# 2. Cuádricas.

En todo este capítulo trabajaremos en el espacio afín euclídeo $E_3$ con respecto a una referencia rectangular $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Denotaremos por $(x, y, z)$ las coordenadas cartesianas respecto a esta referencia y por $(x, y, z, t)$ las coordenadas homogéneas.

## 1 Definición y ecuaciones.

**Definición 1.1** *Una* **cuádrica** *es una superficie en $E_3$ determinada, en coordenadas cartesianas, por una ecuación de segundo grado.*

De esta forma la **ecuación general de una cuádrica** será:

$$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0}$$

con $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ (para garantizar que la ecuación es de segundo grado.)

Otras expresiones equivalentes de la ecuación de una cuádrica son:

1. En función de la **matriz $A$ asociada a la cuádrica** (toda matriz simétrica $4 \times 4$ determina una cuádrica):
$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}.$$
2. En función de la **matriz $T$ de términos cuadráticos**:
$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a_{44} = 0,$$
con
$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \neq \Omega.$$
3. En coordenadas homogéneas:
$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0, \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

De la última ecuación deducimos que, en coordenadas homogénas, los puntos de la cuádrica son los vectores autoconjugados de la forma cuadrática que determina la matriz asociada $A$.

**Definición 1.2** *Diremos que una cuádrica es* **degenerada** *cuando su matriz asociada tiene determinante nulo.*

## 2 Intersección de una recta y una cuádrica.

Consideramos una cuádrica dada por una matriz simétrica $A$. Sean $P = (p)$ y $Q = (q)$ dos puntos cualesquiera. Calculemos en coordenadas homogéneas la intersección de la recta que los une y la cuádrica:

$$\begin{aligned} \text{recta } PQ &\equiv (x) = \alpha(p) + \beta(q). \\ \text{cuádrica} &\equiv (x)A(x)^t = 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda queda:

$$(\alpha(p) + \beta(q))A(\alpha(p) + \beta(q))^t = 0 \iff \alpha^2(p)A(p)^t + 2\alpha\beta(p)A(q)^t + \beta^2(q)A(q)^t = 0.$$

- Si $(p)A(p)^t = (p)A(q)^t = (q)A(q)^t = 0$ la ecuación se cumple para cualquier par $(\alpha, \beta)$ luego **la recta está contenida en la cuádrica**.

- En otro caso, obtenemos una ecuación de segundo grado de discriminante:

$$\frac{1}{4}\Delta = [(p)A(q)^t]^2 - [(p)A(p)^t][(q)A(q)^t].$$

Hay tres posibilidades:

1. $\Delta > 0$: **Recta secante.** Hay dos soluciones reales distintas, luego la recta corta a la cuádrica en dos puntos distintos.
2. $\Delta = 0$: **Recta tangente.** Hay una solución doble, luego la recta corta a la cuádrica en un punto doble.
3. $\Delta < 0$: **Recta exterior.** No hay soluciones reales. La recta no corta a la cuádrica.

Podemos aplicar esto a dos situaciones:

1. **Plano tangente a la cuádrica en un punto $P$ de la misma.** El plano tangente a la cuádrica en un punto $P$ está formado por todas las rectas tangentes en dicho punto. Como $P$ está en la cuádrica entonces $(p)A(p)^t = 0$. Por tanto el plano tangente tendrá por ecuación:
$$\boxed{(p)A(x)^t = 0}$$
2. **Cono de rectas tangentes a la cuádrica desde un punto $P$ exterior.** Si $P$ es un punto exterior a la cuádrica, las rectas tangentes a la misma se obtendrán mediante la ecuación:
$$\boxed{[(p)A(x)^t]^2 - [(p)A(p)^t][(x)A(x)^t] = 0}$$
teniendo en cuenta que dicha ecuación corresponde, en general, al cono de centro $P$ formado por rectas tangentes a la cuádrica.

De nuevo la **polaridad** nos proporcionará otro método para calcular estas rectas.

# 3 Polaridad.

Trabajamos con una cuádrica de matriz asociada $A$.

**Definición 3.1** *Dado un punto $P$ de coordenadas homogéneas $(p^1, p^2, p^3, t_p)$ y una cuádrica determinada por una matriz $A$, se llama* **plano polar de $P$ respecto a la cuádrica** *al plano de ecuación:*

$$(\,p^1 \quad p^2 \quad p^3 \quad t_p\,)\,A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0.$$

*$P$ se dice el* **polo** *del plano.*

**Observación 3.2** *Análogamente a lo que ocurría en el caso de las cónicas, los conceptos de polo y plano polar son duales. Supongamos que la cuádrica definida por $A$ es no degenerada. Dados un polo $P$ y su plano polar $\pi_P$* **la famila de planos pasando por** *$P$ se corresponde con* **los planos polares de los puntos de** *$\pi_P$. Para comprobar esto simplemente tenemos en cuenta lo siguiente. Sean $(p)$ las coordenadas de $P$. Si $B, C$ y $D$ son tres puntos de $\pi_P$, con coordenadas $(b), (c)$ y $(d)$ respectivamente, se tiene que:*

$$\begin{array}{lcl} (p)A(b)^t = 0 & \Rightarrow & P \in \text{ plano polar de } B \\ (p)A(c)^t = 0 & \Rightarrow & P \in \text{ plano polar de } C \\ (p)A(d)^t = 0 & \Rightarrow & P \in \text{ plano polar de } D \end{array}$$

*Por tanto el haz de planos que pasa por $P$ será:*

$$\begin{array}{ll} \textit{planos pasando por } P & \iff \alpha(b)A(x)^t + \beta(c)A(x)^t + \gamma(d)A(x)^t = 0 \iff \\ & \iff (\alpha(b) + \beta(c) + \gamma(d))A(x)^t = 0 \iff \\ & \iff \textit{planos polares de los puntos } \alpha(b) + \beta(c) + \gamma(d) \iff \\ & \iff \textit{planos polares de los puntos de } \pi_P. \end{array}$$

