Problemas 1 (solución)

$\boxed{1.4}$

e)

$a, b, c \in \mathbb{R}^3$ están en un plano que pasa por el origen. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c = 0$

($\Rightarrow$)

Plano que pasa por el origen $:=$ $Ax + By + Cz = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a \in P \Rightarrow A \cdot a_1 + B \cdot a_2 + C \cdot a_3 = 0 \\ b \in P \Rightarrow A \cdot b_1 + B \cdot b_2 + C \cdot b_3 = 0 \\ c \in P \Rightarrow A \cdot c_1 + B \cdot c_2 + C \cdot c_3 = 0 \end{array}\right\} \text{Por aquí no llegamos.}$$

Si son coplanarios:

$\exists \gamma, \mu \in \mathbb{R} : c = \gamma \cdot a + \mu \cdot b \Rightarrow \gamma \cdot a + \mu \cdot b - c = 0$ //

($\Leftarrow$)

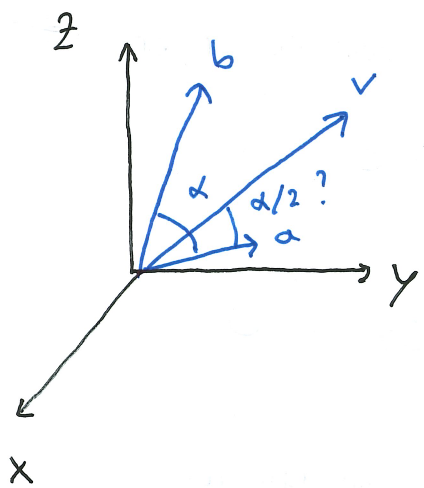
$$\left.\begin{array}{l} \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1 = 0 \\ \alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2 + \gamma \cdot c_2 = 0 \\ \alpha \cdot a_3 + \beta \cdot b_3 + \gamma \cdot c_3 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Tomamos } \gamma \text{ no nulo} \Rightarrow \\ \Rightarrow c = \left(-\frac{1}{\gamma} \cdot \alpha\right) a + \left(-\frac{1}{\gamma} \cdot \beta\right) \cdot b \end{array}$$

Si tomamos $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a - 0$ y así para los tres puntos, entonces el plano ha de pasar por el origen.

Lo que realmente quiere decir es que la combinación lineal de tres vectores coplanarios igualada a 0 no tiene porqué tener todos los coeficientes nulos (hay más soluciones a parte de la trivial).

m)

$V = \|a\| \cdot b + \|b\| \cdot a$ biseca ángulo entre a y b



$$\cos(\alpha) = \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$$

A probar que si

$$\cos(\beta) = \frac{\langle a, V\rangle}{\|a\| \cdot \|V\|} \Rightarrow \beta = \alpha/2$$

$$\cos(\beta) = \frac{\langle a, V\rangle}{\|a\| \cdot \|V\|} = \frac{\langle \|a\| b + \|b\| a, a\rangle}{\|V\| \cdot \|a\|} =$$

$$= \frac{\cancel{\|a\|} \langle a, b\rangle + \|b\| \cdot \|a\|^{\cancel{2}}}{\cancel{\|a\|} \cdot \| \|a\| b + \|b\| \cdot a \|} = \frac{(\cos(\alpha) \cdot \|b\| \cdot \|a\|) + \|b\| \cdot \|a\|}{\| \|a\| b + \|b\| \cdot a \|} =$$

$$= \frac{\|a\| \cdot \|b\| \cdot (\cos(\alpha) + 1)}{\| \|a\| b + \|b\| \cdot a \|} \quad (1)$$

