Problemas T1

(Ejers extra en el libro de Vera)

Ejercicio propuesto 1:

Probar que: $v_1 R v_2 \iff v_1 - v_2 \in W$ es de equivalencia.

(i) ¿$v_1 R v_1$? (Reflexiva).

$\bar{0} \in W$. $v_1 - v_1 = \bar{0} \in W \Rightarrow v_1 R v_1$ //

(ii) ¿$v_1 R v_2 \Rightarrow v_2 R v_1$? (Simétrica)

$v_1 R v_2 \Rightarrow v_1 - v_2 \in W \Rightarrow v_1 - v_2 = w \in W$.

$v_2 - v_1 = -w \in W$ por ser W un subespacio vectorial $\Rightarrow$

$\Rightarrow v_2 R v_1$ //

(iii) ¿$v_1 R v_2$, $v_2 R v_3 \Rightarrow v_1 R v_3$? (Transitiva)

$v_1 R v_2 \Rightarrow v_1 - v_2 = w_a \in W$

$v_2 R v_3 \Rightarrow v_2 - v_3 = w_b \in W$.

$v_1 - v_3 = w_a + \cancel{v_2} + w_b - \cancel{v_2} = \underset{\hat{W}}{w_a} + \underset{\hat{W}}{w_b} \in W$ por ser W un subespacio vectorial

Cumple (i), (ii) y (iii) $\Rightarrow$ R es de equivalencia. $\square$

Ejercicio propuesto 2:

Dado $(\frac{V}{W}, +, \cdot_{\mathbb{K}})$, probar que la suma y el producto escalar están bien definidos:

i) $v_1 + v_2 = v_1' + v_2' \Rightarrow \overline{v_1+v_2} = \overline{v_1'+v_2'}$ $\quad (\bar{v} + \bar{w} = \overline{v+w})$

Por def.:

$v_1 + v_2 \Rightarrow \bar{v_1} + \bar{v_2} = \overline{v_1+v_2}$

$v_1' + v_2' \Rightarrow \bar{v_1'} + \bar{v_2'} = \overline{v_1'+v_2'}$

Ahora vien:

$v_1 + v_2 = v_1' + v_2' \Rightarrow v_1 + v_2 - (v_1'+v_2') = \bar{0} \in W \Rightarrow v_1+v_2 \, R \, v_1'+v_2' \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{v_1+v_2} = \overline{v_1'+v_2'}$ //

ii) $v_1 = v_1' \Rightarrow \overline{\lambda v_1} = \overline{\lambda v_1'}$ con $\lambda \in \mathbb{K}$ $\quad (\lambda \bar{v} = \overline{\lambda v})$

Por def.:

$\lambda \bar{v_1} = \overline{\lambda v_1}$

$\lambda \bar{v_2} = \overline{\lambda v_2}$

Ahora bien:

$v_1 = v_1' \Rightarrow \lambda v_1 - \lambda v_1' = \bar{0} \in W \Rightarrow \lambda v_1 \, R \, \lambda v_1' \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\lambda v} = \overline{\lambda v'}$ //

Por tanto están bien definidas.

Ejercicio propuesto 3:

Probar que $(V/W, +, \cdot_{\mathbb{K}})$ es un $\mathbb{K}$-e.v.

Para que sea un $\mathbb{K}$-e.v. ha de cumplir los siguientes propiedades:

i) $(\lambda_1+\lambda_2)\bar{v} = \lambda_1\bar{v} + \lambda_2\bar{v}$ $(v \in V/W)$

Sea $\bar{v} \in V/W$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Entonces:

$$(\lambda_1+\lambda_2)\bar{v} \underset{\text{def } \cdot_{\mathbb{K}}}{=} \overline{(\lambda_1+\lambda_2)v} \underset{\text{def suma en } V}{=} \overline{\lambda_1 v + \lambda_2 v} \underset{\text{def } \oplus}{=} \overline{\lambda_1 v} + \overline{\lambda_2 v} \overset{\text{def } \cdot_{\mathbb{K}}}{=}$$

$$= \lambda_1\bar{v} + \lambda_2\bar{v} \quad \square$$

ii) $(\lambda_1\cdot\lambda_2)\bar{v} = \lambda_1(\overline{\lambda_2 v})$

$$(\lambda_1\cdot\lambda_2)\bar{v} \underset{\text{def } \cdot_{\mathbb{K}}}{=} \overline{\lambda_1\lambda_2\cdot v} \underset{\text{def } \cdot \text{ en } V}{=} \overline{\lambda_1\cdot(\lambda_2 v)} \underset{\text{def } \cdot_{\mathbb{K}}}{=} \lambda_1\cdot\overline{\lambda_2 v} \quad \square$$

