Tema 2: Continuidad de funciones de varias variables

Trabajaremos con $\|\cdot\|_2$ por comodidad, pues son todas iguales.

Funciones

$$f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Los hay de varios tipos:

- $m = 1$ (ej.. el tiempo → posición)

Ejemplo: Campos vectoriales

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$t \to (a + tx_0, b + ty_0, c + tz_0)$

$$\begin{cases} x = a + tx_0 \\ y = b + ty_0 \\ z = c + tz_0 \end{cases} \to t = \frac{x-a}{x_0} = \frac{y-b}{y_0} = \frac{z-c}{z_0} \to \text{¡Un plano!}$$

- $n = 1$ Campos escalares

Ejemplo:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \to z = x^2+y^2 \to \text{¡Paraboloide elíptico!}$$
$$(x,y) \to x^2+y^2$$

$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \to z = \sqrt{x^2+y^2} \to \text{¡Cono!}$$
$$(x,y) \to \sqrt{x^2+y^2}$$

¡Curvas y superficies!

De hecho, cualquier función se descompone en una de estas:

$$f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x_1,\dots,x_m) \longmapsto (y_1,\dots,y_n)$$

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1,\dots,x_m) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1,\dots,x_m) \end{array}\right\}$$

Donde: $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es un campo escalar

Así, denotamos:

$$f = (f_1, \dots, f_n)$$

Definiciones:

Dominio:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}^m : f(x) \in \mathbb{R}^n\}$$

Imagen:

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists x \in D(f) \text{ t.q. } f(x) = y\}$$

Gráfica:

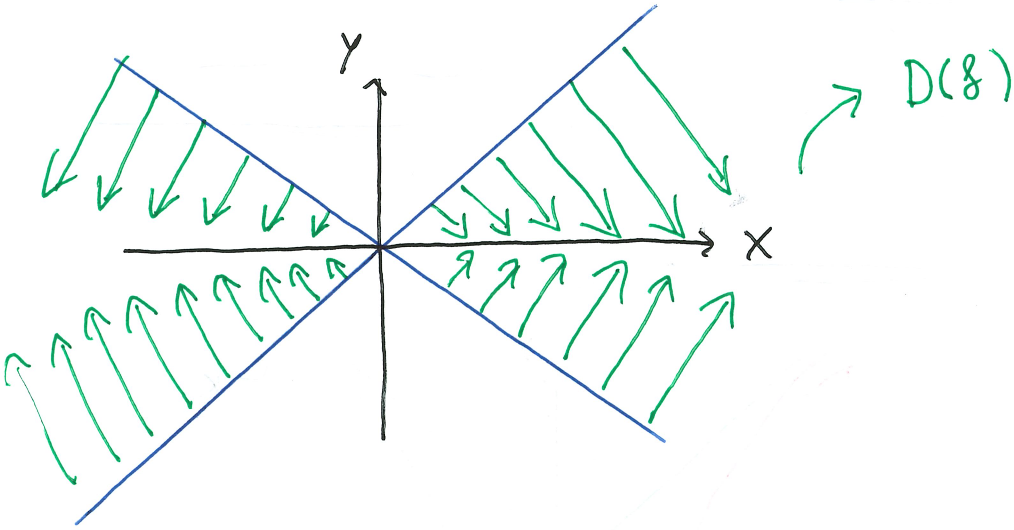
$$G(f) = \{(x,y) \in \underset{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}{\overset{\parallel}{\mathbb{R}^{m+n}}} : x \in D(f) \wedge y = f(x)\}$$

Ejemplo:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \sqrt{x^2-y^2}$$

$$\boxed{D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \geq y^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq |y|\}}$$

$$\begin{cases} 1^{er} \text{ cuadrante}: & x \geq y \\ 2^{do} \text{ cuadrante}: & -x \geq y \\ 3^{er} \text{ cuadrante}: & \cancel{-}x \geq \cancel{-}y \iff x \leq y \\ 4^{o} \text{ cuadrante}: & x \geq -y \iff -x \geq y \end{cases}$$



$\forall z \in \mathbb{R}^+$, si tomamos $y=0,\ x=z \Rightarrow \exists y,x : \sqrt{x^2-y^2} =$
$= \sqrt{z^2-0} = z \Rightarrow \boxed{Im(f) = \{z \in \mathbb{R}^+\}}$

$$G(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D(f),\ z = \sqrt{x^2-y^2}\}$$

↳ Complicado... nos apoyamos en las curvas de nivel (siguiente cara).

Definición:

Dada $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se llama curva de nivel k a

$$C_k = \{(x,y) \in D(f) : f(x,y) = k\}$$

Ejemplo:

(seguimos en el anterior):

$k = \sqrt{x^2 - y^2} \Rightarrow k^2 = x^2 - y^2 \to$ hipérbola (en $\mathbb{R}^2$).

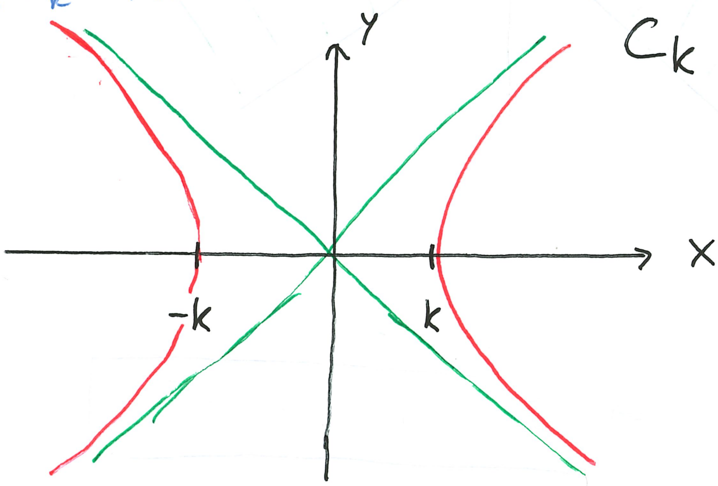
$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - k^2} = \infty \to$ no hay asíntotas horizontales.

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - k^2}}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - k^2} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - k^2} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - k^2} + x\right)}{\sqrt{x^2 - k^2} + x} =$$

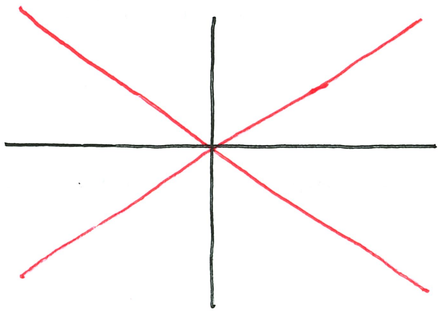
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - k^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - k^2} + x} = 0$$

$\longrightarrow$



C_k

En concreto:



C_0

$(x^2 = y^2)$

Si $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ su gráfica está en $\mathbb{R}^3$ $\to$ $C_k = \{(x,y) \in D(f) : f(x,y) = k\}$

$\underbrace{\text{Si } f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ su gráfica está en } \mathbb{R}^3}_{\text{superficie}}$

$\underbrace{C_k = \{(x,y) \in D(f) : f(x,y) = k\}}_{\text{curva de nivel}}$

(no es equivalente, 1 función tiene una superficie, pero no toda superficie viene dada por una función (ej.: el círculo necesita 2).