Calculemos $\|V\|^2$

$$\|V\|^2 = \langle V, V\rangle = \|a\|^2 \langle b, b\rangle + \|a\| \cdot \|b\| \cdot \langle b, a\rangle + \|b\| \|a\| \cdot \langle a, b\rangle$$
$$+ \|b\|^2 \cdot \langle a, a\rangle = \text{(siguiente cara)}$$

$$\|v\|^2 = 2\|a\|^2\|b\|^2 + 2\|a\|\cdot\|b\|\cdot\|a\|\cdot\|b\|\cdot\cos(\alpha) =$$
$$= 2\cdot\|a\|^2\cdot\|b\|^2\cdot(1+\cos(\alpha))$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{\cancel{\|a\|}\cdot\cancel{\|b\|}\cdot(\cos(\alpha)+1)}{\sqrt{2\cdot\cancel{\|a\|^2}\cdot\cancel{\|b\|^2}\cdot(1+\cos(\alpha))}} = \sqrt{\frac{\cos(\alpha)+1}{2}} = \cos(\alpha/2)$$

$$\Rightarrow \beta = \alpha/2 \quad \square$$

Propuesto:

¿ $\langle a,b\rangle = \|a\|\cdot\|b\|$?

Si $a = \lambda\cdot b \Rightarrow$

$\langle a,b\rangle = \lambda\cdot\langle b,b\rangle = \lambda\cdot\|b\|^2$

y

$\|a\|\cdot\|b\| = |\lambda|\cdot\|b\|^2$

$\Rightarrow$ Es cierto si $\lambda > 0$. Por tanto hemos probado que:

$a = \lambda\cdot b \Rightarrow \langle a,b\rangle = \|a\|\cdot\|b\|$.

¿Se da el recíproco? (Ver propuesto 1 en hoja problemas).

Propuesto: (Ver propuesto 2 y propuesto 1)

$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ ¿Igualdad? ¿Menor estricto?

Si $a = \lambda\cdot b$. Entonces:

$\|a\| = |\lambda|\cdot\|b\| \Rightarrow \|a\| + \|b\| = (1+|\lambda|)\cdot\|b\|$

y

$\|a+b\| = |1+\lambda|\cdot\|b\|$ (Si no es, ha de darse el menor estricto)

¿Son iguales? Sí, si $\lambda > 0$ ($a = \lambda\cdot b$, $\lambda > 0 \Rightarrow$ Se da igualdad)

Propuesto 1 (otra forma):

$|\langle a, b \rangle| = \|a\| \cdot \|b\|$ (hip.)

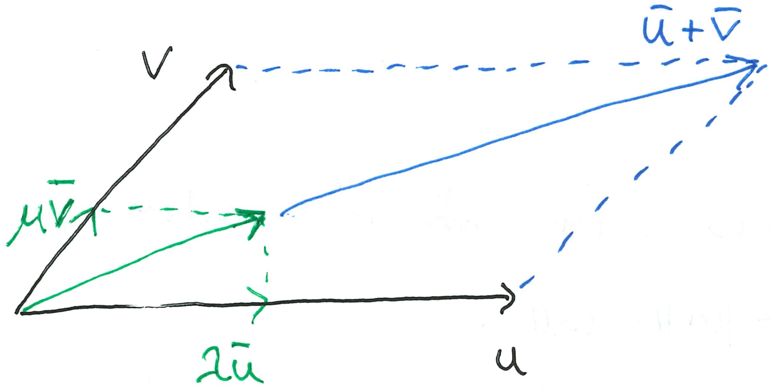
$|\langle a, b \rangle| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot |\cos(\alpha)| \Rightarrow |\cos(\alpha)| = 1 \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$

Son paralelos y en $\mathbb{R}^n$ eso significa $a = \lambda b$. En nuestro caso:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \Rightarrow a = \dfrac{\|a\|}{\|b\|} b \\ \alpha = \pi \Rightarrow a = -\dfrac{\|a\|}{\|b\|} b \end{cases} \quad \square$$

