Capítulo 3

Espacio Dual

Sean V y W dos $\mathbb{K}$- e.v. Tomamos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) = L(U,V) = \{f : V \to W \text{ t.q. } f \text{ es } \underset{\overset{\shortparallel}{\text{lineal}}}{\text{homomorfismo}}\}$$

Definimos:

$$
\begin{aligned}
+ : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) \\
(f, g) &\longmapsto f+g
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

y

$$
\begin{aligned}
\cdot : \mathbb{K} \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) \\
(\lambda \cdot f) &\longmapsto \lambda \cdot f
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Queda como ejercicio propuesto probar que $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W), +, \cdot)$ tiene estructura de $\mathbb{K}$- e.v. (Ejer 1).

Sean $\beta_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base de W.

(Siguiente cara).

[(1) $(f+g)(v) = f(v)+g(v)$ y (2) $(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$]

Si $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j \in \{1, \dots, m\}$ definimos:

$f_{ij} : V \longrightarrow W$ t.q. ($f_{ij} \in Hom(V, W)$ ejercicio. <u>Ejer 2</u>)

$$f_{ij}(v_r) = \begin{cases} w_j & \text{si } r = i \\ 0 & \text{si } r \neq i \end{cases} = \underbrace{\delta_{ri}}_{\text{delta de kronecker}} \cdot w_j \in W$$

$$\left(\text{Recordamos la delta de kronecker.} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \right)$$

Obligamos además a que $f_{ij} \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$.

Proposición 3.1:

$\{f_{ij}\}$ es base de $Hom(V, W)$

dem.:

Veamos que es un conjunto $\mathbb{K}$-libre. Tomamos $\lambda_{11}, \dots, \lambda_{nm} \in \mathbb{K}$.
E igualamos a 0.

$$\lambda_{11} f_{11} + \lambda_{12} f_{12} + \dots + \lambda_{1m} f_{1m} + \lambda_{21} f_{21} + \dots + \lambda_{2m} f_{2m} + \dots$$
$$\dots + \lambda_{n1} f_{1n} + \dots + \lambda_{nm} f_{nm} = 0$$

Tomamos imágenes por v_1:

$$\lambda_{11} f_{11}(v_1) + \dots + \lambda_{nm} f_{nm}(v_1) = 0(v_1) =$$
$$= \lambda_{11} w_1 + \lambda_{12} w_2 + \dots + \lambda_{1m} w_m + \bar{0} + \dots + \bar{0} + \dots + \bar{0} + \dots + \bar{0} = \bar{0}$$

Y como $\{w_1, \dots, w_m\}$ es base $\Rightarrow \lambda_{11} = \lambda_{12} = \dots = \lambda_{1m} = 0$

Podemos repetir este proceso $\forall v_i \in \{v_1, \dots, v_n\}$ de manera que obtenemos $\lambda_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \in I \times J \Rightarrow$ Es un conjunto $\mathbb{K}$-libre.

Veamos que es $\mathbb{K}$-s.g. Dado $g \in Hom(V,W)$, g está definida por las imágenes de los vectores básicos. Es decir:

$$g(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} w_j \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

De manera que tomando:

$$h = a_{11} f_{11} + a_{12} f_{12} + \dots + a_{1m} f_{1m} + \dots + a_{n1} f_{n1} + \dots + a_{nm} f_{nm}$$

$h \in Hom_{\mathbb{K}}(V,W)$. Por tanto tiene el mismo dominio que g.

Tomamos v_1.

$$h(v_1) = a_{11} f_{11}(v_1) + a_{12} f_{12}(v_1) + \dots + a_{nm} f_{nm}(v_1) =$$

$$= a_{11} w_1 + a_{12} w_2 + \dots + a_{1m} w_m + \bar{0} + \dots + \bar{0} =$$

$$= g(v_1)$$

Podemos repetir este proceso $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ y $h(v_i) = g(v_i)$

$\Rightarrow$ h y g tienen la misma imagen $\forall v \in V$.

