta = \{[a,b) \times [c, \infty) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$. El espacio topologico será T_1 si vemos que todos sus puntos son cerrados.

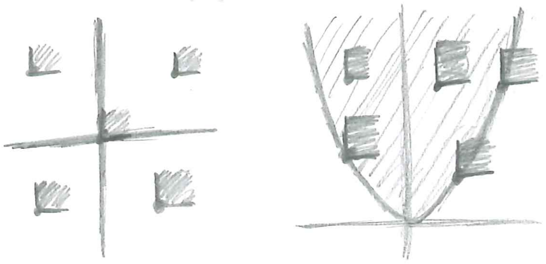
II)

Por definición, el interior de un conjunto $A \subset X$ es:

$$\mathring{A} = \bigcup \{U \subset X : U \in \tau, U \subset A\}$$

y el conjunto derivado es $A' = \{x \in X : x \text{ es punto de acumulación}\}$ donde fijado un S.F.E un punto x es de acumulación de A si $\forall B \in \beta_x$ es $(B - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Veamos claramente que $\mathring{A} = \emptyset$ ya que no existe ningun abierto basico que este contenido en A.



$\mathring{B} = B - \{(x,y) \mid x = 0, y = 0\}$ porque $\mathring{B}$ lo podemos poner como union de abiertos basicos sin tener en cuenta a los puntos (x,y) que satisfacen que $y = x^2$, sino, no podriamos. $\mathring{B} = \bigcup B_i$ donde $B_i = \{[\pm x_i, x_i) \times (y_i, \infty)\} \in \tau$ donde (x_i, y_i) son los puntos que verifican la relacion $y = x^2$.

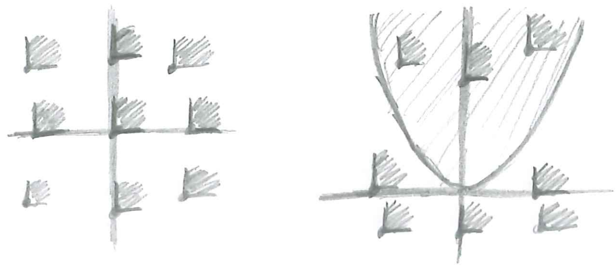
Y ahora vamos a calcular el derivado de cada uno de ellos.

$(x,y) \in A'$ (para cualquier $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) si:

$\forall \tilde{B} \in \beta : (x,y) \in \tilde{B}$, $(\tilde{B} - \{(x,y)\}) \cap A \neq \emptyset$. En nuestro caso:

$(x,y) \in A'$ si $(0,0) \in \tilde{B} - \{(x,y)\}$

$A' = \{0\} \times (-\infty, 0)$ $\quad B' = \mathbb{R}^2 \rightarrow$ porque la parabola se va a hacer cada vez más grande y por tanto cualquier $\tilde{B} \in \beta$, cortara a la parabola en algun momento.



2. Se pide:

I) Probar que la imagen continua de un conjunto conexo es conexo.

II) Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topologicos y el espacio topologico producto $(X \times Y, \tau_{TYC})$. Probar que si $(X \times Y, \tau_{TYC})$ es conexo, entonces (X, τ_X) e (Y, τ_Y) tambien lo son.

I)

Supongamos que A es conexo en (X, τ_X). Por reducción al absurdo suponemos que $f(A)$ no es conexo en (Y, τ_Y).

Entonces por el lema 7.1 (V) $f(A)$ no es conexo $\iff \exists g$ tal que

$$g : (f(A), \tau_{f(A)}) \xrightarrow[\text{sobreyectiva}]{\text{continua} + } (\{0,1\}, \tau_{dis})$$

$$\begin{tikzcd}
(A, \tau_A) \arrow[r, "f|_A"', "\text{continua} + \text{sobreyectiva}"'] \arrow[rr, bend right, "h = g \circ f|_A \text{ continua} + \text{sobreyectiva}"'] & (f(A), \tau_{f(A)}) \arrow[r, "g"] & (\{0,1\}, \tau_{dis})
\end{tikzcd}$$

Y esto por el lema 7.1 (V), A no es conexo (Contradicción)

II)

$\Rightarrow$) Hip.: $(X \times Y, \tau_{TYC})$ conexo.

Sea $p_X : (X \times Y, \tau_{TYC}) \longrightarrow (X, \tau_X)$ sobreyectiva y continua.
$(x,y) \longmapsto x$

continua
$\uparrow$
$p_X(\underbrace{X \times Y}_{\text{conexo}}) = X$, luego por el apartado anterior X es conexo.

Haciendo el mismo razonamiento pero tomando $p_Y(X \times Y) = Y$ llegamos a que Y es conexo.

$\Leftarrow$) Recíprocamente, sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) conexos y supongamos que $\exists\, f : (X \times Y, \tau_{TYC}) \longrightarrow (\{0,1\}, \tau_{dis})$ continua y sobreyectiva. Existen $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X \times Y$ tales que $f(a_1, b_1) = 0$ y $f(a_2, b_2) = 1$. Si $f(a_2, b_1) = 0$, sea $i_{a_2} : (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X \times Y, \tau_{TYC})$ el embebimiento $i_{a_2}(y) = (a_2, y)$. Así $f \circ i_{a_2}$ es continua. Pero $f \circ i_{a_2}(b_1) = 0$ y $f \circ i_{a_2}(b_2) = 1$, lo que contradice la conexión de (Y, τ_Y). De manera similar, se prueba que tampoco puede $f(a_2, b_2) = 1$. Luego no puede existir una tal f, y $(X \times Y, \tau_{TYC})$ es conexo.

3. Sean los subconjuntos de números reales

$$A = \{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \quad y \quad B = \{-\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

Probar que en $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$ A es compacto, pero que B no lo es.

Sabemos que en general para ver que un subconjunto $A \subset X$ es compacto en (X, τ) basta con estudiar los cubrimientos de A por abiertos de (X, τ).

Sabemos que una base para $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$ es $\beta_{sor} = \{[a, b) : a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$.

$A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ es compacto.

¿$\forall\ \mathcal{U} = \{[a_i, b_i) : a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$ tal que $A \subset \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i)$ $\exists$ subrecubrimiento finito?

Podemos ve en como esta definido A que el cero es un punto especial porque esta definido a parte. Si dibujamos este conjunto:

$\exists i_0 \in I$ tal que $0 \in [a_{i_0}, b_{i_0})$.

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \{\frac{1}{n}\} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0,\ \frac{1}{n} < b_{i_0} \Rightarrow$ A partir de un n_0 los $\frac{1}{n}$ se quedan en el intervalo $[a_{i_0}, b_{i_0})$ y no salen de ahí.