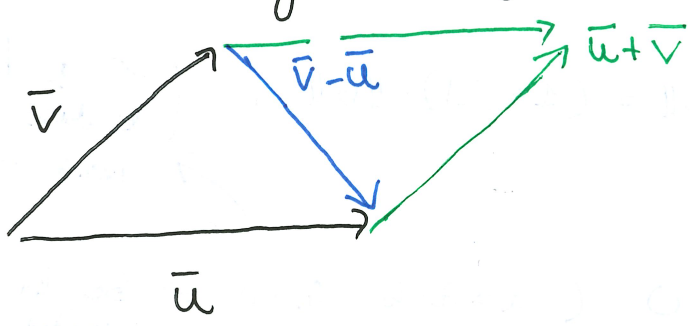
1.5

a) Puntos del interior del paralelogramo formado por u y v



Es: $\boxed{\{\lambda\bar{v} + \mu\bar{u} : 0 < \lambda < 1, \ 0 < \mu < 1\}}$

b) Interior del siguiente triángulo: (Sin acabar)



Es un subconjunto del paralelogramo. Veamos quiénes

$\boxed{1.9}$

Por des. valor absoluto en $\mathbb{R}$

d) $d(x,y) = |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)|$

(iii) Des. triangular:

$$d(x,y) = |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)| = |\underbrace{\operatorname{arctg}(x) - \overbrace{\operatorname{arctg}(z)}^{0}}_{a\in\mathbb{R}} \overbrace{+ \underbrace{\operatorname{arctg}(z)}_{} - \operatorname{arctg}(y)}_{b\in\mathbb{R}}| \leq$$

$$\leq |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(z)| + |\operatorname{arctg}(z) - \operatorname{arctg}(y)| = d(x,z) + d(z,y) \quad \square$$

(Resto triviales) (Como es inyectiva $\Rightarrow \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}(y) \Rightarrow x = y$).

e) $d(x,y) = |x^3 - y^3|$

La des. triangular es análoga a d) y el resto son triviales.

f) $d(x,y) = |e^x - e^y|$

i) $d(x,y) > 0 \iff x \neq y$

$\Leftarrow$)

$x \neq y \Rightarrow e^x - e^y \neq 0 \Rightarrow d(x,y) > 0$

$\Rightarrow$)

$d(x,y) > 0 \Rightarrow |e^x - e^y| > 0 \Rightarrow e^x - e^y \neq 0 \Rightarrow e^x \neq e^y$

y como $\ln(x)$ es inyectiva $\Rightarrow x \neq y$.

ii) $d(x,y) = 0$

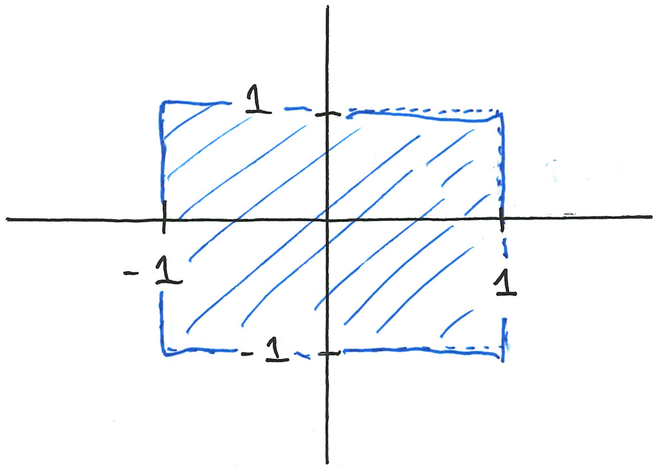
análogo a i)

iii)

análogo a d)