(similar, y para los dos siguientes también).

Si $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ su gráfica esta en $\mathbb{R}^4$ $\to$ $S_k = \{(x,y,z) \in D(f) : f(x,y,z) = k\}$

$\underbrace{\text{Si } f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ su gráfica esta en } \mathbb{R}^4}_{\text{No sabemos dibujar}}$

$\underbrace{S_k = \{(x,y,z) \in D(f) : f(x,y,z) = k\}}_{\text{superficie de nivel}}$

2.1 Límites de funciones vectoriales

Sea $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, con $D(f) = D$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $L \in \mathbb{R}^n$. Decimos que L es el límite de f cuando x tiende a x_0 cuando:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L := \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon$$

$x \notin D' \Rightarrow \exists r_0 :$
$B^*(x, r_0) \cap D = \emptyset$.
$\forall \delta < r_0$, $\Rightarrow$
La def. no se cumple para ningún L.

Observar: ¿qué pasa si $x_0 \notin D'$? Cualquier ser el límite, como no queremos eso, vamos a obligar a que lo sea. (Ver apuntes). Necesitamos $x_0 \in D'$.

Definición (2):

$A \subset \mathbb{R}^m$, $x_0 \in A'$.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \in A)}} f(x) = L \overset{\text{def.}}{\iff}$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \ 0 < \|x - x_0\| < \delta, \ x \in A \cap D \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \| f(x) - L \| < \varepsilon$$

(Hay que especificar el $A \subset \mathbb{R}^m$. Es como cuando hacíamos $\lim_{x \to \underline{\underline{a^+}}} f(x)$ $(x \in (a, +\infty))$. Si los límites eran distintos por cada lado, no había límite. Aquí para lo mismo, con la complicación de que es muy difícil conocer todos los caminos $x \to x_0$, es decir, todos los $A \subset \mathbb{R}^m$).

Propiedades:

1) Suma y resta

$$L_1 = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) \ , \quad L_2 = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} g(x)$$

Entonces: $$L_1 \pm L_2 = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} (f \pm g)(x)$$

2) Prod. por escalar

$\lambda \in \mathbb{R}$, $L_1 = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x)$

Entonces: $\lambda \cdot L_1 = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} (\lambda f)(x)$

3) (L_1, L_2) Prod. escalar

$$\langle L_1, L_2 \rangle = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} \langle f(x), g(x) \rangle$$

4) Límites en cada componente

$L_1 = (L_1^{(1)}, \dots, L_1^{(n)})$

$$L_1 = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) \iff L_1^{(j)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f_j(x), \ \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

<u>Proposición:</u>

Sea $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con $D(f) = D$ y sea $x_0 \in D'$.

Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \iff \lim_{k \to \infty} f(x_k) = y_0 , \ \forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ t.q.}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ x_k \in (D - \{x_0\}) \text{ y } (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \to x_0$$

Observar que nos interesa la negada de este si y solo si. Si dos sucesiones que tienen el mismo límite no tienen la misma imagen, entonces el límite de $f(x)$ cuando $x \to x_0$ no existe. Caracterización del límite mediante sucesiones. Nos interesa en vez de $A \iff B$, no $B \iff$ no A.

Proposición:

Descomponemos $f: D \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ en sus componentes:

$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, donde $f_i: D \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq n)$,

entonces:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in S}} f(x) = y = (y_1, \dots, y_n) \iff \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in S}} f_i(x) = y_i \; ; \; 1 \leq i \leq n$$

Antes:

Proposición: (producto escalar del límite).

$$L_1 = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in S_1}} f(x), \quad L_2 = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in S_2}} g(x) \Rightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in S_1\cap S_2}} \langle f(x), g(x)\rangle = \langle L_1, L_2\rangle$$

(la del producto escalar).

demos.:

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.q. $\|\langle f(x), g(x)\rangle - \langle L_1, L_2\rangle\| < \varepsilon$

$\forall x \in B(x_0, \delta) \cap (S_1 \cap S_2)$.

Como $\|\langle f(x), g(x)\rangle - \langle L_1, L_2\rangle\| = \|\langle f(x), g(x)\rangle - \langle f(x), L_2\rangle +$

$+ \langle f(x), L_2\rangle - \langle L_1, L_2\rangle\| \leq$ (des. norma) (props. del prod. escalar)

$\leq \|\langle f(x), g(x)\rangle - \langle f(x), L_2\rangle\| + \|\langle f(x), L_2\rangle - \langle L_1, L_2\rangle\| =$

$= |\langle f(x), g(x) - L_2\rangle| + |\langle f(x) - L_1, L_2\rangle| \leq \|f(x)\| \cdot \underbrace{\|g(x) - L_2\|}_{< \varepsilon / ¿?} +$ (Cauchy Schwarz)

$+ \underbrace{\|f(x) - L_1\|}_{< \varepsilon / 2\|L_2\|} \cdot \|L_2\|$ $\boxed{(1)}$

$\|L_2\| = |L_2| \in \mathbb{R}$

$\|f(x)\| = |f(x)| \in \mathbb{R}$

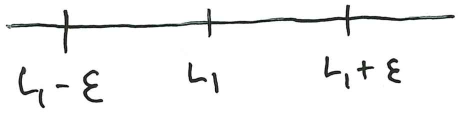
Por hip.: dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ t.q.

$\|f(x) - L_1\| < \varepsilon$, $\forall x \in B^*(x_0, \delta_1) \cap S_1 \Rightarrow$

$-\varepsilon < f(x) - L_1 < \varepsilon \Rightarrow$

$L_1 - \varepsilon < f(x) < L_1 + \varepsilon \Rightarrow$

$|f(x)| < \max\{|L_1 + \varepsilon|, |L_1 - \varepsilon|\} \longrightarrow$



$\Rightarrow$ f está acotada en $B^*(x, \delta_1) \cap S_1 \Rightarrow$

$|f(x)| \leq M$. Así podríamos haber tomado $\varepsilon / 2M$ y de $\boxed{(1)}$ obtenemos:

$\|\langle f(x), g(x)\rangle - \langle L_1, L_2\rangle\| \leq \dots \leq \|f(x)\| \cdot \|g(x) - L_2\| + \|f(x) - L_1\| \cdot \|L_2\| <$

$< \cancel{M \cdot \frac{\varepsilon}{2M}}\ \frac{\varepsilon}{2} + \cancel{\|L_2\|} \cdot \frac{\varepsilon}{2\cancel{\|L_2\|}} = \varepsilon \quad \square$

También se podría probar:

Proposición:

Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} |f(x)| = |L|$

Volvemos a la página 111, procedemos a la demos de esa proposición:

Proposición:

Sea $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con $D(f) = D$ y sea $x_0 \in D'$. Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \iff$$

$$\iff \lim_{k\to\infty} f(x_k) = y_0, \ \forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ t.q. } \forall k \in \mathbb{N}, x_k \in (D \setminus \{x_0\}) \text{ y}$$

$$\lim_{k\to\infty} (x_k) = x$$

demos.:

$\Rightarrow$)

Hip. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: 0 < \|x - x_0\| < \delta, x \in S \Rightarrow$

$|f(x) - L| < \varepsilon$.