Veamos la interpretación geométrica del plano polar. Sea $C$ la cuádrica (no degenerada) definida por $A$, $P$ el polo y $\pi_P$ el correspondiente plano polar:

1. *Si $P$ no está en la cuádrica y el plano polar interseca a la cuádrica, entonces los puntos de intersección del plano polar y la cuádrica son los puntos de tangencia de las rectas tangentes a la cuádrica pasando por $P$.*

   **Prueba:** Sea $X \in C \cap \pi_P$. Entonces se verifican las ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} X \in C & \iff & (x)A(x)^t = 0. \\ X \in \pi_p & \iff & (p)A(x)^t = 0. \\ \text{recta uniendo } X \text{ y } P & \iff & \alpha(p) + \beta(x) = 0. \end{array}$$

   Veamos que la recta que une $P$ y $X$ es tangente a $C$. Intersecamos dicha recta con la cuádrica y obtenemos:

$$\alpha^2(p)A(p)^t + 2\alpha\beta(p)A(x)^t + \beta^2(x)A(x^t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2(p)A(p) = 0$$

   es decir hay una única solución y por tanto la recta $PX$ es tangente a la cuádrica en $X$.

2. *Si $P$ está en la cuádrica, entonces el plano polar es el plano* **tangente a la cuádrica en el punto $P$.**

   **Prueba:** Es un caso particular de la situación anterior.

Como veremos más adelante hay cuádricas formadas por dos familias de rectas reales, es decir, cuádricas por cada uno de cuyos puntos pasan dos rectas reales. El plano tangente nos sirve para calcular dichas rectas. Basta tener en cuenta el siguiente resultado:

**Teorema 3.3** *El plano tangente a una cuádrica (si no está contenido en ella) corta a la misma en dos rectas (reales o imaginarias), o una recta doble.*

**Prueba:** Dado que la cuádrica está definida por una ecuación de grado 2, la intersección de esta superficie con un plano no contenido en ella, viene también determinada por una ecuación de grado 2. Por tanto se tratará de una cónica.

Sea una cuádrica determinada por la matriz $A$ y $P = (p)$ un punto de la cuádrica. La ecuación del plano tangente en $P$ es:

$$(p)A(x)^t = 0$$

Sea $Q = (q)$ un punto cualquiera en la intersección de la cuádrica y del plano tangente. Veamos que la recta que une $P$ y $Q$ está contenida en la cuádrica. Se tiene:

$$\begin{array}{rcl} P \in \text{cuádrica} & \Rightarrow & (p)A(p)^t = 0 \\ Q \in \text{cuádrica} & \Rightarrow & (q)A(q)^t = 0 \\ Q \in \text{plano tangente} & \Rightarrow & (p)A(q)^t = 0 \end{array}$$

Es decir los puntos $(p)$ y $(q)$ cumplen exactamente las condiciones que vimos en la sección anterior que aseguran que la recta que los une está contenida en la cuádrica. ■

# 4 Cambio de sistema de referencia.

Sean dos sistemas de referencia $R_1 = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ y $R_2 = \{Q; \bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$. Denotamos por $(x, y, z)$ e $(x', y', z')$ respectivamente a las coordenadas cartesianas en cada una de las referencias. Supongamos que

- el punto $Q$ con respecto a la primera referencia tiene por coordenadas $(q^1, q^2, q^3)$.
- $\{\bar{e}'\} = C\{\bar{e}\}$, donde $C = M_{B'B}$.

Entonces sabemos que la fórmula de cambio de referencia es:

$$(x, y, z, t) = (x', y', z', t')\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & C & & 0 \\ & & & 0 \\ q^1 & q^2 & q^3 & 1 \end{array}\right) \iff (x, y, z, t) = (x', y', z', t')B.$$

Razonando exactamente igual que en el caso de cónicas obtenemos:

**Teorema 4.1** *Las matrices $A, A'$ de una cuádrica con respecto a dos referencias $R_1, R_2$ distintas, son matrices congruentes*

$$A' = BAB^t$$

*siendo $B$ la matriz de cambio de referencia de $R_2$ a $R_1$, en coordenadas homogéneas.*

**Teorema 4.2** *Las matrices de términos cuadráticos $T, T'$ de una cuádrica con respecto a dos referencias $R_1, R_2$ distintas son matrices congruentes*

$$T' = CTC^t$$

*siendo $C$ la matriz de cambio de la base de $R_2$ a la de $R_1$.*

# 5 Clasificación de cuádricas y ecuación reducida.

Dada una cuádrica definida por una matriz simétrica $A$, de manera análoga a lo que hacíamos en el caso de las cónicas, encontrar su ecuación reducida consiste en hacer una cambio de referencia de manera que la ecuación de la cuádrica con respecto a esa nueva referencia sea lo más sencilla posible. De nuevo realizamos:

1. **Un giro.** Nos permite colocar el eje o ejes de la cuádrica paralelos a los ejes de coordenadas de la nueva referencia. La matriz de términos cuadráticos en la nueva referencia será diagonal.
2. **Una traslación.** Que nos permite colocar el/los centro/s (si existe/n) de la cuádrica en el origen de coordenadas (en otro caso llevaremos un vértice al eje de coordenadas).

Como en el caso de cónicas, hacemos la siguiente **observación importante**:

**Supondremos que al menos un término de la diagonal de la matriz $T$ de términos cuadráticos es no negativo.**

Si esta propiedad no se cumple, basta trabajar con la matriz $-A$ en lugar de con $A$. De esta forma aseguramos que $T$ siempre tiene al menos un autovalor positivo.

