GRADO EN MATEMÁTICAS (2º CURSO)

MATEMÁTICA DISCRETA

8 de Enero de 2015 (convocatoria ordinaria)

Facultad de Ciencia y Tecnología UPV/EHU

1. En una parada de metro se suben 7 personas y hay 3 estaciones en las que el metro se detiene. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden bajar todos los pasajeros en las 3 estaciones si, al menos, se baja una persona en cada estación?

2 puntos

2. Demuestra la siguiente indentidad utilizando (a) su significado combinatorio y (b) otra demostración.

$$k^n = \sum_{\substack{r_1+\ldots+r_k=n \\ r_1,\ldots,r_k\geq 0}} \binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k}$$

2 puntos

3. Sea a_n el número de formas de apilar n fichas de colores Rojo, Blanco, Verde y Azul, de modo que no haya 2 fichas azules consecutivas.

   a) Calcular a_0, a_1 y a_2.
   b) Encontrar la relación de recurrencia.
   c) Escribir la expresión general para a_n.
   d) Encontrar la función generatriz.

2 puntos

4. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la sucesión de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$.

   a) Demuestra que $A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$.
   b) Utilizando el resultado anterior, prueba que $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.
   c) Utilizando el resultado del apartado (a), demuestra que $F_{n+m} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n,\ n, m \geq 1$.

2 puntos

5. Responder de manera breve y razonada a las siguientes cuestiones:

   a) ¿Cuántos árboles hay con 6 vértices? Dibújalos.
   b) ¿Cuántos árboles etiquetados hay con 6 vértices?
   c) ¿Cuántos árboles etiquetados hay con 6 vértices en los que v_1 tiene grado 3, v_2 grado 5, v_3 grado 1, v_4 grado 1, v_5 grado 1 y v_6 grado 1?
   d) ¿Cuántos árboles etiquetados hay con 6 vértices en los que v_1 tiene grado 3, v_2 grado 3, v_3 grado 1, v_4 grado 1, v_5 grado 1 y v_6 grado 1?
   e) ¿Cuántos árboles ordenados trivalentes con raíz hay de órden 6?
   f) ¿Cuántos árboles ordenados con raíz hay con 6 vértices?

2 puntos

GRADO EN MATEMÁTICAS (2º CURSO)

MATEMÁTICA DISCRETA

18 de Junio de 2015 (convocatoria extraordinaria)

Facultad de Ciencia y Tecnología UPV/EHU

1. Una ciudad tiene todas sus calles ordenadas como en una cuadrícula horizontal y verticalmente. Un ladrón roba el banco situado en las coordenadas $(0, 0)$ y sale corriendo para llegar lo antes posible a su casa situada en las coordenadas $(10, 10)$. ¿Cuántos caminos diferentes puede seguir si tiene que evitar pasar por las comisarías de policía situadas en las coordenadas $(3, 2)$ y $(6, 7)$?

2 puntos

2. Demuestra la siguiente indentidad utilizando (a) su significado combinatorio y (b) otra demostración.

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}$$

2 puntos

3. Sea a_n el número de maneras de colocar n bolas indistinguibles en 6 cajas numeradas de forma que en cada caja haya a lo sumo 70 bolas. Hallar:

   a) La función generatriz de $(a_n)_{n\geq 0}$.

   b) El valor de a_{300}.

   c) El valor numérico de las sumas $\sum_{n\geq 0} a_n$, $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ y $\sum_{n\geq 0} na_n$.

2 puntos

4. Teoría de los números de Catalan

   a) Define los números de Catalan.

   b) Escribe su relación de recurrencia.

   c) Calcula su función generatriz.

   d) Enumera todas las situaciones que conoces en las que aparezcan los números de Catalan.

2 puntos

5. Si se quita cualquier arista del grafo completo de 5 vértices, K_5, responde razonadamente a las cuestiones siguientes:

   a) ¿Es el grafo resultante conexo?

   b) ¿Posee el grafo resultante un ciclo Euleriano?

   c) ¿Y un camino Euleriano?

   d) ¿Un ciclo Hamiltoniano?

   e) ¿Es un árbol?

   f) ¿Es planar?

2 puntos