Mismo dominio y codominio y misma regla $\Rightarrow h = g$ y $\{f_{ij}\}$ es $\mathbb{K}$-s.g $\Rightarrow$ (hemos probado la otra condición) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ es base. $\square$

Scanned by CamScanner

Corolario 3.2:

Si $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\dim(\mathrm{Hom}(V,W)) = n \cdot m$

dem.:

Tomamos por prop. 3.1 la base $\{f_{ij}\}$, $\dim(\mathrm{Hom}(V,W)) =$
$= |\{f_{ij}\}|$. Como $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j \in \{1, \dots, m\}$. $\Rightarrow$
$\Rightarrow |\{f_{ij}\}| = n \cdot m \Rightarrow \dim(\mathrm{Hom}(V,W)) = n \cdot m$ $\square$

Definición 3.3:

El espacio dual de un $\mathbb{K}$-e.v. V, denotado por V^* es:

$$V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}) = L(V, \mathbb{K}) = \{f : V \to \mathbb{K} \text{ t.q. } f \text{ es homomorfismo} \}$$
$$\text{lineal}$$

Tenemos por tanto con las observaciones del principio, que: $(V^*, +, \cdot)$ tiene estructura de $\mathbb{K}$-e.v. Esta terna es el espacio dual del $\mathbb{K}$-e.v. V y abusando de notación diremos que V^* es el espacio dual de V.

Observamos que V^* no es un espacio vectorial canónico ya que depende de las bases escogidas para V y $\mathbb{K}$ (para V).

Por el corolario 3.2, $\dim(V^*) = \dim(V) \cdot \underbrace{\cancel{\dim}(\mathbb{K})}_{1} = \dim(V)$

Un cuerpo como $\mathbb{K}$-e.v. tiene $\dim(\mathbb{K}) = 1$

Si $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V. Entonces:

$$f_i(v_j) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{array} \right\} = \delta_{i,j}$$

$$(f_i(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_i v_i + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_i)$$

Tomando $\{f_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ obtenemos una base para V^*.

Definición 3.4:

Sean V y W dos $\mathbb{K}$-e.v. y sea $f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$.
Definimos el homomorfismo dual o dual del homomorfismo de f como la siguiente aplicación: $f^* \in Hom(W^*, V^*)$

$$\begin{array}{rccl} f^* : & W^* & \longrightarrow & V^* \\ & g & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

Veamos que f^* es lineal:

Si $g_1, g_2 \in W^*$. Entonces:

distributividad de composición de funciones.

$$f^*(g_1 + g_2) = (g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f = f^*(g_1) + f^*(g_2)$$

linealidad de composición de funciones lineales.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces:

$$f^*(\lambda g_1) = (\lambda g_1) \circ f = \lambda \cdot (g_1 \circ f) = \lambda \cdot f^*(g_1)$$

Por tanto f^* es lineal, y como está definida de W^* a V^* $\Rightarrow f^* \in Hom(W^*, V^*)$.

Proposición 3.5:

Si $f \in Hom(V,W)$, βv es una base de V, βw es una base de W. Tomamos los respectivos bases de la proposición 3.1 para los duales V^* y W^* (βv^* y βw^*).

Entonces: Si $M_{\beta v, \beta w}(f) = A \Rightarrow M_{\beta v^*, \beta w^*}(f^*) = A^t$

dem.:

Por hip.:

$$M_{\beta v, \beta w}(f) = A \Rightarrow f(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} w_j \quad , \text{ con } (a_{ij})_{ij} = A$$

Si (Recordar: $\dim(V^*) = \dim(V) \cdot 1 \Rightarrow i \in \{1, \dots, n\}$ y $\underbrace{j = 1}_{j = cte, \text{ nos olvidamos de } j}$)

$g_i(v_r) = \delta_{r,i} \in \mathbb{K}$, con $\{g_i\}_{i \in I} = \beta v^*$

Si

$h_j(w_r) = \delta_{r,j} \in \mathbb{K}$, con $\{h_j\}_{j \in J} = \beta w^*$. $(\underbrace{i \in \{1, \dots, n\}}_{=I}$ y $\underbrace{j \in \{1, \dots, m\}}_{=J})$

Veamos cuál es la matriz asociada a f^*.

$$\underbrace{f^*(\underbrace{h_j}_{\in W^*})}_{\in V^*} = (\underbrace{h_j \circ f}_{\in V^*}) = \underbrace{h_j(f)}_{\in V^*} \quad (h_j(f) : V \to \mathbb{K}) \quad V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{h_j} \mathbb{K}$$

$$(h_j(f))(v_i) = h_j(f(v_i)) = h_j\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} w_k\right) \underset{\text{y def } h_j}{\overset{h_j \text{ hom.}}{=}} a_{ij} \, .$$

Veamos que $\underbrace{f^*(h_j)}_{\in V^*} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot g_i}_{\in V^*}$

Tienen dominios y codominios iguales, falta ver que son la misma aplicación.