El resto de puntos, los $\frac{1}{n} \in A$ tal que $\frac{1}{n} \notin [a_{i_0}, b_{i_0})$ son:

$$\underbrace{\frac{1}{n_0 - 1}}_{\in [a_{i_{n_0-1}}, b_{i_{n_0-1}})}, \frac{1}{n_0 - 2}, \ldots\ldots, \underbrace{\frac{1}{2}}_{\in [a_{i_2}, b_{i_2})}, \underbrace{1}_{\in [a_{i_1}, b_{i_1})}$$

Por tanto, tenemos que:

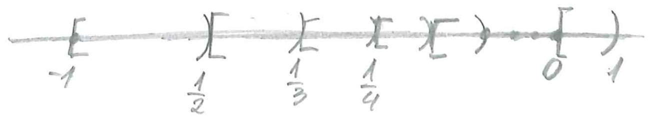
$A \subset [a_{i_0}, b_{i_0}) \cup [a_{i_{n_0-1}}, b_{i_{n_0-1}}) \cup \ldots \cup [a_{i_2}, b_{i_2}) \cup [a_{i_1}, b_{i_1})$

es un subrecubrimiento finito del recubrimiento original $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A es compacto.

Para $B = \{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$:

Tenemos que ver que no es compacto, luego tenemos que encontrar un cubrimiento por abiertos sin subrecubrimiento finito.
Dibujamos el conjunto:



Si tomamos $B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}) \cup [0,1)$ este es un cubrimiento por abiertos que no tiene subrecubrimiento finito porque no puede eliminarse ningun abierto si queremos seguir teniendo un cubrimiento de B.

4. Sobre $([0,1]\times[0,1], \tau_{us})$ se considera la relación de equivalencia

$$(x_1, y) \sim (x_2, y) \quad \text{para } x_1, x_2, y \in [0,1]$$

Probar que el espacio cociente por esta relación de equivalencia es homeomorfo a $([0,1], \tau_u)$.

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
([0,1]\times[0,1], \tau_u) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"', "\text{identif.}"] & & ([0,1], \tau_u) \\
& ([0,1]/\sim, \tau_\sim) \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Debemos ver que $\exists h$ homeomorfismo pero sabemos que si damos una f que sea identificación entonces la h sera un homeomorfismo.

Entonces tenemos que:

1) Definir f de forma que haga lo mismo que la aplicación cociente q. La aplicación cociente relaciona dos puntos si tienen la misma segunda coordenada: $(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y_1 = y_2$, por tanto: $f(x,y) = y$

2.) Ver que f preserva la relación de equivalencia, es decir:
¿$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \Leftrightarrow f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$?
$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2$ ✓

3) Ver que f es identificación, tenemos que ver que f es continua, sobreyectiva y abierta.

I) Primeramente veamos que es abierta.
si f abierta $\Rightarrow \forall U \in \tau_u^{[0,1]\times[0,1]}$, $f(U) \in \tau_u^{[0,1]}$.

Sabemos que $\beta_u^{[0,1]\times[0,1]} = \{(a,b)\times(c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \cap ([0,1]\times[0,1]) =$
$= \{(a,b)\times(c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \cap [0,1]\}$

y que $\beta_u^{[0,1]} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\} \cap [0,1] = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R} \cap [0,1]\}$

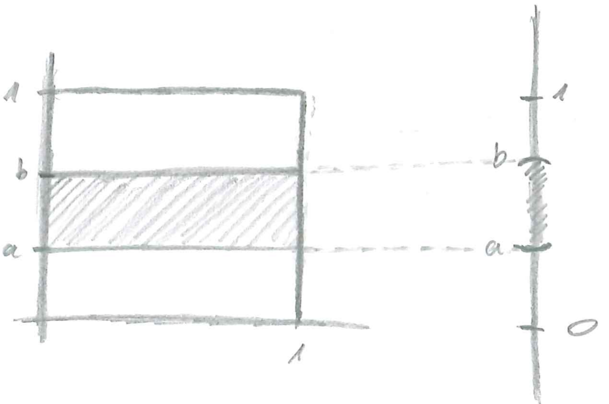
Sea $B \in \beta_u^{[0,1]\times[0,1]}$ al aplicar f obtenemos:
$f(B) = (c,d) \in \beta_u^{[0,1]}$ porque $c,d \in \mathbb{R} \cap [0,1]$ por definición $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(B) \in \tau_u^{[0,1]}$. Luego f es abierta.

II) ¿f es sobreyectiva? Es decir, ¿Cada elemento de la imagen de f tiene al menos una preimagen? Si, porque $\forall x,y \in [0,1]$, $f(x,y) = y$.

III) ¿ f continua? $\Leftrightarrow$ ¿ $\forall U \in \mathcal{T}_u^{[0,1]}$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_u^{[0,1]\times[0,1]}$? $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ¿ la imagen recíproca de un abierto básico es un abierto básico?

¿ $\forall (a,b) \in \beta_u^{[0,1]}$, $f^{-1}(a,b) \in \beta_u^{[0,1]\times[0,1]}$?



$f^{-1}(a,b) = [0,1] \times (a,b) \in \beta_u^{[0,1]\times[0,1]} \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(a,b) \in \mathcal{T}_u^{[0,1]\times[0,1]}$

Por tanto f es continua.

Luego podemos concluir que f es identificación y por tanto $\exists h$ homeomorfismo.

Topología (23-06-2017)

1. Sobre $\mathbb{R}^2$ se considera la familia de conjuntos:

$$\beta = \{(a, +\infty) \times \{b\} : a, b \in \mathbb{R}\}$$

I) β induce una topología τ sobre $\mathbb{R}^2$. Dar una base de entornos para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

II) Calcular el interior y el derivado de los siguientes conjuntos en $(\mathbb{R}^2, \tau)$

a) $A = \{1\} \times \mathbb{R}$

b) $B = \mathbb{R} \times \{1\}$

c) $C = [-1, \infty) \times (-1, 1)$

d) $D = (-1, 1) \times [-1, \infty)$

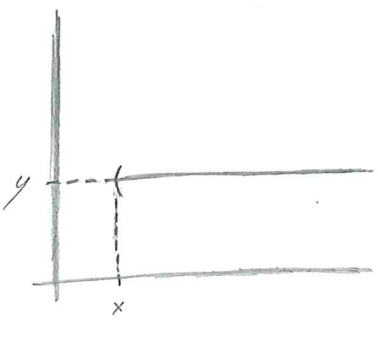
III) Probar que $A = \{1\} \times \mathbb{R}$ no es conexo, pero que $B = \mathbb{R} \times \{1\}$ si lo es.

I)

Al decirnos que β induce una topología nos están diciendo que β es base de esa topología.

Sabemos que una base de entornos de x en (X, τ) es una familia $\beta_x \subset N_x$ tal que $\forall N \in N_x$ $\exists B \in \beta_x$ tal que $B \subset N$.

Para encontrar la base de entornos antes deberemos hallar el sistema de entornos N_x, que es la familia de todos los entornos de x. Sabemos también que $N \subset X$ es un entorno del punto x en (X, τ) si $\exists U \in \tau$ tal que $x \in U \subset N$.



Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nuestro punto, buscamos conjuntos que contengan a abiertos que contengan al punto.

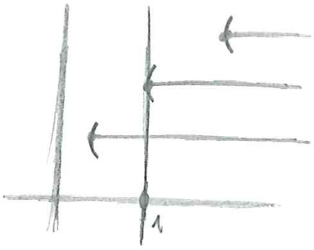
$N_{(x,y)} = \{(x-n, \infty) \times \{y\} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\beta_{(x,y)} = \{(x-\varepsilon, \infty) \times \{y\} \mid \varepsilon > 0\}$ cumple que $\beta_{(x,y)} \subset N_{(x,y)}$ y que $\forall N \in N_{(x,y)}$, $\exists B \in \beta$ tal que $B \subset N$.