Si $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow x_0$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \|x_k - x_0\| < \delta, \forall k \geq n_0$

Como x_k verifican $0 < \|x_k - x_0\| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x_k) - L| < \varepsilon, \forall k \geq n_0 \Rightarrow \lim f(x_k) = L$ //

$\Leftarrow$)

Sup. L no es el límite. Entonces: $\exists \varepsilon > 0$, t.q. $\forall \delta > 0$:

$0 < \|x - x_0\| < \delta$, $x \in S \cap D$ pero $|f(x) - L| \geq \varepsilon$.

Tomamos $\delta_k = \frac{1}{k}$, $\exists x_k \in S \cap D$, $x_k \neq x_0$ verificando $\|x_k - x_0\| < \delta_k$

pero $|f(x_k) - L| \geq \varepsilon$. Así: $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ pero $\lim f(x_k) \neq L$

que es absurdo por hip. $\Rightarrow L$ sí es el límite. $\square$

Ejemplo:

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f((x,y)) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \cdot \cos(x^2+y^2)$$

Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f((x,y))$

$\forall k \quad (x_k, y_k) \neq (0,0)$

Observamos esta sucesión: $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$. Verifica $\lim_{k\to\infty} (x_k, y_k) = (0,0)$. Entonces:

Los términos de la sucesión son 0.

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \frac{\frac{1}{k} - \frac{1}{k}}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2} \cdot \cos\left(\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(-\frac{1}{k}\right)^2\right) = 0$$

Sin embargo:

$(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k}, \frac{1-k}{k^2}\right)$. Entonces:

$\lim_{k\to\infty} (x_k, y_k) = (0,0)$. Entonces:

$$f(x_k, y_k) = \frac{\frac{1}{k} + \frac{1-k}{k^2}}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1-k}{k^2}\right)^2} \cdot \cos\left(\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1-k}{k^2}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{2k^2-2k+1}{k^4}} \cdot \cos\left(\frac{2k^2-2k+1}{k^4}\right) = \frac{k^2}{2k^2-2k+1} \cdot \cos\left(\frac{2k^2-2k+1}{k^4}\right)$$

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{k^2}{2k^2-2k+1}}_{1/2} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{2k^2-2k+1}{k^4}\right)}_{\cos(0) \to 1} = 1/2$$

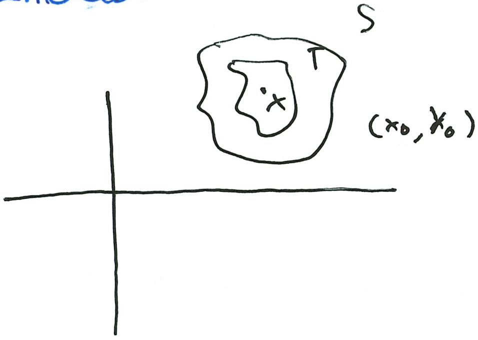
Hemos encontrado dos sucesiones que tienden a $(0,0)$ pero cuyos $\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k)$ son distintos $\Rightarrow$ Aplicamos proposición y $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ∎

(Nos interesa la negada de la proposición como hemos visto).

Proposición:

Si $T \subset S \subset D$ y $x_0 \in D$ y $x \in T'$. Entonces:

$$L = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) \Rightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in T}} f(x) = L$$

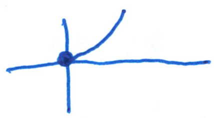


demos.: (mi intento)

Por red. abs. Supongamos que no se da. Entonces, por la proposición anterior, $\exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset T$ t.q. $(x_k) \to x_0$ pero $f(x_k) \not\to L$. Como $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset T \subset S \Rightarrow \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset S$ t.q. $(x_k) \to x_0$ pero $f(x_k) \not\to L$. Pero eso por la proposición $\to L \neq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x)$, que es absurdo porque contradice la hipótesis. La contradicción parte de suponer $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in T}} f(x) \neq L$.

Por tanto, ha de darse que: $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in T}} f(x) = L$ $\square$ (pues se da, o no se da y como hemos probado que no puede no darse, ha de darse).

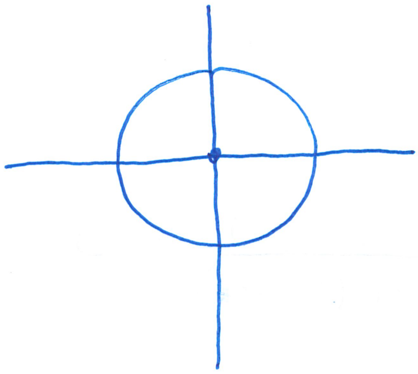
(Es como decir en $\mathbb{R}$ que si $\exists L = \lim_{x \to x_0} f(x)$, entonces $L = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$. Observar que el recíproco no se da. Contraejemplo en $\mathbb{R}$: $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) \to -\infty$ pero $\nexists \lim_{x \to 0} \ln(x)$ pues $\nexists \lim_{x \to 0^-} \ln(x)$ (o en funciones tipo



, x^2 t.q. $x \geq 0$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, $\nexists \lim_{x \to 0^-} f(x)$ (no está definida) y $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ (no existen los laterales. No se cumple pese a que "$0^+ \subset 0$")).

Ejemplo:

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}, \quad (x_0, y_0) = (0,0)$$



$\rightarrow T = \{(x,y) \in D(f) : y = 0\}$

Si $\exists L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow$ ¡Ha de ser el mismo en T!

(Por la prop. anterior) Así:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in T}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in T}} \frac{x^2}{|x|} = 0$$

Entonces: o la función no tiene límite, o si lo tiene es 0.

En caso de existir, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Tomamos:

$T' = \{(x,y) \in D(f) : x = y\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in T'}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^2}{2|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{2|x|} = 0$$

Seguimos sin poder afirmar que es 0, pero lo parece.

Lo demostramos por definición.

Por def.:

$|f(x,y)| < \varepsilon, \quad \forall (x,y) \in B^*((0,0), \delta)$ (Ver nota para la solución).

Tomando:

$T_m = \{(x,y) \in D(f) : y = mx\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in T}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + (m(x))^2}{|x| + |mx|} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot(1+m^2)}{|x|\cdot(1+|m|)} = 0$$

Hemos probado en muchos subconjuntos (1 por cada $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$). Por tanto, en caso de existir el límite, debería ser 0, pues sino por la proposición no existiría (que no lo sabemos).

(Podríamos acercarnos de más formas a la lineal, $x = y^2$, ..., no hemos probado de todas las formas (ni es posible), no podemos afirmar que el límite es 0).

Observamos:

$$0 \leq f(x,y) = \frac{\overset{\overset{0}{\wedge\!\!|}}{x^2} + \overset{\overset{0}{\wedge\!\!|}}{y^2}}{\underset{\underset{0}{\vee\!\!|}}{|x|} + \underset{\underset{0}{\vee\!\!|}}{|y|}} = \frac{|x|^2 + |y|^2}{|x| + |y|} \leq \frac{|x|^2 + |y|^2 + \overset{\overset{0}{\wedge\!\!|}}{2|x||y|}}{|x| + |y|} =$$

$$= \frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|} = |x|+|y|.$$ Por def: dado $\varepsilon > 0$, ¿$\exists\, \delta > 0$?