¿ $f^*(h_j)(v) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot g_i\right)(v) \quad \forall v \in V$?

Basta ver los básicos: $\beta_V = \{v_1, \dots, v_n\}$

$f^*(h_j)(v_1) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{acabamos de verlo}}}{=} a_{1j}$

y (Tomando $k=i$, recorremos con k para evitar confusiones en el siguiente paso).

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\, g_k(v_1) \overset{\substack{g_k \text{ lineal} \\ \uparrow}}{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{def } g_k}}{=}} 0 + \dots + 0 + a_{1j} + 0 + \dots + 0 = a_{1j}$$

En general: $(\forall i \in \{1, \dots, n\})$

$f^*(h_j)(v_i) = a_{ij}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot g_k(v_i) = a_{ij}$$

Mismo dominio, codominio y regla $\Rightarrow$ son la misma aplicación.

Por tanto, $f^*(h_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot g_i \Rightarrow$ La matriz asociada

a f^* es $(a_{ji})_{i,j} = (a_{ij})^T_{i,j} = A^T$ $\square$

[Recordamos: (EN NOTACIÓN POR FILAS (Para columnas basta tomar traspuestos))

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} w_j \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c|c|c} & w_1 & w_2 & \dots \\ \hline f(v_1) & a_{11} & a_{12} & \dots \\ f(v_2) & a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & & \vdots & \end{array}\right) \Rightarrow M_\beta(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

$\|$

(notación) $\rightarrow$ A por filas

A^T por columnas

$$f^*(h_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} g_i \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c|c|c} & g_1 & g_2 & \dots \\ f^*(h_1) & a_{11} & a_{21} & \dots \\ \hline f^*(h_2) & a_{12} & a_{22} & \\ \vdots & & \vdots & \ddots \end{array}\right) \Rightarrow M_\beta(f^*) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$\|$

A^T por filas

(notación) $\rightarrow$ A por columnas]

Corolario 3.6:

Si $\beta_V, \beta_W, \beta_{V^*}, \beta_{W^*}$ son bases de V, W, V^*, W^* respectivamente, (los de la proposición 3.1), entonces:

$$M_{\beta_{V^*}, \beta_{W^*}}(f^*) \overset{(1)}{=} \left(M_{\beta_V, \beta_W}(f)\right)^t \overset{(2)}{=} \left(\left(M_{\beta_W, \beta_V}(f^{-1})\right)^{-1}\right)^t$$

dem.:

La igualdad (1) la tenemos por la proposición 3.5

$$M_{\beta_V, \beta_W}(f) = A = B^T \Rightarrow M_{\beta_{V^*}, \beta_{W^*}}(f^*) = A^T = (B^T)^T = B$$

$$\Rightarrow B = (B^T)^T \Rightarrow M_{\beta_{V^*}, \beta_{W^*}}(f^*) = \left(M_{\beta_V, \beta_W}(f)\right)^T.$$

(y viceversa tomando traspuestos, $\left(M_{\beta_{V^*}, \beta_{W^*}}(f^*)\right)^T = \left(M_{\beta_V, \beta_W}(f)\right)$).