## 5.1 Paso I: Reducción de términos cuadráticos (el giro).

Dado que la matriz $T$ de términos cuadráticos es simétrica y no nula, tiene tres autovalores reales $\lambda_1$, $\lambda_2$ y $\lambda_3$, con $\lambda_1 \neq 0$. Supondremos los **autovalores ordenados según el criterio positivos-negativos-nulos**, y que el número de autovalores positivos es siempre mayor que el de negativos (esto siempre es posible salvo cambio de signo de $A$). Además sabemos que existe una base ortonormal de autovectores $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ de manera que:

$$T' = CTC^t \text{ con } \{\bar{u}\} = C\{\bar{e}\} \text{ y } T' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

La ecuación de cambio de coordenadas es:

$$(x, y, z) = (x', y', z')C$$

de manera que en la nueva base la ecuación de la cuádrica es:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} CTC^t \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{pmatrix} C^t \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + a_{44} = 0$$

Operando queda:

$$\boxed{\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2b_{14}x' + 2b_{24}y' + 2b_{34}z' + b_{44} = 0}$$

## 5.2 Paso II: Reducción de términos lineales (la traslación[3]).

Ahora a partir de la ecuación anterior completamos las expresiones de $x'$, $y'$ e $z'$ al cuadrado de un binomio (si es posible), sumando y restando los términos adecuados. En concreto:

- Para $x'$:

$$\lambda_1 x'^2 + 2b_{14}x' = \lambda_1(x'^2 + 2\frac{b_{14}}{\lambda_1}x' + \frac{b_{14}^2}{\lambda_1^2}) - \frac{b_{14}^2}{\lambda_1} = \lambda_1(x' + \frac{b_{14}}{\lambda_1})^2 - \frac{b_{14}^2}{\lambda_1}$$

- Para $y'$, si $\lambda_2 \neq 0$:

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_{24}y' = \lambda_2(y'^2 + 2\frac{b_{24}}{\lambda_2}y' + \frac{b_{24}^2}{\lambda_2^2}) - \frac{b_{24}^2}{\lambda_2} = \lambda_2(y' + \frac{b_{24}}{\lambda_2})^2 - \frac{b_{24}^2}{\lambda_2}$$

- Para $z'$:

- Si $\lambda_3 \neq 0$:

$$\lambda_3 z'^2 + 2b_{34}z' = \lambda_3(z'^2 + 2\frac{b_{34}}{\lambda_3}z' + \frac{b_{34}^2}{\lambda_3^2}) - \frac{b_{34}^2}{\lambda_3} = \lambda_3(z' + \frac{b_{34}}{\lambda_3})^2 - \frac{b_{34}^2}{\lambda_3}$$

[3] Si $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ y $b_{24}^2 + b_{34}^2 \neq 0$ todavía habrá que hacer un giro.

- Si $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ y $b_{34} \neq 0$:

$$2b_{34}z' + b_{44} - \frac{b_{24}^2}{\lambda_2} - \frac{b_{14}^2}{\lambda_1} = 2b_{34}(z' + \frac{1}{2b_{34}}(b_{44} - \frac{b_{24}^2}{\lambda_2} - \frac{b_{14}^2}{\lambda_1}))$$

- Si $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ y $b_{24}^2 + b_{34}^2 \neq 0$. En este caso además de la traslación todavía hay que hacer un giro:

$$2b_{24}y' + 2b_{34}z' + b_{44} - \frac{b_{14}^2}{\lambda_1} = 2c_{24}\frac{b_{24}y' + b_{34}z' + \frac{1}{2}(b_{44} - \frac{b_{14}^2}{\lambda_1})}{c_{24}}$$

con $c_{24} = \sqrt{b_{24}^2 + b_{34}^2}$.

Hacemos en cada caso el cambio de referencia correspondiente y obtenemos las siguientes formas reducidas:

$$\boxed{\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2b_{14}x' + 2b_{24}y' + 2b_{34}z' + b_{44} = 0}$$

| Autovalores y coeficientes | Cambio de referencia y ecuación reducida. |
|---|---|
| $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$ | $x'' = x' + \frac{b_{14}}{\lambda_1}$<br>$y'' = y' + \frac{b_{24}}{\lambda_2}$<br>$z'' = z' + \frac{b_{34}}{\lambda_3}$<br>$\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + c_{44} = 0}$ |
| $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$<br>$\lambda_3 = 0$<br>$b_{34} \neq 0$ | $x'' = x' + \frac{b_{14}}{\lambda_1}$<br>$y'' = y' + \frac{b_{24}}{\lambda_2}$<br>$z'' = z' + \frac{1}{2b_{34}}(b_{44} - \frac{b_{24}^2}{\lambda_2} - \frac{b_{14}^2}{\lambda_1})$<br>$\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2c_{34}z'' = 0}$ |
| $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$<br>$\lambda_3 = 0$<br>$b_{34} = 0$ | $x'' = x' + \frac{b_{14}}{\lambda_1}$<br>$y'' = y' + \frac{b_{24}}{\lambda_2}$<br>$\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c_{44} = 0}$ |
| $\lambda_1 \neq 0$<br>$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$<br>$b_{24}^2 + b_{34}^2 \neq 0$ | $x'' = x' + \frac{b_{14}}{\lambda_1}$<br>$y'' = \frac{b_{24}y' + b_{34}z' + \frac{1}{2}(b_{44} - \frac{b_{14}^2}{\lambda_1})}{c_{24}}$<br>$z'' = \frac{b_{34}y' - b_{24}z'}{c_{24}}$<br>$\boxed{\lambda_1 x''^2 + 2c_{24}y'' = 0}$, $c_{24} = \sqrt{b_{24}^2 + b_{34}^2}$ |
| $\lambda_1 \neq 0$<br>$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$<br>$b_{24}^2 + b_{34}^2 = 0$ | $x'' = x' + \frac{b_{14}}{\lambda_1}$<br>$\boxed{\lambda_1 x''^2 + c_{44} = 0}$ |

Es decir nos queda una ecuación reducida de la forma:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + 2c_{24} y'' + 2c_{34} z'' + c_{44} = 0$$

con las siguientes posibilidades para los valores de $\lambda_2$, $\lambda_3$, $c_{24}$, $c_{34}$ y $c_{44}$:

1. Si $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 > 0$, entonces $c_{24} = c_{34} = 0$ y si:
   (a) $c_{44} > 0$, entonces la ecuación reducida es:

   $\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + |c_{44}| = 0}$ Elipsoide imaginario.

   (b) $c_{44} = 0$, entonces la ecuación reducida es:

   $\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 = 0}$ Cono imaginario.