iii) $\lambda(\bar{v}_1+\bar{v}_2) = \lambda\bar{v}_1 + \lambda\bar{v}_2$

$$\lambda(\bar{v}_1+\bar{v}_2) \underset{\text{def } \oplus}{=} \lambda\cdot\overline{v_1+v_2} \underset{\text{def } \cdot_{\mathbb{K}}}{=} \overline{\lambda(v_1+v_2)} \underset{\cdot_{\mathbb{K}} \text{ en } V}{=} \overline{\lambda v_1 + \lambda v_2} \overset{\text{def } \oplus}{=}$$

$$= \overline{\lambda v_1} + \overline{\lambda v_2} \overset{\text{def } \cdot_{\mathbb{K}}}{=} \lambda\bar{v}_1 + \lambda\bar{v}_2 \quad \square$$

iv) $1_{\mathbb{K}}\cdot\bar{v} = \bar{v}$

$$1_{\mathbb{K}}\cdot\bar{v} \underset{\text{def } \cdot_{\mathbb{K}}}{=} \overline{(1_{\mathbb{K}}\cdot v)} \underset{\cdot_{\mathbb{K}} \text{ en } V}{=} \overline{(v)} \quad \square$$

Ejercicio propuesto 4:

Probar que si $W \leq V$ entonces: $(\beta_V = \{w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n\})$

f- invariante $\iff$ $\forall w_i \in \beta_W$, $f(v_i) \in W$ (f es lineal)

demos.:

$\Rightarrow$)

Sup. f- invariante $\Rightarrow$ $\forall w \in W$, $f(w) \in W$. Tomamos $\beta_W = \{w_1, \dots, w_m\}$.

Como $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ w_i forma parte de $\beta_W \Rightarrow w_i \in W$, y como f es invariante $\Rightarrow$ $\forall w_i \in \beta_W$, $f(w_i) \in W$

$\Leftarrow$)

Sup. $\forall w_i \in \beta_W$, $f(w_i) \in W$ y veamos que f es invariante, es decir, que dado $w \in W$, $f(w) \in W$.

Sea $w = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(w) = f(\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m)$ y como f es lineal $\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad = \lambda_1 f(w_1) + \dots + \lambda_m f(w_m)$.

Por hipotesis, $f(w_i) \in W$ $\forall w_i \in \beta_W$. $\Rightarrow \exists w_i' \in W$ t.q.

$f(w_i) = w_i'$ $\Rightarrow$

$= \lambda_1 w_1' + \dots + \lambda_m w_m'$ y como $\forall i$, $w_i' \in W$ y W es un subespacio vectorial (la suma y el prod. escalar son operaciones internas y $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot w_i \in W$, $\forall \mu_i \in \mathbb{K}$ y $w_i \in W$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 w_1' + \dots + \lambda_m w_m' \in W \Rightarrow f(w) \in W$ $\forall w \in W$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ es invariante. $\square$

$\boxed{3}$ $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$

$W_1 = \{(x_1+5x_2,\ x_2+3x_3,\ -x_4, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$

$W_2 = <(0,0,1,0),(6,4,0,0)>$

Las ecuaciones de W_1:

$W_1 = <(1,0,0,0),(5,1,0,0),(0,3,0,0),(0,0,-1,1)>$

Observamos que $|\beta_{W_1}| = 4$..

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 0\cdot 1 = 0 =: 0 \Rightarrow$$ No son $\mathbb{K}$-libre

~~$\Rightarrow$ Es $\mathbb{K}$-libre maximal $\Rightarrow$ Es base de $\mathbb{R}^4$~~

Observamos: $(0,3,0,0,0) = 3\cdot(5,1,0,0) - 15\cdot(1,0,0,0) + 0\cdot(0,0,-1,1)$

$\Rightarrow W_1 = <(1,0,0,0),(5,1,0,0),(0,0,-1,1)>$ y

es evidente que es base de W_1. Si $v \in W_1 \Rightarrow$

$(x,y,z,t) = \lambda_1(1,0,0,0) + \lambda_2(5,1,0,0) + \lambda_3(0,0,-1,1) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = \lambda_1 + 5\lambda_2 \\ y = \lambda_2 \\ z = -\lambda_3 \\ t = \lambda_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x+5y \\ y = y \\ z = -t \\ t = t \end{cases} \rightarrow W_1 = \{(\lambda_1+5\lambda_2, \lambda_2, -\lambda_3, \lambda_3) \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