Para ver que la igualdad (2) es cierta, basta ver que $M_{\beta_V, \beta_W}(f) = \left(M_{\beta_W, \beta_V}(f^{-1})\right)^{-1}$. Pero (si existe f^{-1}), sabemos que $M_{\beta_W, \beta_V}(f^{-1}) = \left(M_{\beta_V, \beta_W}(f)\right)^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(M_{\beta_V, \beta_W}(f)\right)\left(M_{\beta_W, \beta_V}(f^{-1})\right) = I_n \Rightarrow$$

(Multiplicar a ambos lados por $\left(M_{\beta_V, \beta_V}(f)\right)^{-1}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{\beta_W, \beta_V}(f^{-1}) = \left(M_{\beta_V, \beta_W}(f)\right)^{-1} \\ M_{\beta_V, \beta_W}(f) = \left(M_{\beta_W, \beta_V}(f^{-1})\right)^{-1} \end{cases}$$

Por tanto, se cumplen (1) y (2). $\square$

Proposición 3.7:

Sea V un $\mathbb{K}$-e.v. Sea V^* su espacio dual. Entonces:

$$V \sim V^* \quad (\text{son } \mathbb{K}\text{-e.v. isomorfos}).$$

dem.:

Por el teorema 7.17 del libro de Vera (isomorfos $\Leftrightarrow$ equipotentes (misma cardinalidad)), basta ver que tienen la misma dimensión para probarlo.

$\dim(V) = n$ (hip.)

$\dim(V^*) = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})) \overset{(1)}{=} n \cdot 1 = n$

(Donde en (1) hemos usado el corolario 3.2 y que $\dim(\mathbb{K}) = 1$) $\square$

Definición 3.8:

Dado V un $\mathbb{K}$-e.v. definimos el espacio bidual a V como el dual del dual, es decir:

$$(V^*)^* \longrightarrow \text{espacio dual}$$

$$(V^*)^* = \{g : V^* \longrightarrow \mathbb{K} : g \text{ es lineal}\}$$

Proposición 3.9:

Sea V un $\mathbb{K}$-e.v. Sea $(V^*)^*$ su espacio bidual. Entonces:

$$V \sim (V^*)^* \quad (\text{son } \mathbb{K}\text{-e.v. isomorfos}).$$

dem.:

$\dim(V) = n$, Por hip. Por 3.7, $(V^*) \sim (V^*)^* \Rightarrow \dim((V^*)^*) = \dim(V^*)$ y aplicando de nuevo 3.7, $\dim(V^*) = \dim(V) = n \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim((V^*)^*) = \dim(V) = n \Rightarrow$ Aplicamos 7.17 libro Vera. $\square$

Observación:

La demostración es válida sin importar el número de veces que apliquemos ⊛ (mientras esta sea finita). $\Rightarrow V \sim (((V^*)^*)^{\cdots})^*$

Pese a que la demostración es válida para $(V^*)^*$, nos interesa buscar una aplicación de $V \to (V^*)^*$ que sea un isomorfismo para ver cómo se relacionan las estructuras, por tanto vamos a buscar otra prueba alternativa:

Recordando que $M_\beta(f) = (M_{\beta^*}(f^*))^T$, observamos que el dual refleja de una manera abstracta la relación entre los vectores fila y columna de una matriz.

Lema 3.10:

Dados dos vectores $v_1, v_2 \in V$ t.q. $v_1 \neq v_2$, existe al menos una $f \in V^*$ tal que $f(v_1) \neq f(v_2)$.

dem.:

Equivalente a demostrar que: (por linealidad de f, $f(v_1 - v_2) \neq \bar{0}$ y $(v_1 - v_2) \neq 0$).

Dado $v \in V$ t.q. $v \neq \bar{0}$, $\exists f \in V^*$ t.q. $f(v) \neq 0$.

Tomamos el subespacio generado por v: $\langle v \rangle$, y tomamos W su subespacio complementario (existe por el teorema 7.12 del libro de Vera).

Por ser complementarios: $\langle v \rangle \oplus W = V \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{k}}(W) = \dim_{\mathbb{k}}(V) - \dim_{\mathbb{k}}\langle v\rangle = n - 1$

Tomamos el subespacio cociente V/W con dimensión

$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W) = n - (n-1) = 1$.