* Otra forma de calcularlo que estaría bien, es por lo visto en teoría: $\beta_{(x,y)} = \{B \in \beta : (x,y) \in B\}$ que puede ser $\beta_{(x,y)} = \{(a, +\infty) \times \{y\} : a < x\}$ aunque el otro sistema de entornos es mas pequeño y por tanto es mejor. Pero esta forma de calcularlo tambien esta bien.

II)

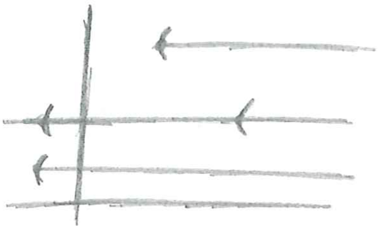
a) $A = \{1\} \times \mathbb{R}$



$\mathring{A} = \emptyset$ porque no existe ningun abierto que este contenido en A

$A' = \mathbb{R}^2 - A$

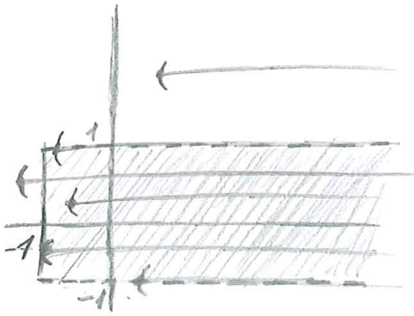
b) $B = \mathbb{R} \times \{1\}$



$\mathring{B} = B$

$B' = B$

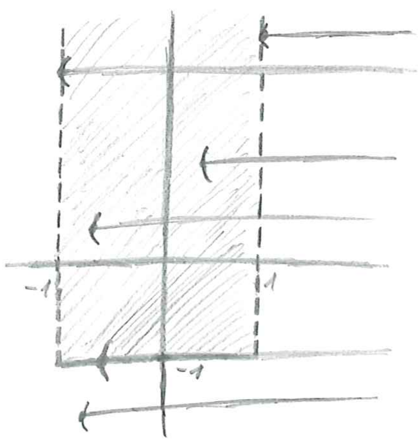
c) $C = [-1, \infty) \times (-1, 1)$



$\mathring{C} = (-1, \infty) \times (-1, 1)$

$C' = \mathbb{R} \times (-1, 1)$

d) $D = (-1, 1) \times [-1, \infty)$



$\mathring{D} = \emptyset$ porque no existe ningun abierto que este contenido en D

$D' = [-1, 1) \times [-1, \infty)$

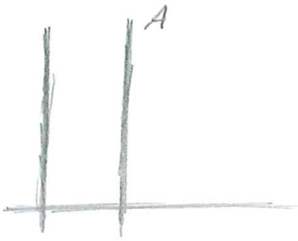
III)

Sabemos en general que (X, τ) es:

- Conexo: Si $\exists\, U, V \in \tau : U \cap V = \emptyset,\ U \cup V = X \Rightarrow U = \emptyset$ ó $V = \emptyset$.

- Disconexo: Si $\exists\, U, V \in \tau : U \cap V = \emptyset,\ U \cup V = X \Rightarrow U \neq \emptyset \neq V$.

- A disconexo ya que si tomamos:

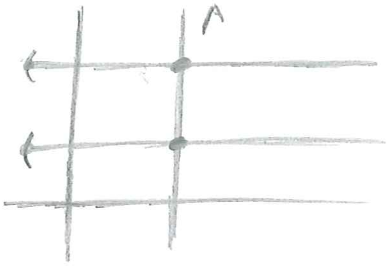


$$\left.\begin{array}{l} U = \bigcup_{b \in (-\infty, 0]} (0, \infty) \times \{b\} \\ V = \bigcup_{c \in (0, \infty)} (0, \infty) \times \{c\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} U, V \in \tau \\ U \cap V = \emptyset \\ U \cup V = A \\ U \neq \emptyset \neq V \end{array}\right.$$

Otra forma de verlo, más fácil es viéndolo desde la topología de subespacio:

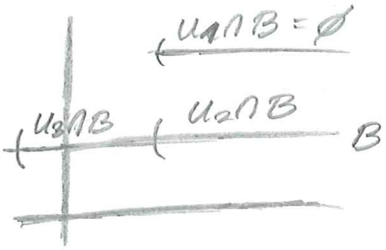
$(A, \tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}) \underset{\uparrow}{=} (A, \tau_{dis})$

porque al intersecar A con los abiertos de τ tenemos los puntos



(A, τ_{dis}) no es conexo porque los unicos conexos en τ_{dis} son los puntos

- $B = \mathbb{R} \times \{1\}$



Para ver que en general (X, τ) es conexo debemos ver que $\nexists\, U, V \in \tau$ tales que

$X = U \cup V$

$\emptyset = U \cap V$

$U \neq \emptyset \neq V$

Para probar esto debemos verlo en la topología de subespacio: $(B, \tau_B = \{U \cap B : U \in \tau\}) \underset{\uparrow}{\cong} (\mathbb{R}, \tau_{kol} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\})$

homeomorfos

¿$\exists U, V \in \tau$, $U \cap V = \emptyset$, $B \subset U \cup V$, $U \neq \emptyset \neq V$?

$\underbrace{B \subset U \cap V} \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow B$ conexo

La unica forma de que $B \subset U \cup V$ es que $U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow$ No se puede separar a B por dos abiertos $\Rightarrow B$ es conexo

2. Sea $f: (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ una aplicación, $a \in X$ y $A \subset X$

I) ¿Cuando se dice que f es continua en el punto a? ¿Cuándo se dice que f es continua?

II) Probar que si f es continua en el punto a y $a \in \bar{A}$, entonces $f(a) \in \overline{f(A)}$

I)

Se dice que f es continua en $a \in X$ si $\forall M \in N^Y_{f(a)}$ $\exists N \in N^X_a$ tal que $f(N) \subset M$.

Se dice que f es continua en A cuando lo es en todo $a \in A$ se dice que $\forall U \in \tau_Y$ $f^{-1}(U) \in \tau_X$ o o equivalentemente cuando $\forall V \in \beta_Y$, $f^{-1}(V) \in \tau_X$.

II)

f continua en $a \Rightarrow \forall M \in N^Y_{f(a)}$ $\exists N \in N^X_a$ tal que $f(N) \subset M$.

Por otra parte tenemos que $a \in \bar{A} \Rightarrow$ Fijado un S.F.E β^X_a $\forall N \in \beta^X_a$ $N \cap A \neq \emptyset$. Por definición $f(a) \in \overline{f(A)}$ si fijado un S.F.E. $\beta^Y_{f(a)}$ $M \cap f(A) \neq \emptyset$.

$f(N) \subset M \Rightarrow f(N \cap A) \neq \emptyset$ ya que $N \cap A \neq \emptyset$

$f(N \cap A) \subset f(N) \cap f(A) \neq \emptyset$ ya que $f(N \cap A) \neq \emptyset$

como $f(N) \subset M \Rightarrow f(N) \cap f(A) \subset M \cap f(A) \neq \emptyset$ ya que $f(N) \cap f(A) \neq \emptyset \Rightarrow f(a) \in \overline{f(A)}$.