   (c) $c_{44} < 0$, entonces la ecuación reducida es:

   $\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 - |c_{44}| = 0}$ Elipsoide real.

2. Si $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$, entonces $c_{24} = c_{34} = 0$ y si:
   (a) $c_{44} > 0$, entonces la ecuación reducida es:

   $\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 - |\lambda_3| z''^2 + c_{44} = 0}$ Hiperboloide de dos hojas.

   (b) $c_{44} = 0$, entonces la ecuación reducida es:

   $\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 - |\lambda_3| z''^2 = 0}$ Cono real.

   (c) $c_{44} < 0$, entonces la ecuación reducida es:

   $\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 - |\lambda_3| z''^2 - |c_{44}| = 0}$ Hiperboloide de una hoja.

3. Si $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 = 0$, entonces $c_{24} = 0$ y si:
   (a) $c_{34} \neq 0$, entonces $c_{44} = 0$ y la ecuación reducida es:

   $\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2c_{34} z'' = 0}$ Paraboloide elíptico.

   (b) $c_{34} = 0$:
      i. si $c_{44} > 0$, entonces la ecuación reducida es:

      $\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c_{44} = 0}$ Cilindro elíptico imaginario.

      ii. si $c_{44} = 0$, entonces la ecuación reducida es:

      $\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0}$ Planos imaginarios que se cortan.

      iii. si $c_{44} < 0$, entonces la ecuación reducida es:

      $\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 - |c_{44}| = 0}$ Cilindro elíptico real.

4. Si $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 = 0$, entonces $c_{24} = 0$ y si:
   (a) $c_{34} \neq 0$, entonces $c_{44} = 0$ y la ecuación reducida es:

   $\boxed{\lambda_1 x''^2 - |\lambda_2| y''^2 + 2c_{34} z'' = 0}$ Paraboloide hipérbolico.

   (b) $c_{34} = 0$, entonces $c_{34} = 0$ y,:
      i. si $c_{44} \neq 0$, entonces la ecuación reducida es:

      $\boxed{\lambda_1 x''^2 - |\lambda_2| y''^2 + c_{44} = 0}$ Cilindro hiperbólico.

      ii. si $c_{44} = 0$, entonces la ecuación reducida es:

      $\boxed{\lambda_1 x''^2 - |\lambda_2| y''^2 = 0}$ Planos reales que se cortan.

5. Si $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, entonces $c_{34} = 0$ y si:
   (a) $b_{24}^2 + b_{34}^2 > 0$, entonces $c_{44} = 0$ y la ecuación reducida es:

   $\boxed{\lambda_1 x''^2 + 2c_{24} y'' = 0}$ Cilindro parabólico.

   (b) $b_{24}^2 + b_{34}^2 = 0$, entonces $c_{24} = c_{34} = 0$ y:
      i. si $c_{44} > 0$, entonces la ecuación reducida es:

      $\boxed{\lambda_1 x''^2 + c_{44} = 0}$ Planos paralelos imaginarios.

ii. si $c_{44} = 0$, entonces la ecuación reducida es:

$\boxed{\lambda_1 x''^2 = 0}$ Plano doble.

iii. si $c_{44} < 0$, entonces la ecuación reducida es:

$\boxed{\lambda_1 x''^2 - |c_{44}| = 0}$ Planos paralelos reales.

## 5.3 Clasificación en función de las signaturas de $T$ y $A$.

Teniendo en cuenta que los cambios de referencia equivalen a multiplicar la matriz $A$, de la forma $BAB^t$. Para clasificar la cuádrica podemos diagonalizar (hasta donde sea posible) la matriz $A$ por congruencia, pero con la siguiente restricción:

**La última fila no puede ser ni sumada a las demás ni multiplicada por un escalar ni cambiada de posición.**

Si la matriz $A$ es diagonalizable, podemos clasificar completamente la cuádrica en función de la signatura de $A$. Salvo cambio de signo aparecerá alguno de los siguientes casos.

| **Signatura** $A$ | $A$ **SI diagonaliza.** |
|---|---|
| $+,+,+;+$ | Elipsoide imaginario |
| $+,+,+;0$ | Cono imaginario |
| $+,+,+;-$ | Elipsoide real |
| $+,+,-;+$ | Hiperboloide de 2 hojas |
| $+,+,-;0$ | Cono real |
| $+,+,-;-$ | Hiperboloide de 1 hoja |
| $+,+,0;+$ | Cilindro elíptico imaginario |
| $+,+,0;0$ | Planos imaginarios que se cortan |
| $+,+,0;-$ | Cilindro elíptico real |
| $+,-,0;+$ | Cilindro hiperbólico |
| $+,-,0;0$ | Planos reales que se cortan |
| $+,0,0;+$ | Planos paralelos imaginarios |
| $+,0,0;0$ | Plano doble |
| $+,0,0;-$ | Planos paralelos reales |

Si $A$ no diagonaliza, la cuádrica es de tipo parabólico. La clasificación puede hacerse entonces en función de la signatura de $T$.

| **Signatura** $T$ | $A$ **NO diagonaliza.** |
|---|---|
| $+,+,0$ | Paraboloide elíptico |
| $+,-,0$ | Paraboloide hiperbólico |
| $+,0,0$ | Cilindro parabólico |

**Hay que tener en cuenta que las diagonalizaciones de $A$ por congruencia, no tienen porque coincidir con la forma reducida de la cuádrica. Es decir, nos sirven para clasificar la cuádrica pero no para calcular su ecuación reducida.**

También podemos calcular directamente la signatura de $T$, hallando sus autovalores o por diagonalización y utilizar el rango y determinante de $A$ para precisar la clasificación. Como único inconveniente, de esta forma no distinguimos entre el carácter real o imaginario del cilindro elíptico y de los planos que se cortan.