Como $\dim(V/W) = 1$, $v \neq 0$ y $\langle v\rangle \oplus W \Rightarrow$ (por ser complementarios, $\langle v\rangle \cap W = \{\bar{0}\} \Rightarrow v \notin W \Rightarrow [v] \neq \bar{0}$).

clase de equivalencia

$\Rightarrow$ Podemos construir una base de V/W con $\{[v]\}$ ($|\{[v]\}| = 1 \Rightarrow$ es $\mathbb{k}$-libre maximal y $\Rightarrow$ base)

Es decir: $V/W = \langle [v] \rangle$. Luego si $u \in V/W \Rightarrow$

$\Rightarrow u = \lambda \cdot [v]$ con $\lambda \in \mathbb{k}$. Definimos dos aplicaciones:

$$g : V/W \longrightarrow \mathbb{k} \qquad\qquad y \qquad\qquad h : V \longrightarrow V/W$$
$$\lambda[v] \longrightarrow \lambda \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad v \longrightarrow [v]$$

Veamos que son lineales:

$$g(\lambda_1[v] + \lambda_2[v]) \underset{\substack{\downarrow \\ V/W\ \mathbb{k}\text{-e.v.}}}{=} g((\lambda_1+\lambda_2)[v]) = (\lambda_1+\lambda_2) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$= g(\lambda_1[v]) + g(\lambda_2[v])$ //

$$g(\mu\cdot(\lambda[v])) \underset{\substack{\downarrow \\ V/W\ \mathbb{k}\text{-e.v.}}}{=} g(\mu\cdot\lambda[v]) = \mu\cdot\lambda = \mu\cdot(\lambda) =$$

$= \mu \cdot g(\lambda[v])$ //

$\Rightarrow g$ es homomorfismo.

$$h(v_1+v_2) \underset{\text{def } h}{=} [v_1+v_2] \underset{V/W\ \mathbb{k}\text{-ev.}}{=} [v_1]+[v_2] = h(v_1)+h(v_2) \quad //$$

$$h(\lambda v_1) \underset{\text{def } h}{=} [\lambda v_1] \underset{V/W\ \mathbb{k}\text{-ev.}}{=} \lambda [v_1] = \lambda h(v_1) \quad //$$

$\Rightarrow$ h es homomorfismo.

Tomamos ahora $f = g \circ h : V \longrightarrow \mathbb{k}$ tal que:

$$f : V \longrightarrow \mathbb{k} \qquad \left(\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{h} & V/W & \xrightarrow{g} & \mathbb{k} \\ v & \longmapsto & [v] & & \\ & & \lambda[v] & \longrightarrow & \lambda \end{array} \right)$$
$$v \longmapsto \lambda$$

Como f es composición de funciones lineales $\Rightarrow$ es lineal

$\Rightarrow$ $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k}) = V^*$. Además:

$$f(v) = g(h(v)) = g(\lambda [v]) = \lambda$$

En el caso de v, $\lambda = 1 \neq 0 \Rightarrow f(v) \neq 0$.

Por tanto, $\forall v \in V,\ v \neq 0,\ \exists f \in V^*$ t.q. $f(v) \neq 0$. $\square$

Demostraremos a continuación el teorema que nos interesaba desde un principio.

Teorema 3.11 (de reflexividad)

Sea V un $\mathbb{k}$-e.v. Sean V^* y V^{**} su dual y bidual respectivamente. Existe una aplicación canónica:

$$\Psi : V \longrightarrow V^{**}$$

que transforma a cada vector $v \in V$ en una forma lineal $\Psi(v) \in V^{**}$. Cada una de estas formas queda definida como sigue:

$$\begin{aligned} \Psi(v) : V^* &\longrightarrow \mathbb{k} \\ f &\longmapsto (\Psi(v))(f) := f(v) \end{aligned}$$

donde $f \in V^*$. Esta aplicación Ψ es un isomorfismo.

dem.:

Veamos que $\Psi(e)$ (bastan ver los vectores básicos) es $\Psi(e) \in V^{**}$. Por definición de $\Psi(e)$, basta ver que es lineal: Sean $f_1, f_2 \in V^*$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{k}$.

(i)

$$(\Psi(v))(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) \overset{\text{def } \Psi(v)}{=} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v) \overset{V^* \ \mathbb{k}\text{-e.v.}}{=}$$

$$= \lambda_1 f_1(v) + \lambda_2 f_2(v) \underset{\text{def } \Psi(v)}{=} \lambda_1 \Psi(v)(f_1) + \lambda_2 \Psi(v)(f_2)$$

$\Rightarrow$ es lineal.

Veamos ahora que $\Psi : V \longrightarrow V^{**}$ es lineal.