Si $0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon$ y como $|f(x,y)| \leq |x| + |y|$ ($|f(x)| = f(x)$ en este caso), y $\|(x,y)\| < \delta \Rightarrow \sqrt{|x|^2 + |y|^2} < \delta \Rightarrow |x| < \delta$ y $|y| < \delta$. Tomando $\delta = \varepsilon/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x,y)| \leq |x| + |y| = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \Rightarrow$ $\boxed{\text{0 es el límite (por def.)}}$

Ejemplo:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathbb{R}}} f(x,y) \quad \text{con} \quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$T_m = \{(x,y)\in D(f) : y = mx\}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in T_m}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot mx}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(m^2+1)} = \frac{m}{m^2+1}$$

Para cada $T_m \neq T_{m'}$ $(m \neq m')$ el límite es distinto, aplicamos la proposición $\Rightarrow \boxed{\nexists \lim}$

Proposición:

Si $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con dominio $D(f)$, $(x_0, y_0) \in D'$ tal que

$$\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{y si} \quad \exists \lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

entonces:

$$L = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$$

(No nos vale para calcular el límite, pues partimos de que lo sabemos, nos interesa este resultado para probar cuando no existe el límite).

dem.:

Por hip.:

Dado $\varepsilon>0$, $\exists \delta_1>0$ t.q. si $0<\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f(x,y)-L\|<\varepsilon/2$

Si llamamos $g(y) = \lim_{x\to x_0} f(x,y) \Rightarrow \exists \delta_2$ t.q. si

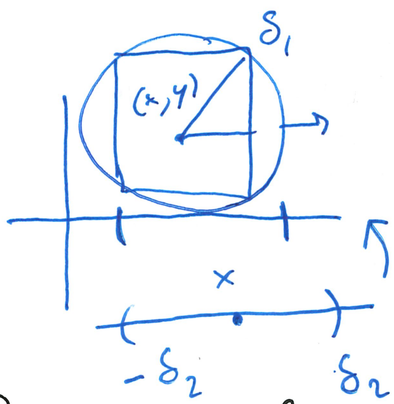
$0<\|x-x_0\|<\delta_2 \Rightarrow \|f(x,y)-g(y)\|<\varepsilon/2$

Queremos encontrar $\delta_2>0$ t.q. si $0<\|y-y_0\|<\delta \Rightarrow \|g(y)-L\|<\varepsilon$

Tomando: ($\delta =$ ¿?) para que se den los dos $<\varepsilon/2$).

$\|g(y)-L\| = \|g(y)-f(x,y)+f(x,y)-L\| \leq$

$\leq \|g(y)-f(x,y)\| + \|f(x,y)-L\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$



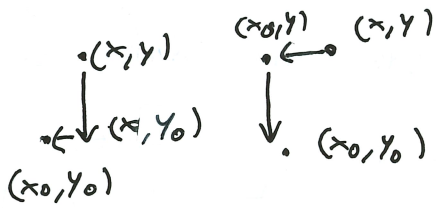
$$\left.\begin{array}{l} |x-x_0|<\delta_1/\sqrt{2} \\ |y-y_0|<\delta_1/\sqrt{2} \\ \to \delta = \min\{\delta_1/\sqrt{2}, \delta_2\} \end{array}\right.$$ nos vale

Proposición análoga:

(r.a.)

$$L = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0}(f(x,y))\right)$$

Dos límites. Se llaman límites iterados.



Observar que los límites iterados han de ser iguales. Este teorema nos vale para ver cuando no existe límite. (Se da ($\Rightarrow$) únicamente, si los límites existen eso no implica que que exista el límite de la función).

Ejemplo:

$$f(x,y) = x \cdot \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{y}\right)$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \ \|(x,y)\| < \varepsilon \Rightarrow |x \cdot \operatorname{sen}(1/y)| \leq |x| < \delta = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Pero:

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \nexists \rightarrow \lim_{y\to 0} f(x,y) \nexists$$, no se cumple la hipótesis, no dice nada sobre la tesis.

¡Han de existir los límites iterados para poder aplicar el teorema!

Ejemplo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \cdot y}{x^2+y^2} \nexists$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}(0) = 0 \\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}(0) = 0 \end{array}\right\}$$

Existen y ambos son 0, pero como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \nexists$ no podemos aplicar el T^{a}.

Solo lo podemos aplicar T^a (es útil) cuando los límites iterados existen pero son distintos $\Rightarrow \nexists$ lim. (no B $\Rightarrow$ no A pues A $\Rightarrow$ B).

Proposición:

Si $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con $D = D(f) \cap D(g)$, $x_0 \in D'$, g está acotada en alguna bola $B^*(x_0, r)$ y $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$$

($x_0 \in D$ también vale, pero $x_0 \in D'$ es más correcto pues no es necesario que $x_0 \in D$, basta $x_0 \in D'$).

(Acotada · 0 = 0, ¡Cuidado! Acotada · 1 $\not\to$ 1 no tiene por qué, el teorema pide $\underbrace{\text{Acotada}}_{f(x)}$ y $\underbrace{0}_{g(x)}$ (o al revés)).

Proposición:

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = L$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en x_0 y $g(x_0) = y_0$. Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} f(x, g(x)) = L \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow S = \{(x,y) \in D(f) : y = g(x)\}, \quad \lim_{\substack{(x,y) \to (x_0,y_0) \\ (x,y) \in S}} f(x,y) = L$$

Cambio de variable más general que $y = mx$

Ejemplo:

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \neq 0\}$ (La parábola $\not\ni$ no).

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in D(f)}} f(x,y) \qquad \frac{y}{x^2+y} = f(x,y)$$

Como $(0,0) \in D(f)'$, calculamos el límite.

$T_m = \{\dots\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{m\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}+m\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{x+m} = 1 \quad (m\neq 0)$$

(Si $\exists L$ ha de ser 1).

$$\begin{cases} \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 1 \\ \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0} (0) = 0 \end{cases}$$

Como los límites iterados son distintos y existen $\Rightarrow$ $\boxed{\nexists \text{ Límite}}$

Más:

$g(x) = mx^2 \rightsquigarrow T_m \quad (g(x_0) = g(0) = 0 = y_0)$

$$\lim_{x\to 0} f(x, g(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+mx^2} = \frac{m}{1+m}$$ que depende de m

$\Rightarrow \nexists$ Límite

Para demostrar que sí es el límite, (no en negativo como hemos hecho hasta ahora), lo mejor es por definición. Todos estos métodos que hemos probado son muy útiles para ver cuándo no hay límite.

Nota: es válido para varios variables.

$$L = \lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(a_1,\dots,a_n)} f(x_1,\dots,x_n) = L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x_{i_1}\to a_{i_1}}\left(\lim_{x_{i_2}\to a_{i_2}}\left(\dots\left(\lim_{x_{i_n}\to a_{i_n}} f(x_1,\dots,x_n)\right)\dots\right)\right) = L$$

($n!$ límites iterados).

Proposición 2.2.9.

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$ y x_0 un punto de acumulación de D_i $\forall i \in I$. Entonces:

$$\exists L = \lim_{x\to x_0} \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D_i}} f(x) = L \quad \forall i = 1,\dots,k$$

demos.:

$\Rightarrow$)

Como $D_i \subset D$, aplicamos la propiedad y ha de darse el límite en $x \in D_i$.