1.13

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$

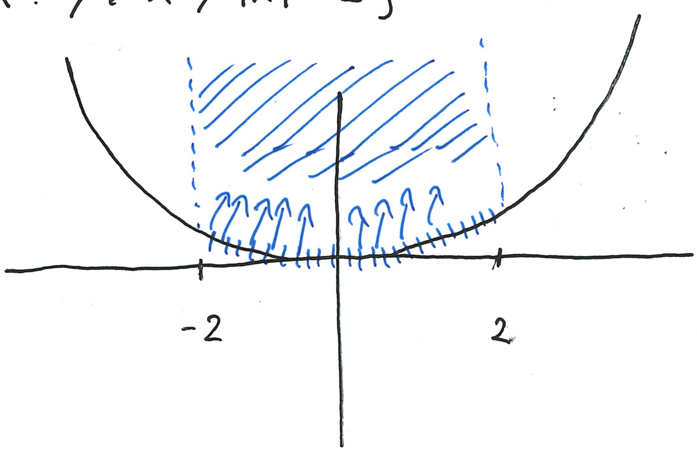


Observamos:

$\overline{A} = A \Rightarrow$ cerrado

$\text{int}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1,\ |y| < 1\} \neq A \Rightarrow$ no abierto.

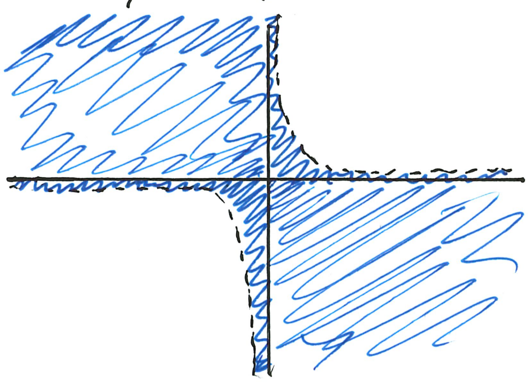
b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2,\ |x| < 2\}$



$\text{int}(A) = A \Rightarrow$ abierto

$\overline{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2,\ |x| \leq 2\} \neq B \Rightarrow$ no cerrado.

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}$



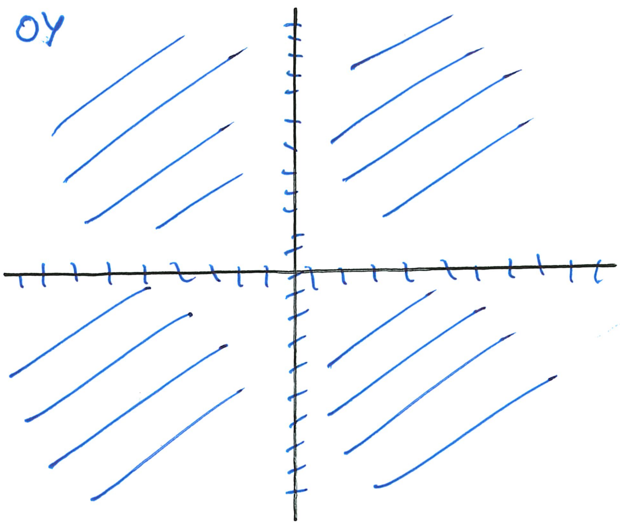
$\text{int}(A) = A \Rightarrow$ abierto

$\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\} \neq A$

$\Rightarrow$ no cerrado

d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ y \neq 0\}$

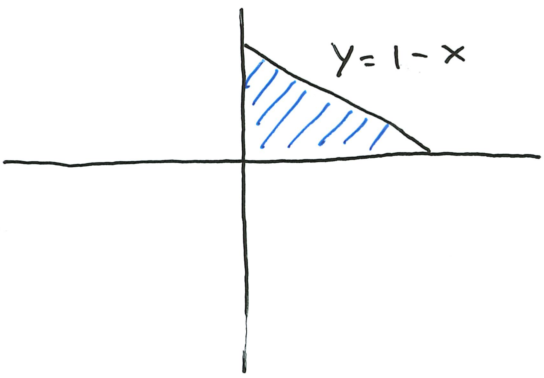
$D = \mathbb{R}^2 - OX, OY$



$\overline{D} = \mathbb{R}^2 \neq D \Rightarrow$ no es cerrado

$\text{int}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > 0 \wedge |y| > 0\} = D \Rightarrow$ es abierto

e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y < 1\}$



$\text{int}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ x+y < 1\} \neq D$

$\Rightarrow$ no es abierto.