A su vez para W_2:

$(x,y,z,t) = \lambda(0,0,1,0) + \mu(6,4,0,0)$

$$\begin{cases} x = 6\mu \\ y = 4\mu \\ z = \lambda \\ t = 0 \end{cases} \longrightarrow W_2 = \{(6\lambda_1, 4\lambda_1, \lambda_2, 0) \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

a) $\mathbb{R}^4 / (W_1 \cap W_2)$

$W_1 \cap W_2 = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid v \in W_1 \wedge v \in W_2 \}$

$\begin{cases} x = \lambda_1 + 5\lambda_2 \\ y = \lambda_2 \\ z = -\lambda_3 \\ t = \lambda_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 6\lambda_2' \\ y = 4\lambda_2' \\ z = \lambda_1 \\ t = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \lambda_3 = 0 \Rightarrow t = z = 0$

$y = \lambda_2' \Rightarrow x = \lambda_1 + 5\lambda_2' =$

$W_1 = \langle (1,0,0,0), (5,1,0,0), (0,0,-1,1) \rangle$

$W_2 = \langle (0,0,1,0), (6,4,0,0) \rangle$

Observamos: $W_1 \cap W_2$

$(6,4,0,0) = 4(5,1,0,0) - 14(1,0,0,0) \Rightarrow (6,4,0,0) \in W_1$

$(0,0,1,0) \notin W_1$

A su vez:

$(1,0,0,0) \notin W_2$, $(0,0,-1,1) \notin W_2$ $(5,1,0,0) \notin W_2$

$\Rightarrow W_1 \cap W_2 = \langle (6,4,0,0) \rangle = \langle (3/2, 1, 0, 0) \rangle$

De ecuaciones:

$\begin{cases} x = 3/2\, y \\ t = z = 0 \end{cases}$

Ampliamos a una base de $\mathbb{R}^4$:

$\{ (3/2, 1, 0, 0), (1,0,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4 / W_1 \cap W_2} = \{ \overline{(1,0,0,0)}, \overline{(0,0,1,0)}, \overline{(0,0,0,1)} \}}$

$\dim(W_1 \cap W_2) = 1 \Rightarrow \dim\left(\mathbb{R}^4 / W_1 \cap W_2\right) = 4 - 1 = 3$ //

Así: si $\bar{v} \in \frac{\mathbb{R}^4}{W_1 \cap W_2} \Rightarrow$

$\bar{v} = \lambda_1 \overline{(1,0,0,0)} + \lambda_2 \overline{(0,0,1,0)} + \lambda_3 \overline{(0,0,0,1)}$

$\overline{(1,0,0,0)} = \{ \bar{v} \in \frac{\mathbb{R}^4}{W_1 \cap W_2} \mid v - (1,0,0,0) \in W_1 \cap W_2 \} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y,z,t) - (1,0,0,0) = (\frac{3}{2}\lambda, \lambda, 0, 0)$

$$\begin{cases} x - 1 = \frac{3}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = t = 0 \end{cases} \Rightarrow \overline{(1,0,0,0)} = \{ (\tfrac{3}{2}\lambda + 1, \lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$\overline{(0,0,1,0)} = \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y,z,t) - (0,0,1,0) = (\frac{3}{2}\lambda, \lambda, 0, 0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z - 1 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \overline{(0,0,1,0)} = \{ (\tfrac{3}{2}\lambda, \lambda, 1, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$\overline{(0,0,0,1)} = \ldots \Rightarrow \overline{(0,0,0,1)} = \{ (\frac{3}{2}\lambda, \lambda, 0, 1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathbb{R}^4}{W_1 \cap W_2} = \{ \lambda_1' (\tfrac{3}{2}\lambda_1 + 1, \lambda_1, 0, 0) + \lambda_2' (\tfrac{3}{2}\lambda_2, \lambda_2, 1, 0) + \lambda_3' (\tfrac{3}{2}\lambda_3, \lambda_3, 0, 1) \mid \lambda_1', \lambda_2', \lambda_3', \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \}}$$

↳ (Es mejor y basta dar una base de $\frac{\mathbb{R}^4}{W'}$ para indicar cuál es el espacio cociente.)