3. Sobre $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$ se considera la relación de equivalencia:

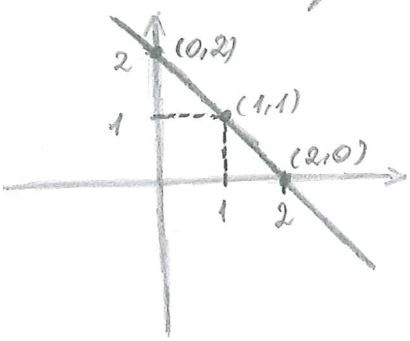
$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 + y_1 = x_2 + y_2$$

I) Si $p : (\mathbb{R}^2, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}^2/\sim, \tau_\sim)$ es la aplicación cociente, calcular la clase del punto $(0,0)$, es decir, $p^{-1}(p(0,0))$

II) Probar que $p : (\mathbb{R}^2, \tau_u) \to (\mathbb{R}^2/\sim, \tau_\sim)$ es abierta.

III) Probar que $(\mathbb{R}^2/\sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

Lo primero que vamos a hacer es ver que hace la relación de equivalencia poniendo un ejemplo, supongamos que $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 + y_1 = 2 = x_2 + y_2$. Entonces tendríamos relacionados los puntos:



Por tanto, todos los puntos que satisfacen la ecuación de la recta:

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} \Rightarrow \frac{x-1}{y-1} = \frac{2-1}{0-1} \Rightarrow -x+1 = y-1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{y = 2 - x}$ estarán relacionados

En general, si $x_1 + y_1 = m = x_2 + y_2$, los puntos que estarán relacionados son los de la recta $y = m - x$.

III) Hacemos un diagrama para saber lo que tenemos que hacer

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, \tau_u) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"', "\text{identificación}"] & & (\mathbb{R}, \tau_u) \\
& (\mathbb{R}^2/\sim, \tau_\sim) \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Si probamos que p es identificación por la proposición 5.23 $\exists h$ tal que h es homeomorfismo.

Luego lo que tenemos que hacer es:

1) Definir f teniendo en cuenta que normalmente debe hacer lo mismo que la aplicación cociente, es por ello que definimos f tal que $f(x,y) = x+y$.

2) Preservar la relación de equivalencia, es decir:

¿$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \iff f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$?

$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \iff x_1+y_1 = x_2+y_2$

3) Debemos ver que f es identificación, es decir, tenemos que ver que f es abierta, sobreyectiva y continua.

3.1.) ¿f es abierta? $\Rightarrow$ ¿$\forall U \in \tau_u^{\mathbb{R}^2}$, $f(U) \in \tau_u^{\mathbb{R}}$?

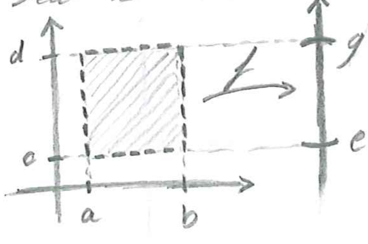
↳ Lo veremos a traves de basicos abiertos ya que cualquier abierto de la topología se puede expresar como union de ellos. Sabemos que:

$\beta_u^{\mathbb{R}^2} = \{(a,b)\times(c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$

$\beta_u^{\mathbb{R}} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

¿La imagen de un basico de $\beta_u^{\mathbb{R}^2}$ es un basico de $\beta_u^{\mathbb{R}}$ y por consiguiente es un abierto en $\tau_u^{\mathbb{R}}$?

Sea $B = (a,b)\times(c,d) \in \beta_u^{\mathbb{R}^2}$



$f((a,b)\times(c,d)) = (e,g) \in \beta_u^{\mathbb{R}} \Rightarrow f(B) \in \beta_u^{\mathbb{R}}$

Luego f es abierta.

3.2) Tenemos que comprobar que f es sobreyectiva:

↳ ¿Toda preimagen tiene al menos una preimagen?

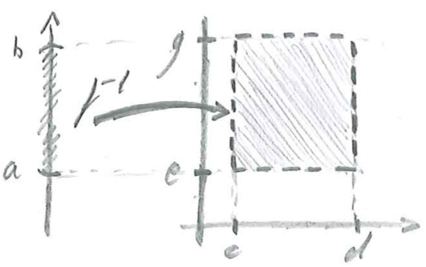
Sí, porque $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $f(x,y) = x+y \in \mathbb{R}$

3.3) Por último, tenemos que probar que f es continua:

↳ ¿f es continua? $\iff$ ¿$\forall U \in \tau_u^{\mathbb{R}}$, $\exists f^{-1}(U) \in \tau_u^{\mathbb{R}^2}$?

Lo hacemos nuevamente por básicos abiertos.

Sea $(a,b) \in \beta_u^{\mathbb{R}}$, ¿$f^{-1}(a,b) \in \beta_u^{\mathbb{R}^2}$?



$f^{-1}(a,b) = (c,d) \times (e,g) \in \beta_u^{\mathbb{R}^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(a,b) \in \tau_u^{\mathbb{R}^2}$

Luego f es continua.

Por tanto, f es identificación y $\exists h : (\mathbb{R}^2/\sim, \tau_\sim) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ homeomorfismo

II)

Hemos probado el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, \tau_u) \arrow[rr, "f"', "\text{identificación}"] \arrow[dr, "p"', "\text{ident.}"] & & (\mathbb{R}, \tau_u) \\
& (\mathbb{R}/\sim, \tau_\sim) \arrow[ur, "h\text{, homeo.}"'] &
\end{tikzcd}$$

por tanto $p(x,y) = h^{-1}(f(x,y))$

Como f es abierta va de abiertos a abiertos $\Rightarrow f(x,y)$ es abierta por ser identificación y como h es homeomorfismo $\Rightarrow$ $\Rightarrow h^{-1}$ continua $\Rightarrow$ va de abiertos a abiertos $\Rightarrow p = h^{-1}(f(x,y))$ es abierta.

I)

Lo que nos piden es $p: (\mathbb{R}^2, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$

$(0,0) \longmapsto p(0,0)$

$p^{-1}(p(0,0)) = \{x, y \in \mathbb{R}^2 : (0,0) \sim (x,y)\}$

Que como hemos visto al principio de este ejercicio nos referimos a una recta, en concreto a la recta:

$(x,y) \sim (0,0) \Longleftrightarrow x+y = 0+0 \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow \boxed{y=-x}$

4. Sea $f: (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación continua. Probar:

I) Si (X, τ_X) es compacto, entonces $f(X)$ tambien lo es.

II) Si (X, τ_X) es compacto, (Y, τ_Y) de Hausdorff y $F \subset X$ es cerrado, entonces $f(F)$ es cerrado en Y.

I)

Tenemos $f: (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua y (X, τ_X) compacto y tenemos que probar $(f(X), \tau_Y)$ tambien es compacto.

Para ver que que $f(X)$ es compacto tenemos que ver que si $f(X) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ tales que $U_i \in \tau_Y$. $\exists$ subrecubrimiento finito de $f(X)$.

Sabemos que $X = f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$. Como X es compacto existe un subrecubrimiento finito de $X \Rightarrow$

$\Rightarrow X = f^{-1}(U_0) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_{n_0}) \Rightarrow f(X) \subset U_0 \cup \ldots \cup U_{n_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ subrecubrimiento finito por abiertos de $f(X) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(X)$ es compacto.