| | **rango(A) = 4** | |
|---|---|---|
| **Signatura** $T$ | $\|A\| > 0$ | $\|A\| < 0$ |
| $+,+,+$ | Elipsoide imaginario | Elipsoide real |
| $+,+,-$ | Hiperboloide de 1 hoja | Hiperboloide de 2 hojas |
| $+,+,0$ | Paraboloide elíptico | |
| $+,-,0$ | Paraboloide hiperbólico | |
| **Signatura** $T$ | **rango(A) = 3** | |
| $+,+,+$ | Cono imaginario | |
| $+,+,-$ | Cono real | |
| $+,+,0$ | Cilindro elíptico real o imaginario | |
| $+,-,0$ | Cilindro hiperbólico | |
| $+,0,0$ | Cilindro parabólico | |
| **Signatura** $T$ | **rango(A) = 2** | |
| $+,+,0$ | Planos imaginarios que se cortan | |
| $+,-,0$ | Planos reales que se cortan | |
| $+,0,0$ | Planos paralelos reales o imaginarios | |
| **Signatura** $T$ | **rango(A) = 1** | |
| $+,0,0$ | Plano doble | |

Además **cuando la cuádrica es no degenerada** podemos calcular la ecuación reducida, a partir de los autovalores $\lambda_1 > 0, \lambda_2$ y $\lambda_3$ de $T$ y de $|A|$:

1. Si $|T| \neq 0$, entonces queda:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + c = 0, \quad \text{con} \quad c = \frac{|A|}{|T|}.$$

2. Si $|T| = 0$, entonces queda:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 - 2cz'' = 0, \quad \text{con} \quad c = \sqrt{\frac{|A|}{-\lambda_1\lambda_2}}.$$

Podemos incluso dar la referencia en que se obtienen estas formas reducidas:

1. En el caso de $|T| \neq 0$ (de tipo elíptico o hiperbólico), la base de la nueva referencia está formada por los autovectores de $T$ ortonormalizados y el nuevo

origen situado en el centro de la cuádrica. Simplemente hay que tener cuidado de ordenar los autovectores de manera coherente a como se ordenan los autovalores.

2. En el caso de $|T| = 0$ (de tipo parabólico), la base de la nueva referencia está formada por los autovectores de $T$ ortonormalizados y el nuevo origen en el vértice. Ahora además de ordenar correctamente los autovectores, hay que comprobar si se ha escogido correctamente el signo del autovector asociado al autovalor nulo.

### 5.4 Obtención de los planos que forman las cuádricas de rango 1 ó 2.

Una vez clasificada la cuádrica, si esta es de rango 1 o 2, la forma más cómoda de calcular los planos que la forman es la siguiente:

1. Si se trata de planos paralelos (reales o imaginarios) o de un plano doble, se calcula el plano de centros. Si es un plano doble hemos terminado. En otro caso intersecamos la cuádrica con una recta cualquiera (lo más sencilla posible) y obtenemos dos puntos (reales o imaginarios). Los planos buscados son los paralelos al plano de centros pasando por dichos puntos.
2. Si se trata de planos que se cortan (reales o imaginarios), se calcula la recta de centros. Luego intersecamos la cuádrica con una recta cualquiera (lo más sencilla posible) que no interseque a la recta de centros y obtenemos dos puntos (reales o imaginarios). Los planos buscadas son los generados por la recta de centros y dichos puntos.

## 6 Puntos, rectas y planos notables asociados a una cuádrica.

En lo que sigue trabajaremos sobre una cuádrica cuya matriz asociada respecto a un determinado sistema de referencia es $A$.

### 6.1 Puntos singulares.

**Definición 6.1** *Un* **punto singular** *de una superficie es un punto de no diferenciabilidad de la misma.*

*Equivalentemente, un* **punto singular** *de una superficie es un punto con más de un plano de tangencia.*

*Equivalentemente, si toda recta pasando por un punto $P$ de una superficie la corta con multiplicidad $> 1$ en $P$, entonces $P$ es un* **punto singular.**

Veamos cuando aparecen puntos singulares en una cuádrica. Sea $P = (p)$ un punto de la misma. Tomamos una recta cualquiera pasando por $P$. Para ello elegimos un punto cualquiera $Q = (q)$ que no esté en la cuádrica y lo unimos con $P$. Su ecuación en coordenadas homogéneas es:

$$(x) = \alpha(p) + \beta(q).$$

Si intersecamos con la cuádrica, nos queda la ecuación:

$$2\alpha\beta(p)A(q) + \beta^2(q)A(q) = 0.$$

El punto $P$ es singular si la única solución de esta ecuación es $\beta = 0$ con multiplicidad 2, para cualquier punto $(q)$, es decir si:

$$(p)A(q) = 0 \text{ para cualquier } (q).$$

Esto se cumple cuando:

$$(p)A = \bar{0}.$$

Concluimos lo siguiente:

**Teorema 6.2** *Una cuádrica dada por una matriz $A$ tiene puntos singulares (propios o impropios) si y sólo si $det(A) = 0$. En ese caso la cuádrica se dice* **degenerada** *y los puntos singulares (afines) son los que verifican la ecuación:*

$$\boxed{\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} A = \bar{0}}$$

### 6.2 Centro.

**Definición 6.3** *El* **centro de una cuádrica** *es un punto afín centro de simetría de la misma.*

Llamemos $(a, b, c, 1)$ a las coordenadas homogéneas del centro. Veamos como calcularlo:

- Consideramos la ecuación de una recta que pasa por el centro y tiene un determinado vector director $(p, q, r)$:

$$(x, y, z, 1) = (a, b, c, 1) + \lambda(p, q, r, 0).$$

- Sustituimos en la ecuación de la cuádrica y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} p & q & r & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \lambda^2 + 2 \begin{pmatrix} a & b & c & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} a & b & c & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

- Para que $(a,b,c,1)$ sea centro las soluciones de $\lambda$ han de ser valores opuestos para cualquier dirección $(p,q,r)\neq(0,0,0)$. Esto significa que:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ para cualquier } (p,q,r)\neq(0,0,0)$$

- Deducimos que la **ecuación del centro** es:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b & c & 1 \end{pmatrix} A = (0,0,0,h)}$$

## 6.3 Direcciones asintóticas.

**Definición 6.4** *Las* **direcciones asintóticas** *son los puntos del infinito que pertenecen a la cuádrica.*

De la definición es claro que las direcciones asintóticas $(p,q,r,0)$ se obtienen resolviendo la ecuación:

$$\boxed{\begin{pmatrix} p & q & r & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad (p,q,r)\neq(0,0,0)}$$

## 6.4 Planos diametrales y diámetros.

**Definición 6.5** *Un* **plano diametral** *de una cuádrica es el plano polar (afín) de un punto del infinito. Al punto del infinito se le llama* **dirección conjugada con el plano diametral**.