b) $\mathbb{R}^4/(W_1+W_2)$

$W_1+W_2 = \{v\in\mathbb{R}^4 \mid v = w_1+w_2 \text{ con } w_1\in W_1 \text{ y } w_2\in W_2\}$

$v\in W_1+W_2 \Rightarrow v = \lambda_1 w_{11}' + \dots + \lambda_m w_{1m}' + \mu_1 w_{21}' + \dots + \mu$

$\dim(W_1+W_2) = \dim(W_1)+\dim(W_2) - \dim(W_1\cap W_2) =$
$= 3 + 2 - 1 = 4$

$\Rightarrow W_1+W_2 = \mathbb{R}^4$ y por tanto, $\mathbb{R}^4/\mathbb{R}^4 = \{\bar{v}\in\mathbb{R}^4$ t.q.
$\bar{v}=\bar{w} \Leftrightarrow v-w\in\mathbb{R}^4$ y eso se da $\forall w, v\in\mathbb{R}^4 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Como todo $v\in\mathbb{R}^4$, $\bar{v}=\bar{0} \Longrightarrow \mathbb{R}^4/\mathbb{R}^4 = \{\bar{0}\}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathbb{R}^4}{(W_1+W_2)} = \{\bar{0}\} \text{ y } \dim\left(\frac{\mathbb{R}^4}{W_1+W_2}\right) = 0} = 4-4$$

d) $(W_1+W_2)/(W_1\cap W_2)$ (Nota interesante)

Como $(W_1+W_2)=\mathbb{R}^4$, este apartado es como el 1).

<u>Nota:</u>

$\beta_0 = \{v_1,\dots,v_r\}$ es base de $U\cap W$

$\beta_U = \{v_1,\dots,v_r, u_{r+1},\dots,u_s\}$ es base de U (completada)

$\beta_W = \{v_1,\dots,v_r, w_{r+1},\dots,w_s\}$ es " " W (")

$\Rightarrow \beta = \{v_1,\dots,v_r,u_{r+1},\dots,u_s,w_{r+1},\dots,w_s\}$ es base de $U+W$ y $\dim(U+W) = \dim(U) - \dim(W) - \dim(U\cap W)$.

Para hallar $U\cap W$. Dados $\beta_U=\{u_1,\dots,u_n\}$ y $\beta_W = \{w_1,\dots,w_m\}$

Entonces:

Si $v \in U \cap W \Rightarrow v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n$

y v ha de cumplir las ecuaciones de U y W.

$\boxed{6}$ (Interesante)

a) $W = \langle (1,1,1,1), (1,-1,1,1) \rangle$

Hallamos las ecs de W. (No es necesario).

$(x,y,z,t) = \lambda(1,1,1,1) + \mu(1,-1,1,1)$

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = \lambda + \mu \\ t = \lambda + \mu \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} x & -1 & -1 \\ y & -1 & 1 \\ z & -1 & -1 \\ t & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Rg (2), pues los tres vectores columna son lk - ligados $\Rightarrow \det_{3\times 3} = 0$

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ y & -1 & 1 \\ z & -1 & -1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} -1 & \overset{0}{\cancel{2}1} \\ \cancel{-1} & -1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 2x - 2z = 0 \Rightarrow x = z$

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ y & -1 & 1 \\ t & -1 & -1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 2x - 2t = 0 \Rightarrow x = t$

(R^4, dim(2) $\Rightarrow$ 2 ecuaciones (dos restricciones)).

$$\begin{cases} x = z \\ x = t \end{cases}$$

Observamos:

$W = \langle (1,0,1,1), (0,1,0,0) \rangle$

La ampliamos con β_c a B de $\mathbb{R}^4$:

$\beta_{\mathbb{R}^4} = \{(1,0,1,1), (0,1,0,0), (1,0,0,0), (0,0,0,1)\}$

$\Rightarrow \boxed{\beta_{\mathbb{R}^4/W} = \{\overline{(1,0,0,0)}, \overline{(0,0,0,1)}\}}$

Calculamos las coordenadas:

$\overline{(1,0,1,0)} = \lambda\,\overline{(1,0,0,0)} + \mu\,\overline{(0,0,0,1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{(1,0,1,0)} = \overline{\lambda(1,0,0,0) + \mu(0,0,0,1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1,0,1,0) - \lambda(1,0,0,0) - \mu(0,0,0,1) \in W \Rightarrow$