II)

Utilizaremos la siguiente proposicion:
Si (X, τ_X) es de Hausdorff y $A \subset X$ es compacto $\Rightarrow A \in \mathcal{C}$.

Por lo tanto, tenemos que ver que $F \subset X$ es compacto. Por teoría sabemos que en un espacio topologico compacto (X, τ_X) el ser compacto es una propiedad debilmente hereditaria. Esto es que $F \subset X$ es compacto solo cuando F es cerrado. Por hipotesis, tenemos que F es cerrado $\Rightarrow$ $\Rightarrow F \subset X$ es compacto y usando la proposición antes mencionada $\Rightarrow f(F)$ es cerrado en (Y, τ_Y).

Topología (22-01-2014)

1. Sobre $\mathbb{R}^2$ se consideran las familias de conjuntos:

1) Si $x \geq 0$, $\mathcal{B}_{(x,y)} = \{(x,y)\}$

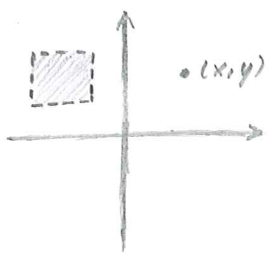
2) Si $x < 0$, $\mathcal{B}_{(x,y)} = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$

Se pide:

I) Comprobar que $\{\mathcal{B}_{(x,y)}\}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$ es un sistema fundamental de entornos para una topología τ y compararla con τ_u.

II) Calcular el interior y el derivado de los siguientes conjuntos en $(\mathbb{R}^2, \tau)$: $[-1,1]\times[-1,1]$, $[0,1]\times[-1,1]$, $\{\{\frac{1}{n}\}\times[0,1] : n\in\mathbb{N}\}$, $\{\{-\frac{1}{n}\}\times[0,1] : n\in\mathbb{N}\}$ y $\mathbb{Q}^2$.

I)



Como no tenemos la topología deberemos ver que verifica las 3 propiedades siguientes:

1) $\forall B \in \mathcal{B}_{(x,y)}$, $(x,y) \in B$

2) Dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{(x,y)}$, $\exists B_3 \in \mathcal{B}_{(x,y)}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$

3) $\forall B \in \mathcal{B}_{(x,y)}$, $\exists B_0 \in \mathcal{B}_{(x,y)}$ tal que $\forall (z,t) \in B_0$, $\exists B_{(z,t)} \subset B$.

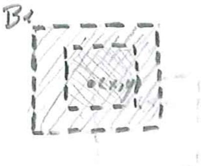
1)
↳ • Para $x \geq 0$: Un entorno básico del punto (x,y) con $x \geq 0$ son de la forma $B = \{(x,y)\}$, luego $(x,y) \in B$.

• Para $x < 0$: Los entornos básicos de un punto (x,y) con $x<0$ son de la forma $B = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$, luego $\forall (x,y)$ con $x<0$ $x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \wedge y \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$, luego $(x,y) \in B$.

2)

↳ • Para $x<0$: Tomamos $B_1 = (x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1)\times(y-\varepsilon_1, y+\varepsilon_1)$

$B_2 = (x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2)\times(y-\varepsilon_2, y+\varepsilon_2) \in \mathcal{B}_{(x,y)}$. Luego existe



$B_3 \in \mathcal{B}_{(x,y)}$ tal que $B_3 = (x-\varepsilon_3, x+\varepsilon_3)\times(y-\varepsilon_3, y+\varepsilon_3)$ donde $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ y por tanto $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

• Para $x \geq 0$: La única manera de que haya intersección no vacía es que $B_1 = B_2 = \{(x,y)\}$, luego $\exists B_3 \in \mathcal{B}_{(x,y)}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ y entonces $B_3 = \{(x,y)\}$.

3)

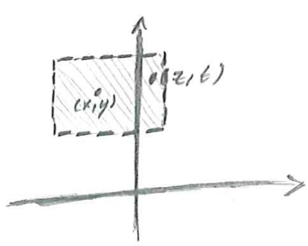
↳ • Para $x \geq 0$: Es trivial, ya que se trata de un único punto.

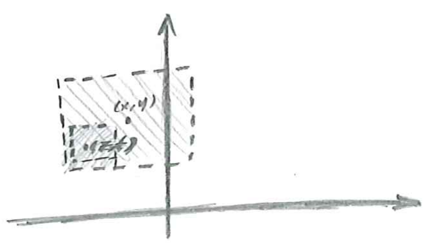
• Para $x<0$: Sea $B = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\times(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \in \mathcal{B}_{(x,y)}$, luego tomamos $B_0 = B$, entonces tomamos un punto $(z,t) \in B_0$ y distinguimos dos casos:

a) $z \geq 0$; luego $B_{(z,t)} = \{(z,t)\}$ y $(z,t) \in B$, luego $B_{(z,t)} \subset B$.

b) $z<0$, entonces $B(z,t) = (z-\varepsilon', z+\varepsilon')\times(t-\varepsilon', t+\varepsilon')$ con $\varepsilon'>0$ de manera que verifica $z-\varepsilon' \leq x-\varepsilon$ y $z+\varepsilon' \leq x+\varepsilon$ y

$t-\varepsilon' \leq y-\varepsilon$
$t+\varepsilon' \leq t+\varepsilon$ y podemos concluir que $B_{(z,t)} \subset B$.





Y por tanto $\mathcal{B}_{(x,y)}$ es un S.F.E $\forall (x,y) \in \mathbb{R}$ para una topología definida por

$\boxed{U \in \tau \iff \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists B \in \mathcal{B}_{(x,y)} \text{ tal que } B \subset U}$

Ahora tenemos que comparar la topología obtenida τ con τ_u. Luego deberemos aplicar el criterio de Hausdorff: Dadas dos topologías, en este caso τ y τ_u sobre $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B}_{(x,y)}$ y $\mathcal{B}^u_{(x,y)}$ dos sistemas fundamentales de entornos $\tau \subset \tau_u \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $\forall B_1 \in \mathcal{B}_{(x,y)}$, $\exists B_2 \in \mathcal{B}^u_{(x,y)}$ tal que $B_2 \subset B_1$.

Luego, es claro que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $\forall B \in \mathcal{B}^u_{(x,y)}$, $\exists B' \in \mathcal{B}_{(x,y)}$ tal que $B' \subset B$, por que si no es el punto (x,y) es un $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon) \subset B$, luego $\tau_u \subset \tau$.

¿$\tau \subset \tau_u$? $\Longleftrightarrow$ ¿$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $\forall B_1 \in \mathcal{B}_{(x,y)}$, $\exists B_2 \in \mathcal{B}^u_{(x,y)}$ tal que $B_2 \subset B_1$? Esto no es cierto ya que para (x,y) con $x \geq 0$, $B_1 = \{(x,y)\}$ y $B_2 = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ y $B_2 \not\subset B_1$.

II)

$A = [-1,1] \times [-1,1]$, $\mathring{A} = (-1,1] \times [-1,1]$, $A' = [-1,1] \times [-1,1]$.