Tomamos $v_1, v_2 \in V$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{k}$. Entonces:

(Siguiente cara).

$$\Psi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \overset{¿?}{=} \lambda_1 \Psi(v_1) + \lambda_2 \Psi(v_2)$$

Esto es equivalente a ver si las aplicaciones coinciden. Ambas pertenecen a V^{**}, basta ver si sus imágenes son iguales:

$$¿(\Psi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2))(f) = (\lambda_1 \Psi(v_1) + \lambda_2 \Psi(v_2))(f), \ \forall f \in V^* ?$$

Desarrollando el primer término:

$$(\Psi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2))(f) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$$

Desarrollando el segundo:

$$(\lambda_1 \Psi(v_1) + \lambda_2 \Psi(v_2))(f) \overset{\text{linealidad}}{=} \lambda_1 (\Psi(v_1))(f) + \lambda_2 (\Psi(v_2))(f) =$$

$$= \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$$

Por tanto son iguales $\Rightarrow$ Ψ es lineal.

Falta ver que es biyectiva: inyectiva y suprayectiva.

Inyectividad. Sean $v_1, v_2 \in V$, $v_1 \neq v_2 \overset{¿?}{\Rightarrow} \Psi(v_1) \neq \Psi(v_2)$

Como $v_1 \neq v_2$, por el lema, $\exists f \in V^*$ t.q. $f(v_1) \neq f(v_2)$.

Por def de Ψ:

$(\Psi(v_1))(f) = f(v_1)$ y $f(v_1) \neq f(v_2) \Rightarrow \Psi(v_1)(f) \neq \Psi(v_2)(f)$

$(\Psi(v_2))(f) = f(v_2)$

Si $\Psi(v_1) = \Psi(v_2) \Rightarrow \Psi(v_1)(f) = \Psi(v_2)(f) \ \forall f \in V^*$, pero como hemos encontrado un contraejemplo gracias al lema, $\Psi(v_1) \neq \Psi(v_2) \Rightarrow \Psi$ es inyectiva.

Scanned by CamScanner

Supraye̱ctividad: ¿es Ψ epiyectiva? (¿$\Psi(V) = V^{**}$? ¿$Im(\Psi) = V^{**}$?)

Sabemos que $dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ y $dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(V^*) = dim_{\mathbb{K}}(V^{**})$ (proposiciones 3.7 y 3.9).

Como Ψ es lineal e inyectiva $\Rightarrow ker(\Psi) = \{\vec{0}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow dim_{\mathbb{K}}(ker(\Psi)) = 0$.

Por el primer teorema de isomorfía:

$$V/ker(\Psi) \sim Im(\Psi) \Rightarrow dim_{\mathbb{K}}(V) = \cancelto{0}{dim_{\mathbb{K}} ker(\Psi)} + dim_{\mathbb{K}} Im(\Psi)$$

$\Rightarrow dim_{\mathbb{K}} Im(\Psi) = n$.

Además, $\underset{\text{imagen aplicación}}{Im(\Psi)} \underset{\text{contenida en}}{\subseteq} \underset{\text{espacio de llegada}}{V^{**}}$ ($\subseteq$ y en este caso, $Im(\Psi)$ es subespacio de V^{**} por estar trabajando con $\mathbb{K}$-e.v.)

Como $Im(\Psi)$ es un subespacio de V^{**} y

$dim_{\mathbb{K}} Im(\Psi) = dim_{\mathbb{K}} V^{**} = n \Rightarrow Im(\Psi) = V^{**}$

$\Rightarrow \Psi$ es epiyectiva (sobreyectiva / subrayectiva).

Hemos demostrado que Ψ es lineal, $\underbrace{\text{inyectiva y epiyectiva}}_{\text{biyectiva}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Psi$ es un isomorfismo y V y V^{**} son $\mathbb{K}$-e.v. isomorfos. $\square$

(Este teorema nos dice que podemos interpretar los vectores de un $\mathbb{k}$-e.v. como aplicaciones que asocian a cada función del dual su imagen por dicho vector).

Definición 3.12

Si V es un $\mathbb{k}$-e.v., β_V una base de V, las bases que hemos estado utilizando hasta ahora se llaman **bases duales**, $\beta_{V^*} = \beta^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ con los f_i definidos hasta ahora.