*Un* **diámetro** *es una recta intersección de dos planos diametrales.*

**Observación 6.6** *Cualquier diámetro pasa por el centro (o centros) de la cuádrica.*

**Prueba:** Supongamos que $A$ es la matriz de la cuádrica y $(a,b,c,1)$ es un centro. Un plano diametral tiene por ecuación:

$$\begin{pmatrix} u^1 & u^2 & u^3 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

donde $(u^1,u^2,u^3)$ es la dirección conjugada. Por otra parte vimos que si $(a,b,c,1)$ es el centro verifica:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}.$$

Deducimos que:

$$\begin{pmatrix} u^1 & u^2 & u^3 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

y por tanto el plano diametral contiene al centro. Como los diámetros son intersección de planos diametrales, entonces también contienen al centro. ■

## 6.5 Planos principales, ejes y vértices.

**Definición 6.7** *Se llaman* **planos principales** *a los planos diametrales perpendiculares a su dirección conjugada.*

*Se llaman* **ejes** *a la intersección de los planos principales.*

*Se llaman* **vértices** *a la intersección de los ejes con la cuádrica.*

**Observación 6.8** *Las direcciones conjugadas de los planos principales son los autovectores de $T$ asociados a autovalores no nulos.*

**Prueba:** Sea $(u^1,u^2,u^3,0)$ un punto del infinito y

$$\begin{pmatrix} u^1 & u^2 & u^3 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

la ecuación del correspondiente plano diametral. Operando, obtenemos que el vector normal del plano es:

$$\begin{pmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \end{pmatrix} T.$$

Como esta recta debe de ser perpendicular a la dirección conjugada, este vector normal ha de ser paralelo a $(u^1,u^2,u^3)$ y por tanto:

$$\begin{pmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \end{pmatrix} T = \lambda \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \end{pmatrix}.$$

Deducimos que $(u^1,u^2,u^3)$ es un autovector de $T$, asociado al autovalor $\lambda$. Finalmente tenemos en cuenta que si $\lambda=0$, entonces el plano anterior sería el plano del infinito, y por tanto no es un eje. ■

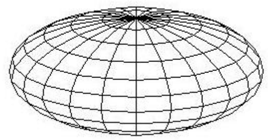
# 7 Descripción de las cuádricas reales de rango 3 y 4.

## 7.1 Cuádricas reales de rango 4.

### 7.1.1 Elipsoide real.

La ecuación reducida de una elipsoide es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad a,b,c\neq 0}$$



Sus puntos, rectas y planos notables son:

1. **Centro:** $(0,0,0)$.
2. **Direcciones asintóticas:** No tiene.
3. **Planos diametrales y diámetros:** Cualquier plano y cualquier recta pasando por el centro.
4. **Planos principales, ejes y vértices:**

   (a) $a\neq b\neq c$:

| Planos princip. | Ejes | Vértices |
|---|---|---|
| $x=0;$ | $y=0;\quad z=0;$ | $(-a,0,0),(a,0,0)$ |
| $y=0;$ | $x=0;\quad z=0;$ | $(0,b,0),(0,-b,0)$ |
| $z=0;$ | $x=0;\quad y=0;$ | $(0,0,c),(0,0,-c)$ |

   (b) $a=b$ y $b\neq c$ (**Elipsoide de revolución**):

| Planos princip. | Ejes | Vértices |
|---|---|---|
| $\alpha x+\beta y=0;$ | $\alpha x+\beta y=0;\quad z=0;$ | $(p,q,0)$ $p^2+q^2=a^2$ |
| $z=0;$ | $x=0;\quad y=0;$ (OZ $\equiv$ Eje de revolución) | $(0,0,c),(0,0,-c)$ |

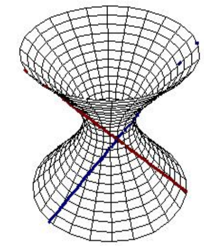
   (c) $a=b=c$ (**Esfera**):

   Todos los planos y rectas pasando por el centro son planos principales y ejes. Por tanto todos los puntos de la esfera son vértices. Cualquier recta pasando por el centro es un eje de revolución.

### 7.1.2 Hiperboloide de una hoja.

La ecuación reducida de un hiperboloide de una hoja es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad a,b,c\neq 0}$$



Sus puntos, rectas y planos notables son:

1. **Centro:** $(0,0,0)$.
2. **Direcciones asintóticas:** El cono formado por todos los vectores $(x,y,z)$ que verifican la ecuación:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$
3. **Planos diametrales y diámetros:** Cualquier plano y cualquier recta pasando por el centro.
4. **Planos principales, ejes y vértices:**

   (a) $a\neq b$:

| Planos princip. | Ejes | Vértices |
|---|---|---|
| $x=0;$ | $y=0;\quad z=0;$ | $(-a,0,0),(a,0,0)$ |
| $y=0;$ | $x=0;\quad z=0;$ | $(0,b,0),(0,-b,0)$ |
| $z=0;$ | $x=0;\quad y=0;$ | |

   (b) $a=b$ (**Hiperboloide de una hoja de revolución**):

| Planos princip. | Ejes | Vértices |
|---|---|---|
| $\alpha x+\beta y=0;$ | $\alpha x+\beta y=0;\quad z=0;$ | $(p,q,0)$ $p^2+q^2=a^2$ |
| $z=0;$ | $x=0;\quad y=0;$ (OZ $\equiv$ Eje de revolución) | |