$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\} \neq D$

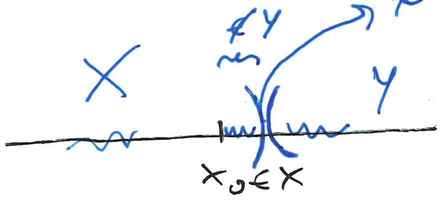
$\Rightarrow$ no es cerrado.

Proposición:

1.19

Apartado b)

La idea es: $\notin X, \notin Y \Rightarrow$ Su unión no da A.



El problema está en el intervalo $[0,1]$ que es conexo en $\mathbb{R}$ y por tanto lo es A.

$int(X) = X \Rightarrow$

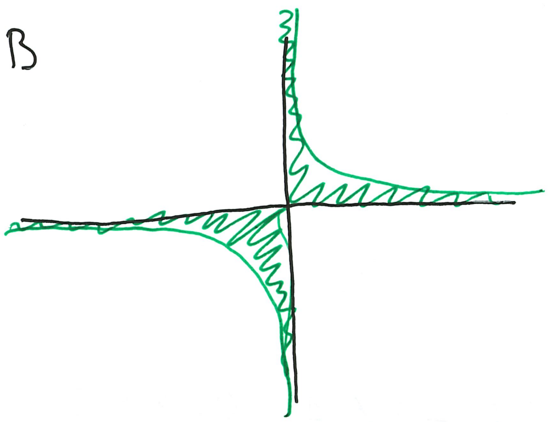
1.20

$M = A \cup B$ con:

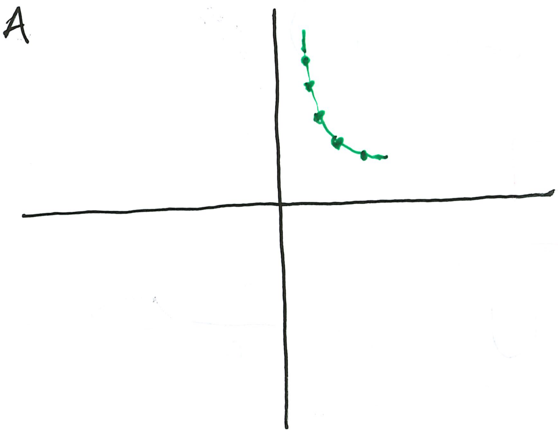
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1\}$

$A = \left\{\left(\frac{n+1}{n}, \frac{2n-1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}\right\}$

B



A



$A = \{(2,1), (3/2, 3/2), (4/3, 5/3), \ldots\}$

Veamos si $A \subset B$:

$$\frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n-1}{n} = \frac{2n^2 - n + 2n - 1}{n} = \frac{2n^2 + n - 1}{n} \overset{¿?}{\geq} 1$$

$2n^2 + \cancel{n} - 1 \geq \cancel{n} \rightarrow 2n^2 \geq 1$ sí, $\forall n \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall (x,y) \in A, (x,y) \in B \Rightarrow A \subset B \Rightarrow \underline{M} = A \cup B = \underline{B}$

$\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0,\ B(x,r) \cap M \neq \emptyset\}$

Observamos: $\underline{\underline{\overline{M} = M}}$ (si $x \notin M$, $\exists r > 0 : B(x,r) \cap M = \emptyset$).

M es cerrado.

Observamos: $M' = M$ (no hay puntos aislados en M).

$\Rightarrow \underline{\underline{M = M'}}$

¿ $int(M) = B$?

$int(M) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\} \neq B = M \Rightarrow \underline{\underline{int(M) \neq B}}$

¿ $fr(M) = A \cup B = B$?

