Cálculo diferencial e integral 2/Seminario 1

Nombre:

C1) *¿Cuáles de las siguientes funciones definidas en* $\mathbb{R}^3$ *son normas?*

a) $n(x,y,z) = |x| + 2|y| + 3|y-z|$. ☐

b) $n(x,y,z) = |x| + 2|y| + 3|y+z|$. ☐

c) $n(x,y,z) = |x| - 2|y| + 3|y-z|$. ☐

d) $n(x,y,z) = |x| + 2|y| + |3y-z|$. ☐

C2) *En el espacio euclídeo* $\mathbb{R}^n$*, probar la llamada identidad del paralelogramo:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Encontrar un ejemplo en el que esta igualdad es falsa en el caso de la norma $\|\cdot\|_1$.

C3) *Sean* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *dos vectores no nulos. ¿Es cierto que*

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff \textit{existe } \lambda \neq 0 \textit{ tal que } x = \lambda y?$$

C4) *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto arbitrario. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas?*

a) $A = \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{fr}(A)$. ☐

b) $A \subset A'$. ☐

c) A *es abierto si y sólo si* $A \cap \operatorname{fr}(A) = \emptyset$. ☐

d) A *es cerrado si y sólo si* $\operatorname{fr}(A) \subset A$. ☐

C5) *Sean* $A, B \subset \mathbb{R}^2$*. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas?*

a) Si A *es acotado, entonces* A' *es compacto.* ☐

b) Si B *es cerrado, entonces* $\operatorname{fr} B \subset B$. ☐

c) Si B *es acotado, entonces* $\overline{B}$ *es compacto.* ☐

d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ☐

C6) *¿Cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos en $\mathbb{R}^2$ con la distancia euclídea?*

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$. ☐

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$. ☐

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - |y| \neq 1\}$. ☐

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < xy < 1\}$. ☐

C7) *Calcular los siguientes límites, en caso de existir:*

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \operatorname{sen} \frac{1}{xy}$. ☐

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,\infty)} y \operatorname{sen} \frac{1}{xy}$. ☐

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1 + xy)^{\frac{1}{x+y}}$. ☐

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\infty)} (1 + xy)^{\frac{1}{x+y}}$. ☐

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{|x| + |y|}$. ☐

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2|x|^3 - |y|^2}{|x| + |y|}$. ☐

Soluciones

P1) Las opciones a), b) y d) son correctas. En el apartado c), el vector $(2,1,1)$ es no nulo pero $n(2,1,1)=0$.

P2) Por definición del producto escalar asociado a una norma,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= \langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle+2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle+\langle x,x\rangle-2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle = 2\|x\|^2+2\|y\|^2.\end{aligned}$$

Si tomamos los vectores $x=(1,0)$ e $y=(0,1)$, entonces $\|x\|_1=\|y\|_1=1$ y $\|x+y\|_1=\|x-y\|_1=2$. Por tanto, $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=8$ pero $2\|x\|^2+2\|y\|^2=4$.

P3) Es falso porque, si tomamos los vectores $x=(1,1)$ e $y=(-1,-1)$, entonces existe $\lambda=-1$ tal que $y=\lambda x$. Sin embargo, $\|x+y\|=0$ pero $\|x\|+\|y\|=2\sqrt{2}$.

P4) a) $A=\operatorname{int}(A)\cup \operatorname{fr}(A)$ es falso. Basta elegir $A=(a,b)\subset\mathbb{R}$. Entonces $\operatorname{int} A=(a,b)$ y $\operatorname{fr} A=\{a,b\}$. Por tanto, $\operatorname{int}(A)\cup\operatorname{fr}(A)=[a,b]\neq A$.

b) $A\subset A'$ es falso. Si $A=\{a,b\}\subset\mathbb{R}$, entonces $A'=\emptyset$.

c) A es abierto si y sólo si $A\cap\operatorname{fr}(A)=\emptyset$ es verdadero.

Por un lado, si A es abierto, supongamos que existe $x\in A\cap\operatorname{fr}(A)$. Como $x\in A$, entonces existe $r>0$ tal que $B(x,r)\subset A$, es decir $B(x,r)\cap A^c=\emptyset$. Pero, como $x\in\operatorname{fr}(A($, $B(x,r)\cap A^c\neq\emptyset$, lo que es absurdo.

Recíprocamente, si $A\cap\operatorname{fr}(A)=\emptyset$, dado $x\in A$, entonces $x\notin\operatorname{fr}(A)$. Por tanto, existe $r>0$ tal que $B(x,r)\cap A^c=\emptyset$, de donde $B(x,r)\subset A$. Así pues, A es abierto.

d) A es cerrado si y sólo si $\operatorname{fr}(A)\subset A$ es verdadero.