$B = [0,1] \times [-1,1]$, $\mathring{B} = [0,1] \times [-1,1]$, $B' = \emptyset$.

$C = \{\{\frac{1}{n}\} \times [0,1] : n \in \mathbb{N}\}$, $\mathring{C} = \{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$, $C' = \emptyset$.

$D = \{-\frac{1}{n}\} \times [0,1]$, $\mathring{D} = \emptyset$, $D' = D$.

$E = \mathbb{Q}^2$, $\mathring{E} = ([0,\infty) \times (-\infty,\infty)) \cap \mathbb{Q}^2$, $E' = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$

2. Se pide:

I) Dar la definición de función continua $f:(X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ y las características que conozcas

II) Estudiar la continuidad de las funciones $f:(\mathbb{R},\tau_{sor}) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_u)$ y $f:(\mathbb{R},\tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_u)$, donde $f(x) = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ 2 & si\ x < 0 \end{cases}$

I)

Definicion: Sea $f:(X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es continua en un punto a si $\forall M \in N_a^Y$, $\exists N \in N_a^X$ tal que $f(N) \subset M$.

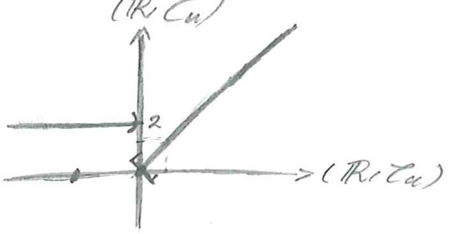
* Una funcion es continua en A si lo es en cada punto de A.

* Esta definición sigue siendo valida si se reemplazan los entornos por entornos basicos.

Caracteristicas:

- $\forall x \in X$ y $\forall M \in N_{f(x)}^Y$, $f^{-1}(M) \in N_x^X$.
- $\forall x \in X$ y $\forall B \in \mathcal{B}_{f(x)}^Y$, $f^{-1}(B) \in N_x^X$.
- $\forall U \in \tau_Y$, $f^{-1}(U) \in \tau_X$
- $\forall F \in \mathcal{C}_Y$, $f^{-1}(F) \in \mathcal{C}_X$
- $\forall B \in \mathcal{B}^Y$, $f^{-1}(B) \in \tau_X$
- $\forall A \subset X$, $f(\bar{A}^X) \subset \overline{f(A)}^Y$
- $\forall B \subset Y$, $\overline{f^{-1}(B^{\circ})}^X \subset f^{-1}(\bar{B}^Y)$

II)



Sabemos que $\mathcal{B}_u = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ y $\mathcal{B}_{sor} = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$

Para ver que f es continua tenemos que $\forall U \in \tau_Y$, $f^{-1}(U) \in \tau_X$. Lo miraremos cogiendo abiertos basicos de τ_Y porque sus elementos son unión de abiertos basicos.

Si nos fijamos bien en las dos funciones ambas tiene como espacio de llegada $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y podemos estudiar la continuidad a la vez. Vamos a calcular la imagen inversa de un abierto usual y veremos si son todos abiertos usuales, o de Sorgenfrey.

¿$\forall \underbrace{(a,b)}_{\text{se mira en el eje OY}} \in \beta_u : f^{-1}(a,b) \in \tau_{sor}$?

Diferenciamos varios casos en funcion de donde esta a y b:

$$f^{-1}(a,b) = \begin{cases} \emptyset \text{ si } a,b < 0 & \in \tau_u, \tau_{sor} \quad 1 \\ [0,b) \text{ si } a<0 \wedge 0 \leq b \leq 2 & \in \tau_{sor} \quad 2 \\ (a,b) \text{ si } 0 \leq a < b < 2 & \in \tau_u \subset \tau_{sor} \quad 3 \\ (-\infty, b) \text{ si } 0 < a < 2 < b & \in \tau_u \subset \tau_{sor} \quad 4 \\ (a,b) \text{ si } 2 < a,b & \in \tau_u \subset \tau_{sor} \quad 5 \end{cases}$$

Entonces como podemos ver $f: (\mathbb{R}, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ no es continua ya que $f^{-1}(a,b) \in \tau_u$ en el caso (2). Podemos poner como ejemplo que:

$f^{-1}((-1,1)) = [0,1) \notin \tau_u$

Pero $f: (\mathbb{R}, \tau_{sor}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ sí que es continua porque $\forall (a,b) \in \beta_u$, $f^{-1}((a,b)) \in \tau_{sor}$ ya que o bien todos pertenecen a τ_u pero como $\tau_u \subset \tau_{sor}$ entonces tambien pertenecen a τ_{sor} o directamente pertenecen a τ_{sor}.

3. Sea $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y la relación de equivalencia $\sim$ que identifica x con $-x$, para $x \in \mathbb{R}$. Se pide:

I) Probar que $(\mathbb{R}/\sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a $([0,\infty), \tau_u)$

II) Estudiar si la aplicación cociente $q: (\mathbb{R}, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}/\sim, \tau_\sim)$ es abierta o cerrada.

III) ¿es $(\mathbb{R}/\sim, \tau_\sim)$ conexo? ¿Y compacto?

I)

Para hacer esto hay que aplicar la proposición 5.23, es decir, hay que encontrar la identificación f para poder aplicarla.

Buscamos f "compatible" con $\sim$:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}, \tau_u) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & ([0,\infty), \tau_u) \\
& (\mathbb{R}/\sim, \tau_\sim) \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

"compatible" en el sentido de que f es identificación y

$f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow x_1 \sim x_2$.

$([0,\infty), \tau_u)$ es un "modelo" para $(\mathbb{R}/\sim, \tau_\sim)$. Hay varias maneras de definir f, una de ellas es $f(x) = |x|$. Claramente $f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow x_1 \sim x_2$. Pero queda por probar que f es identificación:

1) f es sobreyectiva ($\forall y \in [0,\infty), \exists y \in \mathbb{R} : f(y) = |y| = y$).

2) f es continua:
  2.1) Si $a, b > 0$, $f^{-1}(a,b) = (a,b) \cup (-b,-a)$
  2.2) $f^{-1}([0,b)) = (-b,b) \in \tau_u$

3) f es abierta:
  3.1) Si $a, b < 0$, $f(a,b) = (|b|, |a|) \in \tau_u$.
  3.2) Si $a < 0$ y $b > 0$, $f(a,b) = [0, \max(b,a))$.
  3.3) Si $a, b \geq 0$, $f(a,b) = (a,b)$.

Como f es sobreyectiva, continua y abierta por la proposición 5.1.5 f es identificación. Ahora aplicamos la proposición 5.23 para decir que $(\mathbb{R}/\sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a $([0,\infty), \tau_u)$.

II)

Por la teoría $(\mathbb{R}/\sim, \tau_\sim)$ puede pensarse como $([0,\infty), \tau_u)$ y f es la aplicación cociente, es decir, tiene las mismas propiedades que q.

Como f es abierta, q lo es, y para ver que f es cerrada, habrá que ver si f lo es.

¿f cerrada?

