

Cálculo Integral

multivariante

Luis Navas

con 110 figuras y 95 ejemplos y ejercicios resueltos

LMN

Fecha de la última modificación: 2018-04-08

Copyright ©2018 Luis Navas

El autor otorga permiso para distribuir esta obra con fines no comerciales, bajo la licencia «copyleft» de Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International.

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/legalcode>

Índice general

Prefacio	7
1 La integral plana en \mathbb{R}^n	11
1.1 Breve introducción a la teoría de la medida	12
1.2 La medida natural del espacio euclídeo	17
1.3 Repaso de la integral de Riemann 1-dimensional	23
1.4 Definición de la integral plana en rectángulos	25
1.5 Definición de la integral plana en otros conjuntos	29
1.6 Propiedades básicas de la integral	30
1.7 Interpretaciones y aplicaciones de la integral	33
1.8 El Teorema de Fubini en rectángulos	37
1.9 El Teorema de Fubini en regiones elementales	42
1.10 El Principio de Cavalieri en \mathbb{R}^n	47
1.11 Cambio de variable	57
1.12 Casos particulares de cambios de variable	62
1.12.1 Transformaciones lineales	62
1.12.2 Interpretación geométrica del determinante	63
1.12.3 Coordenadas polares en el plano	64
1.12.4 Coordenadas cilíndricas en \mathbb{R}^3	71
1.12.5 Sólidos de revolución	74
1.12.6 Coordenadas esféricas en \mathbb{R}^3	83
2 Integrales sobre subvariedades de \mathbb{R}^n	89
2.1 Medidas Geométricas	89
2.2 Subvariedades Paramétricas de \mathbb{R}^n	92
2.3 Cambio de variable interdimensional	94
2.4 Propiedades básicas de las integrales sobre subvariedades	97
2.5 Aplicaciones de las integrales sobre subvariedades	99
2.5.1 Valores medios	99
2.5.2 Interpretaciones físicas de la integral	101
2.6 La integral en dimensión 0: puntos aislados	104
2.7 Curvas	106
2.8 Integrales de longitud sobre una curva	112
2.9 Coordenadas particulares de longitud	115
2.9.1 Longitudes en tres dimensiones	115
2.9.2 Longitudes en dos dimensiones	115

2.9.3	Longitud sobre una gráfica bidimensional en x	116
2.9.4	Longitud sobre una gráfica bidimensional en y	117
2.9.5	Curvas polares radiales	117
2.9.6	Curvas polares angulares	118
2.9.7	El elemento de longitud polar en notación diferencial	119
2.9.8	Ejemplos de integrales de longitud sobre curvas	120
2.10	<i>Superficies en \mathbb{R}^3</i>	125
2.10.1	Geometría de superficies	125
2.10.2	El producto vectorial de vectores tridimensionales	129
2.10.3	El vector normal de una superficie parametrizada	131
2.11	Integrales de área en una superficie en \mathbb{R}^3	133
2.12	Coordenadas particulares de área	135
2.12.1	Coordenadas esféricas de área.	135
2.12.2	Coordenadas de área para gráficas	139
2.12.3	Superficies implícitas	141
2.12.4	Coordenadas cilíndricas de área	142
2.12.5	Superficies de revolución	143
3	Cálculo Vectorial	157
3.1	<i>Integrales de Línea</i>	157
3.1.1	Definición de la integral de línea	157
3.1.2	La integral de línea en coordenadas	158
3.1.3	Integrales de línea en dos dimensiones	160
3.1.4	Integrales de línea en tres dimensiones	160
3.1.5	La integral de línea bajo cambio de parametrización	163
3.1.6	Orientación de una curva	165
3.1.7	El campo tangente unitario a una curva	167
3.1.8	Propiedades generales de las integrales de línea	170
3.2	<i>El Teorema Fundamental para integrales de línea</i>	171
3.2.1	Nociones preliminares.	171
3.2.2	Enunciado y demostración del Teorema Fundamental	176
3.2.3	Interpretación geométrica del Teorema Fundamental	179
3.2.4	El Recíproco del Teorema Fundamental del Cálculo	181
3.2.5	Campos conservativos en la mecánica clásica	183
3.2.6	Criterio de simetría para la existencia de un potencial	187
3.2.7	El criterio de simetría en dos y tres dimensiones	188
3.2.8	Suficiencia del criterio de simetría para la existencia del potencial	190
3.2.9	Construcción de potenciales	196
3.3	<i>El Teorema de Green en el plano</i>	203
3.3.1	Topología de las curvas planas	203
3.3.2	El Teorema de Green	204
3.3.3	Regiones más generales donde es válido el Teorema de Green	209
3.4	<i>Integrales de Flujo</i>	213
3.4.1	Definición de la integral de flujo normal	213
3.4.2	La integral de flujo en coordenadas	214
3.4.3	La integral de flujo bajo cambio de parametrización	216

3.4.4	Campo normal unitario y orientación de una superficie	219
3.4.5	La integral de flujo en términos del campo normal unitario	223
3.4.6	Propiedades generales de las integrales de flujo	224
3.4.7	Borde de una superficie	225
3.5	El Teorema de Stokes para superficies en \mathbb{R}^3	229
3.5.1	Orientación de una superficie y su borde	229
3.5.2	El Teorema de Stokes para superficies	231
3.5.3	Un caso del lema de Poincaré mediante el Teorema de Stokes . .	233
3.6	El Teorema de Gauss de la divergencia	236
3.6.1	El borde de un sólido	236
3.6.2	El Teorema de la divergencia	238
3.6.3	Interpretación física de la divergencia	240
3.7	Relaciones diferenciales vectoriales en \mathbb{R}^3	242
3.7.1	Criterios diferenciales para campos gradientes y rotacionales .	247
4	Breve introducción a las formas diferenciales	249
4.1	Conceptos básicos	249
4.2	Formas en tres variables	251
4.3	Correspondencia entre formas y campos	252
4.4	Derivación de formas	253
4.5	Integración de formas	255
4.6	El Teorema de Stokes para formas diferenciales	256

Prefacio

Convenciones utilizadas

El texto en **este color** indica un hipervínculo mientras que en **en éste color, o éste y éste**, es simplemente texto resaltado **igual que este otro** y *también este*. El color de un recuadro indica el tipo de contenido:

definición, notación, convención

resultado, enunciado (lema, proposición, teorema, corolario)

resultado al que prestar especial atención, advertencia, nota

pregunta, propuesta de ejercicio, cuestión relacionada de interés

Notación

Sistemas de números

- \mathbb{N} – los números **naturales** o «de contar»

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

a los cuales a veces se añade también el 0.

- \mathbb{Z} – los números **enteros**

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

es decir, los naturales, junto con el 0 y los números **negativos**.

- \mathbb{Q} – los números **racionales**, es decir, las **fracciones** o **cocientes** de enteros:

$$\mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Habitualmente se suponen escritos en **forma reducida**, es decir, con denominador b positivo, y a, b **sin factores comunes**.

- \mathbb{R} – los números **reales** son **límites de sucesiones** de números racionales. Se pueden representar por un signo y su **expansión decimal**

$$x = \pm a_1 a_2 \dots a_k, d_1 d_2 d_3 \dots, \quad a_i, d_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

(o en cualquier base entera $b \geq 2$) donde posiblemente hacen falta infinitos dígitos a la derecha del separador. Geométricamente, representan los puntos de la **recta real**, dividida en dos partes por el 0, estando a la derecha los positivos y a la izquierda los negativos.

- \mathbb{C} – los números **complejos** son combinaciones de dos números reales con el **imaginario** i que por definición cumple $i^2 = -1$:

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}\}, \quad i^2 = -1$$

Geométricamente, representan los puntos del **plano complejo**, con eje de absisas el **eje real** de números reales $z = x$ y eje de ordenadas el **eje imaginario** de números **puramente imaginarios** $z = iy$.

Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, con $x, y \in \mathbb{R}$, decimos que x es la **parte real** de z , escrita $x = \operatorname{Re} z$, y que y es la **parte imaginaria** de z , escrita $y = \operatorname{Im} z$.

La integral plana en \mathbb{R}^n

Toda la teoría de integración se basa en la noción de **medida**, que generaliza a n variables los conceptos clásicos de **longitud**, **área** y **volumen**. Es importante observar que estos conceptos van inextricablemente ligados al de **dimensión**:

Nota 1.0.1: Concordancia de la medida y la dimensión

- Se miden **longitudes** de objetos **unidimensionales** (intervalos, curvas).
- Se miden **áreas** de objetos **bidimensionales** (regiones planas, superficies).
- Se miden **volúmenes** de objetos **tridimensionales** (sólidos).

En general, para medir un objeto n -dimensional, necesitamos una **medida n -dimensional**.

Antes de dar definiciones exactas, conviene pensar en las «propiedades intuitivas» que suponemos a las nociones de longitud, área y volumen tradicionales, correspondientes a las dimensiones $n = 1, 2, 3$. Emplearemos la palabra **medida** o **masa** y el símbolo m para todas ellas con el objetivo de generalizar.

Ciertas propiedades, tales como que la masa de un objeto que se divide en dos partes será la suma de las masas de cada una de las partes, están tan estrechamente ligadas a nuestra experiencia que nos puede costar pensar en situaciones en las que no sean ciertas. En la época clásica de las matemáticas griegas, se consideraban cuestiones «de sentido común» o «evidentes para cualquiera».

En Matemáticas, tales listas de propiedades «obvias» se intentan convertir en **axiomas** para establecer los fundamentos lógicos de una teoría. Los axiomas son condiciones que imponemos, basadas en nuestras intuiciones, con el propósito de explorar sus consecuencias lógicas mediante deducción. A lo largo de la historia, este proceso ha llevado a sorpresas inesperadas y a nuevas intuiciones, más alejadas de la experiencia inmediata.

El contenido de las primeras secciones se puede leer independientemente de las demás e incluso omitir en una lectura rápida. Se incluyen a modo de muy breve introducción a la teoría de la medida abstracta.

1.1 Breve introducción a la teoría de la medida

Las definiciones básicas son abstractas. Empezamos con un conjunto cualquiera (no vacío) X , denominado «espacio», y consideramos sus subconjuntos. Un fenómeno importante que constataremos más adelante es que **no siempre se va a poder medir cualquier subconjunto**. Por tanto, antes de hablar de medir, necesitamos considerar cuáles pueden ser los conjuntos que se pueden medir.¹

Definición 1.1.1: Álgebra de conjuntos

Un **álgebra de conjuntos** en el espacio X es una colección \mathcal{M} de subconjuntos $A \subseteq X$, llamados **medibles**, que satisfacen:

- El vacío \emptyset es medible; simbólicamente, $\emptyset \in \mathcal{M}$.
- Si A es medible, su **complementario**

$$A^c \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : x \notin A\}$$

es medible; simbólicamente, $A \in \mathcal{M} \implies A^c \in \mathcal{M}$.

- Si A y B son medibles, su **unión** $A \cup B$ es medible: $A, B \in \mathcal{M} \implies A \cup B \in \mathcal{M}$.

Podemos deducir varias propiedades inmediatamente a partir de la definición:

- Por inducción, las **uniones finitas** de conjuntos medibles son medibles:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{M} \implies A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{M}.$$

- Si A y B son medibles, entonces su **intersección** es medible, pues

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c,$$

luego, por inducción, las **intersecciones finitas** de medibles son medibles.

- La **diferencia** de medibles es medible: si A, B son medibles, entonces

$$A, B \in \mathcal{M} \implies A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A : x \notin B\} = A \cap B^c \in \mathcal{M}.$$

Al ser consecuencias, no las ponemos en la definición de álgebra de conjuntos. Se intenta elegir una lista lo más corta posible de **axiomas independientes** de los cuales se deduce todo lo demás.

En la **interpretación probabilística** de la teoría de la medida, cambiamos adjetivos para pensar en términos análogos.

- El espacio X será el **espacio de muestras**.

¹No es lo mismo, pero filosóficamente, recuerda a las cuestiones que surgieron aproximadamente al mismo tiempo en la Física, como la observabilidad o el principio de incertidumbre.

- Un subconjunto de X será un **suceso** o un **evento**.
- Digamos ahora «**cuantificable**» en vez de **medible**.

De este modo, los conjuntos medibles corresponden a **sucesos** ó **eventos cuantificables**. Los axiomas de un álgebra de conjuntos dicen entonces que:

- La **contradicción lógica** (A y no A simultáneamente) es cuantificable.
- Si un suceso es cuantificable, también lo es el suceso **contrario**.
- Si dos sucesos son cuantificables, también lo es su **disyunción lógica** (el suceso «uno de A ó B , o ambos, ocurren» a partir de los sucesos A , B .)

Se concluye que también la **conjunción lógica** de dos sucesos cuantificables es cuantificable, o sea, el suceso « A y B ocurren simultáneamente» a partir de los sucesos A , B .

En Probabilidad se suele decir «**possible**» en lugar de «**cuantificable**», pero esto tiene el desafortunado efecto de decir que la contradicción lógica – un suceso **lógicamente imposible** – es «**possible**» en el sentido de poder asignarle una probabilidad.² El problema surge al utilizar la misma palabra en dos sentidos diferentes, de ahí que otra palabra como «**cuantificable**» sea quizás más adecuada.

Por razones técnicas, impuestas por la necesidad de considerar límites, es deseable ampliar la condición de que las uniones de dos conjuntos medibles sea medible, a las **uniones infinitas numerables**, o sea, de una sucesión infinita de conjuntos numerada por los números naturales $n = 1, 2, 3, \dots$.

Definición 1.1.2: Sigma-álgebra de conjuntos

Una **sigma-álgebra de conjuntos** de un espacio X es una colección \mathcal{M} de subconjuntos $A \subseteq X$, que satisfacen:

- El vacío \emptyset es medible: $\emptyset \in \mathcal{M}$.
- Si A es medible, su **complementario**

$$A^c \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \notin A\}$$

es medible: $A \in \mathcal{M} \implies A^c \in \mathcal{M}$.

- Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de medibles, su unión $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es medible:

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{M} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}.$$

²Como dicta el sentido común, al suceso lógicamente imposible se le asigna siempre la probabilidad nula. De hecho, este es un tema con una amplia repercusión. No se debe confundir un evento lógicamente imposible, con uno **completamente improbable**, que ocurre en presencia de una medida de probabilidad y se define como **cualquier** suceso de **probabilidad nula**. Lo lógicamente imposible es completamente improbable, pero no siempre es cierto lo contrario: puede haber eventos de probabilidad nula pero que no son una contradicción lógica. Este tipo de cuestiones probabilísticas subyace parte de la Física Cuántica.

Definición 1.1.3: Espacio medible

Llamamos **espacio medible** a la pareja (X, \mathcal{M}) formada por un conjunto no vacío X dotado de una sigma-álgebra \mathcal{M} de subconjuntos de X .

Claramente una sigma-álgebra es un álgebra, dado que la condición de uniones numerables infinitas es más fuerte que la condición de uniones finitas: por ejemplo, toda unión de dos conjuntos A y B se puede escribir como la unión numerable

$$A \cup B \cup B \cup B \dots,$$

pero una unión numerable infinita no siempre será una unión finita.

Habiendo considerado **qué** se puede medir, pasamos a considerar el proceso de medida, que consiste en asignar un número a los conjuntos de un álgebra o sigma-álgebra \mathcal{M} que nos dará una manera de cuantificar su **tamaño**. En abstracto, una **medida** será una función

$$\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty],$$

que a priori sólo se puede aplicar a los conjuntos medibles (miembros de la colección \mathcal{M}) y cuyos valores no pueden ser negativos, y sí pueden ser infinitos.

Hacemos una lista de propiedades «deseables» de una medida, basada en nuestra intuición clásica de los conceptos de longitud, área, volumen, y en general **masa** asociada a los objetos reales. Este es el **método axiomático** de las Matemáticas, mediante el cual uno parte de muy pocas condiciones que sean «razonables» o «intuitivas» y después se deducen muchas otras, de sofisticación y complejidad creciente, hasta construir todo un edificio de relaciones lógicas que sientan las bases de una teoría general.

Partimos de un espacio X y un álgebra de conjuntos \mathcal{M} ([definición 1.1.1](#)). Más adelante pediremos que sea de hecho una σ -álgebra.

Definición 1.1.4: No negatividad

La medida de un conjunto no puede ser negativa, aunque sí puede ser **infinita**.

Incluso con las nociones tradicionales de longitud, área y volumen, los valores infinitos tienen que ser admitidos. Por ejemplo, la longitud de una recta completa, el área de todo el plano, y el volumen de todo el espacio tridimensional, son infinitos.

Definición 1.1.5: Nulidad

El vacío tiene medida nula: $\mu(\emptyset) = 0$.

Una idea básica intuitiva que tenemos sobre el concepto de masa o medida es que, al dividir un conjunto medible en dos partes sin intersección común, la suma de

las medidas de las partes es la medida total. Es decir, no se puede ni perder ni ganar masa al trocear. Esto se convierte en el axioma básico de la teoría.

Definición 1.1.6: Aditividad finita

Si A y B son medibles y **disjuntos** entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. En general

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

al menos cuando $\mu(A \cap B) < \infty$.

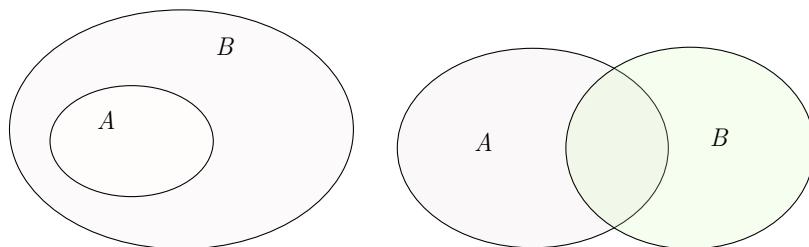


Figura 1.1 – Las propiedades básicas de las medidas son relativas a las relaciones entre conjuntos.

Definición 1.1.7: Monotonía

Si A y B son medibles, con $A \subseteq B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Debemos evitar la **indeterminación** $\infty - \infty$. En la teoría de la medida, sin embargo, se declara que $0 \cdot \infty = 0$, dejando pues de ser indeterminación.

Definición 1.1.8: Diferencias

Si A y B son medibles, con $A \subseteq B$ y $\mu(B) < \infty$, entonces $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Estas propiedades no son independientes. Por ejemplo, la monotonía y la fórmula para diferencias son consecuencias de la aditividad, observando que, para dos conjuntos medibles A, B tales que $A \subseteq B$, se tiene $B = A \sqcup (B \setminus A)$ (unión disjunta).

Los descubridores de la teoría de la medida se dieron cuenta enseguida que para poder trabajar más cómodamente con los **límites de sucesiones**, era necesario ampliar la propiedad de aditividad a las uniones y sumas **infinitas**.

Definición 1.1.9: Aditividad numerable

Una función μ sobre una **sigma-álgebra** de subconjuntos de un espacio X tiene

la propiedad de **aditividad numerable** si satisface

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

para cualquier sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos medibles **disjuntos por pares**.

La condición de sigma-álgebra es necesaria para saber que la unión numerable es medible y por tanto tiene sentido considerar su medida.

Definición 1.1.10: Medida, espacio de medida

Sea X un conjunto no vacío y \mathcal{M} una sigma-álgebra de subconjuntos de X . Una **medida** sobre el espacio medible (X, \mathcal{M}) es una función μ tal que

- $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ (no negativa).
- $\mu(\emptyset) = 0$ (nulidad).
- μ es aditiva numerable.

Un **espacio de medida** consta de los tres datos (X, \mathcal{M}, μ) anteriores.

Si en vez de una sigma-álgebra consideramos sólo un **álgebra** de conjuntos, entonces hablamos de **medida finita aditiva** reemplazando la aditividad numerable, que a lo mejor deja de tener sentido, por la aditividad finita.

Enunciado 1.1.1: Aproximación creciente y decreciente para medidas

Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida.

- Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión **creciente**, o sea,

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \cdots ,$$

con $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces $\mu(A) = \lim_n \mu(A_n)$.

- Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión **decreciente**, o sea,

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \cdots ,$$

con $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, y $\mu(A_n) < \infty$ para algún n , entonces $\mu(A) = \lim_n \mu(A_n)$.

- **Demostración:** Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente, las diferencias sucesivas $D_1 = A_1$ y $D_n = A_n \setminus A_{n-1}$ para $n \geq 2$, son medibles y disjuntas, con $A_n = D_1 \sqcup D_2 \sqcup \cdots \sqcup D_n$ para todo $n \geq 1$.³ Esto implica que la unión A de todos los A_n es lo mismo que la unión

³Si esto no está claro, hacer un diagrama con los conjuntos A_n .

de todos los D_n : $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. La aditividad implica que

$$\mu(A_n) = \mu(D_1) + \mu(D_2) + \cdots + \mu(D_n)$$

y haciendo el límite, la aditividad numerable implica que

$$\lim_n \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \mu(A).$$

Para una sucesión decreciente $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, suponiendo sin pérdida de generalidad que $\mu(A_1) < \infty$, poniendo $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, las diferencias $B_n = A_1 \setminus A_n$ son crecientes, con $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A_1 \setminus A$, y el resultado anterior implica que $\mu(A) = \lim_n \mu(A_n)$. ■

Resaltamos las pocas condiciones que se ponen en la definición de espacio de medida. De ellas se deducirán todas las demás. La Teoría de la Medida, junto con la Topología, son dos de los grandes logros de la abstracción matemática.

1.2 La medida natural del espacio euclídeo

Hasta ahora hemos estado considerando un espacio completamente abstracto X . Queremos dar las definiciones y los resultados generales a modo de una muy breve introducción a la teoría de la medida, sin entrar en detalles. Ahora vamos a particularizar al caso de $X = \mathbb{R}^n$, el espacio euclídeo n -dimensional, o, algo más general, X un espacio vectorial real de dimensión finita dotado de una métrica euclídea.

Nuestra intuición y percepción espacial nos indican que, además de las propiedades generales asociadas a cualquier medida, hay otra serie de **propiedades geométricas** que asociamos a los conceptos más particulares de longitud, área, volumen y masa. Dado que hablamos de **la** longitud, **el** área y **el** volumen, tenemos la idea de que éstos son **únicos**. Quizás si hacemos una lista lo suficientemente extensa de estas propiedades, veamos por qué sólo puede haber una medida en \mathbb{R}^n , denotada por m , que generaliza las tradicionales para $n = 1, 2, 3$.

