Seminario 2 (corrección)

$\boxed{C2}$

f y g definidos en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ t.q. $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{y\to 0} g(x) = +\infty$.

Si $L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (f(x) - g(y))$. ¿Cuánto vale L?

Por def de límite:

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta_x : |y| < \delta_x \Rightarrow g(y) \geq 2f(x) = \varepsilon$

(sin valores absolutos porque tiende a infinito).

Definimos: $A = \{(x,y) : g(y) \geq 2f(x)\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\in A \\ (x,y)\to(0,0)}} (f(x) - g(y)) \leq \lim_{\substack{(x,y)\in A \\ (x,y)\to(0,0)}} \lim_{x\to 0} -f(x) = -\infty$$

Podemos hacer el proceso análogo para obtener:

$$\lim_{\substack{(x,y)\in B \\ (x,y)\to(0,0)}} (f(x) - g(y)) \geq \lim_{\substack{(x,y)\in A \\ (x,y)\to(0,0)}} \lim_{x\to 0} f(x) = \infty$$

$\Rightarrow$ El límite es distinto en dos subconjuntos distintos de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow \boxed{\nexists L}$

Observamos que $(0,0) \in B'$.

$B((0,0),\delta)$

Tomando:

$y = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$

$x = \min\left\{\frac{\delta}{\sqrt{2}}, \delta_y\right\}$

$\Rightarrow (x,y) \in B((0,0),\delta)\setminus\{(0,0)\} \Rightarrow$

$(0,0)$ es punto de acumulación y el proceso es válido. Análogo para A y B.

Observamos:

$f(x) - g(y)$ NUNCA tiene límite en este tipo de casos.

$f(x) - g(x)$ Será un tipo de INDETERMINACIÓN.

$\boxed{C3}$

a)

Contraejemplo para ver que no es abierto.

$$\begin{cases} f(x) = \text{sen}(x) \\ g(x) = \cos(x) \end{cases}$$

$A = \{x \in \mathbb{R}^m : f(x) = g(x)\} = \{\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4, \dots\}$

$\text{int}(A) = \emptyset$

b)

Contraejemplo para ver que no es cerrado. ¡No hay! Veamos que es cerrado.

Tomamos $h(x) = f(x) - g(x)$ ($h(x)$ es continua)

$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}$. $A \subset \overline{A}$. Tomamos $x \in \overline{A}$ y $x \notin A$

$h(x) = \varepsilon \neq 0$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta : \|x-y\| < \delta \Rightarrow \|h(x) - h(y)\| \le |\varepsilon|/2$

Tomamos:

$B(x,\delta)$. Como $x \in \bar{A} \Rightarrow B(x,\delta) \cap A \neq \emptyset$. Tomamos $z \neq x$ con $z \in B(x,\delta) \cap A$ $(x \notin A \Rightarrow z \neq x)$.

$\Rightarrow \|x - z\| < \delta \Rightarrow \|h(x) - h(z)\| \le |\varepsilon|/2$ y como $z \in A \Rightarrow h(z) = 0$

$\Rightarrow h(x) \le |\varepsilon|/2$ Contradicción $\Longrightarrow$ ha de ser cerrado y $\bar{A} = A$ □

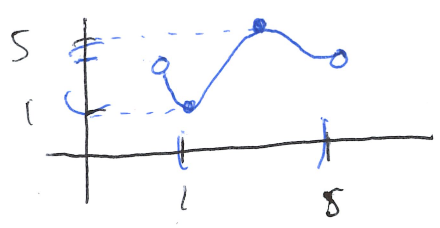
Realmente, como f es continua, f^{-1} de un cerrado es cerrado y

$$A = \{x : h(x) = 0\} = h^{-1}(\underbrace{\{0\}}_{\text{cerrado}}) \xrightarrow{\text{continuidad } f} A \text{ cerrado } \square$$

$\boxed{C4}$

$f(B) \subset f(\bar{B})$ compacto $\Rightarrow f(B)$ acotado pero no es acotado. a) No puede ser.

b) Podría ser. Ejemplo:



c) No es conexo $\Rightarrow f$ no sería continua. No puede ser. (imagen de un conexo sí es conexo).

$\boxed{C5}$

$$f(x,y) = \frac{(xy)^k}{y - x^2}$$

descartamos

a) y b)

$\uparrow$

$\sin(v) \neq 0$

$2k-1 \geq 1$

$\Rightarrow k \geq 1$ //

Cambio a polares:

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ 0 \leq v < 2\pi}} \frac{u^{2k} \cdot \cos^k(v) \cdot \operatorname{sen}^k(v)}{u\,(\sin(v) - u \cdot \cos^2(v))} = \lim_{\substack{u \to 0 \\ 0 \leq v < 2\pi}} \frac{u^{2k-1} \cdot \cos^k(v) \cdot \operatorname{sen}^k(v)}{[\sin(v) - \underbrace{\cancel{u \cdot \cos^2(v)}}_{0}]} \overset{\uparrow}{=} 0$$

$\rightarrow$ Hay que manejarlo de otra forma

Nos acercamos por $y = x^2 + x^{k+2}$

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ y = x^2 + x^{k+2}}} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{x^k \cdot (x^2 + x^{k+2})^k}{x^{k+2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{2k}(1 + x^k)^k}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} x^{2k-2}(1+x^k)^k \overset{\overset{k=1}{\uparrow}}{=} 1 \neq 0$$

$\rightsquigarrow$ Falta por acabar