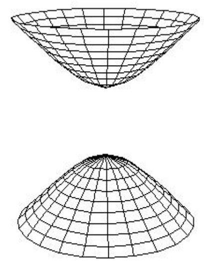
El hiperboloide de una hoja es una superficie reglada. Las dos familias de rectas que tiene la cuádrica son:

$$\left.\begin{array}{rcl} \left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right) & = & \alpha\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ \alpha\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) & = & \left(1-\frac{y}{b}\right) \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right) & = & \beta\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) & = & \left(1+\frac{y}{b}\right) \end{array}\right. .$$

### 7.1.3 Hiperboloide de dos hojas.

La ecuación reducida de un hiperboloide de dos hojas es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0, \qquad a, b, c \neq 0}$$



Sus puntos, rectas y planos notables son:

1. **Centro:** $(0, 0, 0)$.
2. **Direcciones asintóticas:** El cono formado por todos los vectores $(x, y, z)$ que verifican la ecuación:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$
3. **Planos diametrales y diámetros:** Cualquier plano y cualquier recta pasando por el centro.
4. **Planos principales, ejes y vértices:**

   (a) $a \neq b$:

| Planos princip. | Ejes | Vértices |
|---|---|---|
| $x = 0;$ | $y = 0; \quad z = 0;$ | |
| $y = 0;$ | $x = 0; \quad z = 0;$ | |
| $z = 0;$ | $x = 0; \quad y = 0;$ | $(0, 0, -c), (0, 0, c)$ |

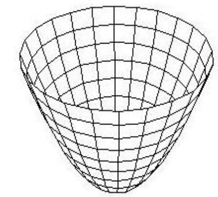
   (b) $a = b$ (**Hiperboloide de dos hojas de revolución**):

| Planos princip. | Ejes | Vértices |
|---|---|---|
| $\alpha x + \beta y = 0;$ | $\alpha x + \beta y = 0; \quad z = 0;$ | |
| $z = 0;$ | $x = 0; \quad y = 0;$ (OZ $\equiv$ Eje de revolución) | $(0, 0, -c), (0, 0, c)$ |

### 7.1.4 Paraboloide elíptico.

La ecuación reducida de un paraboloide elíptico es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2cz = 0, \qquad a, b \neq 0, c > 0}$$



Sus puntos, rectas y planos notables son:

1. **Centro:** No tiene (podría considerarse como centro impropio el $(0, 0, 1, 0)$).
2. **Direcciones asintóticas:** $(0, 0, 1)$.
3. **Planos diametrales y diámetros:** Planos y rectas paralelos al eje OZ.
4. **Planos principales, ejes y vértices:**

   (a) $a \neq b$:

| Planos princip. | Ejes | Vértices |
|---|---|---|
| $x = 0;$ $y = 0;$ | $x = 0; \quad y = 0;$ | $(0, 0, 0)$ |

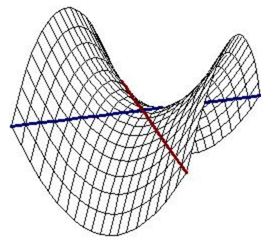
   (b) $a = b$ (**Paraboloide elíptico de revolución**):

| Planos princip. | Ejes | Vértices |
|---|---|---|
| $\alpha x + \beta y = 0;$ | $x = 0; \quad y = 0;$ (OZ $\equiv$ Eje de revolución) | $(0, 0, 0)$ |

### 7.1.5 Paraboloide hiperbólico.

La ecuación reducida de un paraboloide hiperbólico es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2cz = 0, \qquad a, b \neq 0, c > 0}$$



Sus puntos, rectas y planos notables son:

1. **Centro:** No tiene (podría considerarse como centro impropio el $(0, 0, 1, 0)$).
2. **Direcciones asintóticas:** $(a, b, z)$ y $(a, -b, z)$, para cualquier $z \in \mathbb{R}$.
3. **Planos diametrales y diámetros:** Planos y rectas paralelos al eje OZ.
4. **Planos principales, ejes y vértices:**

| **Planos princip.** | **Ejes** | **Vértices** |
|---|---|---|
| $x = 0;$<br>$y = 0;$ | $x = 0; \quad y = 0;$ | $(0, 0, 0)$ |

El paraboloide hiperbólico es una superficie reglada. Las dos familias de rectas que tiene la cuádrica son:

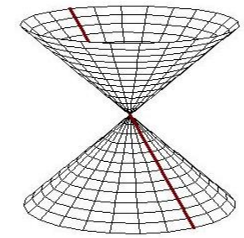
$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) & = & 2cz \\ \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) & = & \alpha \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) & = & \beta \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) & = & 2cz \end{array}\right. .$$

## 7.2 Cuádricas reales de rango 3.

### 7.2.1 Cono real.

La ecuación reducida de un cono real es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad a, b, c \neq 0}$$



Sus puntos, rectas y planos notables son:

1. **Puntos singulares:** $(0, 0, 0)$.
2. **Centro:** $(0, 0, 0)$.
3. **Direcciones asintóticas:** Vectores $(x, y, z)$ que verifican la ecuación del cono.
4. **Planos diametrales y diámetros:** Planos y rectas pasando por el centro.
5. **Planos principales, ejes y vértices:**

   (a) $a \neq b$:

| **Planos princip.** | **Ejes** | **Vértices** |
|---|---|---|
| $x = 0;$ | $y = 0; \quad z = 0;$ | $(0, 0, 0)$ |
| $y = 0;$ | $x = 0; \quad z = 0;$ | |
| $z = 0;$ | $x = 0; \quad y = 0;$ | |

   (b) $a = b$ (**Cono real de revolución**):

| **Planos princip.** | **Ejes** | **Vértices** |
|---|---|---|
| $\alpha x + \beta y = 0;$ | $\alpha x + \beta y = 0; \quad z = 0;$ | $(0, 0, 0)$ |
| $z = 0;$ | $x = 0; \quad y = 0;$<br>(OZ $\equiv$ Eje de revolución) | |