Definición 1.2.1: Invariancia por traslaciones

Sea \vec{v} un vector y A un conjunto medible. Entonces el conjunto trasladado

$$\vec{v} + A = \{\vec{v} + a : a \in A\}$$

es medible, y se tiene

$$m(\vec{v} + A) = m(A).$$

Es decir, la medida no cambia por «mover» un conjunto de un sitio a otro.

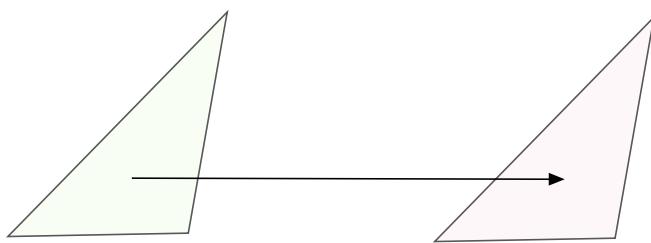


Figura 1.2 – Una propiedad de las medidas euclídeas es que la traslación de una figura no afecta su medida.

Nuestra intuición nos dice que tampoco varía la medida o masa de un objeto por girarlo y, un poco más abstractamente, por reflejarlo. Esto se traduce en la siguiente condición.

Definición 1.2.2: Invariancia por isometrías

Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una **isometría**, es decir, una aplicación que conserva la distancia euclídea, o sea

$$\|T(q) - T(p)\| = \|q - p\|$$

para cualquier par de puntos p, q , y A es medible, entonces su imagen

$$T(A) = \{Ta : a \in A\}$$

es medible, y se tiene $m(T(A)) = m(A)$. Las isometrías son composiciones de traslaciones, rotaciones y reflexiones.

Resaltamos que estas son propiedades que imponemos como **definiciones**, no son **consecuencias** que han de cumplirse necesariamente. Algunas medidas las satisfacen pero otras no.

Finalmente, en las nociones tradicionales de longitud, área, volumen, etc., siempre hay una **unidad de medida**. Para la longitud, un segmento de recta se declara como unidad. Para el área, es un cuadrado de lado la unidad de longitud, y para el volumen, un cubo. Entonces, una medida que generalice éstas, asignará medida 1 al **hipercubo** n -dimensional de lado con longitud la unidad. Para \mathbb{R}^n , esto se consigue relacionando la unidad aritmética con la geométrica.

Definición 1.2.3: Normalización

El intervalo $[0, 1]$ tiene longitud 1, el cuadrado $[0, 1]^2$ tiene área 1, el cubo $[0, 1]^3$ tiene volumen 1. En general, el **cubo unidad** tiene medida n -dimensional unidad:

$$m(Q) = 1, \quad Q = [0, 1]^n.$$

Al pensar en estas propiedades, se plantean una serie de preguntas.

- **Existencia.** ¿Existe una medida con estas propiedades?
- **Unicidad.** ¿Es única?
- **Medibles.** ¿Se puede medir cualquier conjunto?

Resulta que la mayor dificultad para construir la medida n -dimensional euclídea reside en la última cuestión: los conjuntos medibles. Durante mucho tiempo no se consideró la posibilidad de que hubiera **conjuntos no medibles**, por ejemplo, figuras planas sin área o sólidos sin volumen! Este es un asunto difícil de explicar sin entrar en detalle en la teoría de conjuntos y la teoría de grupos, así que simplemente comentaremos que para $n \geq 3$ no hay ninguna medida m , ni siquiera una finita aditiva, con las propiedades anteriores y que mida *todos* los subconjuntos de \mathbb{R}^n . En otras palabras, no se puede medir todo, hay que excluir algunos subconjuntos «demasiado complicados».

Ahora bien, como ya vimos en el [apartado 1.1](#), las medidas deben estar definidas sobre álgebras o sigma-álgebras de conjuntos, que llamamos los conjuntos medibles. No podrán ser todos los subconjuntos de \mathbb{R}^n , pero al menos deberían poderse medir todos los conjuntos análogos a las figuras que aparecen en la geometría clásica: esferas, cilindros, conos, etc. Empezamos con los que son de alguna manera los subconjuntos de \mathbb{R}^n más sencillos posibles en el contexto de la geometría euclídea.

Definición 1.2.4: Rectángulos en \mathbb{R}^n

Un **rectángulo** n -dimensional es un producto cartesiano de n intervalos:

$$\begin{aligned} A &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \\ &= \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_k \leq x_k \leq b_k : 1 \leq k \leq n\} \end{aligned}$$

En \mathbb{R}^2 , se trata de rectángulos en el sentido geométrico tradicional de la palabra, y además, se trata de aquellos cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas.

La colección de rectángulos no es una sigma-álgebra de conjuntos, aunque no dista tanto como parece de ser un álgebra. Sin embargo, existe una sigma-álgebra que es la más pequeña de todas las que contienen a todos los rectángulos.

Definición 1.2.5: Sigma-álgebra de Borel en \mathbb{R}^n

La **sigma-álgebra de Borel** en \mathbb{R}^n es la más pequeña sigma-álgebra de subconjuntos de \mathbb{R}^n que contiene a todos los rectángulos, definidos como productos cartesianos de intervalos. Se denota por \mathcal{B} .

La sigma-álgebra de Borel se define simplemente como la intersección de todas

1.2 La medida natural del espacio euclídeo

las sigma-álgebras de subconjuntos de \mathbb{R}^n que contienen a los rectángulos. Se dice que es la sigma-álgebra **generada** por los rectángulos.

Tenemos todos los ingredientes, incluso más de los necesarios, para determinar cuál es la medida «natural» sobre \mathbb{R}^n . Resulta que bastan dos de las propiedades anteriores para determinar una medida sobre la sigma-álgebra de Borel de manera única.

Enunciado 1.2.1: La medida de Lebesgue

Existe una única medida invarianta por traslaciones $m = m_n$ en \mathbb{R}^n que mide a los rectángulos (es decir, que está definida sobre la sigma-álgebra de Borel en \mathbb{R}^n) con $m([0, 1]^n) = 1$. En general, si m y m' son medidas que miden a los rectángulos, entonces $m' = km$ para alguna constante k . Dicha medida se denomina **medida de Lebesgue** en honor al matemático que desarrolló por vez primera estos temas.^a También la llamaremos la **medida euclídea plana** o el **volumen n -dimensional**.

En base a las propiedades anteriores, resulta que no tenemos elección en cuanto a definir la medida de un rectángulo. Debe ser

$$m([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$$

es decir, la medida de un rectángulo es el producto de las longitudes de sus lados. ¿Por qué no tenemos elección? Pensemos por ejemplo en rectángulos cuyos lados son múltiplos enteros de la unidad ([figura 1.3](#)).

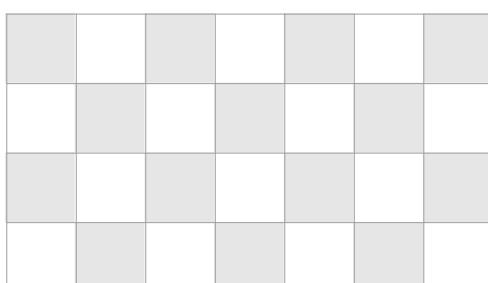


Figura 1.3 – Rectángulo formado por copias del cuadrado unidad. El área se define igual al número de cuadraditos, que es el producto de cuántos hay a lo largo de un eje y otro.

La invariancia por traslaciones implica que todo cubo de lado 1 tiene medida 1. Un rectángulo cuyos lados son múltiplos enteros de la unidad se subdivide en traslaciones que no se solapan del cubo unidad.

Hay un detalle técnico: que no se solapen no implica que las traslaciones sean disjuntas. Hay una manera de evitar este problema que consiste en considerar

^aEn su tesis doctoral, escrita a los 27 años. Se considera una de las mejores jamás presentadas.

productos cartesianos de **intervalos semiabiertos**

$$[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)$$

y reemplazar el cubo unidad $[0, 1]^n$ por $[0, 1]^n$. Entonces sí son disjuntas las traslaciones y la aditividad implica que la medida del rectángulo es el número total de cubos, que es el producto del número de cubos en cada lado. Esto lleva a la fórmula anterior.

Pregunta 1.2.1: La medida de un rectángulo general

¿Cómo habría que razonar para demostrar la fórmula para la medida de un rectángulo a partir de las propiedades básicas supuestas a la medida, en el caso de rectángulos cuyos lados son **fracciones racionales** de la unidad? ¿Y si los lados son **números reales** cualesquiera?

El tema del solapamiento también es interesante. Usando el cubo original $[0, 1]^n$, observamos que sus traslaciones tienen contacto a lo largo de los lados. Los lados de rectángulos corresponden a productos cartesianos de intervalos donde uno de los intervalos se colapsa a un punto. Tienen **medida de Lebesgue nula**. En particular, da lo mismo considerar productos de intervalos cerrados o de semiabiertos, pues la fórmula para su medida es la misma. En general podemos afirmar lo siguiente.

Enunciado 1.2.2: La medida de Lebesgue de un subespacio propio es nula

Sea H un subespacio afín de \mathbb{R}^n de dimensión menor que n . Entonces $m(H) = 0$.

■ **Demostración:** Basta con considerar el caso de un hiperplano, es decir, $\dim H = n - 1$. Sin entrar en detalles, diremos que se puede reducir al caso del hiperplano $H = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ que consiste en los vectores n -dimensionales con un 0 en la última coordenada. Primero, consideramos el subconjunto

$$A = [0, 1)^{n-1} \times \{0\} \subseteq H.$$

Observando que

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n = [0, 1)^{n-1} \times \left[0, \frac{1}{n}\right)$$

con $\{A_n\}$ una sucesión decreciente de rectángulos, de medida $m(A_n) = \frac{1}{n}$, la propiedad de aproximación ([enunciado 1.1.1](#)) implica que $m(A) = \lim_n m(A_n) = 0$. Finalmente, H es la unión disjunta numerable de las traslaciones de A por los vectores de la forma $\vec{v} = (m_1, \dots, m_{n-1}, 0)$ con los m_k enteros, luego la aditividad numerable implica que $m(H) = 0$. ■

En general, un conjunto medible se puede aproximar por pequeños cubos a **dísticas escalas**, y su medida estará aproximada por la suma (posiblemente infinita)

1.2 La medida natural del espacio euclídeo

de las medidas de los cubos aproximantes ([figura 1.4](#)). Esta idea no es nueva, pero su formulación moderna conecta directamente con los cimientos de la Lógica y las Matemáticas.

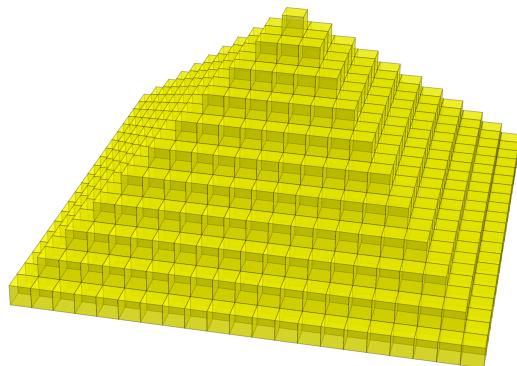


Figura 1.4 – Una aproximación escalonada a una pirámide, formada por cubos. [Aquí hay otra](#).

La manera estándar de [definir](#) la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n es mediante la aproximación por rectángulos o cubos, definiendo la medida para éstos y extendiéndola a conjuntos medibles en general. Esencialmente, entonces, una vez elegido el cubo unidad como unidad de medida, ya está determinada la medida de cualquier otro conjunto generado por rectángulos, debido a las propiedades básicas de la medida.

1.3 Repaso de la integral de Riemann 1-dimensional

La integral de Riemann de una función $f(x)$ de una variable x en un intervalo $[a, b]$ se define como límite de *sumas de Riemann*, que son aproximaciones de la forma

$$S = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

donde se eligen puntos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b, \quad c_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad 1 \leq k \leq n.$$

La colección de puntos $\varphi = \{x_k\}$ se denomina *partición* del intervalo $[a, b]$ y la colección de puntos $\mathcal{M} = \{c_k\}$ una *muestra* de la partición. Se escribe entonces $S(f, \varphi, \mathcal{M})$ para la suma de Riemann.

Nota 1.3.1: Particiones

Para generalizar el concepto de suma de Riemann a más de una variable, es más conveniente considerar la partición φ como la colección de los *subintervalos* $\{I_k = [x_{k-1}, x_k] : 1 \leq k \leq n\}$ en vez de la colección de los *extremos* x_k .

Haremos una observación que parece trivial pero muestra la vía correcta:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \text{longitud del intervalo } I_k = [x_{k-1}, x_k] \stackrel{\text{def}}{=} \ell(I_k).$$

Vamos a abstraer más el concepto, dejando de indexar los subintervalos, simplemente escribiendo $I \in \varphi$ para denotar a uno de los intervalos I_k . De manera similar, vamos a denotar por c_I el punto $c_k \in \mathcal{M}$ de la muestra elegido en $I = I_k$. Entonces la suma de Riemann se puede reexpresar en modo más abstracto como

$$S(f, \varphi, \mathcal{M}) = \sum_{I \in \varphi} f(c_I) \ell(I)$$

El *tamaño* de una partición unidimensional φ es

$$\|\varphi\| \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k = \max\{\ell(I) : I \in \varphi\}$$

y la integral, si existe, es el *límite uniforme* en las muestras:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\varphi\| \rightarrow 0} S(f, \varphi, \mathcal{M})$$

Es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\varphi\| < \delta \implies \left| S(f, \varphi, \mathcal{M}) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon, \quad \text{para toda } \varphi\text{-muestra } \mathcal{M}.$$

Nota 1.3.2: La Notación de Leibniz

La notación de Leibniz resalta el paso al límite que lleva de suma a integral:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k.$$

Aunque la *diferencial* dx en principio no está definida más que como notación, se interpreta como un *cambio infinitesimal en la longitud*, aunque esto carece de rigor matemático:

$$\langle\!\langle \Delta x \rightarrow dx \rangle\!\rangle$$

Sin embargo, razonar de esta manera da sentido a fórmulas como

$$\int_a^b dx = b - a$$

que se puede interpretar diciendo que la integral de dx es la «suma de las longitudes infinitesimales» y por tanto resulta la longitud total del intervalo.

De hecho, existen varias maneras de dar rigor matemático a la noción de infinitésimo, pero de momento no las vamos a abordar.

Queremos resaltar que el concepto de **longitud**, en este caso, de intervalos en \mathbb{R} , está ligado a la definición de la integral en una variable.

1.4 Definición de la integral plana en rectángulos

Una vez entendida la existencia de la medida euclídea plana n -dimensional m , se puede construir una integral muy general. Sin embargo, dado que esto nos desviaría bastante de los objetivos, procedemos a imitar la definición de Riemann de la integral unidimensional. Esto da una noción mucho más limitada de integral, pero suficiente para las aplicaciones clásicas al Cálculo Integral multivariable.

Definición 1.4.1: Partición de un rectángulo

Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un rectángulo, una **partición** ρ de A es una **subdivisión** de A en subrectángulos B que no se solapan.

Nota 1.4.1: Subdivisión con replicación

Aunque parezca una evidencia, hace falta observar que de hecho **es posible descomponer** un rectángulo en un número finito de otros rectángulos que no se solapan. Esta propiedad de **replicación** no la tienen todas las figuras (por ejemplo, un disco no la tiene).

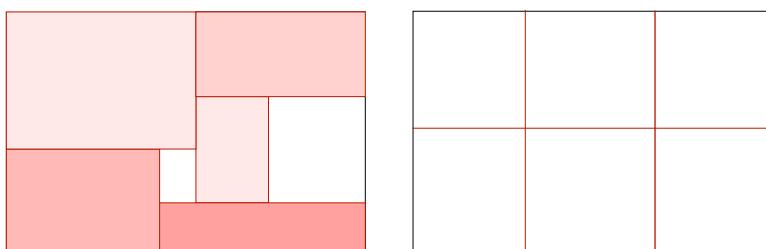


Figura 1.5 – Particiones de un rectángulo.

Puede observarse que la segunda partición es más «regular» que la primera. En la práctica se suele preferir el segundo tipo para calcular aproximaciones a las integrales.

Si ρ es una partición del rectángulo A , entonces

$$m(A) = \sum_{B \in \rho} m(B).$$

Esta fórmula es consecuencia de la aditividad y del hecho que los **lados** de los rectángulos son de dimensión menor que n , y por tanto tienen *medida nula*.

Nota 1.4.2: Medida nula y dimensión baja

Los conjuntos de dimensión menor que n tienen medida n -dimensional nula.

Estos casos particulares, considerados antiguamente como «verdades fundamentales» de la geometría, forman el comienzo del libro de los *Elementos* de Euclides:

- Un punto tiene longitud nula.
- Una curva tiene área nula.
- Una superficie tiene volumen nulo.

En general, un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene medida nula si y sólo si, dado $\varepsilon > 0$, se puede cubrir por una sucesión, posiblemente infinita, de rectángulos tal que la suma total de las medidas de esos rectángulos es menor que ε .

Definición 1.4.2: Muestra de una partición

Una **muestra** \mathcal{M} de una partición \wp es una elección de un punto c_B en cada rectángulo B de \wp .

Definición 1.4.3: Suma de Riemann

Sea f una función acotada en un rectángulo A , \wp una partición y \mathcal{M} una muestra de \wp . La suma de Riemann de f con estos datos es

$$S(f, \wp, \mathcal{M}) = \sum_{B \in \wp} f(c_B) m(B).$$

Puede comprobarse que esta definición coincide con la dada anteriormente cuando $n = 1$.

Geométricamente, corresponde a elevar sobre las bases rectangulares n -dimensionales $B \in \wp$, unas alturas a lo largo del eje $(n + 1)$ -ésimo cuya longitud corresponde al valor de la función. Se obtienen rectángulos $(n + 1)$ -dimensionales que aproximan a la gráfica de la función ([figura 1.6](#))

Definición 1.4.4: Tamaño de una partición

Si \wp es una partición, definimos $\|\wp\| = \max\{m(B) : B \in \wp\}$ (el máximo de las medidas de los subrectángulos).

Con estas definiciones, la integrabilidad y la definición de integral son análogas a las dadas en 1 variable.

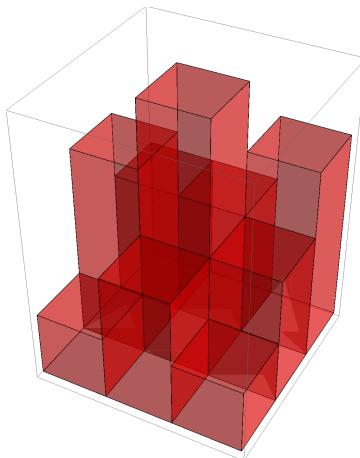


Figura 1.6 – Aproximación rectangular correspondiente a una suma de Riemann de una función de dos variables.

Definición 1.4.5: Integrabilidad en un rectángulo en el sentido de Riemann

Sea f acotada en el rectángulo A . Decimos que f es integrable en A si existe el límite uniforme en las muestras

$$\lim_{\|\varphi\| \rightarrow 0} S(f, \varphi, \mathcal{M})$$

Definición 1.4.6: La integral de Riemann en un rectángulo n -dimensional

El límite anterior, si existe, es la **integral de f sobre A** . Se denota de diversas maneras:

$$\int_A f, \quad \int_A f dm, \quad \int_A f(x) dm(x), \quad \int_A f(x) dx, \quad \int \dots \int_A f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ recorre A .

En una variable, si $f \geq 0$, la integral $\int_{[a,b]} f(x) dx$ es el área acotada por la **gráfica** de f , y formar las sumas de Riemann equivale a considerar aproximaciones escalonadas á f .

Similarmente, en dos variables, se tiene una aproximación escalonada por rectángulos tridimensionales, y en n variables, por rectángulos $(n+1)$ -dimensionales. La integral $\int_A f dm$ representa la medida $(n+1)$ -dimensional acotada por la gráfica de f , que es el conjunto

$$\left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) : x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \right\}.$$

Esta interpretación sólo es visualizable si $n = 1, 2$, por tanto no resulta tan útil en general. Más adelante damos una interpretación alternativa universal de la

1.4 Definición de la integral plana en rectángulos

integral.

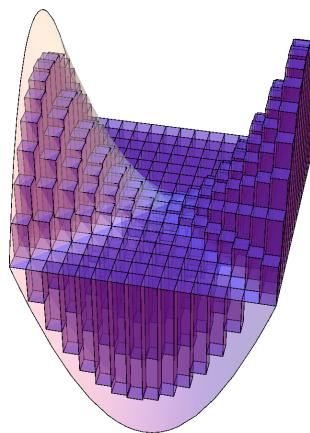


Figura 1.7 – Aproximación escalonada a la función $f(x, y) = x^2 - y^2$.

En los casos de dimensión baja $n = 1, 2, 3$, usaremos los nombres tradicionales y una notación particular, resaltando que **la dimensión de la integral o medida debe coincidir con la del conjunto donde se integra**:

1. $\int_{[a,b]} f d\ell$ integral de **longitud** en \mathbb{R} sobre **intervalos**.

2. $\iint_G f da$ integral de **área** en \mathbb{R}^2 sobre **recintos planos**.

3. $\iiint_{\Omega} f dv$ integral de **volumen** en \mathbb{R}^3 sobre **sólidos**.

Para dimensiones $n \geq 4$ y cuando queramos referirnos a la integral en abstracto, usaremos la letra m de medida.

Nota 1.4.3: Notación infinitesimal para el elemento de medida

Al igual que ocurre en una variable, la notación diferencial dm ó dx designa un «cambio infinitesimal del volumen n -dimensional». Se le puede dar rigor a la notación, pero de momento no nos preocuparemos de ello.

1.5 Definición de la integral plana en otros conjuntos

Los rectángulos son un tipo de conjunto demasiado particular para las aplicaciones de la teoría. Para una función f definida en un recinto **acotado** $A \subseteq \mathbb{R}^n$ en general, se emplea el siguiente procedimiento:

1. Se encuentra un rectángulo B tal que $A \subseteq B$.
2. Se considera la nueva función \tilde{f} definida por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

3. Si la función \tilde{f} es integrable en el rectángulo B , decimos que f es integrable en A , y definimos

$$\int_A f dm \stackrel{\text{def}}{=} \int_B \tilde{f} dm.$$

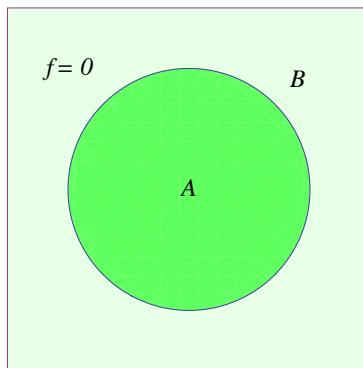


Figura 1.8 – La integral sobre un recinto acotado.