$\Leftarrow$)

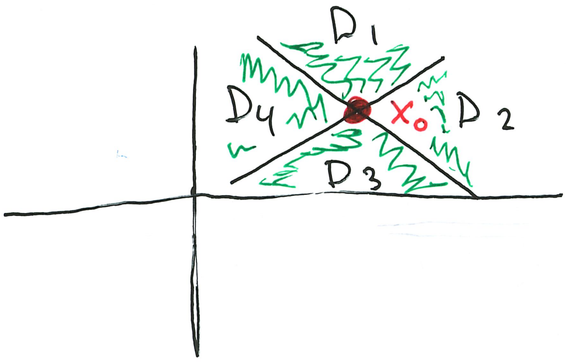
Hip.: Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_j > 0$ t.q. $0 < \|x - x_0\| < \delta_j \Rightarrow$
$\Rightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon$ $(x \in D_j)$. $\forall j \in \{1,\dots,k\}$.

Probar: $\exists \delta > 0$ t.q.

$x \in D$, $0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon$.

Tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \dots \delta_k\}$. Como $x \in D \Rightarrow x \in D_j$ para cierto D_j y $\|x - x_0\| < \delta_k$ por hip. y como $\|x - x_0\| < \delta < \delta_k \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon$ □



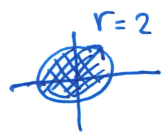
Ejemplo:

$$f((x,y)) = x \cdot \sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1}$$

$$f((x,y)) = \begin{cases} +\sqrt{\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1\right) \cdot x^2} & x > 0 \\ -\sqrt{\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1\right) \cdot x^2} & x < 0 \\ x = 0 \Rightarrow f((x,y)) = 0 \end{cases}$$

→ Sugiere dividir el dominio en tres cachos.

$$\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1 \geq 0 \Rightarrow 2 \geq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow 4 \geq x^2 + y^2 \rightarrow$$

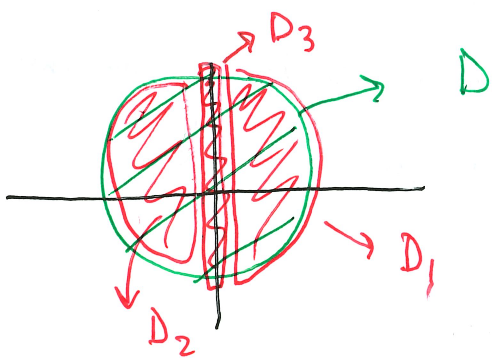


Definimos:

$D_1 = \{(x,y) \in D : x > 0\}$

$D_2 = \{(x,y) \in D : x < 0\}$ →

$D_3 = \{(x,y) \in D : x = 0\}$



Ahora:

- $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_3}} f(x,y) = 0 \qquad (f(x,y)=0).$$ (1)

- $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_1}} f(x,y) = \lim \sqrt{\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \underbrace{x^2}_{\to 0}} \quad , \quad \lim \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim (f(x))}$$

$$\rightsquigarrow 0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2\cdot(x^2+y^2)^{1/2} = 0$$

$$0 \leq \lim f(x,y) \leq 0 \Rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_1}} f(x,y) = 0$$ (2)

- $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_2}}$$ (análogo al anterior y sale 0) (3)

Aplicamos el teorema $\Rightarrow$ $\boxed{\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}} f(x,y) = 0}$

(Reducimos el problema a calcular el límite en otros dominios, si en esos dominios no sabemos calcular el límite entonces seguimos teniendo problemas, hay que seguir yendo a la definición para demostrar que es límite.)

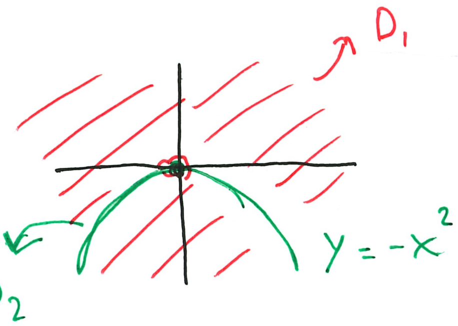
Ejemplo:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y} & \text{si } x^2 - y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x^2+y = 0 \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}^2 \rightarrow D = D_1 \cup D_2$ con:

$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y \neq 0\}$

$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 0\}$



- $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_2}} f(x,y) = 0$ (la función es nula).

- $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_1}} f(x,y)$ Probamos los iterados:

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x+y}{x^2+y}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 1/x$ no existe

$\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+y}{x^2+y}\right) = \lim\limits_{y\to 0} 1$

Existen los límites en una variable, y los iterados no son iguales $\Rightarrow \nexists L$

Aplicamos Tma! $\Rightarrow$ $\boxed{\nexists \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}} f(x,y)}$

Método alternativo: acercarnos por $y = x^2$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+x^2}{2x^2} \longrightarrow \nexists \Rightarrow$ no existe el límite reducido $\Rightarrow$

no existe el límite total en D_1 $\Rightarrow$ no existe el límite.

2.3 Continuidad

Definición:

Dada $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con dominio D, $x_0 \in D'$. Decimos que f es continua en x_0 cuando: ($x_0 \in D$)

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

(El límite cuando $x \to x_0$ de $f(x)$ es $f(x_0)$).

Equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$$

Equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : f((B(x_0, \delta))) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$$

Así:

f es continua en x_0 cuando dado V entorno de $f(x_0)$, $\exists U$ entorno de x_0 tal que $f(U) \subset V$.

(Dar un entorno, que contiene un abierto, una bola con un epsilon: $x \in B(x_0, \delta) \subset U \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$).

Propiedades:

1) f, g son continuas en x_0, $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces:

$$f+g \ , \quad \lambda f \ , \quad \langle f, g \rangle \ , \quad \| f \|$$

son continuas en x_0.

2) Si $f = (f_1, \dots, f_n)$, entonces es equivalente:

$$f \text{ continua en } x_0 \iff f_k \text{ continua en } x_0 \ , \ k \in \{1, \dots, n\}$$

Recordar:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_m) &\longmapsto (y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \quad \left\} \begin{array}{ll} f_1(x_1, \dots, x_m) = y_1 & (\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}) \\ \vdots & \\ f_n(x_1, \dots, x_m) = y_n & (\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}) \end{array} \right.$$

decimos que $f = (f_1, \dots, f_n)$

Para estudiar límite de f en $(0, \dots, 0)$ calculamos los límites en $(0, \dots, 0)$ de $f_1, \dots, f_n$ y así obtenemos el resultado. Hay que hacer n límites.