Teorema 3.13

Sea V un $\mathbb{k}$-e.v. con base β y V^* su dual de base dual β^*. Podemos definir el isomorfismo de la proposición 3.7. así:

$$\Psi : V \longrightarrow V^*$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i}_{w \in V} \longrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}_{g \in V^*}$$

dem.:

Basta ver que Ψ es lineal y biyectiva, queda como ejercicio propuesto.

Definición 3.14

Sea $v \in V$ y $f \in V^*$. Decimos que v es ortogonal a f (denotado por $v \perp f$) si cumple que: $f(v) = 0$.

Definición 3.15

Sea S un subconjunto de V ($S \subseteq V$). Definimos el subespacio ortogonal a f denotado por $S^\perp$ como el siguiente subespacio:

$$S^\perp = \{ f \in V^* \mid v \perp f \ \forall v \in S \} \leq V^*$$

(Queda como ejercicio propuesto probar que es $\mathbb{k}$-e.v.)

Proposición 3.16

Sea $S \subseteq V$. Denotamos por $\langle S \rangle$ el subespacio generado por el conjunto S. Entonces:

$$S^\perp = \langle S \rangle^\perp$$

dem.:

$\subset$)

Sabemos que $\langle S \rangle \supseteq S$.

$$\langle S \rangle^\perp = \{ f \in V^* \mid v \perp f \ \forall v \in \langle S \rangle \supset S \} \supseteq$$

$$\supseteq \{ f \in V^* \mid v \perp f \ \forall v \in S \} = S^\perp$$

$\subset$)

Como $S \subseteq V \Rightarrow \langle S \rangle \leq V$, y como V es finitamente generado, así lo ha de ser S. Por tanto, $\exists \{s_1, \dots, s_n\} \subseteq S$ t.q. $\langle S \rangle = \langle \{ s_1, \dots, s_n \} \rangle$.

Sea $f \in S^\perp$ ($v \perp f \ \forall v \in S$). Veamos que $u \perp f \ \forall u \in \langle S \rangle$.

$u \in \langle S \rangle = \langle \{s_1, \dots, s_n\} \rangle \Rightarrow u = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n$, $\lambda_i \in \mathbb{K} \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$f(u) = f(\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n) \underset{f \text{ lineal}}{=} \lambda_1 f(s_1) + \dots + \lambda_n f(s_n) \quad (1)$$

Como $\{s_1, \dots, s_n\} \subset S$ y $f \in S^\perp \Rightarrow f(s_i) = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$
($s_i \in S \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$)

y así (1)

$= 0 + \dots + 0 \Rightarrow \forall u \in \langle S \rangle$, $u \perp f \Rightarrow f \in \langle S \rangle^\perp$

$\Rightarrow \langle S \rangle^\perp \subseteq S^\perp$

Se dan ambas inclusiones $\Rightarrow \langle S \rangle^\perp = S^\perp$ $\square$

Definición 3.17:

Sea S^* un subconjunto de V^* ($S^* \subset V^*$). Definimos el ortogonal a S^*, denotado por $(S^*)^\perp$ al siguiente conjunto:

$$(S^*)^\perp = \{v \in V : v \perp f, \ \forall f \in S^*\} \subseteq V$$

(Queda como ejercicio propuesto demostrar que es un subespacio de V)

Proposición 3.18:

Sea S^* un subconjunto de V^* ($S^* \subset V^*$). Entonces:

$$(S^*)^\perp = (\langle S^* \rangle)^\perp$$

dem.:
Es análoga a la 3.16. Tiene sentido que ocurra porque las definiciones de $S^\perp$ y $(S^*)^\perp$ son simétricos y V y V^* son isomorfos.

Proposición 3.19:

Si $S \leq V \Rightarrow \dim(S^{\perp}) = \dim(V) - \dim(S)$

dem.:

Si V fuera un espacio euclídeo, entonces esta demostración sería trivial. Vamos a buscar una estructura parecida a la del espacio euclídeo para aprovecharnos de este resultado.

Consideramos el $\mathbb{k}$-e.v. $V \times V^*$ de dimensión $n \cdot n = n^2$.