$(1-\lambda, 0, 1, -\mu) \in W \Rightarrow$ cumple sus ecs $\Rightarrow$

$\begin{cases} x = t \Rightarrow 1-\lambda = 1 \Rightarrow \underline{\lambda = 0} \\ x = z \Rightarrow 1-\lambda = -\mu \Rightarrow 1 = -\mu \Rightarrow \underline{\mu = -1} \end{cases}$

$\Rightarrow (1,0,1,1) \in W \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{(1,0,1,0)} = 0 \cdot V_1 - 1 \cdot V_2 \rightarrow \boxed{(0,-1) \in \mathbb{R}^4/W}$

b) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y+z+t=0,\ y+2z+3t=0\}$

Buscamos base de W:

$$\begin{cases} y+z+t=0 \\ y+2z+3t=0 \\ x=x \end{cases} \quad \begin{cases} -y=+z+t \\ -y=2z+3t \end{cases} \Rightarrow z+t=2z+3t \Rightarrow$$

$\Rightarrow z+2t=0 \Rightarrow z=-2t \qquad (-z-t=2t-t=t)$

$\Rightarrow (x,t,-2t,t) \Rightarrow W = \langle (1,0,0,0),(0,1,-2,1) \rangle$

$(2$ ecs en $\mathbb{R}^4 \Rightarrow 4-2=2=\dim(W))$

La ampliamos a una base de $\mathbb{R}^4$:

$\beta_{\mathbb{R}^4} = \{(1,0,0,0),(0,1,-2,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$

(T^{a} reemplazamiento, son $\mathbb{K}$-libre y maximal, etc).

(T^{a} demostrado) $\Rightarrow$ $\boxed{\beta_{\mathbb{R}^4/W} = \{\overline{(0,1,0,0)},\overline{(0,0,1,0)}\}}$

(Observar: $\dim(\mathbb{R}^4/W) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(W) = 4-2=2$)

Los coordenadas son:

$\overline{(1,0,1,0)} = \lambda\overline{(0,1,0,0)} + \mu\overline{(0,0,1,0)} \Rightarrow$

$\overline{(1,0,1,0)} = \overline{(\lambda(0,1,0,0)+\mu(0,0,1,0))} \Rightarrow$

$(1,0,1,0)-(0,\lambda,0,0)-(0,0,\mu,0) \in W \Rightarrow$

$(1,-\lambda,1-\mu,0) \in W \Rightarrow$ cumple sus ecuaciones:

$$\begin{cases} y+z+t=0 \Rightarrow -\lambda+1-\mu+0=0 \Rightarrow \lambda=1-\mu \\ y+2z+3t=0 \Rightarrow -\lambda+2-2\mu+0=0 \Rightarrow \lambda=2-2\mu \end{cases}$$

$\Rightarrow (\cancel{\lambda}\overset{0}{\lambda}) = (1-2) + (-\mu - (-2\mu)) = -1 + \mu \Rightarrow \mu = 1$

$y\ \lambda = 0$

$\Rightarrow \overline{(1,0,1,0)} = 0 \cdot \overline{(0,1,0,0)} + 1 \cdot \overline{(0,0,1,0)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad = \boxed{(0,1) \in \mathbb{R}^4/W}$

(Observar: $\overline{(1,0,1,0)} = \overline{(0,0,1,0)} \Rightarrow (1,0,1,0) - (0,0,1,0) \in W$

$\Rightarrow (1,0,0,0) \in W$ y es cierto pues $0+0+0=0$ y $0+2\cdot 0+3\cdot 0 = 0$

(además es vector básico).). ✓ (comprobación de que somos consistentes).

$\boxed{11}$ (Interesante)

b) $f(x,y,z,t) = (x+y+z,\ y+z+t,\ z+t+x,\ t+x+y)$

$W = \langle (1,0,1,0), (0,1,0,1) \rangle$

Ecs. de W: ($4-2 = 2$ ecs)

$(x,y,z,t) = \lambda(1,0,1,0) + \mu(0,1,0,1)$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases} \to \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Rg(2) \quad \text{(para tres vectores lk-ligados)}$$

Pero observamos y:

$$\begin{cases} x = z \\ y = t \end{cases} \longrightarrow \text{Ampliamos a base de } \mathbb{R}^4 \longrightarrow$$

Coincide con el resultado

lk-libre maximal $\Rightarrow$ es base ✓

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = \{ \underbrace{\underbrace{\underbrace{(1,0,1,0),(0,1,0,1)}_{\text{lk-libre}}, (1,0,0,0)}_{\text{lk-libre}}, (0,1,0,0)}_{\text{lk-libre}} \}$$