Enunciado 1.5.1: La integral en un recinto general

Ni la noción de integrabilidad en un recinto acotado A general ni la definición de la integral dependen de la elección de rectángulo B que contiene A .

Un problema que no es aparente a primera vista es que, en cuanto a la integrabilidad, ahora el propio recinto A juega un papel tan importante como la función f que se quiere integrar. Es decir, si A es «demasiado irregular», ya va a causar que no exista la integral, por muy «buena» que sea la función f .

1.6 Propiedades básicas de la integral

Al igual que ocurre en una variable, la continuidad implica la integrabilidad, al menos para funciones definidas en rectángulos.

Enunciado 1.6.1: La continuidad implica la integrabilidad (en rectángulos)

Las funciones continuas en un rectángulo A son integrables en A .

Enunciado 1.6.2: El Teorema de Lebesgue

Una función f es integrable en un rectángulo A en el sentido de Riemann si y sólo si su conjunto de discontinuidades \mathcal{D} en A tiene medida nula.

► Ejemplo 1.6.1

Si una función de dos variables es continua salvo a lo largo de una curva, es integrable, pues la recta tiene medida de área nula. ◀

► Ejemplo 1.6.2

Si una función de tres variables es continua salvo a lo largo de una superficie, es integrable, pues la superficie tiene medida de volumen nula. ◀

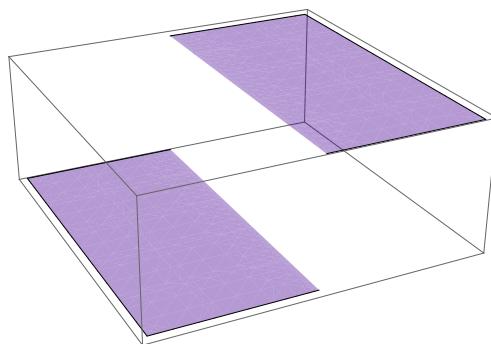


Figura 1.9 – Gráfica de una función de dos variables con una discontinuidad a lo largo de una recta.

Lebesgue se dio cuenta de algunas de las dificultades inherentes en la definición de la integral dada por Riemann. En particular, la función constante $f = 1$ es integrable en el sentido de Riemann en un recinto acotado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si y sólo si su **frontera o borde** ∂A tiene **medida nula**.

Definición 1.6.1: Conjunto J-medible

Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es Jordan-medible o simplemente J-medible, si su frontera tiene medida nula: $m(\partial A) = 0$.

Una de las mejoras que aporta la integral más general de Lebesgue sobre la de Riemann es que no se requiere esta condición sobre la frontera para poder integrar. De ahora en adelante supondremos que «medible» significa J-medible si usamos la integral de Riemann, pero no nos vamos a preocupar de este tema.

Enunciado 1.6.3: La integral de 1 es la medida

La función constante con valor 1 es integrable (en el sentido de Riemann) en un recinto A si y sólo si la **frontera** o **borde** ∂A del recinto tiene medida nula. En este caso, se tiene

$$\int_A 1 dm = m(A).$$

Nota 1.6.1: Medida e integral

De este modo, se puede decir que integral y medida «son la misma cosa» pues a partir de la medida se define la integral, y a partir de la integral se vuelve a obtener la medida.

Enunciado 1.6.4: Propiedades generales de la integral

Suponiendo que las funciones referidas son integrables, y los conjuntos son J-medibles, se tienen las siguientes propiedades generales:

1. Linealidad

$$\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g \quad \int_A (kf) = k \int_A f \quad (k \text{ constante})$$

2. Monotonía

$$f \leq g \implies \int_A f \leq \int_A g$$

3. Desigualdad Triangular

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f| \leq \sup_A |f| \cdot m(A).$$

4. **Aditividad finita** Si $A = \bigcup_{k=1}^r A_k$ y los conjuntos A_k no se solapan, entonces

$$\int_A f = \sum_{k=1}^r \int_{A_k} f$$

Veremos que esta lista de propiedades es completamente general, siendo válida para integrales con cualquier medida que vayamos a estudiar, e incluso para las integrales más generales que se estudian en la Teoría de la Medida.

1.7 Interpretaciones y aplicaciones de la integral

Definición 1.7.1: Valor medio de una función sobre un conjunto

Sea f integrable respecto a la medida n -dimensional m sobre un medible $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con $m(A) > 0$. El **valor medio de f sobre A** es

$$f_A \stackrel{\text{def}}{=} \text{vm}_A(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m(A)} \int_A f dm.$$

Las propiedades de las integrales se traducen inmediatamente en propiedades de los valores medios. **De especial importancia es la versión de la aditividad para valores medios.**

Enunciado 1.7.1: Propiedades generales del valor medio

Suponiendo que las funciones referidas son integrables, y los conjuntos son J -medibles,

1. Constancia

$$\text{vm}_A(k) = k \text{ para la función constante } f = k$$

2. Linealidad

$$\text{vm}_A(f + g) = \text{vm}_A(f) + \text{vm}_A(g) \quad \text{vm}_A(kf) = k \text{vm}_A(f) \quad (k \text{ constante})$$

3. Monotonía

$$f \leq g \implies \text{vm}_A(f) \leq \text{vm}_A(g)$$

4. Desigualdad Triangular

$$|\text{vm}_A(f)| \leq \text{vm}_A(|f|).$$

5. Aditividad finita Si $A = \bigcup_{k=1}^r A_k$ y los conjuntos A_k no se solapan, entonces

$$\text{vm}_A(f) = \sum_{k=1}^r \frac{m(A_k)}{m(A)} \text{vm}_{A_k}(f)$$

La aditividad finita en palabras es un enunciado clásico.

Nota 1.7.1: Aditividad finita de los valores medios

El valor medio sobre una unión disjunta de conjuntos es la combinación lineal de los valores medios sobre cada parte, con **pesos** iguales a la **proporción de medida de cada parte** respecto al total.

Definición 1.7.2: Centro de gravedad

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible con $m(A) > 0$. El **centro de gravedad** de A es el punto cuyas coordenadas son los valores medios sobre A de las funciones coordenadas:

$$c_A \stackrel{\text{def}}{=} (c_1, c_2, \dots, c_n), \quad c_k = \frac{1}{m(A)} \int_A x_k dm(x)$$

En otras palabras, el centro de gravedad de A es la **posición media sobre A** .

En particular, el centro de gravedad de una unión $A = \bigcup_{k=1}^r A_k$ de partes A_k que no se solapan es la combinación lineal de los centros de gravedad de cada parte con peso la proporción de medida de la parte relativa al total:

$$c_A = \sum_{k=1}^r \frac{m(A_k)}{m(A)} c_{A_k} \quad [1.7.1]$$

Este es un resultado clásico y extremadamente útil para calcular centros de gravedad mediante la partición de un recinto complicado en otros más sencillos.

Nota 1.7.2: Advertencia sobre el centro de gravedad

El centro de gravedad de A no tiene por qué pertenecer a A .

Enunciado 1.7.2: Simetría y centro de gravedad

Si un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es simétrico respecto a la **subvariedad lineal** L (punto, recta, plano, etc.), su centro de gravedad c_G se halla en L .

► Ejemplo 1.7.1

Si A es simétrico respecto a un punto p , entonces $c_A = p$.

Definición 1.7.3: Momentos de inercia

Sea L una **subvariedad lineal** de \mathbb{R}^n , es decir, el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales: un punto, una recta, un plano, etc.

El **momento de inercia** de un conjunto A respecto a L está definido por la integral

$$I_L(A) = \int_A \left(d_L(x) \right)^2 dm(x)$$

donde $d_L(x)$ es la distancia mínima de un punto x a L .

► Ejemplo 1.7.2

Si $L = \{0\}$ (el origen en \mathbb{R}^n) entonces $d_L^2(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. Por tanto el momento de inercia de un recinto A respecto al origen es

$$\int_A (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) dx_1 \cdots dx_n$$

**► Ejemplo 1.7.3**

Si L_k es el plano de coordenadas $x_k = 0$ entonces el punto de L_k más cercano a un punto cualquiera (x_1, x_2, \dots, x_n) es $(x_1, x_2, \dots, 0, \dots, x_n)$, que está a distancia $|x_k|$. Por tanto la integral

$$I_k = \int_A x_k^2 dx_1 \cdots dx_n$$

es el momento de inercia respecto a L_k . En general, a las integrales

$$\int_A x_k^p dm(x)$$

con otras potencias p se las llama también **momentos** de A .

**Definición 1.7.4: Medida de masa relativa a una densidad**

Sea ρ una función no negativa en un recinto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se puede interpretar $\rho(x)$ como la **densidad de masa por unidad de medida n -dimensional** y entonces la integral

$$m_\rho(A) = \int_A \rho dm$$

representa la **masa total** de A con esta distribución de densidad.

Nota 1.7.3: Densidad negativa

No es tan esencial que $\rho \geq 0$. Si usamos cualquier ρ podemos interpretarla como una densidad de **carga**, y $\mu(A)$ como la **carga total** de A , que podría ser 0 por cancelación de cargas positivas y negativas.

Enunciado 1.7.3: Integral relativa a una medida de masa

Sea ρ una densidad en \mathbb{R}^n . La masa $m_\rho(A)$, considerada como función del conjunto A , es una medida. La diferencial respecto a esta medida viene dada por

$$dm_\rho = \rho dm$$

donde la medida infinitesimal en x se multiplica por la densidad $\rho(x)$. La integral de una función f sobre A respecto a la masa m_ρ es

$$\int_A f dm_\rho = \int_A f\rho dm$$

De este modo, los valores medios se pueden definir en términos de una masa:

$$f_A = \frac{1}{m_\rho(A)} \int_A f dm_\rho = \frac{\int_A f\rho dm}{\int_A \rho dm} \quad [1.7.2]$$

e igualmente el centro de gravedad, que pasa a llamarse **centro de masas**

$$c_A = (c_1, c_2, \dots, c_n), \quad c_k = \frac{\int_A x_k \rho(x) dm(x)}{\int_A \rho(x) dm(x)} \quad [1.7.3]$$

y los momentos de inercia,

$$I_L(A) = \int_A (d_L(x))^2 \rho(x) dm(x) \quad [1.7.4]$$

Enunciado 1.7.4

Las propiedades de la integral y de los valores medios enunciadas anteriormente ([apartado 1.6](#)) son válidas para la integral relativa a una medida de masa cualquiera.

1.8 El Teorema de Fubini en rectángulos

Los resultados anteriores son abstractos y teóricos y, salvo mencionar que la integral de Riemann plana n -dimensional es un límite de sumas, no aportan un método de cálculo efectivo. Pondremos remedio a esta situación.

Empezamos con el caso $n = 2$, el plano \mathbb{R}^2 . Tenemos dos variables, designadas x, y . Suponemos que G es el rectángulo

$$G = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Sea $f(x, y)$ una función continua en G . El Teorema de Fubini en dos variables dice que la integral de f se puede calcular mediante dos integrales de una variable, con la fórmula siguiente:

$$\iint_G f \, dA = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f \, dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) \, dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) \, dy$$

[1.8.1]

(hemos escrito dA para la medida de área, para evitar confusión con la coordenada a del rectángulo). Las integrales

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy, \quad J(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx$$

son **integrales paramétricas** que definen funciones de x, y respectivamente. A su vez, como son funciones continuas, se pueden integrar. La fórmula anterior dice que

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f \, dA = \int_a^b I(x) \, dx = \int_c^d J(y) \, dy.$$

O sea, la integral doble completa sobre el rectángulo se puede calcular integrando primero una variable, manteniendo la otra fija, y luego integrando la segunda variable, quedando el valor de la integral doble.

Definición 1.8.1: Integrales iteradas

Las integrales donde se calcula integrando una variable a la vez, por ejemplo, en dos variables x, y integrando primero respecto a x , manteniendo y constante y luego respecto a y , ó viceversa, primero y , luego x , se llaman **integrales iteradas**.

► Ejemplo 1.8.1

Calculamos la integral de $f(x, y) = xy$ sobre el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$

$$\begin{aligned} \int_{[a,b] \times [c,d]} xy \, dA &= \int_a^b \int_c^d xy \, dy \, dx = \int_a^b \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=c}^{y=d} \, dx = \int_a^b \left[x \frac{d^2 - c^2}{2} \right] \, dx \\ &= \frac{d^2 - c^2}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{d^2 - c^2}{2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2}. \end{aligned}$$

Intercambiando el orden de integración,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b] \times [c,d]} xy \, dA &= \int_a^b \int_c^d xy \, dx \, dy = \int_a^b \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=a}^{x=b} \, dy = \int_a^b \left[\frac{b^2 - a^2}{2} y \right] \, dy \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2} \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=c}^{y=d} = \frac{b^2 - a^2}{2} \cdot \frac{d^2 - c^2}{2}. \end{aligned}$$



El intercambio en el orden de integración corresponde a la propiedad correspondiente de las sumas finitas:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} f(i, j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(i, j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(i, j)$$

donde simplemente es una expresión de la **comutatividad de la suma**. Dado que la integral de Riemann se define como límite de sumas, no es de extrañar que se cumpla la propiedad enunciada. Sin embargo, una demostración rigurosa requiere entrar en detalles técnicos acerca de la continuidad. Una suma infinita es un concepto más complicado que una suma finita y de hecho, si se relajan las hipótesis, el resultado puede ser falso, es decir, puede fallar la comutatividad en las sumas infinitas y en las integrales.

Pasamos ahora al caso general de un rectángulo n -dimensional. En n variables x_1, x_2, \dots, x_n , hay muchas maneras de cambiar el orden.

Definición 1.8.2: Definición de permutación

Una **permutación** de los primeros n enteros es simplemente una **biyección**

$$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

o sea, un **reordenamiento**. En general, n objetos ordenados indexados x_1, x_2, \dots, x_n se permutan de acuerdo con

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Hay $n! = n(n - 1)(n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ permutaciones de n objetos **distintos**.

Por ejemplo, si pensamos en los objetos como letras concatenadas a, b, c, d, \dots distintas, con un objeto, la única permutación es no hacer nada, la operación identidad. Con dos objetos, dos permutaciones:

$$ab \rightarrow ab, ba$$

la identidad y la **transposición** de dos elementos. Con tres objetos, seis permutaciones:

$$abc \rightarrow abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Con cuatro objetos, 24 permutaciones:

$$\begin{array}{cccccc} \text{pato} & \text{paot} & \text{ptao} & \text{pto} & \text{pota} & \text{poat} \\ \text{pato} \rightarrow & \text{apto} & \text{apot} & \text{atop} & \text{atpo} & \text{aotp} \\ & \text{tapo} & \text{taop} & \text{tpao} & \text{tpoa} & \text{toap} \\ & \text{otap} & \text{otpa} & \text{oapt} & \text{oatp} & \text{opat} \end{array}$$

Las permutaciones a menudo se designan en la forma matricial

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

indicando los enteros del 1 al n en la primera fila y sus imágenes en la segunda.

Enunciado 1.8.1: El Teorema de Fubini para rectángulos

Sea R el rectángulo

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

y $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ continua en R . Para cualquier permutación σ de $1, 2, 3, \dots, n$,

$$\int_R f dm = \int_{a_{\sigma(1)}}^{b_{\sigma(1)}} \int_{a_{\sigma(2)}}^{b_{\sigma(2)}} \cdots \int_{a_{\sigma(n)}}^{b_{\sigma(n)}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{\sigma(n)} \dots dx_{\sigma(2)} dx_{\sigma(1)} \quad [1.8.2]$$

Es decir, se integra en **orden inverso** a como están ordenadas las variables.

El significado práctico del Teorema de Fubini es el siguiente.

Nota 1.8.1: Implicaciones prácticas del Teorema de Fubini

- Una integración n -dimensional equivale a n integraciones n -dimensionales.
- El orden de integración no altera el resultado.

Una consecuencia útil es el caso cuando la función se puede descomponer en producto de funciones, cada una de una variable. Esto se llama el caso de **variables separadas**.

Enunciado 1.8.2: Variables Separadas

Sea R el rectángulo

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

y $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ continua en R de **variables separadas**:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdots f_n(x_n).$$

Entonces

$$\int_R f dm = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) dx_1 \cdot \int_{a_2}^{b_2} f_2(x_2) dx_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) dx_n.$$

- **Demostración:** Aplicación inmediata del Teorema de Fubini. ■

► Ejemplo 1.8.2

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} xy dA = \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 y dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

**► Ejemplo 1.8.3**

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} xy dA = \int_a^b x dx \cdot \int_c^d y dy = \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) \cdot \left(\frac{d^2 - c^2}{2} \right).$$

**► Ejemplo 1.8.4**

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} x^n y^m dA = \int_0^1 x^n dx \cdot \int_0^1 y^m dy = \frac{1}{(n+1)(m+1)} \text{ si } n, m \geq 0.$$



Enunciado 1.8.3: El Teorema de Fubini para integrales impropias

El Teorema de Fubini es válido para integrales impropias, es decir, donde

- el recinto A es un producto de intervalos, algunos posiblemente no acotados,
- la función que se integra puede ser no acotada

bajo la hipótesis de **convergencia absoluta**:

$$\int \dots \int_A |f| dm < \infty$$

► Ejemplo 1.8.5: momento de inercia de una lámina rectangular

Sea Q un rectángulo de anchura L y altura H . Lo suponemos centrado en el origen y con lados paralelos a los ejes, de modo que $Q = [-L/2, L/2] \times [-H/2, H/2]$. Calculamos su momento de inercia relativo al eje z . Aprovechamos la simetría y separamos variables:

$$\begin{aligned} I_{zz}(Q) &= \iint_Q (x^2 + y^2) da = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-H/2}^{H/2} (x^2 + y^2) dy dx = 4 \int_0^{L/2} \int_0^{H/2} (x^2 + y^2) dy dx \\ &= 4 \int_0^{L/2} \int_0^{H/2} x^2 dy dx + 4 \int_0^{L/2} \int_0^{H/2} y^2 dy dx \\ &= 4 \int_0^{L/2} x^2 dx \int_0^{H/2} dy + 4 \int_0^{L/2} dy \int_0^{H/2} y^2 dy \\ &= 4 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{L/2} \cdot \frac{H}{2} + 4 \cdot \frac{L}{2} \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{H/2} \\ &= 4 \cdot \frac{L^3}{24} \cdot \frac{H}{2} + 4 \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{H^3}{24} = \frac{LH(L^2 + H^2)}{12} = \frac{1}{12}m(L^2 + H^2) \end{aligned}$$

donde $m = LH$ es la masa, suponiendo densidad 1, lo cual la hace igual al área.



1.9 El Teorema de Fubini en regiones elementales

Para integrar en otros recintos A , como vimos hace falta una cierta condición (J -medible, o sea $m(\partial A) = 0$). Para poder calcular una integral en un tal recinto, necesitamos que tenga una forma determinada lo suficientemente sencilla.

Los recintos «sencillos» suelen estar descritos algebraicamente por **desigualdades** entre las variables. Por ejemplo, el rectángulo n -dimensional $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ es el conjunto de puntos $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que $a_k \leq x_k \leq b_k$ para cada $k = 1, 2, \dots, n$.

La idea detrás del concepto de región elemental consiste en dejar variar los extremos de modo que éstos dependan de las variables **anteriores** en el orden en que se van añadiendo, nunca de las «futuras».

Definición 1.9.1: Regiones elementales en \mathbb{R}^n

Una **región elemental** $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto descrito en la forma

$$E : \left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq x_{\sigma(1)} \leq b_1 \\ a_2(x_{\sigma(1)}) \leq x_{\sigma(2)} \leq b_2(x_{\sigma(1)}) \\ \vdots \\ a_{k-1}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k-1)}) \leq x_{\sigma(k)} \leq b_{k-1}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k-1)}) \\ \vdots \\ a_{n-1}(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}) \leq x_{\sigma(n)} \leq b_{n-1}(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}) \end{array} \right.$$

donde σ es una permutación de $1, 2, 3, \dots, n$ y las funciones a_k, b_k se suponen al menos continuas.

Nota 1.9.1: Caracterización algebraica de las regiones elementales

Lo que hace que una región sea «elemental» es la regla algebraica de que **cada vez que se añade una variable, ésta varía entre dos cotas que son funciones de las variables anteriores**.

Enunciado 1.9.1: Las regiones elementales tienen frontera de medida nula

Las regiones elementales con extremos continuos son J -medibles (su frontera es de medida nula por la [definición 1.6.1](#)).

- **Demostración:** Usando la notación de la [definición 1.9.1](#), se demuestra fácilmente que si un punto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ está en la frontera ∂E de la región elemental

E, alguna de las desigualdades que define la región es **igualdad**. Entonces el resultado es consecuencia del hecho que la **gráfica** de una función continua de n variables tiene medida $(n + 1)$ -dimensional de Lebesgue nula. ■

Las regiones elementales permiten generalizar el modo en que uno puede calcular integrales n -dimensionales, reduciéndolas a hacer n integrales unidimensionales, integrando una variable a la vez, en un proceso que viene a ser el inverso de la derivación parcial sucesiva.

Enunciado 1.9.2: Teorema de Fubini en regiones elementales

Sea f continua en la región elemental descrita por

describir ↓

$$E : \left\{ \begin{array}{c} a_1 \leqslant x_{\sigma(1)} \leqslant b_1 \\ a_2(x_{\sigma(1)}) \leqslant x_{\sigma(2)} \leqslant b_2(x_{\sigma(1)}) \\ \vdots \\ a_{n-1}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}) \leqslant x_{\sigma(n)} \leqslant b_{n-1}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}) \end{array} \right.$$

↑ integral

Entonces la integral $\int_E f dm$ es igual a

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2(x_{\sigma(1)})}^{b_2(x_{\sigma(1)})} \cdots \int_{a_{n-1}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)})}^{b_{n-1}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)})} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \, dx_{\sigma(n)} \cdots dx_{\sigma(2)} \, dx_{\sigma(1)}$$

Resaltamos los datos importantes:

Nota 1.9.2: El orden de integración sobre una región elemental

- Se integra en **orden inverso** a la descripción de la región
 - Puede haber más de una descripción de la región elemental E , correspondientes a distintas permutaciones. Esto depende de si E es **simétrica bajo permutación**.
 - Cambiar el orden cambiará las fórmulas para las funciones extremos a_k, b_k .

