NOMBRE Y APELLIDOS: Josu Pérez Zorraonandia

Decidir si los siguientes enunciados son ciertos o falsos, dando un argumento corto (tipo, por la proposición... si es posible) o un contraejemplo, en su caso.

Sea (X, τ) un espacio topológico y β una base de τ.

1.- Si $F \subset X$ es un conjunto cerrado, entonces, $F \notin \tau$.

2.- Si $U \in \tau$, entonces $U \in \mathcal{N}_x$ para todo $x \in U$.

3.- Si $B \in \tau$, entonces $B \in \beta$.

4.- Si $F \subset X$ es un conjunto cerrado y $x \in F$, F no es un entorno del punto x.

1) Falso.

Por la observación 2.2 (pág. 25) (Contraejemplo: $F = \emptyset$ en (X, τ_{indis})).

2) Verdadero.

Por el Teorema 2.6, propiedad (N5) (pág. 27).

3) Falso.

Por la definición 2.4. $B \in \beta \Rightarrow B \in \tau$ pero $U \in \tau \not\Rightarrow U \in \beta$.

Contraejemplo: en $(\mathbb{R}, \tau_u)$

$\beta = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}$ es base de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ ejemplo 2.4 (pág. 26). $\mathbb{R} \in \tau_u$, pero $\mathbb{R} \notin \beta$.

4) Falso.

Por el Teorema 2.6, propiedad (N5) (pág. 27).

Contraejemplo en $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

$[0,1] \in C_u$, $\frac{1}{2} \in [0,1]$ y como $\frac{1}{2} \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \in \tau_u$

y es $\frac{1}{2} \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \subset [0,1] \Rightarrow [0,1] \in N_{1/2}$

Explicación más detallada.

4) Falso.

Contraejemplo. Tomamos $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$. Veamos que $[0,1] \in \mathcal{C}_u$.

$[0,1] \in \mathcal{C}_u \Leftrightarrow \mathbb{R} - [0,1] \in \mathcal{T}_u \Leftrightarrow (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \in \mathcal{T}_u$

$\Leftrightarrow \Big(\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n, -1/n)}_{A}\Big) \cup \Big(\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (1-1/n, n)}_{B}\Big) \in \mathcal{T}_u$

$A, B \in \mathcal{T}_u = \{\bigcup_{i\in I} (a_i, b_i) : a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$ y por ser $\mathcal{T}_u$ topología, por la tercera propiedad $A \cup B \in \mathcal{T}_u$. Se dan las dobles implicaciones, por tanto, $[0,1] \in \mathcal{C}_u$.

Tomamos $1/2 \in [0,1]$ y veamos que $[0,1] \in \mathcal{N}_{1/2}$. Para ello, tomamos: $\bigcup_{i\in\{1\}} (a_i, b_i)$ y $a_i = 1/4 \in \mathbb{R}$, $b_i = 3/4 \in \mathbb{R}$, por def. $\mathcal{T}_u$, $\bigcup_{i\in\{1\}} (a_i, b_i) = (1/4, 3/4) \in \mathcal{T}_u$. Es evidente que: $1/2 \in \underbrace{(1/4, 3/4)}_{\mathcal{T}_u} \subset [0,1] \Rightarrow [0,1] \in \mathcal{N}_{1/2}$

¡Está muy bien!

3) Falso.

Contraejemplo. Tomamos $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$. Por el ejemplo 6) de los ejemplos 2.4 (pág. 26), $\beta_1 = \{(a,b) : a<b, a,b \in \mathbb{R}\}$ es base de $\mathcal{T}_u$. Por ser $\mathcal{T}_u$ topología, $\mathbb{R} \in \mathcal{T}_u$. Sin embargo, $\mathbb{R} \notin \beta_1$; por red. abs. $\mathbb{R} \in \beta_1 \Rightarrow \mathbb{R} = (a,b) : a,b \in \mathbb{R}$ pero $a-1 \in \mathbb{R}$ y $a-1 \notin (a,b) \Rightarrow$ absurdo y $\mathbb{R} \neq (a,b) \Rightarrow \mathbb{R} \notin \beta_1$.

(ℝ no está acotado y (a,b) sí... quizás sea más fácil).

1) Falso.

Contraejemplo. En $(X, \mathcal{T}_{indis})$. Como es topología, $X, \emptyset \in \mathcal{T}_{indis}$.

$\emptyset \in \mathcal{C}_{indis}$ porque $\emptyset^c = X - \emptyset = X \in \mathcal{T}_{indis}$, $\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}_{indis}$, $\emptyset \in \mathcal{C}_{indis}$

De hecho, el caso es análogo para X y $\mathcal{T}_{indis} = \mathcal{C}_{indis}$