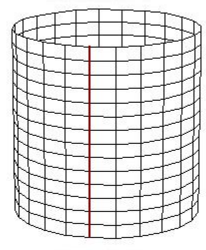
El cono es una superficie reglada. Las generatrices del cono vienen dadas por las ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} \left(\frac{z}{c} + \frac{x}{a}\right) & = & \alpha\frac{y}{b} \\ \alpha\left(\frac{z}{c} - \frac{x}{a}\right) & = & \frac{y}{b} \end{array} .$$

### 7.2.2 Cilindro elíptico real.

La ecuación reducida de un cilindro elíptico real es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a,b\neq 0}$$



Sus puntos, rectas y planos notables son:

1. **Puntos singulares:** Punto (impropio) $(0,0,1,0)$.
2. **Centro:** El eje OZ es una recta de centros ($x=0$; $y=0$).
3. **Direcciones asintóticas:** $(0,0,1)$.
4. **Planos diametrales y diámetros:** Planos conteniendo al eje OZ y como único diámetro el eje OZ.
5. **Planos principales, ejes y vértices:**

(a) $a\neq b$:

| Planos princip. | Ejes | Vértices |
|---|---|---|
| $x=0$; $y=0$; | $x=0$; $y=0$; | NO |

(b) $a=b$ (**Cilindro real de revolución**):

| Planos princip. | Ejes | Vértices |
|---|---|---|
| $\alpha x+\beta y=0$; | $x=0$; $y=0$; (OZ $\equiv$ Eje de revolución) | NO |

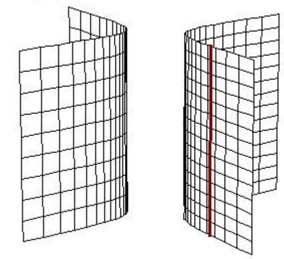
El cilindro elíptico obviamente es una superficie reglada. La famila de rectas viene dada por las ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} \left(\frac{x}{a}+1\right) & = & \alpha\frac{y}{b} \\ \alpha\left(\frac{x}{a}-1\right) & = & \frac{y}{b} \end{array} .$$

### 7.2.3 Cilindro hiperbólico.

La ecuación reducida de un cilindro hiperbólico es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a,b\neq 0}$$



Sus puntos, rectas y planos notables son:

1. **Puntos singulares:** Punto (impropio) $(0,0,1,0)$.
2. **Centro:** El eje OZ es una recta de centros ($x=0$; $y=0$).
3. **Direcciones asintóticas:** $(0,0,1)$, $(a,b,z)$ y $(a,-b,z)$, para cualquier $z\in\mathbb{R}$.
4. **Planos diametrales y diámetros:** Planos conteniendo al eje OZ y como único diámetro el eje OZ.
5. **Planos principales, ejes y vértices:**

| Planos princip. | Ejes | Vértices |
|---|---|---|
| $x=0$; $y=0$; | $x=0$; $y=0$; | NO |

El cilindro hiperbólico obviamente es una superficie reglada. La famila de rectas viene dada por las ecuaciones:

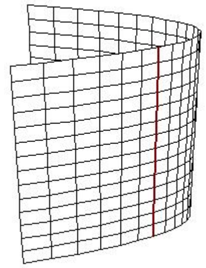
$$\begin{array}{rcl} \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) & = & \alpha \\ \alpha\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) & = & 1 \end{array}$$

con $\alpha\neq 0$ y donde el signo de $\alpha$ indica en que rama de la superficie está la recta.

### 7.2.4 Cilindro parabólico.

La ecuación reducida de un cilindro parabólico es:

$\boxed{x^2 - 2py = 0, \qquad p \neq 0}$



Sus puntos, rectas y planos notables son:

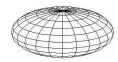
1. **Puntos singulares:** Punto (impropio) $(0, 0, 1, 0)$.
2. **Centro:** No tiene centro afín, pero si una recta de centros impropios ($x = 0$; $t = 0$).
3. **Direcciones asintóticas:** $(0, y, z)$, para cualesquiera $y, z \in \mathbb{R}$. En definitiva,(cualquier dirección en el plano $x = 0$.
4. **Planos diametrales y diámetros:** Planos paralelos al plano $x = 0$. No tiene diámetros.
5. **Planos principales, ejes y vértices:**

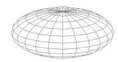
| **Planos princip.** | **Ejes** | **Vértices** |
|---|---|---|
| $x = 0$ | NO | NO |

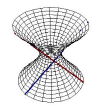
El cilindro elíptico obviamente es una superficie reglada. La famila de rectas viene dada por las ecuaciones:

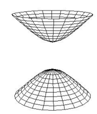
$$\begin{array}{rcl} \alpha x & = & 2py \\ x & = & \alpha \end{array} .$$

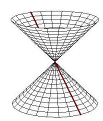
# 8 Formas reducidas de las cuádricas.

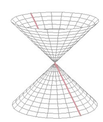
1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ Elipsoide 

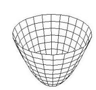
2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$ Elipsoide imaginario 

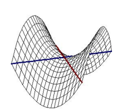
3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ Hiperboloide de una hoja 

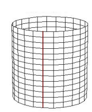
4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$ Hiperboloide de dos hojas 

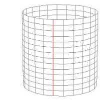
5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ Cono 

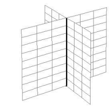
6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ Cono imaginario 

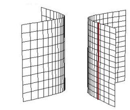
7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2cz=0$ Paraboloide elíptico 

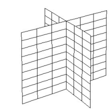
8. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2cz=0$ Paraboloide hiperbólico 

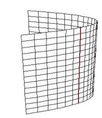
9. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ Cilindro elíptico 

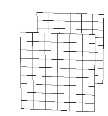
10. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ Cilindro elíptico imaginario 

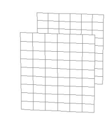
11. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ Planos imaginarios que se cortan 

12. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ Cilindro hiperbólico 

13. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ Par de planos que se cortan 

14. $y^2-2px=0$ Cilindro parabólico 

15. $x^2-a^2=0$ Par de planos paralelos 

16. $x^2+a^2=0$ Par de planos paralelos imaginarios 

17. $x^2=0$ Plano doble