► Ejemplo 1.9.1

En \mathbb{R}^2 hay dos tipos de región elemental, correspondientes a las dos permutaciones

1.9 El Teorema de Fubini en regiones elementales

ciones de las variables (figura 1.10). Corresponden a descripciones

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ A(x) \leq y \leq B(x) \end{cases} \quad \begin{cases} c \leq y \leq d \\ C(y) \leq x \leq D(y) \end{cases}$$

y nos dan integrales iteradas

$$\int_a^b \int_{A(x)}^{B(x)} f(x, y) dy dx, \quad \int_c^d \int_{C(y)}^{D(y)} f(x, y) dx dy.$$

Las integrales interiores son paramétricas:

$$x \rightarrow \int_{A(x)}^{B(x)} f(x, y) dy, \quad y \rightarrow \int_{C(y)}^{D(y)} f(x, y) dx$$

y al integrar estas funciones, queda el valor de la integral total. 

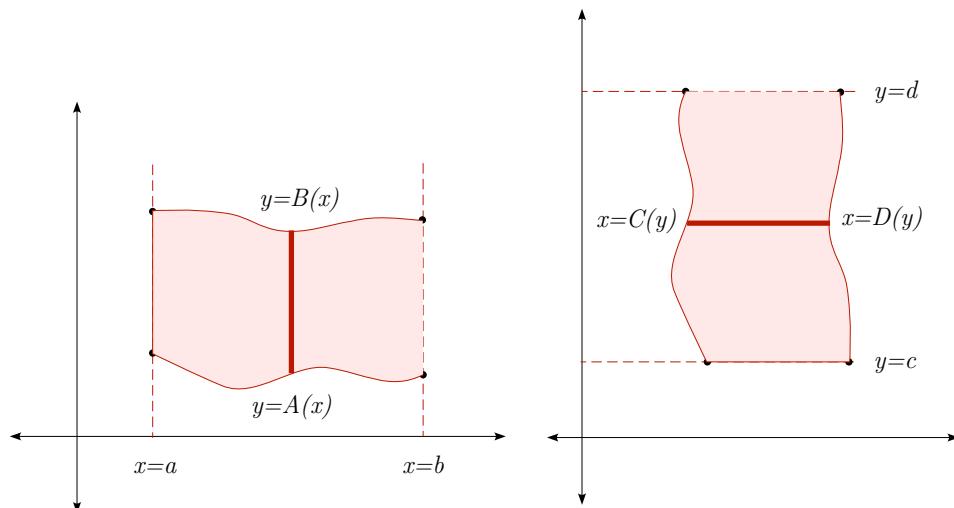


Figura 1.10 – Regiones elementales planas

No todas las regiones son elementales.

De hecho, en una región elemental plana, debe haber dos lados verticales u horizontales, y otros dos curvos, que representan la parte «de arriba» y «de abajo» o la parte «izquierda» y «derecha» de la figura, **y que son gráficas de funciones**.

Para que una curva en el plano xy sea la gráfica de una función sobre el intervalo $[a, b]$ en el eje x debe pasar que cada recta **vertical** $x = x_0$ con $x_0 \in [a, b]$, corte a la curva en exactamente un punto. Similarmente, para que sea la gráfica de una función sobre el intervalo $[c, d]$ en el eje y cada recta **horizontal** debe cortar a la curva en exactamente un punto. De estos criterios se obtienen otros para determinar si una **región plana** es elemental.

Enunciado 1.9.3: Condiciones geométricas para ser región elemental plana

$G \subseteq \mathbb{R}^2$ es una región elemental plana en el orden x, y si

- Está acotada y su borde ∂G es una curva continua.
- Si G se halla entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, entonces cada recta vertical $x = x_0$ con $a < x_0 < b$ corta al borde ∂G de G en uno o dos puntos.

$G \subseteq \mathbb{R}^2$ es una región elemental plana en el orden y, x si

- Está acotada y su borde ∂G es una curva continua.
- Si G se halla entre las rectas horizontales $y = c$ y $y = d$, entonces cada recta horizontal $y = y_0$ con $c < y_0 < d$ corta al borde ∂G de G en uno o dos puntos.

Si el corte con el borde ocurre en un punto en vez de dos, geométricamente esto corresponde a un punto de contacto donde se tocan las dos gráficas ([figura 1.11](#)).

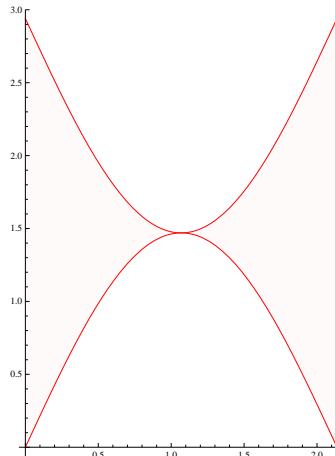


Figura 1.11 – Una región elemental con un punto de contacto.

► Ejemplo 1.9.2

Una región agujereada ([figura 1.12](#)) no es elemental: hay rectas verticales y horizontales que la cortan en cuatro puntos.

Nota 1.9.3: Regiones no elementales

Afortunadamente, la mayoría de las regiones que nos interesan en la práctica, aunque no sean regiones elementales, se pueden subdividir en regiones elementales que no se solapan.

En tres dimensiones es más difícil visualizar las maneras en las que una figura puede torcerse o tener agujeros, pero el criterio para ser región elemental es análogo, si se tiene en cuenta que la construcción es inductiva.

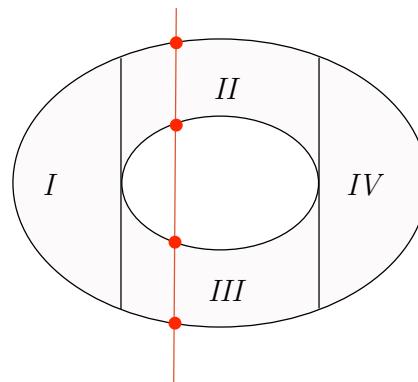


Figura 1.12 – Subdivision de una región no elemental en cuatro regiones elementales.

Enunciado 1.9.4: Condiciones geométricas para ser región elemental sólida

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ es una región elemental sólida en el orden x, y, z si

- Está acotada y su borde $\partial\Omega$ es una superficie.
- Tiene una **base** G que es una región elemental **plana** en el plano xy tal que dado un punto p en el **interior** de G , cada recta vertical (paralela al eje z) corta al borde $\partial\Omega$ de Ω en uno o dos puntos.

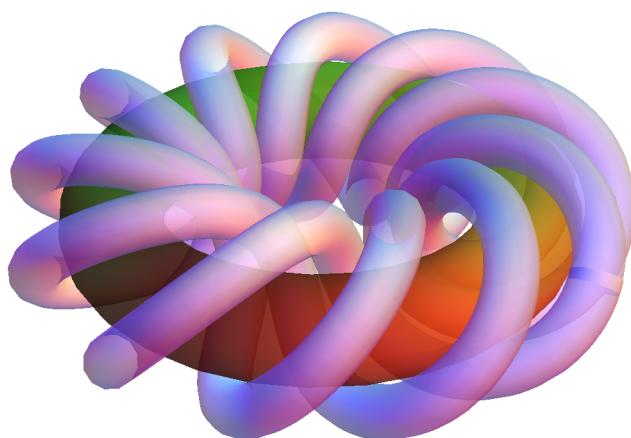


Figura 1.13 – Los sólidos tridimensionales pueden ser complicados de visualizar y de descomponer en regiones elementales (nudo toroidal de *Mathematica* ©).

1.10 El Principio de Cavalieri en \mathbb{R}^n

Cavalieri observó que dos sólidos cuyas «rodajas» hechas a una misma altura, siempre tengan la misma área (aún teniendo formas geométricas diferentes), deben tener el mismo volumen. La razón de esto es que el volumen se puede calcular integrando el área de las rodajas en función de la altura. El resultado general, válido en dimensiones arbitrarias, es una consecuencia del Teorema de Fubini.

En \mathbb{R}^n destacamos una coordenada de las demás, correspondiente a expresar $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, denotando las coordenadas por (x, z) con $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $z \in \mathbb{R}$. En general se puede separar cualquier coordenada, pero lo escribimos en este orden y llamamos a z la «altura».

Enunciado 1.10.1: El Principio de Cavalieri para la medida

Sea m_n la medida n -dimensional plana en \mathbb{R}^n y $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible. Entonces

$$m_n(A) = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} m_{n-1}(A_z) dz$$

donde z es una coordenada, por ejemplo, la última, y

$$A_z = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x, z) \in A\}$$

es una «rodaja» $(n-1)$ -dimensional de A .

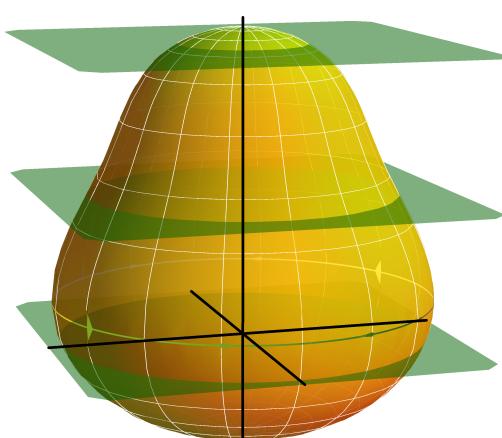


Figura 1.14 – Principio de Cavalieri.

► Ejemplo 1.10.1: cilindro n -dimensional general

Podemos llamar cilindro de altura H a cualquier subconjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ cuyas rodajas sean todas iguales a su «base» $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ ([figura 1.15](#)); entonces

$$B = K_z = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x, z) \in K\}, \quad 0 \leq z \leq H$$

y por el Principio de Cavalieri,

$$m_n(K) = m_{n-1}(B) \cdot H,$$

que generaliza la fórmula «base por altura». En tres dimensiones, estas figuras incluyen al cilindro recto habitual, cilindro oblicuo, ortoedros, paralelepípedos, prismas, etc. ◀

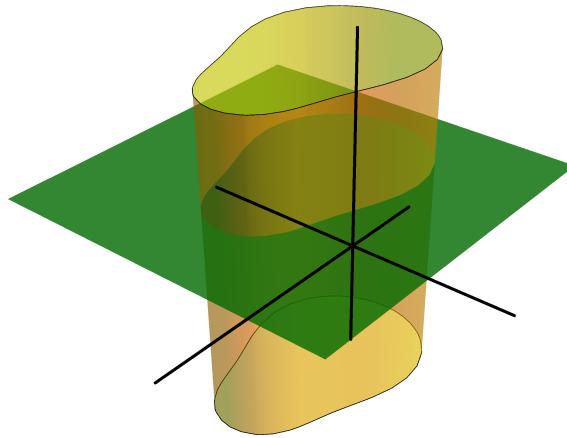


Figura 1.15 – Cilindro general: todos los cortes son iguales.

► Ejemplo 1.10.2: cono n-dimensional general

Dado un subconjunto $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ y un punto $p \in \mathbb{R}^n$ á altura H , el **cono con vértice en p y base B** es la figura formada uniendo los segmentos con un extremo en p y otro en cualquier punto $q \in B \times 0$ ([figura 1.16](#)):

$$K = \bigcup_{q \in B \times 0} [p, q] = \{x = (1-t)p + tq : q \in B \times 0, t \in [0, 1]\}.$$

La rodaja K_z , midiendo z desde el vértice hasta la base, es una copia a escala $z : H$ de la base B ; por tanto, al tratarse de medida $(n - 1)$ -dimensional, la proporción entre las medidas varía como la potencia $(n - 1)$ -ésima del factor:

$$\frac{m_{n-1}(K_z)}{m_{n-1}(B)} = \left(\frac{z}{H}\right)^{n-1}$$

y por el Principio de Cavalieri,

$$m_n(K) = \int_0^H m_{n-1}(K_z) dz = \frac{m_{n-1}(B)}{H^{n-1}} \int_0^H z^{n-1} dz = \frac{m_{n-1}(B)}{H^{n-1}} \cdot \frac{H^n}{n} = \frac{m_{n-1}(B) \cdot H}{n}.$$

Es decir, la medida de un cono n -dimensional es igual a la medida $(n - 1)$ -dimensional de su base por la altura, dividido por n .

Por ejemplo, para $n = 3$, el volumen de un cono es un tercio el área de su base por su altura. Estas figuras incluyen al cono recto y cono oblicuo, y también tetraedros, pirámides, prismas cónicos, etc. ◀

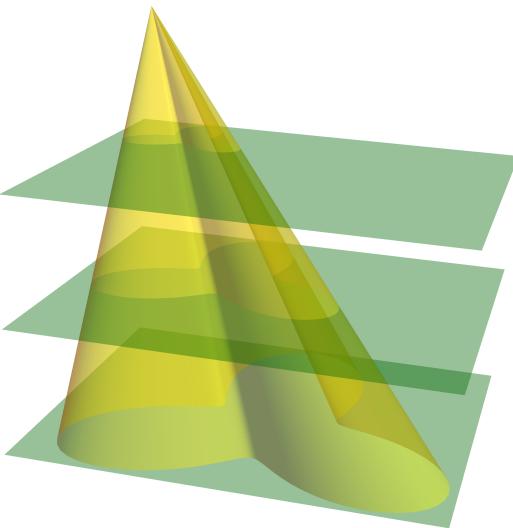


Figura 1.16 – Cono general: los cortes son la misma figura a escala directamente proporcional a la distancia perpendicular al vértice.

► Ejemplo 1.10.3: volumen de una bola sólida

Sea B la bola sólida tridimensional de centro el origen y radio R . Su ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. El corte B_z con el plano horizontal de altura z es el disco de radio r_z donde $r_z^2 = x^2 + y^2 = R^2 - z^2$. Podemos simplificar un poco los límites de integración si tenemos en cuenta que la bola es simétrica respecto al plano $z = 0$. Por tanto el volumen de la bola es

$$\begin{aligned} v(B) &= \int_{-R}^R \iint_{B_z} 1 \, da \, dz = \int_{-R}^R a(B_z) \, dz = 2 \int_0^R a(B_z) \, dz = 2 \int_0^R \pi r_z^2 \, dz \\ &= 2 \int_0^R \pi(R^2 - z^2) \, dz = 2\pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{z=R} = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = 2\pi \cdot \frac{2}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} R^3. \end{aligned}$$



► Ejemplo 1.10.4: volumen de un paraboloide

Consideremos el sólido P limitado por los planos $z = 0$, $z = H$ y el paraboloide circular con vértice en el origen y eje central el eje z , que a altura H desde el vértice tiene radio R ([figura 1.17](#)). Su ecuación es $z = k(x^2 + y^2)$ y la constante k está determinada por la relación $H = kR^2$, o sea $k = H/R^2$. La rodaja P_z de P a altura z es el disco $x^2 + y^2 = z/k$ de radio $r_z = \sqrt{z/k}$. Por tanto el volumen de esta región es

$$v(P) = \iiint_P 1 \, dv = \int_0^H a(P_z) \, dz = \int_0^H \pi r_z^2 \, dz = \int_0^H \pi \frac{z}{k} \, dz = \frac{\pi H^2}{2k} = \frac{\pi H^2 R^2}{2H} = \frac{1}{2} \pi R^2 H,$$

igual a la mitad del volumen del cilindro recto circunscrito.



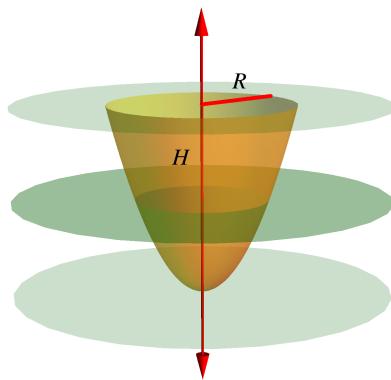


Figura 1.17 – Paraboloide circular cortado por planos perpendiculares a su eje de simetría.

Nota 1.10.1: Cuándo aplicar el Principio de Cavalieri

El Principio de Cavalieri es muy útil para calcular las medidas de figuras cuyas «rodajas» sean sencillas. A menudo evita el tener que hacer cuentas más largas.

El Principio de Cavalieri es un caso particular del Teorema de Fubini. La idea fundamental es que, al igual que \mathbb{R}^n es el producto cartesiano de n copias de \mathbb{R} , la medida plana n -dimensional es el producto de n copias de la medida 1-dimensional. Esto se refleja desde el comienzo en la definición de volumen n -dimensional de un rectángulo, entendido como producto de intervalos $[a_k, b_k]$, igual al producto de sus longitudes, definidas como $b_k - a_k$.

Enunciado 1.10.2: Principio de Cavalieri general

Sea m_n la medida n -dimensional plana en \mathbb{R}^n , $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Separando una coordenada de las demás en \mathbb{R}^n como $(x, t) = (x_1, \dots, x_{n-1}, t)$ con $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $t \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\int_A f(x, t) dm_n(x, t) = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \left(\int_{A_t} f(x, t) dm_{n-1}(x) \right) dt$$

donde $A_t = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x, t) \in A\}$ es la «rodaja» de A de «altura» t . Si $f(x, t)$ es de la forma $f(x, t) = \varphi(x)\rho(t)$ (variables x_1, \dots, x_{n-1} separadas de la variable t), entonces

$$\int_A f(x, t) dm_n(x, t) = \int \left(\int_{A_t} \varphi(x) dm_{n-1}(x) \right) \rho(t) dt.$$

Esto se cumple, por ejemplo, si $f(x, t)$ es independiente de t . El Principio de Cavalieri para la medida es el caso particular de $f(x, t) = 1$.

- **Demostración:** Consideramos la función delta

$$\delta_A(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & (x, t) \in A \\ 0 & (x, t) \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1 & x \in A_t \\ 0 & x \notin A_t \end{cases} = \delta_{A_t}(x).$$

Multiplicar por δ_A tiene el efecto de extender la definición de $f(x, t)$ por cero fuera de A . Entonces, por el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \int_A f(x, t) dm_n(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) \delta_A(x, t) dm_n(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x, t) \delta_{A_t}(x) dm_{n-1}(x) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{A_t} f(x, t) dm_{n-1}(x) dt. \end{aligned}$$

En el caso de variables $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $t \in \mathbb{R}$ separadas, $f(x, t) = \varphi(x)\rho(t)$, se puede sacar el factor $\rho(t)$ fuera de la integral sobre x . Si $f = 1$ entonces $\int_{A_t} 1 dm_{n-1}(x) = m_{n-1}(A_t)$ es la medida $(n - 1)$ -dimensional de la rodaja A y queda el Principio de Cavalieri clásico para la medida: $m_n(A) = \int m(A_t) dt$. ■

► Ejemplo 1.10.5: cálculo de momentos de inercia de sólidos por rodajas

El momento de inercia de un sólido $A \subseteq \mathbb{R}^3$ con densidad 1 alrededor del eje z se puede calcular integrando los momentos de inercia de las «rodajas» de A respecto á z :

$$I_{zz}(A) = \iiint_A (x^2 + y^2) dv = \int \left(\iint_{A_z} (x^2 + y^2) dx dy \right) dz = \int I_{zz}(A_z) dz.$$

Por simetría, la misma técnica es válida para los momentos de inercia respecto a los otros ejes, siempre cortando rodajas perpendicularmente al eje. Esto permite aprovechar fórmulas obtenidas anteriormente de momentos inercia de figuras planas, para obtener los momentos de inercia de sólidos sencillos. ◀

► Ejemplo 1.10.6: centro de gravedad de un hemisferio sólido

Calculamos el centro de gravedad del hemisferio «norte» H de la bola sólida tridimensional B de centro el origen y radio R respecto al eje z , es decir los puntos de la bola con $0 \leq z \leq R$ (figura 1.18). Por simetría, el centro de gravedad se halla sobre el eje z y por tanto sólo necesitamos calcular el valor medio de la coordenada z sobre H :

$$z_H = \frac{1}{v(H)} \iiint_H z dv.$$

Como $v(H) = \frac{1}{2}v(B) = \frac{2\pi}{3}R^3$, basta con calcular la integral de z sobre H . Se trata de la integral

$$\iiint_H z dv = \int_0^R \iint_{H_z} z da dz = \int_0^R za(H_z) dz = \int_0^R \pi z(R^2 - z^2) dz$$

1.10 El Principio de Cavalieri en \mathbb{R}^n

$$= \pi \left[\frac{R^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_{z=0}^{z=R} = \pi \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\pi R^4}{4},$$

y por tanto

$$z_H = \frac{\pi R^4}{4} \cdot \frac{3}{2\pi R^3} = \frac{3}{8} R,$$

es decir, el centro de gravedad de un hemisferio sólido se halla sobre su eje de simetría, a $3/8$ de la distancia del centro a la superficie. ◀

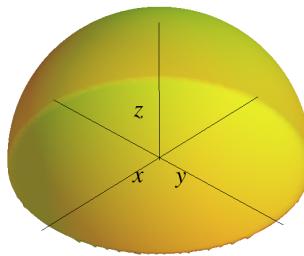


Figura 1.18 – Hemisferio.