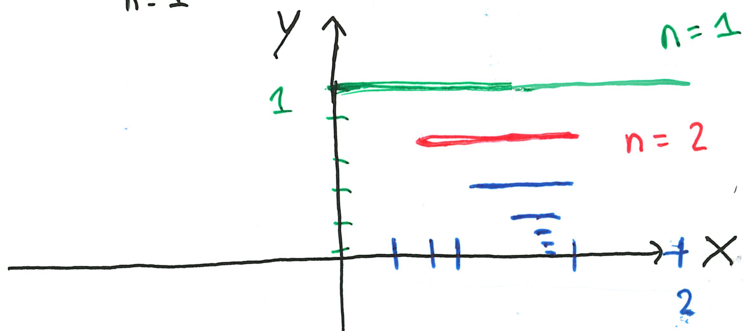
$fr(M) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\} \neq B = M \Rightarrow \underline{\underline{fr(M) \neq B}}$

¿ $adh(int(M)) = \overline{int(M)}$? $= M = \overline{M} = \overline{B} \Rightarrow \underline{\underline{\overline{int(M)} = \overline{B}}}$

(Resto son similares).

$\boxed{1.28}$

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{(x,y) : \frac{n-1}{n} \leq x \leq \frac{n+1}{n},\ y = 1/n\right\}$ ¿ $\overline{A}$?



$n=1 : y = 1, \quad 0 \leq x \leq 2$

$n=2 : y = 1/2, \quad 1/2 \leq x \leq 3/2$

$n=3 : y = 1/3, \quad 2/3 \leq x \leq 4/3$

$n=4 : y = 1/4, \quad 3/4 \leq x \leq 5/4$

$\lim_{n \to \infty} \rightarrow y = 0 ; x = 1 \longrightarrow (0,1) \notin A$

pero $\forall r > 0$, $\exists n : n > 1/r$ t.q. $B((1,0), r) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow A \neq \overline{A} \Rightarrow \boxed{\overline{A} = A \cup \{(1,0)\}}$

$int(A) = \emptyset$.

Observar: A no es ni abierto ni cerrado.

$\boxed{1.34}$

$(\vec{x_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ t.q:

$\exists\, \alpha \in (0,1)$ t.q. $\|\vec{x_{k+2}} - \vec{x_{k+1}}\| \leq \alpha \|\vec{x_{k+1}} - \vec{x_k}\|, \forall k \in \mathbb{N}$

demos.:

Veamos que es de Cauchy:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq n_0$. $\|x_k - x_q\| \leq \varepsilon \quad \forall k, q \geq n_0$

Tomamos k, j t.q. $k = j+p$. Entonces:

$\|x_k - x_j\| = \|x_{j+p} - x_j\| = \|x_{j+p} - x_{j+p-1} + x_{j+p-1} - x_{j+p-2} \pm \ldots + x_{j+1} - x_j\|$

$\leq \|x_{j+p} - x_{j+p-1}\| + \ldots + \|x_{j+1} - x_j\| \overset{hip}{\leq}$

$\leq \alpha \cdot \|x_{j+p-1} - x_{j+p-2}\| + \ldots + \alpha\|x_j - x_{j-1}\| \leq \ldots$

$j+p \to \alpha^0$
$j+p-1 \to \alpha^1$
$j+p-2 \to \alpha^2$
$\vdots$
$j+p-(j+p)+1 \to \alpha^{j+p-2}$

$\leq \ldots \leq \alpha^{j+p-2}\|x_2 - x_1\| + \ldots + \alpha^{j+1}\|x_2 - x_1\| =$

$= \|x_2 - x_1\|(\alpha^{j+p-2} + \alpha^{j+p-3} + \ldots + \alpha^{j+1}) \leq$

$\leq \|x_2 - x_1\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i\right) = \underbrace{\|x_2 - x_1\|}_{cte} \cdot \underbrace{\frac{\alpha^{i+1}}{1-\alpha}}_{\text{tiende a}} \leq 0$

límite 0

cero a medida que crece i

$\Rightarrow \|x_k - x_j\| \leq 0 \Rightarrow$ es de Cauchy $\Rightarrow$ es convergente $\square$