Sea $A \in \mathcal{C}_u$ ($\Leftrightarrow \bar{A} = A$). ¿es $f(A) \in \mathcal{C}_u^{[0,\infty)}$? Si no lo fuera, existiría $x \in \overline{f(A)} - f(A)$, es decir, existiría $\{x_n\} \subset f(A)$, $\{x_n\} \longrightarrow x \notin f(A)$. Pero si $a_n \in A$ es tal que $f(a_n) = |a_n| = x_n$, $\{a_n\} \subset A$ y debe converger a $a \in A$ (A cerrado); como f es continua $f(a) = x$, con lo que hemos llegado a una contradicción.

Luego f es cerrada $\Rightarrow q$ lo es.

III)

$(\mathbb{R}/\sim, \tau_\sim)$ es conexo, pues es homeomorfo a $([0,\infty), \tau_u)$ que es conexo.

$(\mathbb{R}/\sim, \tau_\sim)$ no es compacto, pues $([0,\infty), \tau_u)$ no lo es.

4. Se pide:

I) En $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$, probar que $A \subset \mathbb{R}$ es compacto si y solo si es finito

II) Si A es compacto y conexo en $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$, ¿quién es A?

III) Si A es compacto y conexo en $(\mathbb{R}, \tau_u)$, ¿quién es A?

IV) Sea el conjunto $C = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Estudiar su compacidad en $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$ y $(\mathbb{R}, \tau_u)$

I)

$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I} : U_i \in \tau_{ind}, \bigcup_{i\in I} U_i = \mathbb{R} \Rightarrow \exists i_0 \in I : U_{i_0} = \mathbb{R}$

$\mathcal{V} = \{U_{i_0} = \mathbb{R}\} \subset \mathcal{U}$.

II)

A es compacto en $(\mathbb{R}, \tau_{dis}) \Longleftrightarrow A$ es finito y

A es conexo $\Longleftrightarrow A$ es un punto o $\emptyset$.

Luego A es un punto o $\emptyset$.

III)

A compacto en $(\mathbb{R}, \tau_u) \Longleftrightarrow A$ es cerrado y acotado.

A es conexo en $(\mathbb{R}, \tau_u) \Longleftrightarrow A$ es un intervalo.

Luego A es un intervalo cerrado y acotado.

IV)

$C = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

No es compacto en $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$, ya que por el apartado (I), los compactos en $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$ son conjuntos finitos.

Sí es compacto en $(\mathbb{R}, \tau_u)$ ya que C es acotado y cerrado ($C' = \{0\}$) en $(\mathbb{R}, \tau_u)$

Topología (28-06-2016)

1. Sobre $\mathbb{R}^2$ se considera la topología τ generada por la base:

$$\beta = \{[a,b) \times [c,d) : a<b, c<d\}$$

Se pide:

I) Dar un sistema fundamental de entornos $\{\mathcal{B}_{(x,y)}\}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$ para τ.

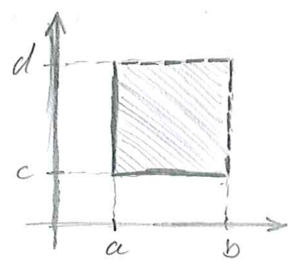
II) Comparar τ con la topología usual en $\mathbb{R}^2$, ¿Es $(\mathbb{R}^2, \tau)$ de Hausdorff?

III) Calcular el interior y el derivado de los siguientes conjuntos en $(\mathbb{R}^2, \tau)$: $A = [0,1] \times [0,1]$, $B = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ y $C = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$.

IV) Probar que la primera proyección coordenada $f : (\mathbb{R}^2, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ es continua. ¿Es abierta?

I) Una base de entornos es $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x$ tal que $\forall N \in \mathcal{N}_x$, $\exists B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset N$, donde $N \subset X$ es un entorno de x si $\exists U \in \tau$ tal que $x \in U \subset N$.

Dibujamos la base que induce la topología τ:



Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ nuestro punto, buscamos conjuntos que contengan a abiertos que contengan al punto.

$\mathcal{N}_{(x,y)} = \{[x, x+n) \times [y, y+n) : n \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{B}_{(x,y)} = \{[x, x+\varepsilon) \times [y, y+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ cumple que $\mathcal{B}_{(x,y)} \subset \mathcal{N}_{(x,y)}$ y que $\forall N \in \mathcal{N}_{(x,y)}$, $\exists B \in \mathcal{B}_{(x,y)}$ tal que $B \subset N$.

II)

Sabemos que $\mathcal{B}^u_{(x,y)} = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\times(y-\varepsilon, y+\varepsilon) : \varepsilon>0\}$ y por el criterio de Hausdorff, $\tau_1 \subset \tau_2 \iff \forall B_1 \in \mathcal{B}_1,\ \exists B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $B_2 \subset B_1$.

¿$\tau_u \subset \tau$? $\iff$ ¿$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $\forall B^u \in \mathcal{B}^u_{(x,y)}$, $\exists B \in \mathcal{B}_{(x,y)}$ tal que $B \subset B^u$?

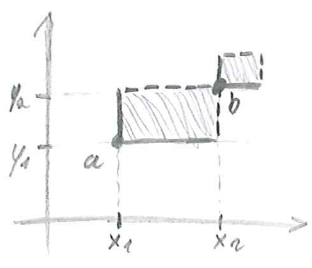
Sí, tomamos un $\varepsilon' = \varepsilon$ se da que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $\forall B^u = (x+\varepsilon, x-\varepsilon)\times(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$
$\exists B = [x, x+\varepsilon)\times[y, y+\varepsilon)$ tal que $B \subset B^u$.

¿$\tau \subset \tau_u$? $\iff$ ¿$\forall (x,y) \in \mathbb{R}$ y $\forall B \in \mathcal{B}_{(x,y)}$, $\exists B^u \in \mathcal{B}^u_{(x,y)}$ tal que $B_u \subset B$?

No, un contraejemplo sería:
$(x,y) = (1,2)$, $B_1 = [1, 1+\varepsilon)\times[2, 2+\varepsilon) \in \mathcal{B}_{(1,2)}$ pero $\nexists\ \varepsilon'>0$ tal que
$B^u_2 = (1-\varepsilon', 1+\varepsilon')\times(2-\varepsilon', 2+\varepsilon')$ tal que $B^u_2 \not\subset B_1 \Rightarrow B^u_2 \not\subset B_1 \Rightarrow$
$\tau \not\subset \tau_u$.

Ahora veamos si $(\mathbb{R}^2, \tau)$ es T_2:
Sabemos en general que un espacio topológico, $(\mathbb{R}^2, \tau)$ es T_2 si $\forall x \neq y$, $\exists U, V \in \tau$ tal que $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ e $y \in V$.

Si tomamos dos puntos de la forma:
$a = (x_1, y_1)$, $b(x_2, y_2)$, con $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$.
Tomamos $U = [x_1, x_2)\times[y_1, y_2)$
$V = [x_2, x_2+\varepsilon)\times[y_2, y_2+\varepsilon)$
De forma análoga se haría si $x_2 < x_1$, $y_2 < y_1$



III)

$A = [0,1] \times [0,1]$, $\mathring{A} = [0,1) \times [0,1)$, $A' = [0,1) \times [0,1)$

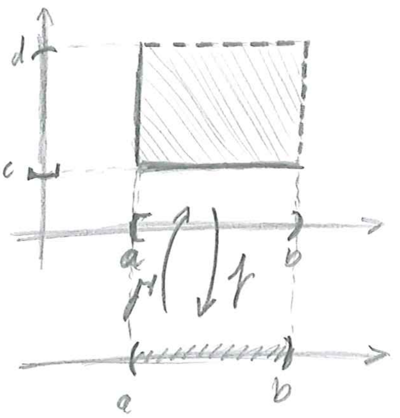
$B = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$, $\mathring{B} = \emptyset$, $B' = B$

$C = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$, $\mathring{C} = \emptyset$, $C' = \emptyset$

¿ IV) ?