► Ejemplo 1.10.7: momento de inercia de una bola sólida

Calculamos el momento de inercia de la bola sólida tridimensional de centro el origen y radio R respecto al eje z . Se trata de la integral

$$I = \iiint_B (x^2 + y^2) dv$$

Ahora, por consideraciones de simetría, los momentos son todos iguales entre sí:

$$\iiint_B x^2 dv = \iiint_B y^2 dv = \iiint_B z^2 dv$$

por tanto $I = 2 \iiint_B z^2 dv$, que se puede calcular por el Principio de Cavalieri:

$$\begin{aligned} 2 \iiint_B z^2 dv &= 2 \int_{-R}^R \iint_{B_z} z^2 da dz = 2 \int_{-R}^R z^2 a(B_z) dz = 4 \int_0^R \pi z^2 (R^2 - z^2) dz \\ &= 4\pi \left[\frac{R^2 z^3}{3} - \frac{z^5}{5} \right]_{z=0}^{z=R} = 4\pi R^5 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{8\pi}{15} R^5 = \frac{2}{5} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot R^2 = \frac{2}{5} m R^2 \end{aligned}$$

donde $m = \frac{4\pi}{3} R^3$ es la masa de la bola (suponiendo densidad 1 es igual a su volumen). ◀

► Ejemplo 1.10.8: momento de inercia de un disco alrededor de su eje central

Consideremos el disco D_R de ecuación $x^2 + y^2 \leq R^2$. Calculamos su momento de inercia alrededor del eje z , que es su eje central perpendicular. Por simetría,

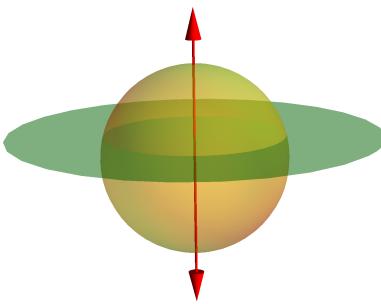


Figura 1.19 – Una bola cortada por un plano perpendicular a un eje de simetría.

basta calcular el momento de la cuarta parte del disco en el primer cuadrante, que denotamos por D_R^{++} y que está descrita como región elemental por

$$0 \leq x \leq R, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$$

llevando a la integral

$$\begin{aligned} I_{zz}(D_R) &= \iint_{D_R} (x^2 + y^2) \, da = 4 \iint_{D_R^{++}} (x^2 + y^2) \, da = 4 \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} (x^2 + y^2) \, dy \, dx \\ &= 4 \int_0^R \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{R^2 - x^2}} \, dx = 4 \int_0^R \left(x^2 (R^2 - x^2)^{1/2} + \frac{1}{3} (R^2 - x^2)^{3/2} \right) \, dx \end{aligned}$$

y ahora, reescalando por un factor de R , queda

$$\begin{aligned} I_{zz}(D_R) &= 4 \int_0^1 R^2 x^2 (R^2 - R^2 x^2)^{1/2} R \, dx + 4 \cdot \frac{1}{3} \int_0^1 (R^2 - R^2 x^2)^{3/2} R \, dx \\ &= 4R^4 \int_0^1 x^2 (1 - x^2)^{1/2} \, dx + 4R^4 \cdot \frac{1}{3} \int_0^1 (1 - x^2)^{3/2} \, dx \\ &= 4R^4 \cdot \frac{\pi}{16} + 4R^4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi R^4}{4} + \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{1}{2} m R^2 \end{aligned}$$

donde $m = \pi R^2$ es la masa del disco, igual a su área suponiendo densidad 1. El cálculo anterior requiere los valores

$$\int_0^1 x^2 (1 - x^2)^{1/2} \, dx = \frac{\pi}{16}, \quad \int_0^1 (1 - x^2)^{3/2} \, dx = \frac{3\pi}{16},$$

que se pueden obtener por sustitución trigonométrica o usando la **función beta**. Más adelante ([apartado 1.12.3](#)) veremos una manera mucho más sencilla de resolver este problema.

La cuenta anterior equivale a calcular el momento de inercia dividiendo el disco en barras verticales ([figura 1.20](#)). A distancia x del origen, la barra correspondiente tiene altura $\ell = 2\sqrt{R^2 - x^2}$. Proporciona un elemento infinitesimal de masa

$$dm = \ell \, dx = 2(R^2 - x^2)^{1/2} \, dx.$$

Si suponemos conocido que el momento de inercia de una barra vertical de longitud ℓ (apartado 2.9), a distancia x del eje de rotación, es $mx^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$, el momento de inercia infinitesimal es

$$dI = x^2 dm + \frac{1}{12}\ell^2 dm = 2x^2(R^2 - x^2)^{1/2} dx + \frac{2}{3}(R^2 - x^2)^{3/2} dx$$

que por simetría lleva a la integral

$$I = \int_{-R}^R dI = 2 \int_0^R dI = 4 \int_0^R \left(x^2(R^2 - x^2)^{1/2} + \frac{1}{3}(R^2 - x^2)^{3/2} \right) dx$$

la misma que nos daba el Teorema de Fubini. ◀

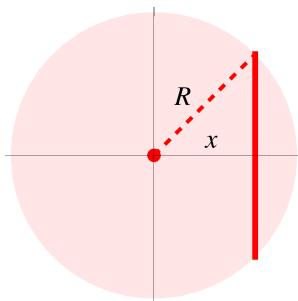


Figura 1.20 – Un disco dividido en barras verticales.

Nota 1.10.2: Razonamiento con infinitésimos de masa

El Principio de Cavalieri expresa rigurosamente aquellos razonamientos con infinitésimos que consisten en cortar en rodajas paralelas a un eje.

Sin embargo, el ejemplo anterior muestra que no siempre van a ser sencillas las cuentas. Para un disco, es más razonable dividir en anillos concéntricos, pero este tipo de subdivisión no es lo que describe el Principio de Cavalieri y requiere otros métodos más generales, que abordaremos en la próxima sección.

► Ejemplo 1.10.9: momento de inercia de un cilindro sólido alrededor de su eje central

Calculamos el momento de inercia alrededor del eje z del cilindro recto K cuya base es el disco de radio R dado por $x^2 + y^2 \leq R^2$, y de altura H sobre el plano $z = 0$. Las rodajas son todas iguales a la base (figura 1.21).

Supondremos conocido que el momento de inercia de un disco de radio R y masa m respecto a su eje central perpendicular es $\frac{1}{2}mR^2$. Entonces, suponiendo densidad 1,

$$I_{zz}(K) = \int_0^H \iint_{K_z} (x^2 + y^2) da dz = \int_0^H I_{zz}(K_z) dz = \int_0^H \frac{1}{2}m(K_z)R^2 dz$$

$$= \int_0^H \frac{1}{2}\pi R^4 dz = \frac{1}{2}\pi R^4 H = \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 H \cdot R^2 = \frac{1}{2}mR^2$$

donde $m = \pi R^2 H$ es la masa del cilindro, suponiendo densidad 1. Es decir, se tiene la misma fórmula que para el disco. ◀

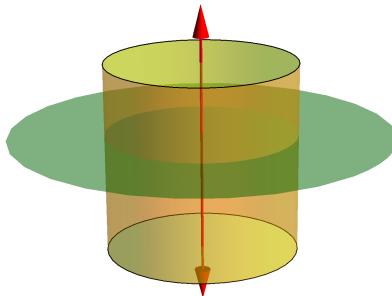


Figura 1.21 – Un cilindro recto cortado por un plano perpendicular a su eje central.

► **Ejemplo 1.10.10: momento de inercia de un ortoedro sólido**

Sea Q un ortoedro de lados L, H, A (figura 1.22). Podemos suponer que es

$$Q = [-L/2, L/2] \times [-H/2, H/2] \times [-A/2, A/2],$$

de modo que su centro es el origen y sus lados son paralelos a los ejes. Calculamos su momento de inercia respecto al eje z . Cortando en láminas rectangulares según la altura z , y sabiendo que el momento de inercia respecto al eje z de una lámina rectangular horizontal de lados L, H es $\frac{1}{12}m(L^2 + H^2)$ (apartado 1.8), queda la misma fórmula para el ortoedro:

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \iiint_Q (x^2 + y^2) dv = \int_{-A/2}^{A/2} I_{zz}(Q_z) dz = \int_{-A/2}^{A/2} \frac{1}{12} LH(L^2 + H^2) dz \\ &= \frac{1}{12} LHA(L^2 + H^2) = \frac{1}{12} m(L^2 + H^2) \end{aligned}$$

pues $m = LHA$ es la masa del ortoedro suponiendo densidad 1. ◀

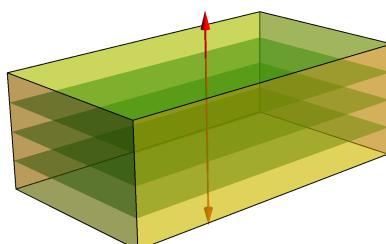


Figura 1.22 – Un ortoedro cortado en láminas.

1.11 Cambio de variable

En una variable tenemos la fórmula

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) du$$

para el cambio de variable o sustitución $x = \varphi(u)$. En términos del enfoque más geométrico que se da a la integral multivariable, este caso unidimensional corresponde a la medida de **longitud** $m = l$. Una interpretación de la fórmula consiste en pensar que la transformación

$$dx \rightarrow d\varphi(u) = \varphi'(u) du$$

corresponde a un **cambio en el infinitésimo de longitud** que se multiplica por la derivada, correspondiente a la **velocidad** que lleva el cambio.

En n variables, un cambio $x = \varphi(u)$ es en realidad un cambio entre puntos de \mathbb{R}^n ,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V \subseteq \mathbb{R}^n, \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in U \subseteq \mathbb{R}^n,$$

donde las variables se relacionan mediante las **funciones componentes** de una $\varphi : U \rightarrow V$

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n), \quad x = \varphi(u) \iff \begin{cases} x_1 = \varphi_1(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ x_2 = \varphi_2(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases}$$

Ahora hay n direcciones independientes (ejes de coordenadas) u_k y por tanto hay n derivadas parciales, que son vectores de \mathbb{R}^n cuyas componentes son las derivadas parciales de las componentes:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_j} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_j}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_j}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_j} \right) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_j}, \frac{\partial x_2}{\partial u_j}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial u_j} \right)$$

Las n^2 combinaciones posibles de derivadas parciales $\partial x_i / \partial x_j$ forman una matriz.

Definición 1.11.1: La matriz jacobiana

Sea $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivable, en coordenadas $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. La matriz

$$d\varphi_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

se denomina **matriz jacobiana** o **diferencial** de φ .

Como hemos comentado, si escribimos $x = \varphi(u)$, es habitual escribir

$$d\varphi_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

identificando la variable x_i con la función φ_i ya que bajo el cambio $x = \varphi(u)$ se tiene $x_i = \varphi_i(u)$. Se trata de un *abuso de notación* pero es muy frecuente.

Nota 1.11.1: Filas y columnas de la matriz jacobiana

En la matriz jacobiana, las filas corresponden a las variables finales $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y las columnas a las variables iniciales $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.

La derivada parcial $\partial x_i / \partial u_j$ representa la tasa de variación infinitesimal de la variable x_i respecto a la variable u_j . La matriz diferencial reúne todas las distintas combinaciones posibles, y por tanto contiene la información total acerca de la variación de las variables $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ respecto a las $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Definición 1.11.2: El determinante jacobiano y el factor jacobiano

Sea $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V$ derivable, y pongamos coordenadas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V$, $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in U$. El **determinante jacobiano** es el determinante de la matriz jacobiana, $\det d\varphi_u$. También emplearemos la notación

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}$$

para el determinante jacobiano. El **factor jacobiano** es el **valor absoluto** del

determinante jacobiano. Se denota por

$$J_\varphi(u) = |\det d\varphi_u|.$$

Nota 1.11.2: Notación para matrices y determinantes

Hay quien emplea J_φ para el determinante *sin* el valor absoluto, y la notación

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}$$

para la **matriz** jacobiana. En vez de eso pondremos paréntesis para indicar la matriz:

$$\left(\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} \right)$$

y, como es habitual, barras para el valor absoluto del determinante.

Geométricamente, un cambio de variable $x = \varphi(u)$ representa una **distorsión** del espacio n -dimensional o al menos de una parte de él.

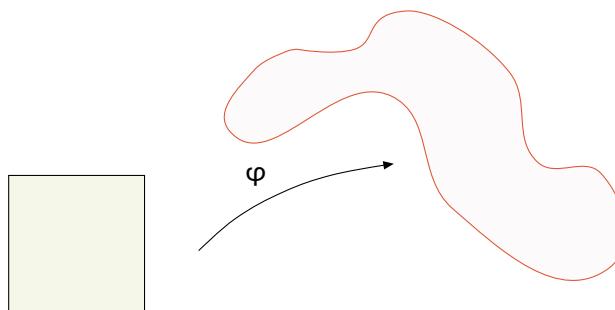


Figura 1.23 – Un cambio de variable representa geométricamente una deformación del espacio.

Por ejemplo, el cambio $x = 2u$ representa una **dilatación** del espacio. El cambio $x = \frac{1}{2}u$ es una **contracción**.

Está claro que al distorsionar el espacio, estirándolo o contrayéndolo, la unidad de medida (longitud, área, volumen, etc.) representada por un segmento, cuadrado, cubo, etc. también va a cambiar, haciéndose más grande o más pequeña.

El determinante jacobiano mide exactamente cómo cambia la medida al distorsionar el espacio por un cambio de variable. Si $x = \varphi(u)$, entonces la medida infinitesimal se transforma mediante

$$dm(x) = dm(\varphi(u)) = J_\varphi(u) dm(u).$$

1.11 Cambio de variable

Se puede incluso dar rigor a la fórmula (aquí meramente simbólica)

$$J_\varphi(u) = \frac{dm(x)}{dm(u)}$$

que representa la interpretación fundamental del jacobiano.

Nota 1.11.3: Interpretación geométrica del jacobiano

El factor jacobiano $J_\varphi(u)$ es el factor de proporcionalidad por el cual cambia la medida infinitesimal en u bajo el cambio de variable $x = \varphi(u)$.

Enunciado 1.11.1: Propiedades básicas del jacobiano

- **Multiplicatividad:** $J_{\alpha \circ \beta}(u) = J_\alpha(\beta(u)) \cdot J_\beta(u)$ (el jacobiano de una composición es el producto de los Jacobianos, teniendo en cuenta la imagen de la variable u).
- **Inversas:** $J_{\varphi^{-1}}(x) = 1/J_\varphi(u)$ si $x = \varphi(u)$ (el jacobiano de la función inversa es el recíproco del jacobiano de la función).

Enunciado 1.11.2: El Teorema de Cambio de Variable intradimensional en \mathbb{R}^n

Sean $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos medibles n -dimensionales y $\varphi : U \rightarrow V$ tal que

- φ es biyectiva entre U y V .
- φ y φ^{-1} son diferenciables con derivadas continuas.

Dada una función integrable $f(x)$ sobre V , se tiene

$$\int_V f(x) dm(x) = \int_U f(\varphi(u)) \cdot |\det d\varphi_u| dm(u).$$

En coordenadas, si

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ x_2 = \varphi_2(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned} & \iint_V \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \iint_U \cdots \int f(\varphi_1(u_1, \dots, u_n), \dots, \varphi_n(u_1, \dots, u_n)) \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} \right| du_1 \cdots du_n \end{aligned}$$

La palabra **intradimensional** refleja el hecho que el cambio se produce entre dos partes, ambas dentro del mismo espacio \mathbb{R}^n , es decir, que $\dim U = \dim V = n$. Más adelante trataremos los cambios **interdimensionales**, donde las dimensiones pueden ser distintas.

Volvemos a resaltar, aunque sólo sea una manipulación simbólica, la fórmula

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} \right\rangle \right\rangle = \frac{dx_1 \cdots dx_n}{du_1 \cdots du_n}$$

representando que el jacobiano es la proporción entre las medidas dx y du .

Nota 1.11.4: Interpretación física del jacobiano

Otra manera más de interpretar el jacobiano es como un cambio en la **densidad** representada por el cambio de variable. La distorsión causada por $x = \varphi(u)$ redistribuye masa, y el jacobiano mide exactamente cómo.

1.12 Casos particulares de cambios de variable

1.12.1 Transformaciones lineales

Un cambio de variable **lineal** $x = Tu$ en componentes tiene la forma

$$x_i = T_{ii}(u) = a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{ij}u_j + \cdots + a_{in}u_n$$

siendo $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_j} = a_{ij}$$

con lo cual se tiene que la matriz diferencial dT_u en cualquier punto es igual a la propia matriz que representa a la transformación lineal dT . Identificando el operador con su matriz, podemos escribir

$$dT_u = T \quad \forall u \quad \therefore \quad J_T(u) = |\det T| \quad \forall u \quad [1.12.1]$$

Dado que el determinante es una constante que no depende del punto u , se obtiene el siguiente resultado.

Enunciado 1.12.1: Cambio de variable lineal

Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es lineal, su jacobiano es constante, igual a su determinante. Por tanto

$$\int_{T(U)} f(x) dx = |\det T| \int_U f(Tu) du \quad [1.12.2]$$

para toda función f integrable sobre $T(U)$. En particular, T cambia la medida de un conjunto por el factor $|\det T|$:

$$m(T(U)) = |\det T| \cdot m(U). \quad [1.12.3]$$

El resultado anterior tiene una interpretación sencilla en términos de valores medios ([definición 1.7.1](#)) pues

$$f_{T(U)} = \frac{1}{m(T(U))} \int_{T(U)} f dm = \frac{1}{|\det T| \cdot m(U)} \cdot \cancel{|\det T|} \int_U (f \circ T) dm = (f \circ T)_U.$$

Resaltamos esta fórmula:

Enunciado 1.12.2: Valores medios bajo cambios de variable lineales

Si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es lineal, entonces $f_{T(U)} = (f \circ T)_U$.

► Ejemplo 1.12.1: cambios de escala

La función $Tx = \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ es lineal con $\det T = \lambda^n$, por tanto

$$m(\lambda A) = |\lambda|^n m(A) \quad [1.12.4]$$

Así, por ejemplo, al cambiar de escala por $\lambda > 0$ las longitudes se multiplican por λ , las áreas por λ^2 , los volúmenes por λ^3 , etc. 

1.12.2 Interpretación geométrica del determinante

Para el cubo unidad $Q = [0, 1]^n$ en \mathbb{R}^n ,

$$m(T(Q)) = |\det T| \quad [1.12.5]$$

o sea, el determinante de T (en valor absoluto) es igual a la medida de la imagen del cubo unidad bajo T . Como T es lineal, esta imagen es el **paralelepípedo** n -dimensional generado por las **columnas** de la matriz de T : escribiendo e_1, e_2, \dots, e_n para la base habitual de \mathbb{R}^n , y $v_k = Te_k$ para sus imágenes, que son las columnas de la matriz de T , tenemos

$$\begin{aligned} T(Q) &= \left\{ T\vec{\lambda} : \vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in Q = [0, 1]^n \right\} \\ &= \left\{ T\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right) : 0 \leq \lambda_k \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k Te_k : 0 \leq \lambda_k \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k : 0 \leq \lambda_k \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

Esto sigue siendo cierto para la matriz respecto a cualquier base *ortonormal*, pues la diferencia entre una base y otra será una matriz *ortogonal*, que tiene determinante 1 en valor absoluto.

1.12 Casos particulares de cambios de variable

Enunciado 1.12.3: El determinante como un volumen

El determinante de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es igual en valor absoluto al volumen del paralelepípedo n -dimensional generado por las columnas de su matriz respecto a una base ortonormal.

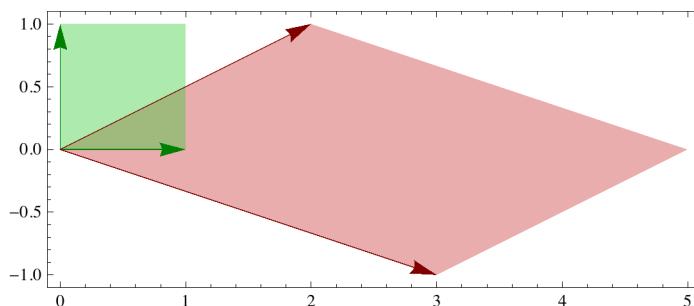


Figura 1.24 – Imagen del cuadrado unidad bajo la transformación lineal con matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

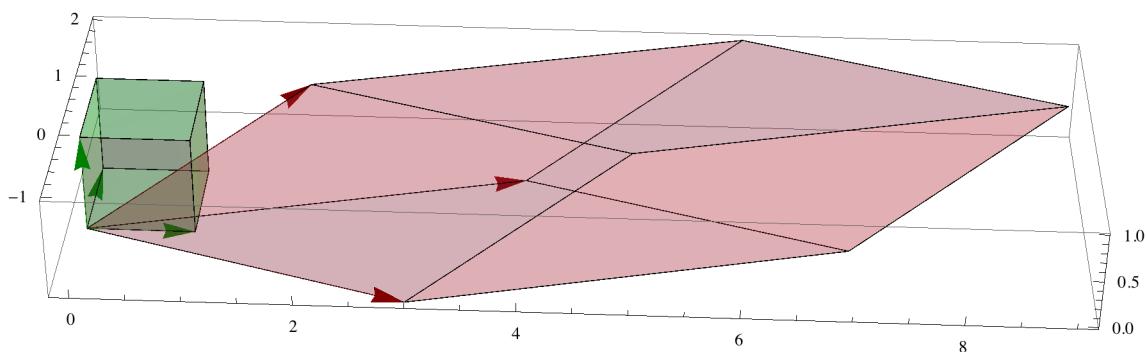


Figura 1.25 – Imagen del cubo unidad tridimensional bajo la transformación lineal con matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.12.3 Coordenadas polares en el plano

Definición 1.12.1: Coordenadas polares

El cambio a coordenadas polares es la función $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

Enunciado 1.12.4: El jacobiano de las coordenadas polares

El jacobiano de las coordenadas polares $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ es:

$$J_{\text{polares}} = r$$

- **Demostración:** La matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

■

Nota 1.12.1: Radios polares

Normalmente se toman radios $r \geq 0$, con lo cual no hace falta preocuparse de poner el valor absoluto. Para ser invertible el cambio, el ángulo θ debe restringirse a un intervalo de longitud a lo sumo 2π . Las elecciones habituales son $[0, 2\pi]$ y $[-\pi, \pi]$.

Definición 1.12.2: Descripción en coordenadas polares

Si la región A tiene imagen B en coordenadas polares, decimos que B está **descrita en coordenadas polares** por A .

Si B está descrita por A en coordenadas polares, la fórmula de cambio de variable dice que

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_A f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad [1.12.6]$$

En particular el **área** de B es

$$a(B) = \iint_B dx dy = \iint_A r dr d\theta \quad [1.12.7]$$

► Ejemplo 1.12.2: región polar radial

Es la **imagen** G de una región elemental en el orden θ, r (figura 1.26):

$$\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$$

$$r_{\min}(\theta) \leq r \leq r_{\max}(\theta)$$

El ángulo varía entre dos cotas fijas, y el radio se mueve entre cotas que dependen del ángulo. Imaginar una pantalla de «radar» con una semirrecta anclada en el origen que gira, y un punto que va dibujando segmentos radiales a lo largo de la semirrecta, con extremos que varían en función del ángulo.

El área de una región polar con una descripción «radial» es

$$a = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \int_{r_{\min}(\theta)}^{r_{\max}(\theta)} r \, dr \, d\theta = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{1}{2} (r_{\max}^2 - r_{\min}^2) \, d\theta = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{1}{2} \Delta(r^2) \, d\theta$$

[1.12.8]

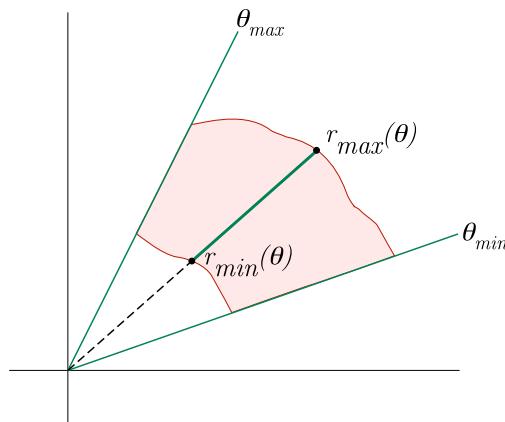


Figura 1.26 – Región polar radial.