Si A es cerrado, dado $x\in\operatorname{fr}(A)$, entonces $x\in\overline{A}$. Como $\overline{A}=A$, entonces $x\in A$.

Por otra parte, si $\operatorname{fr}(A)\subset A$, entonces $\overline{A}\subset A$, de donde A es cerrado.

P5) Todas las proposiciones son correctas.

a) Veamos en primer lugar que, si $A\subset B$, entonces $\overline{A}\subset\overline{B}$.

Para ello, si $x\in\overline{A}$, entonces $B(x,r)\cap A\neq\emptyset$, para todo $r>0$. Como $A\subset B$, entonces $B(x,r)\cap B\neq\emptyset$, para todo $r>0$, de donde $x\in\overline{B}$.

Así pues, si A es acotado, existe $k>0$ tal que $A\subset B(0,k)$. Por tanto, $\overline{A}\subset\overline{B}(0,k)$. Como A' es cerrado y $A'\subset\overline{A}$, entonces $A'\subset\overline{B}(0,k)$, de modo que A' es compacto.

b) Como $\operatorname{fr} B\subset\overline{B}$ y B es cerrado, entonces $B=\overline{B}$, con lo que $\operatorname{fr} B\subset B$.

c) La prueba es similar a la del apartado a).

d) Por una parte, como $A\subset A\cup B$ y $B\subset A\cup B$, entonces $\overline{A}\subset\overline{A\cup B}$ y $\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$. Por tanto, $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$.

Por otra parte, si $x\in\overline{A\cup B}$, entonces $B(x,r)\cap(A\cup B)\neq\emptyset$, para todo $r>0$, de donde $B(x,r)\cap A\neq\emptyset$ ó $B(x,r)\cap B\neq\emptyset$. Entonces $x\in\overline{A}$ ó $x\in\overline{B}$, es decir $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$.

P6) Los conjuntos A y B no son abiertos pero sí lo son los conjuntos C y D. En concreto, $\operatorname{int} A = \operatorname{int} B = \emptyset$.

P7) a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \operatorname{sen} \frac{1}{xy} = 0$ porque se trata del producto de una función acotada por una función cuyo límite es cero.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,\infty)} y \operatorname{sen} \frac{1}{xy} = \lim_{(x,y)\to(2,\infty)} \frac{1}{x} xy \operatorname{sen} \frac{1}{xy} = \frac{1}{2}$ debido a la equivalencia de infinitésimos $f(x) \sim \operatorname{sen} f(x)$ cuando $f(x) \to 0$.

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{xy}\frac{xy}{x+y}} = e^{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}}$.

Este límite no existe porque

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2-x}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2-x)}{x^2} = -1$$

pero los límites laterales son cero.

d) Como no existe $\lim_{(x,y)\to(0,\infty)} xy$, tampoco existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\infty)} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$.

e) Descomponemos el límite como

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2|x|^3 - |y|^2}{|x|+|y|} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{2|x|^3}{|x|+|y|} - \frac{|y|^2}{|x|+|y|} \right) \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(2|x|^2 \cdot \frac{|x|}{|x|+|y|} - |y| \cdot \frac{|y|}{|x|+|y|} \right).\end{aligned}$$

Como $0 \leqslant \dfrac{|x|}{|x|+|y|} \leqslant \dfrac{|x|+|y|}{|x|+|y|} = 1$, entonces $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2|x|^2 \cdot \frac{|x|}{|x|+|y|} = 0$.

Análogamente, como $0 \leqslant \dfrac{|y|}{|x|+|y|} \leqslant \dfrac{|x|+|y|}{|x|+|y|} = 1$, entonces $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| \cdot \frac{|x|}{|x|+|y|} = 0$.

f) Descomponemos el límite como

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2|x|^3 - |y|^2}{|x|+|y|} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{2|x|^3}{|x|+|y|} - \frac{|y|^2}{|x|+|y|} \right) \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(2|x|^2 \cdot \frac{|x|}{|x|+|y|} - |y| \cdot \frac{|y|}{|x|+|y|} \right).\end{aligned}$$

Como $0 \leqslant \dfrac{|x|}{|x|+|y|} \leqslant \dfrac{|x|+|y|}{|x|+|y|} = 1$, entonces $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2|x|^2 \cdot \frac{|x|}{|x|+|y|} = 0$.

Análogamente, como $0 \leqslant \dfrac{|y|}{|x|+|y|} \leqslant \dfrac{|x|+|y|}{|x|+|y|} = 1$, entonces $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| \cdot \frac{|x|}{|x|+|y|} = 0$.