Tenemos que probar en primer lugar que $f : (\mathbb{R}^2, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$, $(x,y) \longmapsto f(x,y) = x$ es continua.

Luego $\forall U \in \tau_u$, $f^{-1}(U) \in \tau$. Los abiertos en τ_u son de la forma (a,b) tal que $a<b$.



$U = (a,b)$ y $U \subset \underbrace{[a,b)}_{V}$ tal que $U \in \tau_u \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V) \Rightarrow (a,b) \times [c,d) \subset [a,b) \times [c,d) \in \tau \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b) \times [c,d) \in \tau$

Luego f es continua.

Tenemos que ver es abierta para ello tenemos que ver que dado $U = [a,b) \times [c,d) \in \tau$, $f(U) \in \tau_u \Rightarrow$

$\Rightarrow f(U) = [a,b) \notin \tau_u \Rightarrow f$ no es abierta.

¿2? Sea (X, τ) un espacio topológico y $a \in X$ tal que el conjunto $\{a\} \in \tau$.
Se pide:

I) Probar que si $A \subset X$, entonces $a \in \mathring{A}$ si y solo si $a \in A$ si y solo si $\bar{A}$

II) Probar que $a \notin A'$

III) Probar que si una sucesión converge a a, entonces es semiconstante.

I)

1) $a \in \mathring{A}$

2) $a \in A$

3) $a \in \bar{A}$

1) => 2) Tenemos que $a \in \mathring{A}$ y queremos ver que $a \in A$. Luego sabemos que $\forall A \subset X$, $\mathring{A} \subset A \Rightarrow a \in \mathring{A} \subset A \Rightarrow$
$\Rightarrow a \in A$.

2) => 3) Tenemos que $a \in A$ y queremos ver que $a \in \bar{A}$. Luego como $\forall A \subset X$, $A \subset \bar{A}$ y $a \in A \subset \bar{A} \Rightarrow a \in \bar{A}$.

3) => 1)

$a \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall N \in \mathcal{N}_a,\ N \cap A \neq \emptyset$.

$a \in \{a\} \in \tau \Rightarrow \{a\} \in \mathcal{N}_a$

$\underset{\underset{\{a\} \in \mathcal{N}_a}{\downarrow}}{a \in \bar{A} \Rightarrow} \{a\} \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow a \in A$

Si $a \in A$, como $a \in \underset{\underset{\tau}{\Uparrow}}{\{a\}} \subset A \Rightarrow a \in \mathring{A}$

II) Supongamos por reducción al absurdo que $a \in A' \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall N \in \mathcal{N}_a$, $(N - \{a\}) \cap A \neq \emptyset$.
$a \in \{a\} \in \tau \Rightarrow \{a\} \in \mathcal{N}_a$. Entonces $(\{a\} - \{a\}) \cap A = \emptyset$
Esto es absurdo porque he supuesto que $a \in A' \Rightarrow$
$\Rightarrow a \notin A'$.

III) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow a \iff \forall U \in \tau, a \in U, \exists n_u \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_u, x_n \in U$. Pero $\{a\} \in \tau$, entonces $\exists n_a \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_a, x_n \in \{a\} \iff \forall n \geq n_a, x_n = a \Rightarrow$ $\Rightarrow$ semiconstante.

3. Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topologicos, $b \in Y$ y sea

$$f : (X, \tau_X) \longrightarrow (X \times Y, \tau_X \times \tau_Y)$$

definida por $f(x) = (x, b)$. Probar que es un embebimiento (es decir, una función continua, inyectiva y que restringida a su imagen es un homeomorfismo.)

Veamos en primer lugar si f es inyectiva. Si $(x, b) = (y, b) \Rightarrow$ $\Rightarrow x = y$. Luego es una aplicacion inyectiva.

En segudo lugar tenemos que ver que f es continua. Luego dado un abierto en $(X \times Y, \tau_{X \times Y})$ su imagen reciproca debe ser abierta en (X, τ_X). Por tanto, sean $U \times V$, donde $U \in \tau_X$ y $V \times \tau_Y$,
$f^{-1}(U \times V) = \{x \in X : f(x) = (x, b) \in U \times V\} \Rightarrow x \in U$ y $b \in V \Rightarrow$
$f^{-1}(U \times V) = U$

Por ultimo tenemos que comprobar que su imagen restringida es homeomorfismo
$f(U) = U \times V$, si $U \in \tau_X$ y $V \in \tau_Y$, con $V = \{b\}$, luego f es abierta.
Si tomamos $f_0 : (X, \tau_X) \to (f(X) \times b, \tau_{f(x)})$, $\forall U \in \tau_X$, $f_0(U) =$ $= \underbrace{(U \times b) \cap f(X)}_{\in \tau_{f(x)}}$. Luego tambien es un homeomorfismo y entonces podemos concluir que es un embebimiento.

4. Dado un espacio topológico (X,τ), se pide:

I) Si A es conexo, ¿es $\mathring{A}$ conexo? ¿y $\bar{A}$?

II) Si A es compacto, ¿es $\mathring{A}$ compacto? ¿y $\bar{A}$?

III) Si (X,τ) es de Hausdorff y A es compacto, ¿es $\mathring{A}$ compacto? ¿y $\bar{A}$?

I)
$\mathring{A}$ no tiene porque ser conexo, basta con tomar en $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$
$A = \bar{B}((-1,0),1) \cup \bar{B}((1,0),1)$, que es conexo por ser unión de dos conexos con un punto en común. Pero,
$\mathring{A} = B((-1,0),1) \cup B((0,1),1)$ no es conexo.
Por el el teorema 7.11, la clausura de un conjunto conexo es conexo.

II)
$\mathring{A}$ no tiene porque ser compacto por ejemplo $[0,1]$ es compacto en τ_u pero $\mathring{\overline{[0,1]}} = (0,1)$ no es compacto en τ_u.
$\bar{A}$ tampoco tiene porque ser compacta, por ejemplo en $(\mathbb{R}, \tau_{Kol})$ $[0,\infty)$ es compacta (si $[0,\infty) = \bigcup_{i \in I} (a_i, \infty)$ $\exists i_0 \in I : 0 \in (a_{i_0}, \infty) \Rightarrow [0,\infty) \subset (a_{i_0}, \infty)$). Pero $\overline{[0,\infty)} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ no es compacto (es decir, $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, \infty)$ no tiene subrecubrimiento finito).

III)
$\mathring{A}$ no tiene porque ser compacto, $[0,1]$ es compacto y T_2 en τ_u pero $\mathring{\overline{[0,1]}} = (0,1)$ es T_2 pero no es compacto.
Por la proposición 6.4, En (X,τ) T_2 y compacto, $A \subset X$ es compacto $\Leftrightarrow A \in C \Leftrightarrow \bar{A} = A$