Nota 1.12.2: Región polar encerrada

A menudo especificamos la **región encerrada o barrida por la gráfica polar** de $r = f(\theta)$, en cuyo caso $r_{\max}(\theta) = f(\theta)$, $r_{\min}(\theta) = 0$.

► Ejemplo 1.12.3: región polar angular

Es la **imagen** G de una región elemental en el orden r, θ (figura 1.27):

$$r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$$

$$\theta_{\min}(r) \leq \theta \leq \theta_{\max}(r)$$

El radio se varía entre dos cotas fijas, y el ángulo se mueve a lo largo de un arco cuyos extremos dependen del radio. Imaginar una serie de ondas concéntricas que se propagan, y un punto que se va moviendo a lo largo de un arco de circunferencia, con extremos que varían en función del radio.

El área de una región polar con una descripción «angular» es

$$a = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_{\theta_{\min}(r)}^{\theta_{\max}(r)} r d\theta dr = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} r (\theta_{\max}(r) - \theta_{\min}(r)) dr = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} r \Delta\theta dr$$

[1.12.9]

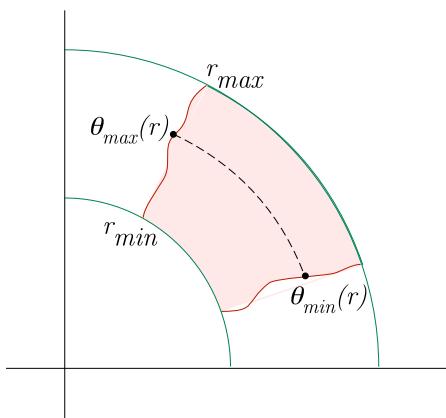


Figura 1.27 – Región polar angular.

► Ejemplo 1.12.4

El disco unidad D, dado por $x^2 + y^2 \leq 1$, está descrito en coordenadas polares por $A : r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.



► Ejemplo 1.12.5: momento de inercia de un disco (eje central perpendicular)

El momento de inercia de un disco de radio R alrededor del eje perpendicular que pasa por su centro, suponiendo densidad constante igual a 1, es

$$I = \iint (x^2 + y^2) da = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r d\theta dr = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r dr = 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{1}{2} m R^2.$$

Esto corresponde al razonamiento tradicional con elementos infinitesimales de masa, que sería el siguiente: considerar el disco dividido en anillos concéntricos de radio r con $0 \leq r \leq R$. Sobre el anillo de radio r , la distancia al eje es constante igual a r , luego el momento de inercia infinitesimal es $dI = r^2 dm$. El elemento de masa infinitesimal es $dm = 2\pi r dr$, la circunferencia del anillo multiplicada por el «infinitésimo radial» de longitud dr . Entonces

$$I = \int_0^R dI = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R 2\pi r^3 dr = \frac{1}{2} m R^2.$$



Nota 1.12.3: Razonamiento físico con infinitésimos

Los razonamientos «infinitesimales» equivalen a formulaciones, en general menos rigurosas pero quizás más intuitivas, de los mismos cálculos indicados por el Teorema de Fubini y el Teorema de Cambio de Variable. Suelen tener más éxito cuando las figuras son sencillas y con muchas simetrías. Para casos más generales se tiene la teoría expuesta.

► Ejemplo 1.12.6: momento de inercia de un disco (eje diametral)

El momento de inercia de un disco de radio R alrededor de un eje diametral, que podemos suponer es el eje y , suponiendo densidad constante igual a 1, es

$$\begin{aligned} I &= \iint x^2 da = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cos^2 \theta \cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^R r^3 dr \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \cdot \frac{R^4}{4} = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \cdot \frac{R^4}{4} = \pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{1}{4} m R^2. \end{aligned}$$

**► Ejemplo 1.12.7: área de un disco en coordenadas polares**

La ecuación de un disco de radio R con centro en el origen en polares es

$$0 \leq r \leq R \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Su área se puede calcular con ambas fórmulas, dando

$$\frac{1}{2} R^2 \cdot 2\pi = \pi R^2$$

Esta sin duda es la manera más sencilla de hallar esta fórmula.

**► Ejemplo 1.12.8**

$$r = \sqrt{|\sin \theta|} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Consideramos la gráfica «rectangular» de la función, es decir, antes de pensar en qué figura describe en coordenadas polares, o lo que es lo mismo, antes de realizar el cambio a coordenadas polares.

En $[0, \pi], [\pi, 2\pi]$, el radio va de $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$, dibujando un «péntalo» en la gráfica polar ([figura 1.28](#)).

El área encerrada es 2 veces el área para $[0, \pi]$, donde $\sin \theta \geq 0$

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2 d\theta = \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2$$

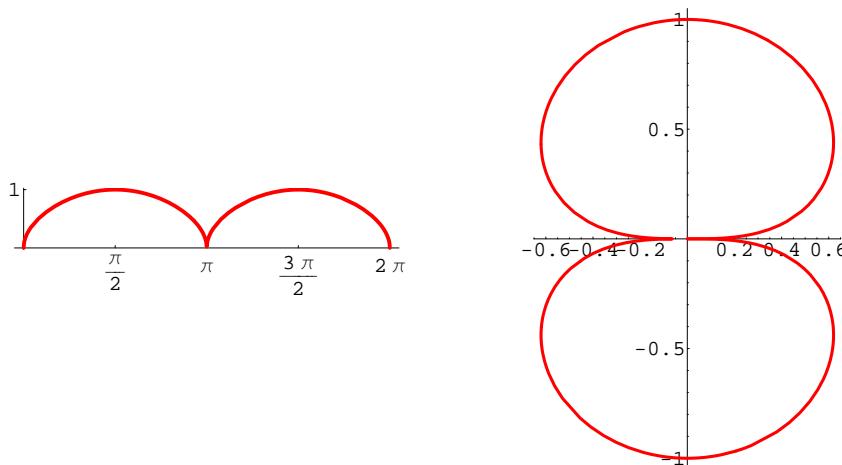


Figura 1.28 – Gráfica rectangular y polar de $r = \sqrt{|\sin \theta|}$

► Ejemplo 1.12.9: espiral de Arquímedes

La espiral de Arquímedes ([figura 1.29](#)) tiene ecuación polar

$$r = \theta \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Representa la trayectoria de un punto que se mueve hacia fuera con velocidad constante a lo largo de una semirrecta que gira con un extremo fijo. Para un valor del ángulo fijo, los radios están en *progresión aritmética* de diferencia 2π .

El área encerrada (o mejor dicho, barrida) es

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2\pi)^3}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8\pi^3}{3} = \frac{4}{3}\pi^3.$$

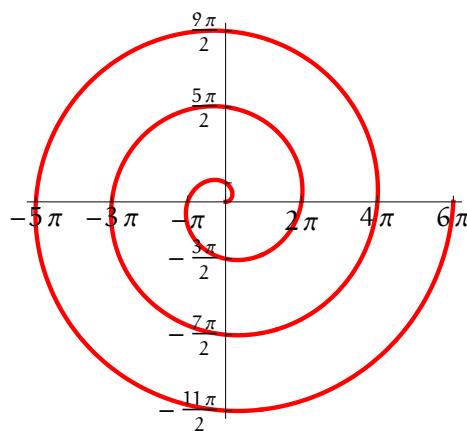


Figura 1.29 – La espiral de Arquímedes ($r = \theta$).

► **Ejemplo 1.12.10: rosa de cuatro pétalos**

Una rosa de cuatro pétalos (figura 1.30) puede estar descrita por la ecuación polar

$$r = |\sin 2\theta| \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Si consideramos la gráfica rectangular de la función, en cada cuadrante, el radio va desde 0 hasta 1 y de vuelta a 0, dibujando un «pétalo» en la gráfica polar. El área encerrada es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta) d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

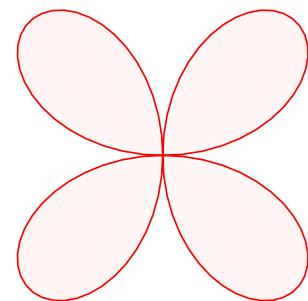
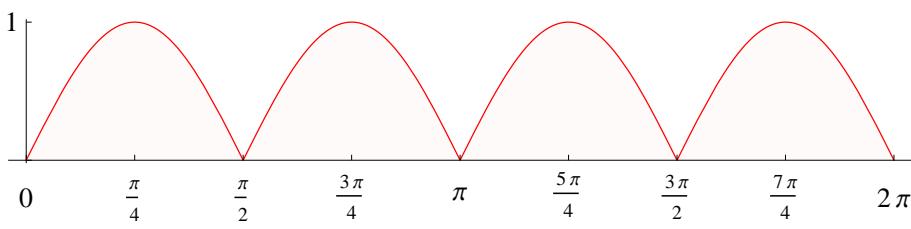


Figura 1.30 – Gráfica rectangular y polar de $r = |\sin 2\theta|$.

► **Ejemplo 1.12.11: otra rosa de cuatro pétalos**

Otra rosa de cuatro pétalos (figura 1.31) corresponde a la ecuación

$$r = \sqrt{|\cos 2\theta|} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Si consideramos la gráfica rectangular de la función, vemos que en $[0, \pi/4]$ el radio baja desde 1 hasta 0, luego en $[\pi/4, \pi/2]$ sube desde 0 hasta 1, dibujando medio «pétalo» en cada cuadrante en la gráfica polar.

El área encerrada es 8 veces el área correspondiente a $[0, \pi/4]$, donde $\cos 2\theta \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\cos 2\theta| d\theta &= 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta \\ &= 4 \cdot \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/4} \\ &= 2 \cdot \sin \pi/2 = 2 \end{aligned}$$



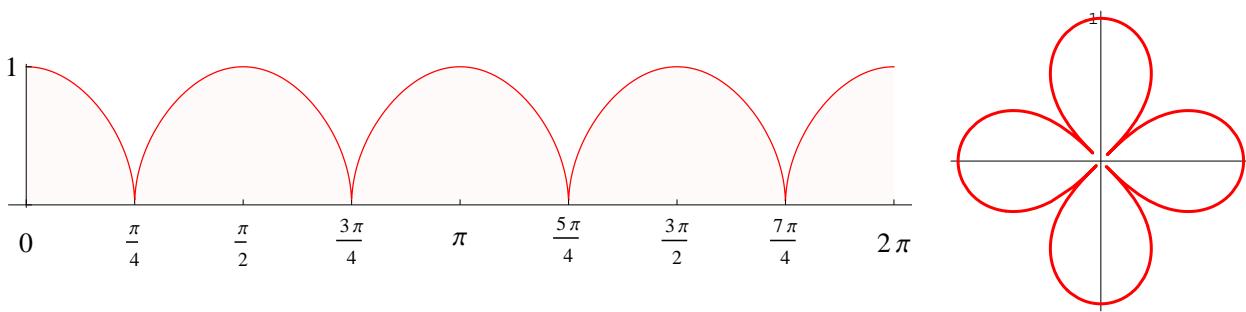


Figura 1.31 – Gráfica rectangular y polar de $r = \sqrt{|\cos 2\theta|}$.

► Ejemplo 1.12.12: cardioide

Una cardioide ([figura 1.32](#)) (curva con forma de corazón) está descrita por

$$r = 1 + \cos \theta \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Si consideramos la gráfica rectangular de la función, vemos que en $[0, \pi]$ el radio baja desde 2 hasta 0, luego en $[\pi, 2\pi]$ sube desde 0 hasta 2, dibujando la otra mitad de la cardioide en la gráfica polar.

El área encerrada es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos \theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin \theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$



1.12.4 Coordenadas cilíndricas en \mathbb{R}^3

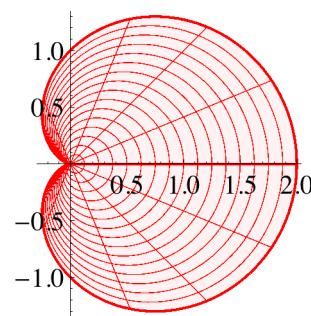
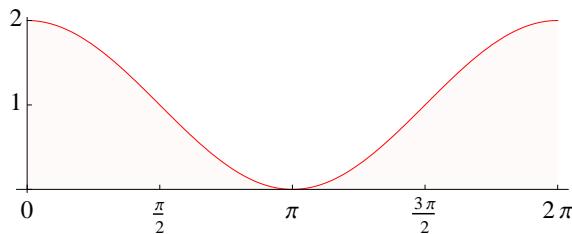


Figura 1.32 – Gráfica rectangular y polar de $r = 1 + \cos \theta$.

Definición 1.12.3: Coordenadas cilíndricas

El cambio a coordenadas cilíndricas es la función $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

donde habitualmente se toma $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $z \in \mathbb{R}$.

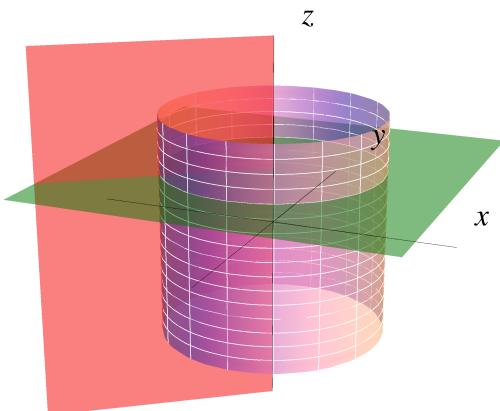


Figura 1.33 – Las superficies de nivel de las coordenadas cilíndricas son cilindros, semiplanos y planos horizontales.

Enunciado 1.12.5: Interpretación geométrica de las coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas r, θ, z tienen la siguiente interpretación ([figura 1.33](#)):

- r es el **radio polar**. Representa la **distancia al eje z** .
- Si r es constante, variando las otras dos coordenadas se obtiene la **superficie cilíndrica** de radio r y eje de simetría el eje z .
- θ es el **ángulo polar**. Representa la **desviación respecto al eje x positivo**.

- Si θ es fijo, variando las otras dos coordenadas se obtiene el **semiplano** limitado por el eje z y perpendicular al plano xy , haciendo un ángulo de θ con el eje x positivo.
- z es la **altura**.
- Si z es fijo, variando las otras dos coordenadas se obtiene un **plano horizontal** paralelo al plano xy , situado a altura z .

Enunciado 1.12.6: El jacobiano de las coordenadas cilíndricas

El jacobiano de las coordenadas cilíndricas $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ es

$$J_{\text{cilíndricas}} = r$$

- **Demostración:** La matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

■

Nota 1.12.4: Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas son las coordenadas polares en el plano xy y con la identidad z en el eje z .

► Ejemplo 1.12.13: momento de inercia de un cilindro sólido alrededor de su eje central

Calculamos el momento de inercia de un cilindro sólido recto K de radio R y altura H respecto a su eje central (figura 1.34). Colocamos la base del cilindro en el plano $z = 0$ haciendo que su eje central sea el eje z . Entonces K está descrito en coordenadas cilíndricas por

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq z \leq H,$$

por tanto

$$I_{zz}(K) = \iiint_K (x^2 + y^2) dv = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^H r^2 r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr \int_0^H dz$$

1.12 Casos particulares de cambios de variable

$$= 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} \cdot H = \frac{\pi R^4 H}{2} = \frac{1}{2} \cdot \pi R^2 H \cdot R^2 = \frac{1}{2} m R^2$$

donde $m = \pi R^2 H$ es la masa del cilindro (igual a su volumen suponiendo densidad 1). ◀

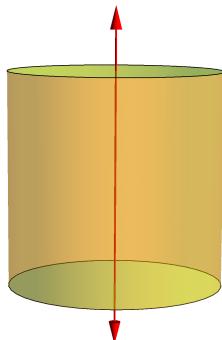


Figura 1.34 – Un cilindro con su eje central.

► Ejemplo 1.12.14: volumen de un paraboloide sólido

Consideremos el sólido P limitado por los planos $z = 0$, $z = H$ y el paraboloide circular con vértice en el origen y eje central el eje z , que a altura H desde el vértice tiene radio R (figura 1.35). Su ecuación en coordenadas cilíndricas es $z = kr^2$ con la constante k determinada por $H = kR^2$, o sea $k = H/R^2$. La región sólida P está descrita como región elemental en coordenadas cilíndricas radialmente por

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq H, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{z}{k}}.$$

El volumen de esta región es

$$\begin{aligned} v(P) &= \iiint_P 1 \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^H \int_0^{\sqrt{z/k}} r \, dz \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^H \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{z/k}} dz \\ &= 2\pi \int_0^H \frac{z}{2k} dz = \frac{\pi H^2}{2k} = \frac{\pi H^2 R^2}{2H} = \frac{1}{2} \pi R^2 H, \end{aligned}$$

igual a la mitad del volumen del cilindro recto circunscrito. ◀

1.12.5 Sólidos de revolución

Sea G una región plana en la parte $r > 0$ del plano rz . Si G gira alrededor del eje z , se obtiene un sólido $R_G \subseteq \mathbb{R}^3$ llamado el **sólido de revolución generado por G** (figura 1.36).

Podemos describir de manera sencilla el punto general en un sólido de revolución

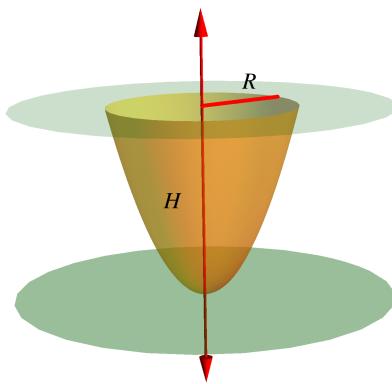


Figura 1.35 – Paraboloide sobre un plano tangente a su vértice y con su eje de simetría.

utilizando las coordenadas cilíndricas. Al girar, un punto $(r, z) \in G$ se mantiene a altura constante z y gira con radio r alrededor del eje z , describiendo la circunferencia

$$(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

es decir, una trayectoria cuya ecuación es exactamente la transformación de las coordenadas cilíndricas. Dicho de otra manera, el cambio de variable a coordenadas cilíndricas

$$c(r, z, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

manda el sólido

$$A = \{(r, \theta, z) : (r, z) \in G, \theta \in [0, 2\pi]\}$$

que es un **cilindro** con base G sobre el plano rz y eje sobre el eje θ con altura 2π , al sólido de revolución $B = R_G$ ([figura 1.37](#)).

Esto significa que el elemento de volumen para un sólido de revolución, $r dr dz d\theta$, es igual a $r dA d\theta$ donde $dA = dr dz$ es el **elemento de área plano en G** . En términos geométricos, esto significa que las coordenadas de área sobre G y la coordenada angular de giro son **independientes**. Dicho con más rigor, la medida de volumen sobre el sólido de revolución es el **producto** de las medidas rdA sobre la región G que gira y la medida angular $d\theta$ sobre el círculo.

Nota 1.12.5: Notación para coordenadas de revolución

Cualquiera que sean los símbolos empleados para las coordenadas que describen la región G , una de ellas representará el radio de giro, y podemos cambiar de variable al describir G , afectando sólo a la expresión de r y de dA , ya que la coordenada del ángulo es independiente de las coordenadas de área en G .

1.12 Casos particulares de cambios de variable

Enunciado 1.12.7: El elemento de volumen en un sólido de revolución

Sea G una región plana en las coordenadas r, z y R_G el sólido de revolución que genera al girar alrededor del eje z , con coordenada angular θ . El elemento de volumen sobre R_G en las coordenadas r, z, θ es

$$dv = r dA d\theta$$

donde dA es el elemento de área sobre G .

Del resultado anterior se deduce inmediatamente la expresión general para una integral de volumen sobre un sólido de revolución.

Enunciado 1.12.8: Integral de volumen general sobre un sólido de revolución

Sea G una región plana en las coordenadas r, z y R_G el sólido de revolución que genera al girar alrededor del eje z , con coordenada angular θ . La integral de una función f sobre R_G en las coordenadas r, z, θ es

$$\iiint_{R_G} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \iint_G f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr dz d\theta$$

Si la función que se integra, cambiada de variable a coordenadas cilíndricas, no depende del ángulo θ , será una integral de variables separadas y habrá un factor 2π correspondiente a la integral $\int_0^{2\pi} d\theta$, pero si depende de θ , entonces ya no será tan sencilla.

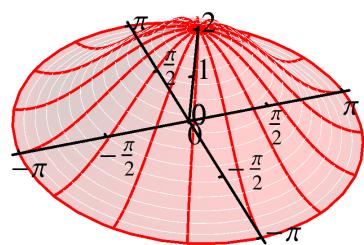
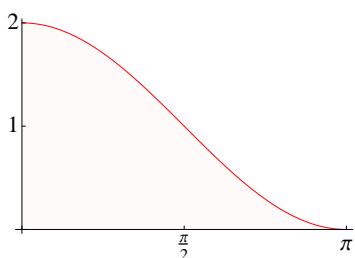


Figura 1.36 – Región plana $0 \leq z \leq 1 + \cos r$ para $0 \leq r \leq \pi$ y el sólido de revolución que genera.

Enunciado 1.12.9: El teorema de Pappo para sólidos de revolución

Sea G una región plana en las coordenadas r, z y R_G el sólido de revolución que genera al girar alrededor del eje z . Entonces

$$v(R_G) = 2\pi r_G \cdot a(G)$$

donde r_G es el valor medio del radio de giro sobre G , es decir, la coordenada r del centro de gravedad c_G de G .

- **Demostración:** Como el elemento de volumen es $dv = r dr dz d\theta$, el volumen de R_G es

$$\int_0^{2\pi} \iint_G r dr dz d\theta = 2\pi \iint_G r dr dz = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{a(G)} \iint_G r dr dz \right) \cdot a(G) = 2\pi r_G \cdot a(G)$$

y por definición $r_G = \frac{1}{a(G)} \iint_G r dr dz$ es el valor medio del radio de giro r sobre G . ■

Este resultado, conocido desde la época clásica griega, se debe a [Pappo de Alejandría](#). Su formulación habitual dice que el volumen del sólido de revolución generado por G es igual al área de G multiplicada por el [recorrido del centro de gravedad](#) de G , ya que éste es $c_G = (r_G, z_G)$ y al girar alrededor del eje z recorre una circunferencia de radio r_G , que mide $2\pi r_G$.