3)

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m &\xrightarrow{\ f\ } \mathbb{R}^n \xrightarrow{\ g\ } \mathbb{R}^p \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

a) Si f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en x_0.

b) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ y g es continua en y_0, entonces

$$g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) = \lim_{x\to x_0} g(f(x))$$

dem.:

Hip.: Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $\|y - y_0\| < \delta \Rightarrow \|g(y) - g(y_0)\| < \varepsilon$

Dado este $\delta > 0$, como f tiene límite, $\exists \gamma$ tal que

$0 < \|x - x_0\| < \gamma \Rightarrow \|f(x) - y_0\| < \delta$

Llamamos $y = f(x)$, sabemos: $\|y - y_0\| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \|g(y) - g(y_0)\| < \varepsilon \Rightarrow \|g(f(x)) - g(f(x_0))\| < \varepsilon$

Es decir:

dado $\varepsilon > 0$, $\exists \gamma > 0$: si $0 < \|x - x_0\| < \gamma \Rightarrow \|g(f(x)) - g(f(x_0))\| < \varepsilon$

y por tanto: $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$ $\square$

Observar:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \\ \lim_{y\to y_0} g(z) = z_0\end{array}\right. \cancel{\Rightarrow} \lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = z_0$$

Contraejemplo:

$f(x,y) = x + y$ (continua)

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

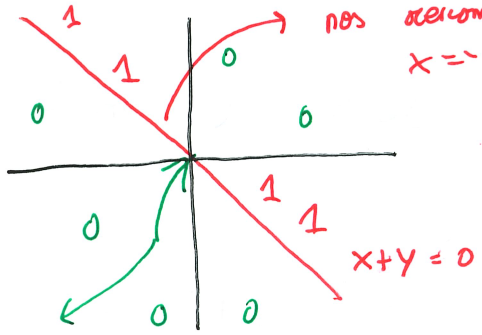
$$(g\circ f)(x,y) = g(f(x,y)) = g(x+y) \begin{cases} 0 & \text{si } x+y \neq 0 \\ 1 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$$

Observamos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Pero $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(f(x,y)) \not\exists$

$$\lim_{(x,y)\to(0)} g(x+y) = 0$$



$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} (g\circ f)(x,y) = 0 \\[2em] \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B}} (g\circ f)(x,y) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \not\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(f(x,y))$$

<u>Definición:</u>

Decimos que $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continua (global) en $A \subset \mathbb{R}^m$ cuando lo es localmente para todo punto de A. Es decir:

$$f \text{ continua en } A \subset \mathbb{R}^m \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} f \text{ continua } \forall x \in A$$

(En $\mathbb{R}$ en $[a,b]$ no se da pues el límite lateral izq en a no existe y análogo en B. Pero nuestra definición nos anticipa esto y no hace falta distinguir si es abierto o cerrado).
$(\ldots\ \forall x \in B(x_0,\delta)\cap D\ )$.

Propiedades (funciones continuas)

Sea $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con dominio $D \subset \mathbb{R}^m$ (D abierto, $D = \text{int}(D)$).

Entonces:

$$f \text{ continua en } A \subset D \iff \forall U \subset \mathbb{R}^n,\ f^{-1}(U) = \text{int}(f^{-1}(U))$$

$$\left(f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) \in U\} \right)$$

demos.:

$\Rightarrow$)

Sup. f es continua en A y sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto.

Veamos que $f^{-1}(U) = \text{int}(f^{-1}(U))$ (doble inclusión).

$f^{-1}(U) \supset \text{int}(f^{-1}(U))$ $^{(2)}$ es una propiedad. Tomemos $x \in f^{-1}(U)$

$\Rightarrow f(x) \in U$ como U es abierto $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(f(x), \varepsilon) \subset U$ (1)

Como f es continua, $\exists r > 0$ t.q. $\|y - x\| < r \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ Si $y \in B(x,r) \Rightarrow f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow y \in B(x,r) \cap D \Rightarrow f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$ $\Rightarrow$ $(A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B))$

$\Rightarrow f(B(x,r)\cap D) \subset B(f(x),\varepsilon) \overset{(1)}{\subset} U \longrightarrow B(x,r)\cap D \subset f^{-1}(U)$

$\hookrightarrow f^{-1}(f(A)) \supset A$

$r' = \max\{d(x, y \in B(x,r)\cap D)\}$

Tomamos $r' > 0$ t.q. $B(x,r') \subset B(x,r) \cap D$ $\quad (B(x,r)\cap D \subset f^{-1}(f(B(x,r)\cap D)) \subset f^{-1}(U))$

$\Rightarrow \exists r'$ t.q. $B(x,r') \subset f^{-1}(U) \Rightarrow \forall x \in f^{-1}(U),\ \exists r' > 0$ t.q.

$B(x,r') \subset f^{-1}(U) \Rightarrow \text{int}(f^{-1}(U)) \supset f^{-1}(U) \overset{(2)}{\Longrightarrow} \underline{f^{-1}(U) = \text{int}(f^{-1}(U))}$

$\Leftarrow$)

Sup. $\forall U \subset \mathbb{R}^m$ abierto $\Rightarrow f^{-1}(U)$ es abierto.

Sea $x \in A$.

Dado $\varepsilon > 0$, $B(f(x), \varepsilon)$ es abierto $\Rightarrow f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ es abierto en $\mathbb{R}^n$. Además, $x \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ y por ser abierto $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x)), \varepsilon)) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(B(x, \delta)) \subset f(f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)) \subset B(f(x), \varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ es continua.

Corolario 2.3.7

Una función $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continua $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^{-1}(F)$ es cerrado $\forall F \subset \mathbb{R}^n$

demos:

M cerrado $\Leftrightarrow M^c$ abierto $\overset{\text{Tma}}{\Rightarrow} f^{-1}(M^c)$ abierto $\Leftrightarrow$

$(f^{-1}(M))^c$ abierto $\Leftrightarrow f^{-1}(M)$ es cerrado

Teorema 2.3.8

Sea $M \subset \mathbb{R}^m$ un compacto y $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Entonces $f(M)$ es compacto.

dem.:

Supongamos que $f(M) \subset \overbrace{\bigcup_{i \in I} A_i}^{\text{recubrimiento}}$ con $A_i \subset \mathbb{R}^n$ abiertos $\forall i \in I$.

Aplicando $f^{-1} \Rightarrow$

$f^{-1}(f(M)) \subset f^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) \Rightarrow M \subset f^{-1}(f(M)) \subset f^{-1}\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$

Como M es compacto,

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{p} f^{-1}(A_i) \overset{\text{aplicar } f}{\Longrightarrow} f(M) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^{p} f^{-1}(A_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{p} f(f^{-1}(A_i)) \subset$$

$$\subset \bigcup_{i=1}^{p} (A_i) \Rightarrow f(M) \subset \underbrace{\bigcup_{i=1}^{p} (A_i)}_{\text{subrecubrimiento finito}} \subset \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow f(M) \text{ es compacto.}$$

Corolario 2.3.9 (teorema Weierstrass).

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ continua en un compacto $M \subset \mathbb{R}^M$. Entonces f alcanza los valores máximo y mínimo:

$$\exists x_1, x_2 \in M : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in M$$

demos.:

M compacto $\overset{f \text{ continua y Tma } 2.3.8}{\Longrightarrow}$ $f(M)$ compacto $\Rightarrow$ $f(M)$ acotado (y cerrado) en $\mathbb{R}$.

Como es acotado en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \exists\, s = \sup\{f(M)\}$ y $t = \inf\{f(M)\}$.

s, t son puntos de adherencia de $f(M)$ y como este es cerrado $\Rightarrow s, t \in f(M) \Rightarrow s = \max\{f(M)\}$ y $t = \min\{f(M)\}$ $\square$

Teorema 2.3.10 (continuidad función inversa)

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ inyectiva. $D \subset \mathbb{R}^m$ compacto y f continua en $D \Rightarrow$
$\Rightarrow f^{-1}$ continua en $f(D)$.

(siguiente cara)

demos.

A probar: $f^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua. Equivalente a probar que a todo cerrado C, $f(C)$ es cerrado. $((f^{-1})^{-1} = f)$

Sea $B \subset M$ cerrado. M compacto $\Rightarrow$ B también es acotado $\Rightarrow$ B cerrado y acotado $\Rightarrow$ B compacto.