Consideramos la siguiente forma bilineal, respecto de las bases canónicas $\beta_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\beta^* = \{f_1, \dots, f_n\}$.

$$\begin{aligned} w: V \times V^* &\longrightarrow \mathbb{k} \\ (v, f) &\longrightarrow f(v) \end{aligned}$$

Respecto de estas bases, las coordenadas de v y f son los mismos (ambos trabajan sobre $\mathbb{k}$, $V \simeq V^*$ y def. de las bases).

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \longrightarrow f(v)$

$= \lambda_1 \cdot \mu_1 + \dots + \lambda_n \mu_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu_i = w(v, f)$

Observamos que hay un claro isomorfismo con el producto escalar canónico de $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\begin{aligned} w: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{k} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n)(\mu_1, \dots, \mu_n) &\rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu_i = \langle \lambda, \mu \rangle = w(\lambda, \mu) \end{aligned}$$

Por tanto, podemos relacionar $f(v) = 0$ con $\langle \lambda, \lambda \rangle = 0$.

Es decir:

dado $S \leq V$, podemos definir análogamente un $A \leq \mathbb{R}^n$ de manera que $\dim(S) = \dim(A)$. Ahora bien:

$$S^{\perp} = \{ f \in V^* \mid v \perp f \quad \forall v \in S \} =$$
$$= \{ f \in V^* \mid f(v) = 0, \ \forall v \in S \}$$

Por lo que hemos visto, esto es análogo a tomar:

$$B = \{ v \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = 0, \ \forall v \in A \}$$

Resulta que tomar $S^{\perp}$ de S es equivalente a tomar B de A. Pero en $\mathbb{R}^n$, $B = A^{\perp}$ y sabemos que $A \oplus A^{\perp} = \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim(A^{\perp}) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(A)$, de donde deducimos que:

$$\dim(S^{\perp}) = \dim(V) - \dim(S) \quad \square$$

(Esta demostración no es muy formal. La idea es que $\omega : V \times V^* \to \mathbb{k}$ es análogo a $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{k}$, producto escalar. Y que la definición que hemos dado de $S^{\perp}$ es la equivalente a un $A^{\perp}$ de un $A \subseteq \mathbb{R}^n$, y como sabemos que en $\mathbb{R}^n$, $A \oplus A^{\perp} = \mathbb{R}^n$, extrapolamos el resultado, pero como $S^{\perp} \leq V^*$, solo podemos extrapolarlo tomando dimensiones: $\dim(S^{\perp}) + \dim(S) = \dim(V) = \dim(V^*)$ y despejar de ahí).

Scanned by CamScanner

Proposición 3.20:

Si $S^* \leq V^* \Rightarrow \dim((S^\perp)^*) = \dim(V^*) - \dim(S^*)$

dem.-:

Análogo a la 3.19. Los papeles de S^*, V^* y S y V respectivamente son intercambiables debido a isomorfismos. □

Proposición 3.21:

(Ayuda a entender la relación con el producto escalar para las proposiciones 3.19 y 3.20).

$\beta_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V y $\beta^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ base de V^*.

Sea $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \in V$ y $f = \mu_1 f_1 + \ldots + \mu_n f_n \in V^*$.

Entonces $(\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{k})$:

$$v \perp f \Leftrightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$$

dem.-:

$\Rightarrow$) Hip. $v \perp f \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} f(v) = 0$

Por una parte $f(v) = 0$ (hip.) (1)

Por otra parte:

$$f(v) = \mu_1 f_1(v) + \ldots + \mu_n f_n(v) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot f_i\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \underbrace{f_i(v_j)}_{} \overset{\delta_{i,j} \text{ por def}}{=}$$

(Siguiente cara)

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_i \cdot x_j \cdot \delta_{i,j} \quad \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \ (\delta_{i,j} = 0) \\ x_i \cdot \mu_i & \text{si } i = j \ (\delta_{i,j} = 1) \end{cases}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot x_i = f(v) \qquad (2)$$

Juntando (1) y (2)

$$\Rightarrow f(v) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot x_i = 0 \ //$$

$\Leftarrow$)

Sabemos que $f(v) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$. (por la otra implicación).

Por hipótesis $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot x_i = 0 \Rightarrow f(v) = 0 \Rightarrow v \perp f$ //

Demostradas ambas implicaciones. $\blacksquare$