Una formulación alternativa es que el volumen del sólido de revolución generado por G es igual al volumen del cilindro cuya base es G y cuya altura es $2\pi r_G$ ([figura 1.37](#)).

Pregunta 1.12.1: Giro por menos de una vuelta completa

Si giramos la región G por una parte arbitraria α de una vuelta completa (caso de $\alpha = 2\pi$), ¿cómo cambian los resultados anteriores?

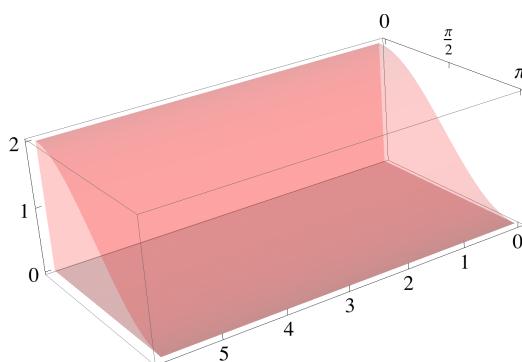


Figura 1.37 – Cilindro de igual volumen que el sólido de revolución. Su base es la región plana G que gira y su altura el recorrido de su centro de gravedad, $2\pi r_G$.

► Ejemplo 1.12.15: toro sólido

Se obtiene al girar un disco G de radio a cuyo centro está a distancia $b > a$ del eje de giro ([figura 1.38](#)). Por simetría, el centro de gravedad de G es su centro

1.12 Casos particulares de cambios de variable

geométrico, y por tanto

$$r_G = b, \quad 2\pi r_G = 2\pi b$$

y el área del disco G es πa^2 , luego el volumen del toro sólido es

$$(2\pi b)(\pi a^2) = 2\pi^2 a^2 b$$

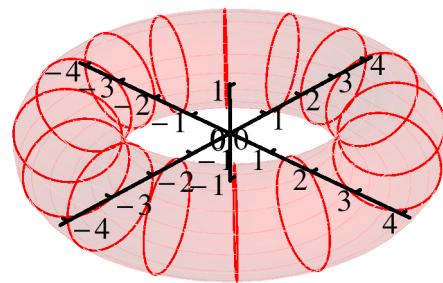
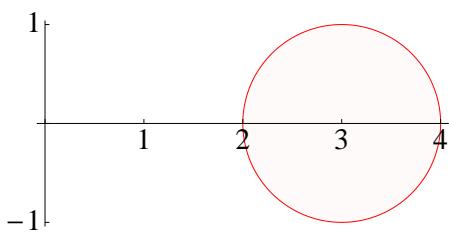


Figura 1.38 – El toro obtenido girando un disco de radio 1 cuyo centro está a distancia 3 del eje de giro.

► Ejemplo 1.12.16: el volumen de un sólido de revolución descrito por discos

La *descripción por discos* se refiere a que la región G que gira es una región elemental en el plano rz descrita en el orden z, r:

$$z_{\min} \leq z \leq z_{\max}$$

$$r_{\min}(z) \leq r \leq r_{\max}(z)$$

Entonces

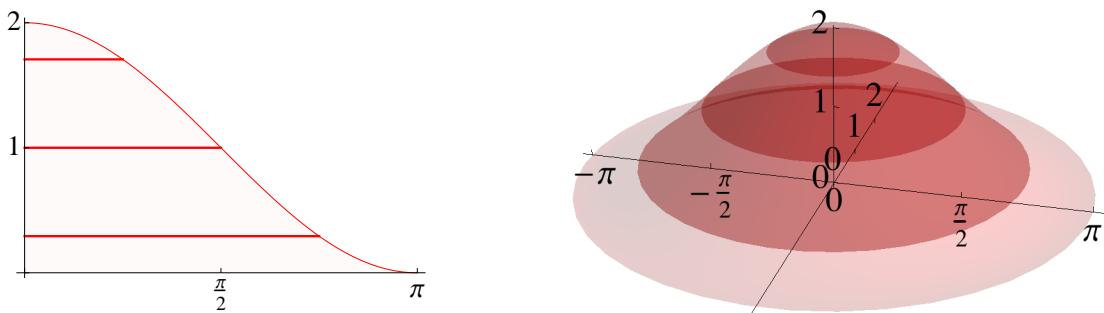
$$\begin{aligned} v(R_G) &= 2\pi \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_{r_{\min}(z)}^{r_{\max}(z)} r \, dr \, dz = 2\pi \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} [r^2]_{r_{\min}(z)}^{r_{\max}(z)} \, dz \\ &= 2\pi \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left(\frac{r_{\max}(z)^2 - r_{\min}(z)^2}{2} \right) \, dz = \pi \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} (r_{\max}(z)^2 - r_{\min}(z)^2) \, dz. \end{aligned}$$

Corresponde realmente a un caso del Principio de Cavalieri ([enunciado 1.10.1](#)) pues al girar un segmento horizontal se obtiene un anillo circular de área $\pi(g(z)^2 - f(z)^2)$ ([figura 1.39](#)). Destacamos la fórmula:

Volumen de revolución por discos: $v = \pi \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} (r_{\max}(z)^2 - r_{\min}(z)^2) \, dz$

[1.12.10]



**Figura 1.39** – Sólido de revolución generado por discos.

► **Ejemplo 1.12.17: el volumen de un sólido de revolución descrito por cilindros**

La *descripción por cilindros* se refiere a que la región G que gira es una región elemental en el plano rz descrita en el orden r, z :

$$r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$$

$$z_{\min}(r) \leq z \leq z_{\max}(r).$$

Entonces

$$v(R) = 2\pi \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_{z_{\min}(r)}^{z_{\max}(r)} r \, dz \, dr = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} 2\pi r (z_{\max}(r) - z_{\min}(r)) \, dr = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} 2\pi r \Delta z(r) \, dr$$

El punto de vista infinitesimal aquí es que al girar un segmento vertical alrededor del eje z , se obtiene un cilindro de área lateral $2\pi r \Delta z(r)$, siendo $\Delta z(r) = z_{\max}(r) - z_{\min}(r)$, y «sumando» (es decir, integrando) estas áreas da el *volumen* total ([figura 1.40](#)).

No es un caso particular del Principio de Cavalieri al no tratarse realmente de «rodajas» del sólido, sino de «capas» cilíndricas. Hay que tener cuidado con estos razonamientos pues son bastante particulares al ejemplo, a diferencia del Teorema de Fubini y el Teorema de Cambio de Variable que son generales.

Volumen de revolución por cilindros: $v = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} 2\pi r (z_{\max}(r) - z_{\min}(r)) \, dr$

[1.12.11]

► **Ejemplo 1.12.18: cilindro sólido**

Tomamos G igual al rectángulo $[0, R] \times [0, H]$ para obtener un cilindro recto R_G de radio R y altura H ([figura 1.41](#)). Por simetría, el centro de gravedad del rectángulo es su centro geométrico, por tanto el radio medio es $r_G = R/2$, y

1.12 Casos particulares de cambios de variable

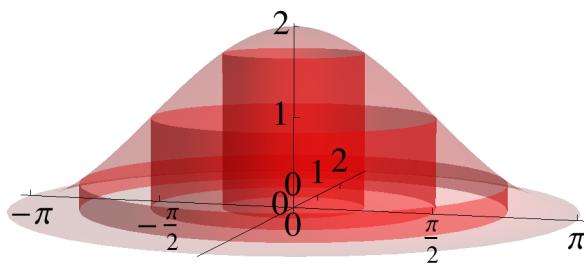
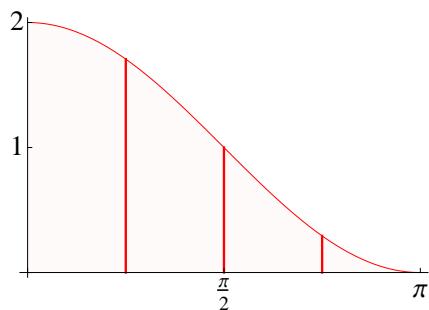


Figura 1.40 – Sólido de revolución generado por cilindros.

como el área del rectángulo es RH , el volumen del cilindro es

$$2\pi \cdot R/2 \cdot RH = \pi R^2 H.$$

El resultado obtenido usando el Principio de Cavalieri ([enunciado 1.10.1](#)) es más general. ◀

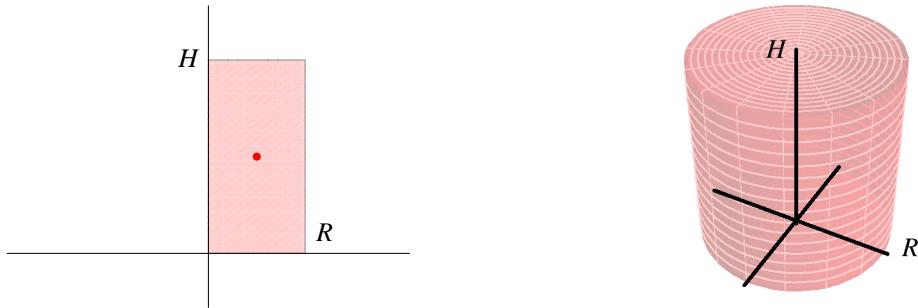


Figura 1.41 – El cilindro obtenido girando el rectángulo $[0, R] \times [0, H]$ alrededor del eje z .

► Ejemplo 1.12.19: cono sólido

El cono sólido Ω de radio R y altura H se obtiene al girar el triángulo G con vértices $(0, 0)$, $(0, H)$ y (R, H) ([figura 1.42](#)). Por triángulos similares, G se describe por

$$0 \leq z \leq H \quad 0 \leq r \leq \frac{R}{H} z.$$

El valor medio del radio r sobre el triángulo es

$$\begin{aligned} r_G &= \frac{1}{RH/2} \int_0^H \int_0^{Rz/H} r \, dr \, dz = \frac{2}{RH} \int_0^H \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{Rz/H} = \frac{2}{RH} \int_0^H \frac{R^2 z^2}{2H^2} \, dz \\ &= \frac{R}{H^3} \int_0^H z^2 \, dz = \frac{R}{H^3} \cdot \frac{H^3}{3} = \frac{R}{3} \end{aligned}$$

y el área del triángulo es $\frac{1}{2}RH$, luego el volumen del cono es

$$2\pi \cdot \frac{R}{3} \cdot \frac{RH}{2} = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Aquí también es más general el resultado obtenido usando el Principio de Cavalieri ([enunciado 1.10.1](#)). ◀

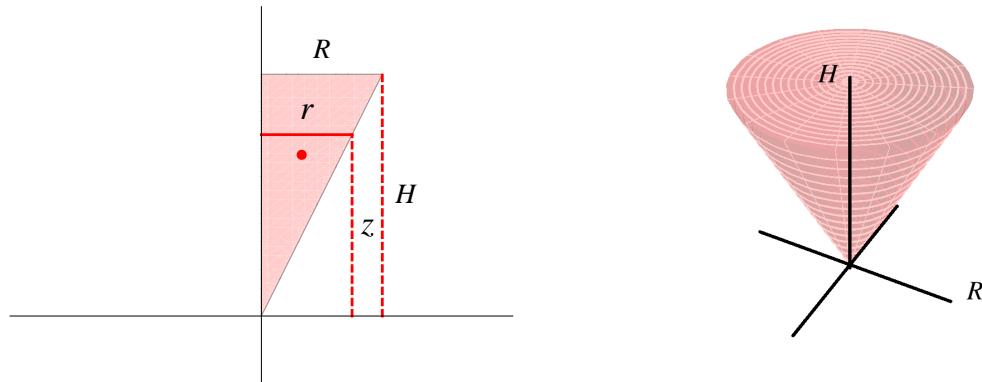


Figura 1.42 – El cono obtenido girando el triángulo de vértices $(0,0)$, $(R,0)$ y $(0,H)$ alrededor del eje z .

► Ejemplo 1.12.20: esfera sólida (bola) de radio R

La bola Ω de radio R centrada en el origen se obtiene girando el semidisco G de centro el origen y radio R en el plano rz con $z > 0$ alrededor del eje z ([figura 1.43](#)). G está descrita como región elemental por

$$-R \leq z \leq R \quad 0 \leq r \leq \sqrt{R^2 - z^2}$$

El valor medio del radio r sobre el semidisco G es

$$\begin{aligned} r_G &= \frac{1}{\pi R^2 / 2} \int_{-R}^R \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} r \, dr \, dz = \frac{2}{\pi R^2} \int_{-R}^R \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} dz = \frac{2}{\pi R^2} \int_{-R}^R \frac{R^2 - z^2}{2} dz \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-R}^R = \frac{1}{\pi R^2} \left(R^2(2R) - \frac{2R^3}{3} \right) = \frac{1}{\pi R^2} \cdot \frac{4R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi} \end{aligned}$$

por tanto, dado que $a(G) = \frac{1}{2}\pi R^2$, el volumen de la esfera es

$$2\pi \cdot \frac{4R}{3\pi} \cdot \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$



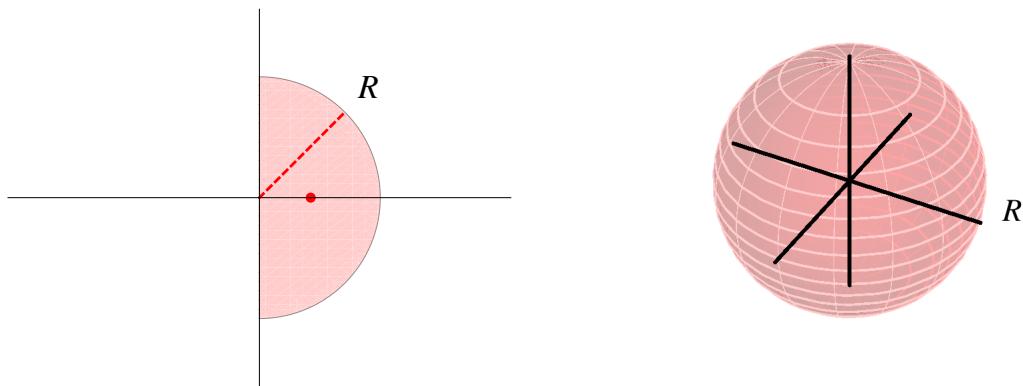


Figura 1.43 – La esfera sólida de radio R centrada en el origen obtenida girando un semidisco.

► Ejemplo 1.12.21: centro de gravedad de un sólido de revolución

El eje de rotación de un sólido de revolución es un eje de simetría, por tanto su centro de gravedad está sobre este eje. En el caso de describirlo como hemos hecho en coordenadas cilíndricas, está sobre el eje z . Esto también se ve calculando directamente, pues

$$\begin{aligned}\iiint_{R_G} x \, dv &= \int_0^{2\pi} \iint_G r^2 \cos \theta \, dr \, dz \, d\theta = \iint_G r^2 \, dr \, dz \cdot \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = 0 \\ \iiint_{R_G} y \, dv &= \int_0^{2\pi} \iint_G r^2 \sin \theta \, dr \, dz \, d\theta = \iint_G r^2 \, dr \, dz \cdot \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta = 0 \\ \iiint_{R_G} z \, dv &= \int_0^{2\pi} \iint_G zr \, dr \, dz \, d\theta = 2\pi \iint_G rz \, dr \, dz\end{aligned}$$

luego el centro de gravedad es $(0, 0, z_{R_G})$ con

$$z_{R_G} = \frac{1}{v(R_G)} \iiint_{R_G} z \, dv = \frac{2\pi \iint_G rz \, dr \, dz}{2\pi \iint_G r \, dr \, dz} = \frac{\iint_G rz \, da}{\iint_G r \, da}.$$

Destacamos esta fórmula:

$$z_{R_G} = \frac{\iint_G rz \, da}{\iint_G r \, da} \quad [1.12.12]$$

► **Ejemplo 1.12.22: centro de gravedad de un hemisferio sólido**

Consideremos un hemisferio Ω de una bola de radio R . Colocamos la bola de modo que su centro sea el origen y el hemisferio el norte. Ω es el sólido de revolución obtenido al girar el cuarto G del disco de centro el origen y radio R en el primer cuadrante del plano rz . G está descrita como región elemental por

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - r^2}$$

(tener en cuenta que aquí r, z son coordenadas rectangulares, es decir, r no representa el radio en coordenadas polares). Entonces

$$\begin{aligned} \iint_G zr \, da &= \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2 - r^2}} rz \, dz \, dr = \int_0^R \left[r \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=\sqrt{R^2 - r^2}} \, dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^R r(R^2 - r^2) \, dr = \frac{1}{2} \left(R^2 \cdot \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{1}{8} R^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_G r \, da &= \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2 - r^2}} r \, dz \, dr = \int_0^R \left[rz \right]_{z=0}^{z=\sqrt{R^2 - r^2}} \, dr \\ &= \int_0^R r \sqrt{R^2 - r^2} \, dr = \left[-\frac{1}{3}(R^2 - r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^{r=R} = \frac{1}{3} R^3 \end{aligned}$$

por tanto el centro de gravedad se halla a $3/8$ del radio sobre su eje de simetría:

$$z_\Omega = \frac{3}{8} R.$$



1.12.6 Coordenadas esféricas en \mathbb{R}^3

Definición 1.12.4: Coordenadas esféricas

El cambio a coordenadas esféricas es la función $\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$x = \rho \cos \theta \sin \varphi$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

donde habitualmente se toman

$$\rho \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in [0, \pi].$$

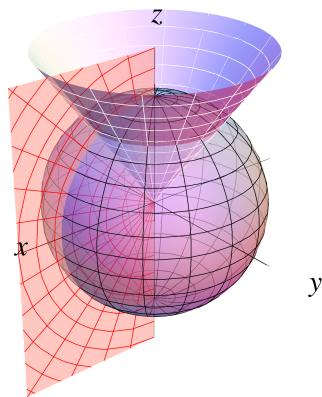


Figura 1.44 – Las coordenadas esféricas, mostrando las superficies de nivel: esferas, conos y semiplanos.

Enunciado 1.12.10: Interpretación geométrica de las coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas ρ, θ, φ tienen la siguiente interpretación (figura 1.44).

- ρ es el **radio esférico**. Representa la **distancia al origen**.
- Si ρ es constante, variando las otras dos coordenadas se obtiene la **superficie esférica** de centro el origen y radio ρ .
- θ es el **ángulo polar**. Representa la **desviación respecto al eje x positivo**.
- Si θ es fijo, variando las otras dos coordenadas se obtiene el **semiplano** limitado por el eje z y perpendicular al plano xy , haciendo un ángulo de θ con el eje x positivo.
- φ es el **ángulo de inclinación respecto al eje z positivo**.
- Si φ es fijo, variando las otras dos coordenadas se obtiene la hoja de una **superficie cónica** con vértice en el origen y formando un ángulo φ con el eje z positivo.

Enunciado 1.12.11: El jacobiano de las coordenadas esféricas

El jacobiano de las coordenadas esféricas $(x, y, z) = (\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi)$ está dado para $\varphi \in [0, \pi]$ por

$$J_{\text{esféricas}} = \rho^2 \sin \varphi$$

■ **Demostración:** Calculamos el determinante jacobiano,

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{vmatrix}.$$

Desarrollando el determinante por la última fila, queda

$$\begin{aligned} & \cos \varphi \begin{vmatrix} -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi \\ \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} - \rho \sin \varphi \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi \end{vmatrix} \\ &= \cos \varphi (-\rho^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi - \rho^2 \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi) \\ &\quad - \rho \sin \varphi (\rho \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \rho \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) \\ &= \cos \varphi (-\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi) - \rho \sin \varphi (\rho \sin^2 \varphi) \\ &= -\rho^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin \varphi \sin^2 \varphi \\ &= -\rho^2 \sin \varphi \end{aligned}$$

En valor absoluto, queda

$$J_\sigma = \rho^2 |\sin \varphi| = \rho^2 \sin \varphi$$

pues $\sin \varphi \geq 0$ para $\varphi \in [0, \pi]$. ■

► Ejemplo 1.12.23: el volumen de una bola sólida

Sea B_R la bola de radio R y centro el origen. Está descrita por

$$0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

por tanto para su volumen resulta una integral sencilla de variables separadas:

$$\begin{aligned} v(B_R) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho = \int_0^R \rho^2 \, d\rho \int_0^{2\pi} \, d\theta \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{R^3}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4\pi}{3} R^3. \end{aligned}$$



► Ejemplo 1.12.24: el volumen de un sector esférico sólido

La región

$$0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0$$

describe en coordenadas esféricas la parte Ω de la bola B_R dentro del cono

1.12 Casos particulares de cambios de variable

circular recto con eje el z y ángulo φ_0 . Las mismas cuentas llevan a

$$v(\Omega) = \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi d\varphi = \frac{2\pi}{3}(1 - \cos \varphi_0) R^3.$$



► Ejemplo 1.12.25: el centro de gravedad de un hemisferio sólido

Podemos suponer que es el hemisferio norte Ω de la bola de centro 0 y radio R está sobre el eje z por simetría, y como Ω está descrita por

$$0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

en coordenadas esféricas, tenemos

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dv &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\rho \cos \varphi}{z} \frac{\rho^2 \sin \varphi}{J} d\varphi d\theta d\rho \\ &= \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} R^4 \end{aligned}$$

por tanto, como $v(\Omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{2\pi}{3} R^3$,

$$z_{\Omega} = \frac{1}{v(\Omega)} \iiint_{\Omega} z dv = \frac{\pi}{4} R^4 \cdot \frac{3}{2\pi R^3} = \frac{3}{8} R.$$



► Ejemplo 1.12.26: momento de inercia de una bola sólida respecto a un eje central

Por simetría, los momentos básicos de una bola sólida de radio R son iguales:

$$I = \iiint_{B_R} x^2 dv = \iiint_{B_R} y^2 dv = \iiint_{B_R} z^2 dv = \frac{1}{3} \iiint_{B_R} (x^2 + y^2 + z^2) dv$$

(tres cosas iguales son iguales a su media). La integral «simetrizada» es más fácil de calcular en coordenadas esféricas ya que $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \rho^2 \frac{\rho^2 \sin \varphi}{J} d\rho d\varphi d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R \rho^4 d\rho \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{4\pi}{15} R^5 = \frac{1}{5} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot R^2 = \frac{1}{5} m R^2 \end{aligned}$$

donde $m = \frac{4\pi}{3} R^3$ es la masa de la bola (igual a su volumen suponiendo densidad

constante 1). El momento de inercia respecto al eje z, por ejemplo, es

$$I_{zz} = \iiint_{B_R} (x^2 + y^2) dv = 2I = \frac{2}{5}mR^2$$

y esto es el momento de inercia respecto a cualquier eje diametral, por simetría.