Aplicamos Tma 2.3.8 y $f(B)$ es compacto $\Rightarrow$ $f(B)$ es cerrado y acotado $\Rightarrow$ $f(B)$ es cerrado $\underset{\text{Corolario 2.3.7}}{\Rightarrow}$ f^{-1} es continua $\square$

Continuidad Uniforme

Definición:

Sea $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ continua con dominio D.

Decimos que f es **uniformemente continua** en $A \subset D$ cuando:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \quad \forall x, y \in A$$

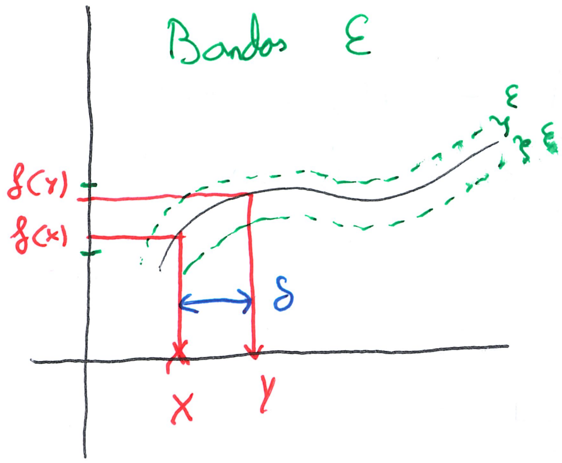
Equivalente a:

$$\forall x, y \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : x \in B(y, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(y), \varepsilon)$$

La diferencia con la continuidad normal es que aquí el δ solo depende de ε y no de los puntos, como en el caso de la continuidad normal que el delta si depende del x_0 elegido.

Observar que si fijamos $y = x_0$, la definición es la misma que la de continuidad. Eso es porque:

uniformemente continua $\Longrightarrow$ continua



($A \subset D$) Buscamos los conjuntos más grandes donde la función tenga las mejores propiedades. En este caso, los conjuntos más grandes son los subconjuntos del dominio que son compactos.

Teorema 2.3.12 (Heine - Cantor)

Sea $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ continua y $A \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto compacto. Entonces f es uniformemente continua en A.

dem.:

($\Longrightarrow$)

Hip.: f continua y A compacto (cerrado y acotado)

Tesis: f uniformemente continua

Sean $a, b \in M$, $\varepsilon > 0$ y dado cualquier $x \in M$, $\exists \delta_x > 0$ t.q.

$\|y - x\| < \delta_x \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon/2$

Observamos: $M \subset \bigcup_{x \in M} B(x, \delta_x/2)$ y como M es compacto $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{M \subset \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} B(x_i, \delta_i/2)}_{\text{Subrecubrimiento finito.}}$. Tomamos $\delta = \min\{\delta_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\} > 0$

Tomamos $a, b \in M$ tales que $\|a - b\| < \delta_x = \delta$

Como $a \in M \Rightarrow a \in B(x_j, \frac{\delta_j}{2})$ para cierto x_j. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \|a - x_j\| < \frac{\delta_j}{2}$ para algún $j \in \{1, \dots, n\}$

Entonces: (a probar $\|a-b\| < \delta \Rightarrow \|f(a) - f(b)\| < \varepsilon$)

$\|b - x_j\| = \|b - a + a - x_j\| \leq \|b-a\| + \|a - x_j\| \leq$

$\leq \delta + \frac{\delta_j}{2} \leq \frac{\delta_j}{2} + \frac{\delta_j}{2} = \delta_j$

Por hipótesis $\Rightarrow$ $\|a - x_j\| < \delta_{j/2} \Rightarrow \|f(a) - f(x_j)\| < \varepsilon/2$

$\|b - x_j\| < \delta_{j/2} \Rightarrow \|f(a) - f(x_j)\| < \varepsilon/2$

$\Rightarrow \|f(a) - f(b)\| \leq \|f(a) - f(x_j)\| + \|f(x_j) - f(b)\| \leq$

$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \Rightarrow$ Es unif. continua $\square$

Teorema 2.3.1 (caracterización por sucesiones).

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in D$. Entonces f es continua en $x_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \{x_k\}_{k \geq 1} \subset D$, $x_k \to x_0 \Rightarrow f(x_k) \to f(x_0)$,

es decir: $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(\lim_{k \to \infty} x_k)$

demos.:

Análoga a la hecha para sucesiones Tma. 2.2.1.

Hay una caracterización similar para la continuidad uniforme.

(Nota: continuidad uniforme es un concepto más global que la continuidad en un punto, que es local).

Proposición 2.3.13

Dada una función $f: D \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, f es uniformemente continua $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\forall (x_k), (y_k) \subset D$ tales que $\underbrace{(x_k - y_k)}_{\text{sucesión resta de sucesiones}} \longrightarrow 0$, se verifica que

$(f(x_k) - f(y_k)) \to 0$

Demos:

$\Rightarrow$)

f unif. cont. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Dados $(x_k), (y_k) \subset D$, si $(x_k - y_k) \longrightarrow 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$\|x_k - y_k\| < \delta \quad \forall k \geq k_0 \underset{\text{es unif. cont}}{\Rightarrow} |f(x_k) - f(y_k)| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow (f(x_k) - f(y_k)) \longrightarrow 0$ //

$\Leftarrow$)

Si f no es unif. cont., $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \exists x_k, y_k \in D$ con $\|x_k - y_k\| < 1/k$

pero $|f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon$

Podemos así construir $(x_k), (y_k)$ tales que $(x_k - y_k) \to 0$ pero

$(f(x_k) - f(y_k)) \not\to 0 \Rightarrow$ queríamos probar, que si existen

las sucesiones $\Rightarrow$ unif. cont, pero hemos probado el antirecíproco,

no unif. cont $\Rightarrow$ no existen $\Rightarrow$ demostrado $\square$

$(A \Leftarrow B, \ (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{no } B \Rightarrow \text{no } A))$

Teorema del punto fijo

Sea $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que verifica:

$\exists\, \alpha \in (0,1): \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \cdot \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Entonces:

f es uniformemente continua y además $\exists!\, p \in \mathbb{R}^n$ t.q. $f(p) = p$

(el punto fijo p).

demos:

La hipótesis es que tenemos una contracción (las distancias de las imágenes son menores que las originales).

Por hip.:

$\forall x, y \in \mathbb{R}^m$, dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta = \varepsilon/\alpha$ de manera que si

$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \cdot \|x - y\| < \alpha \cdot \delta = \cancel{\alpha} \cdot \varepsilon/\cancel{\alpha} = \varepsilon$

$\Rightarrow$ Es unif. continua por definición.

Ahora: sea $x \in \mathbb{R}^m$ y lo llamamos $p_0 = x$. Llamamos:

$p_1 = f(x) = f(p_0)$. Si $f(p_0) = p_0$ ya está, sino:

$p_2 = f(p_1)$. " $f(p_1) = p_1$ ya está, sino:

$\vdots$

$p_{k+1} = f(p_{k-1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Tenemos una sucesión $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$

Veamos que es de Cauchy (y por tanto que es convergente y tiene límite).

$$\| P_{k+1} - P_k \| = \| f(P_k) - f(P_{k-1}) \| \overset{f \text{ contracción}}{=} \alpha \cdot \| P_k - P_{k-1} \| =$$

$$= \alpha \cdot \| f(P_{k-1}) - f(P_{k-2}) \| = \alpha^2 \cdot \| P_{k-1} - P_{k-2} \| \leq \dots \leq$$

$$\leq \alpha^k \| P_1 - \underset{k-k}{\underset{\shortparallel}{P_0}} \| \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ahora: ($n > 0$, tomamos dos arbitrarios).

$$\| P_{k+n} - P_k \| = \| P_{k+n} - P_{k+n-1} + P_{k+n-1} - P_{k+n-2} + \dots - P_k \| \overset{\text{des. triang}}{\leq}$$

$$\leq \| P_{k+n} - P_{k+n-1} \| + \| P_{k+n-1} - P_{k+n-2} \| + \dots + \| P_{k+1} - P_k \| \overset{\text{probado}}{\leq}$$

$$\leq \alpha^{k+n-1} \cdot \| P_1 - P_0 \| + \alpha^{k+n-2} \cdot \| P_1 - P_0 \| + \dots + \alpha^k \cdot \| P_1 - P_0 \| =$$

$$= \| P_1 - P_0 \| \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{k+i} \leq \| P_1 - P_0 \| \cdot \sum_{j=k}^{\infty} \alpha^j \overset{|\alpha|<1}{=} \| P_1 - P_0 \| \cdot \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

$$(\alpha < 0, \ \alpha^k \xrightarrow{k \to 0} 0)$$

Es decir: $\| P_{k+n} - P_k \| \xrightarrow{k \to \infty} 0$, y es de Cauchy $\overset{\text{espacio euclídeo}}{\Rightarrow}$ es convergente $\Rightarrow$ tiene límite.

Tomamos $p = \lim_{k \to \infty} (P_k)$. A probar que $f(p) = p$.

Como f es unif. cont $\Rightarrow$ es cont $\Rightarrow$ $f(p) \overset{f \text{ función}}{=} f(\lim_{k \to \infty} (P_k)) \underset{f \text{ continua}}{=} \lim_{k \to \infty} f(P_k) =$ ($f(P_k) = P_{k+1}$)

$$\underset{\text{def de la sucesión}}{=} \lim_{k \to \infty} P_{k+1} \underset{\text{def de límite}}{=} p \Rightarrow f(p) = p$$

Veamos que p es único. Sean $p, p' \in \mathbb{R}^m$: $f(p) = p$ y $f(p') = p'$

$$\| p - p' \| \underset{\text{ser puntos fijos}}{=} \| f(p) - f(p') \| \leq \alpha \cdot \| p - p' \| \Rightarrow \| p \cancel{- p'} \| \leq \alpha \| p \cancel{- p'} \| \quad \alpha \geq 1$$

Absurdo por hipótesis $\Rightarrow \| p - p' \| = 0$ por los axiomas de norma $\Rightarrow p - p' = 0 \Rightarrow p = p'$ y es único. $\square$

Normas equivalentes

Algunas con nombres y apellidos:

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}, \quad p \geq 1$$

$$\|x\|_\infty = \max \{|x_k|, k = 1, \dots, n\}$$

¡Pero hay más! Mientras cumplan los axiomas podemos tener muchos tipos de normas que desconocemos.

Definición:
Decimos que dos normas son equivalentes en el mismo espacio, cuando $\exists \alpha, \beta > 0$ tales que:

$$\alpha \cdot \|x\|_* \leq \|x\|_\bullet \leq \beta \|x\|_*, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(Esto no pasa en espacios de dimensión infinita, pero en espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$ sí pasa).

Para ver que en $\mathbb{R}^n$ son todas equivalentes, necesitamos ver funciones lineales.

Funciones lineales

$f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es lineal cuando $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ es

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

(respeta las operaciones de espacio vectorial).

$(f(0) = f(x-x) = f(x) - f(x) = 0)$

(Si no, son afines).

(Visto en álgebra).

Vienen dados por matrices. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ con

$f(u_i) = a_{1i} \cdot v_1 + \ldots + a_{ni} \cdot v_n$ con $\{u_i\}_{i \in I}$ base de $\mathbb{R}^n$ y $\{v_i\}_{i \in I}$ de $\mathbb{R}^m$.

(bases ortonormales).

Proposición:

Toda función lineal es uniformemente continua.

demos.:

$f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (suponemos la norma euclídea).

$\{u_i\}_{i \in I}$ base ortonormal $\mathbb{R}^m$

$\{v_i\}_{i \in I}$ " " $\mathbb{R}^n$

Con:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, \quad x = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot u_i, \quad x_i = \langle x, u_i \rangle$$

Tomamos $x, y \in \mathbb{R}^m$. Entonces:

$$\|f(x) - f(y)\| \underset{f \text{ lineal}}{=} \|f(x-y)\| = \left\| \sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i) f(u_i) \right\| \overset{\text{des. triangular}}{\leq}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \|(x_i - y_i) \cdot f(u_i)\| = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i| \cdot \underbrace{\|f(u_i)\|}_{M = \max\{\|f(u_i)\|,\ i \in \{1, \ldots, m\}\}} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i| \cdot M = M \cdot \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|$$

Ahora bien:

$$|x_i - y_i| = \sqrt{|x_i - y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^2} = \|x - y\|$$

Por tanto:

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{m} \|x - y\| = m \cdot \|x - y\|$$

$$\Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq M \cdot m \cdot \|x - y\|$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{M \cdot m}$. Entonces:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \cdot m \cdot \|x - y\| \leq M \cdot m \cdot \delta \leq M \cdot \cancel{m} \cdot \frac{\varepsilon}{M \cdot \cancel{m}} = \varepsilon$$

$\Rightarrow f$ es uniformemente continua $\square$

Veamos ahora lo que nos interesaba:

<u>Proposición:</u>

Todas las normas definidas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.

<u>demos.:</u>

Observar que es transitiva:

$$a \sim b \Rightarrow \alpha \cdot \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq \beta \cdot \|x\|_b$$

$$b \sim c \Rightarrow \gamma \cdot \|x\|_c \leq \|x\|_b \leq \tau \cdot \|x\|_c$$

$$\Rightarrow \gamma \cdot \|x\|_c \leq \alpha \cdot \gamma \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq \beta \cdot \|x\|_b \leq \beta \cdot \tau \cdot \|x\|_c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma \cdot \|x\|_c \leq \|x\|_a \leq \beta \cdot \tau \cdot \|x\|_c \Rightarrow a \sim c \quad //$$

Veamos que todas las normas son equivalentes a la euclídea, y por la transitiva son todas entre sí.

Definimos la función identidad (no es idéntica como métrica).

Def: $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$
$x \longmapsto x$ $\Big\}$ $f(x) = x \to$ es lineal

$\Rightarrow f$ es unif. cont.

Entonces: (por la prop. anterior e $y = 0 \Rightarrow$)

$\|f(x)\| \leq M \cdot m \cdot \|x\|_2 \Rightarrow \|x\| \leq M \cdot n \cdot \|x\|_2$

Solo queda ver la otra desigualdad. A completar

$\begin{cases} n = \dim(\mathbb{R}^n) \\ M = \max\{\|f(u_i)\|, i \in \{1, \dots, m\}\} \end{cases}$