1.12 Casos particulares de cambios de variable

Integrales sobre subvariedades de \mathbb{R}^n

2.1 Medidas Geométricas

En el capítulo anterior hemos visto cómo se integra respecto a la medida n -dimensional en \mathbb{R}^n . Como ya observamos, esta medida sirve para integrar sobre recintos en \mathbb{R}^n que también son de dimensión n , es decir, intervalos en \mathbb{R}^1 , regiones planas en \mathbb{R}^2 , sólidos en \mathbb{R}^3 , etc. pero no permite integrar sobre conjuntos en \mathbb{R}^n de dimensión *menor* que n , por ejemplo, sobre una curva en el plano o una superficie en el espacio. Para esto hace falta usar medidas más generales.

Definición 2.1.1: Las medidas euclídeas generales

Sea $n \in \mathbb{N}$. Para $0 \leq d \leq n$, existe una *medida d-dimensional* en \mathbb{R}^n , que denotaremos por μ (o μ_d ó $\mu_{d,n}$ si queremos destacar las dimensiones). Por ejemplo:

- $\mu_{1,n}$, también designada por ℓ , L ó λ (y en ocasiones s , pero ésta la evitaremos), es la **longitud** en \mathbb{R}^n .
- $\mu_{2,2}$ es la medida de **área** en el plano, y $\mu_{2,3}$ la medida de área en \mathbb{R}^3 , que en particular mide el área de superficies curvas. Se denota también por a , A , α y en ocasiones S , σ .
- $\mu_{3,3}$ es el **volumen** habitual en \mathbb{R}^3 , designado por v , V ó ν .

El caso $\mu_{n,n}$, donde $d = n$, es la medida **plana** estudiada anteriormente en el [capítulo 1](#).

Repasamos las propiedades básicas, que tienen simplemente por ser medidas:

$$m(\emptyset) = 0 \quad (\text{medida del vacío}) \quad [2.1.1]$$

$$A \subseteq B \implies m(A) \leq m(B) \quad (\text{monotonía}) \quad [2.1.2]$$

2.1 Medidas Geométricas

$$A \cap B = \emptyset \implies m(A \cup B) = m(A) + m(B) \quad (\text{aditividad}) \quad [2.1.3]$$

Ahora, la propiedad que establece la unidad de medida plana d-dimensional:

$$m([0, 1]^d \times \{0\}^{n-d}) = 1 \quad (\text{normalización}) \quad [2.1.4]$$

Finalmente, destacamos dos propiedades geométricas fundamentales:

$$m(\lambda A) = |\lambda|^d m(A), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{cambio de escala}) \quad [2.1.5]$$

$$m(\varphi(A)) = m(A) \text{ si } \varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ es una isometría} \quad (\text{invariancia bajo isometrías})$$

[2.1.6]

Recordamos que una isometría (euclídea) es una aplicación que *conserva la distancia euclídea*, es decir,

$$\|\varphi(y) - \varphi(x)\| = \|y - x\| \quad \forall x, y.$$

Es un resultado conocido que las isometrías de espacios euclídeos son composiciones de **traslaciones, rotaciones y reflexiones**. Una isometría también puede ser interdimensional, es decir, entre espacios euclídeos de dimensiones distintas, pero entonces debemos tener $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ con $n \leq p$.

Al igual que ocurre en el caso $d = n$, *no se pueden medir todos los subconjuntos de \mathbb{R}^n* , en el sentido de que las propiedades anteriores serían mutuamente contradictorias si se aplicasen a cualquier subconjunto. Hace falta restringir a una clase especial de subconjuntos *medibles*, que incluyen en la práctica todos los subconjuntos con los que trabajaremos. Por tanto, no nos preocuparemos más de este tema aquí.

Definición 2.1.2: La medida 0-dimensional

En el caso de dimensión $d = 0$, la medida 0-dimensional en \mathbb{R}^n es simplemente la **medida de contar** que a un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ le asocia el **número de puntos** que contiene, si este número es finito, o el símbolo ∞ de lo contrario.

En otras palabras, contar es un caso particular de medir. Como es una medida muy sencilla, sirve para medir cualquier subconjunto, aunque sólo será útil para subconjuntos finitos.

Nota 2.1.1: Concordancia entre medida y dimensión (II)

La medida d -dimensional sirve para medir subconjuntos d -dimensionales $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Como ya comentamos para las medidas planas ([nota 1.0.1](#)) esta relación entre la medida y la dimensión de lo que mide ya está expresada en el comienzo del libro de los *Elementos de Euclides*, al decir

- «*Un punto es lo que no tiene partes*».
- «*Una línea es una longitud sin anchura*».
- «*Una superficie es aquello que sólo tiene longitud y anchura*».

Hoy diríamos que un punto tiene longitud nula, una línea tiene área nula, una superficie tiene volumen nulo, etc.

En general, si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto de dimensión d y lo medimos con la medida D -dimensional m_D , nos encontramos con que $m_D(A) = \infty$ si $D < d$ y $m_D(A) = 0$ si $D > d$. Por tanto, realmente sólo obtendremos información no trivial al medir un conjunto d -dimensional «en su justa dimensión» d .

Nota 2.1.2: Dimensión y cambio de escala

La fórmula de cambio de escala tiene la curiosa implicación

$$d = \log_{\lambda} \frac{m(\lambda A)}{m(A)}$$

si $\lambda > 0$. Es decir, la dimensión de A se puede deducir de cómo varía su medida al cambiar de escala. El problema es que, salvo que se esté midiendo de antemano con una medida de dimensión $d = \dim A$, el cociente será una indeterminación $0/0$ ó ∞/∞ . Aún así esta idea es una de las bases de la [geometría fractal](#).

2.2 Subvariedades Paramétricas de \mathbb{R}^n

Hace falta entender qué tipo de subconjunto d-dimensional vamos a medir. Serán las llamadas *subvariedades parametrizadas*, que para $d = 1, 2, 3$ corresponden a las nociones de curvas, superficies y sólidos habituales.

Definición 2.2.1: Definición de parametrización y subvariedad paramétrica

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que A es una **subvariedad parametrizable** o **subvariedad paramétrica** de \mathbb{R}^n de dimensión d (siendo siempre $0 \leq d \leq n$) si existen:

- Una región $A^* \subseteq \mathbb{R}^d$
- Una función $\varphi : A^* \rightarrow A$ tal que
 - φ es **biyectiva** entre A^* y A . En particular $A = \varphi(A^*)$ y $A^* = \varphi^{-1}(A)$.
 - φ y φ^{-1} son **de clase C^1** (tienen derivadas parciales y éstas son continuas).
 - La matriz diferencial $d\varphi_u$ tiene **rango máximo d** en cada $u \in A^*$.

En este caso decimos que $\varphi : A^* \rightarrow A$ es una **parametrización** de A .

Una parametrización de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cambio de variable **interdimensional**:

$$x = \varphi(u), \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_d) \in A^* \subseteq \mathbb{R}^d, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \subseteq \mathbb{R}^n,$$

con algún $A^* \subseteq \mathbb{R}^d$, siendo siempre $d \leq n$. En componentes, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(u_1, u_2, \dots, u_d) \\ x_2 = \varphi_2(u_1, u_2, \dots, u_d) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(u_1, u_2, \dots, u_d) \end{cases}$$

Nota 2.2.1: Descripción en coordenadas

Geométricamente, se interpreta que A está **descrita por las coordenadas** dadas por la parametrización $x = \varphi(u)$, siendo $u = (u_1, u_2, \dots, u_d) \in A^*$.

Definición 2.2.2

Subvariedad paramétrica elemental Si A admite una parametrización por una región *elemental* A^* , diremos que es una **subvariedad parametrizable o paramétrica elemental**.

La **condición de rango máximo** requiere especial atención. Es la condición técnica que asegura que la subvariedad A es realmente un conjunto de dimensión d y no menor.

La matriz jacobiana $d\varphi_u \in \mathbb{R}^{n \times d}$ tiene n filas y d columnas. Las columnas son los vectores de derivadas parciales

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_j} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_j}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_j}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_j} \right) \in \mathbb{R}^n, \quad (1 \leq j \leq d)$$

los resultados básicos del Álgebra Lineal implican inmediatamente que la condición de rango máximo equivale a que estos vectores sean linealmente independientes en \mathbb{R}^n . Geométricamente esto significa que generan un **paralelepípedo d -dimensional** en \mathbb{R}^n .

Nota 2.2.2: La condición de rango máximo

La condición de rango máximo equivale a la independencia lineal de los vectores de derivadas parciales

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_j} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_j}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_j}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_j} \right) \in \mathbb{R}^n, \quad (1 \leq j \leq d)$$

Nota 2.2.3: Curvatura

Una parametrización expresa cómo una parte A^* del espacio euclídeo *plano* \mathbb{R}^d se coloca dentro de un espacio de dimensión mayor \mathbb{R}^n , en general **curvándose**. Por ejemplo:

- una curva se obtiene al curvar un intervalo plano.
- una superficie se obtiene al curvar una hoja plana.

Más adelante nos concentraremos en los casos visualizables:

- $d = 1, n = 2, 3$: **curvas planas y curvas en el espacio tridimensional**.
- $d = 2, n = 3$: **superficies en el espacio tridimensional**.

Los casos $d = n = 1, 2, 3$ son los casos planos de intervalos, regiones planas y sólidos, estudiados anteriormente ([capítulo 1](#)).

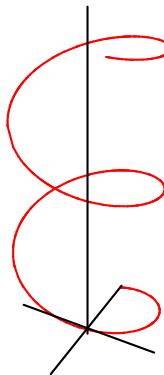


Figura 2.1 – Una curva se puede considerar como un trozo de la recta \mathbb{R} curvada en un espacio de dimensión superior. Aquí mostramos una hélice en \mathbb{R}^3 .

2.3 Cambio de variable interdimensional

Definición 2.3.1: El jacobiano de una parametrización

Dada una parametrización $\varphi : A^* \rightarrow A$, su **factor jacobiano** es la función

$$J_\varphi(u) = \sqrt{\det\left(\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right\rangle\right)_{1 \leq i, j \leq d}} \quad (u \in A^*)$$

donde $\langle v, w \rangle$ representa la métrica euclídea en \mathbb{R}^n .

Enunciado 2.3.1: El jacobiano en términos de la matriz jacobiana

Se tiene la igualdad de matrices

$$\begin{bmatrix} d\varphi_u \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} d\varphi_u \end{bmatrix} = \left(\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right\rangle \right)_{1 \leq i, j \leq d}$$

donde $d\varphi_u$ es la matriz jacobiana (que es de dimensiones $n \times d$) y M^t representa la **traspuesta** de la matriz M . La matriz anterior se conoce como la **matriz de Gram**, también escrita como g_φ . Por tanto

$$J_\varphi = \sqrt{\det g_\varphi}, \quad J_\varphi(u) = \sqrt{\det \begin{bmatrix} d\varphi_u \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} d\varphi_u \end{bmatrix}}$$

- **Demostración:** Trasponer una matriz cambia sus columnas en filas. Por definición de la métrica euclídea y del producto de matrices, las coordenadas de la

matriz producto $d\varphi_u^t d\varphi_u$ son precisamente los productos $\langle \partial\varphi/\partial u_i, \partial\varphi/\partial u_j \rangle$. ■

Cuando $d = n$, el factor jacobiano es el determinante de la matriz jacobiana, en valor absoluto, tal como lo vimos en este caso anteriormente ([definición 1.11.2](#)):

$$J_\varphi(u) = |\det d\varphi_u|.$$

Esto sigue de la fórmula anterior pues cuando $d = n$, tanto $d\varphi_u$ como su traspuesta son matrices *cuadradas* $n \times n$, y en este caso la **multiplicatividad del determinante y su invariancia bajo trasposición** implican que

$$\det d\varphi_u^t d\varphi_u = \det d\varphi_u^t \cdot \det d\varphi_u = \det d\varphi_u \cdot \det d\varphi_u = (\det d\varphi_u)^2$$

La fórmula para el jacobiano dada aquí es muy general e incluso sirve en los casos de funciones entre variedades que se estudian en Geometría Diferencial, relativo a sistemas de coordenadas locales.

Nota 2.3.1: Interpretación geométrica del jacobiano interdimensional

Al igual que en el caso plano, J_φ es una función de las d variables $u = (u_1, \dots, u_d) \in A^*$ que representa el *factor de distorsión infinitesimal de la medida d-dimensional* al curvarse la región plana d -dimensional A^* mediante $x = \varphi(u)$, convirtiéndose en la subvariedad parametrizada $A = \varphi(A^*)$.

Geométricamente, dados vectores independientes v_1, v_2, \dots, v_d en \mathbb{R}^n con $d \leq n$, la matriz de Gram $g = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq d}$ es simétrica y estrictamente positiva. El factor $\sqrt{\det g}$ representa la medida k -dimensional del paralelepípedo generado por los vectores v_k . En nuestro caso, g_φ es la matriz de Gram de los vectores tangentes $\partial\varphi/\partial u_i$.

Enunciado 2.3.2: El Teorema de Cambio de Variable Interdimensional

Sea A una subvariedad paramétrica d -dimensional de \mathbb{R}^n y $\varphi : A^* \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow A$ una parametrización de A . Para cualquier función integrable $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sobre A se tiene

$$\int_A f(x) d\mu(x) = \int_{A^*} f(\varphi(u)) J_\varphi(u) dm(u)$$

donde μ es la medida d -dimensional en \mathbb{R}^n y m es la medida d -dimensional plana en \mathbb{R}^d . En coordenadas, la fórmula es

$$\int_A f d\mu = \int_{A^*} f(\varphi_1(u_1, \dots, u_d), \dots, \varphi_n(u_1, \dots, u_d)) \sqrt{\det \left(\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right\rangle \right)} du_1 \cdots du_d$$

En particular, podemos calcular la medida (longitud, área, etc.) de una subvarie-

2.3 Cambio de variable interdimensional

dad parametrizada integrando el jacobiano:

$$m(A) = m(\varphi(A^*)) = \int_{A^*} J_\varphi(u) du = \int \cdots \int_{A^*} J_\varphi(u_1, \dots, u_d) du_1 \cdots du_d \quad [2.3.1]$$

siendo entonces una cuestión de calcular una *integral plana* «normal y corriente» sobre el recinto A^* en el espacio d-dimensional \mathbb{R}^d .

Enunciado 2.3.3: Cálculo de integrales sobre subvariedades parametrizadas elementales

Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es una subvariedad parametrizada **elemental**, es decir, si hay una parametrización $\varphi : A^* \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow A$ con A^* una región elemental **plana** d-dimensional en \mathbb{R}^d , entonces

1. Se reduce a una integral plana sobre A^* usando la fórmula de cambio de variable.
2. Se calcula la integral plana sobre A^* aplicando el Teorema de Fubini ([enunciado 1.9.2](#)).

2.4 Propiedades básicas de las integrales sobre subvariedades

Las propiedades básicas de las integrales sobre subvariedades son iguales a las de integrales planas enunciados anteriormente ([apartado 1.6](#)). Haremos un breve repaso.

Enunciado 2.4.1: La continuidad implica la integrabilidad

Las funciones continuas en una subvariedad A son integrables en A .

Por supuesto, todos los conjuntos que aparecen hay que suponerlos **medibles**.

Enunciado 2.4.2: La integral de 1 es la medida

$$\int_A 1 \, d\mu = \mu(A).$$

Esta sencilla fórmula es la relación básica entre integral y medida.

Enunciado 2.4.3: Propiedades generales de la integral

Suponiendo que las funciones referidas son integrables, y los conjuntos son medibles,

1. Linealidad

$$\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g \quad \int_A (kf) = k \int_A f \quad (k \text{ constante})$$

2. Monotonía

$$f \leq g \implies \int_A f \leq \int_A g$$

3. Desigualdad Triangular

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f| \leq \sup_A |f| \cdot m(A).$$

4. Aditividad finita Si $A = \bigcup_{k=1}^r A_k$ y los conjuntos A_k no se solapan, entonces

$$\int_A f = \sum_{k=1}^r \int_{A_k} f$$

2.4 Propiedades básicas de las integrales sobre subvariedades

También mencionaremos que siguen siendo válidos para estas integrales los criterios de intercambio de límite o derivada con la integral dados por los teoremas correspondientes para integrales de una variable.

Enunciado 2.4.4: Integrales paramétricas sobre subvariedades

El intercambio de integral y límite en una integral paramétrica sobre una subvariedad,

$$I(t) = \int_A f(x, t) d\mu(x), \quad \lim_{t \rightarrow t_0} I(t) = \int_A \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) d\mu(x)$$

es válido cuando se cumple el **criterio de dominación de la función**:

$$|f(x, t)| \leq g(x), \quad \int_A g d\mu < \infty.$$

El intercambio de integral y derivada en una integral paramétrica sobre una subvariedad,

$$I(t) = \int_A f(x, t) d\mu(x), \quad I'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x)$$

es válido cuando se cumple el **criterio de dominación de la derivada paramétrica**:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x), \quad \int_A g d\mu < \infty.$$

El intercambio de integral e integral de 1 variable plana en una integral paramétrica sobre una subvariedad,

$$I(t) = \int_A f(x, t) d\mu(x), \quad \int_P I(t) dt = \int_P \int_A f(x, t) d\mu(x) dt = \int_A \int_P f(x, t) dt d\mu(x)$$

es válido cuando se tiene la **convergencia absoluta**:

$$\int_P \int_A |f(x, t)| d\mu(x) dt = \int_A \int_P |f(x, t)| dt d\mu(x) < \infty.$$

Incluso se puede generalizar más, convirtiendo al parámetro t a su vez en una coordenada sobre una subvariedad, etc.

2.5 Aplicaciones de las integrales sobre subvariedades

Las interpretaciones de la integral en términos de valores medios y sus aplicaciones, estudiados anteriormente [apartado 1.7](#) son válidos, *mutatis mutandis*, también para integrales sobre subvariedades.

Primero, la noción de valor medio de una función sobre un medible es válida para valores medios sobre curvas, superficies, etc.

2.5.1 Valores medios

Definición 2.5.1: Valor medio de una función sobre un medible

Sea f integrable respecto a la medida d -dimensional μ sobre un medible $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con $0 < \mu(A) < \infty$. El **valor medio de f sobre A** es

$$f_A \stackrel{\text{def}}{=} \text{vm}_A(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu.$$

Las propiedades del valor medio, al ser equivalentes a las de la integral, siguen siendo válidas.

Enunciado 2.5.1: Propiedades generales del valor medio

Suponemos que las funciones referidas son integrables y los conjuntos son medibles d -dimensionales en \mathbb{R}^n con medida d -dimensional μ no nula ni infinita. Entonces

1. **Constancia** $\text{vm}_A(k) = k$ para la función constante $f = k$.

2. **Linealidad**

$$\text{vm}_A(f + g) = \text{vm}_A(f) + \text{vm}_A(g) \quad \text{vm}_A(kf) = k \text{vm}_A(f) \quad (k \text{ constante})$$

3. **Monotonía**

$$f \leq g \implies \text{vm}_A(f) \leq \text{vm}_A(g)$$

4. **Desigualdad Triangular**

$$|\text{vm}_A(f)| \leq \text{vm}_A(|f|)$$

5. **Aditividad finita** Si $A = \bigcup_{k=1}^r A_k$ y los conjuntos A_k no se solapan, entonces

$$\text{vm}_A(f) = \sum_{k=1}^r \frac{\mu(A_k)}{\mu(A)} \text{vm}_{A_k}(f)$$

2.5 Aplicaciones de las integrales sobre subvariedades

La aditividad finita es una propiedad conocida ya por Arquímedes en el caso particular de centros de gravedad. En palabras, dice que la media sobre el total es la combinación lineal de las medias sobre cada parte, con pesos iguales a la proporción de masa de cada parte respecto al total.

El siguiente resultado es útil en una variedad de contextos. Explica cómo se pueden recuperar los valores de una función continua a partir de sus valores medios.

Enunciado 2.5.2: Límite de las medias al contraer a un punto

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ una subvariedad d -dimensional, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $p \in X$. Sea T una colección de números con un punto límite t_0 y supongamos dada una colección de subvariedades $\{X_t : t \in T\}$ tales que

- $p \in X_t$ para todo $t \in T$,
- X_t está contenida en una bola n -dimensional $B(p, r_t)$ de centro p y radio r_t tal que $\lim_{t \rightarrow t_0} r_t = 0$ (contracción al punto p).

Entonces los valores medios de f sobre X_t convergen al valor en p :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \text{vm}_{X_t}(f) = f(p),$$

- *Demostración:* Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en p , existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - p\| < \delta \implies |f(x) - f(p)| \leq \varepsilon$$

y como $\lim_{t \rightarrow t_0} r_t = 0$, se tendrá

$$t \approx t_0 \implies r_t < \delta \implies X_t \subseteq B(p, r_t) \implies |f(x) - f(p)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X_t$$

y por tanto, usando las propiedades básicas de los valores medios, para $t \approx t_0$,

$$\begin{aligned} |(\text{vm}_{X_t} f(x)) - f(p)| &= |\text{vm}_{X_t} f(x) - \text{vm}_{X_t} f(p)| \\ &= |\text{vm}_{X_t} (f(x) - f(p))| \leq \text{vm}_{X_t} |f(x) - f(p)| \leq \text{vm}_{X_t} (\varepsilon) = \varepsilon, \end{aligned}$$

y como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, se tiene $\lim_{t \rightarrow t_0} \text{vm}_{X_t}(f) = f(p)$. ■

Nota 2.5.1: Reducción a un punto

Si no se impone alguna condición de **uniformidad** como la que hemos dado, de estar contenida X_t en una bola cuyo radio tiende a cero, el resultado podría ser falso, pues ya no sería necesariamente **local** en p .

2.5.2 Interpretaciones físicas de la integral

Definición 2.5.2: Centro de gravedad

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible de dimensión d con $0 < \mu(A) < \infty$. El **centro de gravedad** de A es el punto cuyas coordenadas son los valores medios sobre A de las funciones coordenadas:

$$c_A \stackrel{\text{def}}{=} (c_1, c_2, \dots, c_n), \quad c_k = \frac{1}{\mu(A)} \int_A x_k d\mu(x)$$

En otras palabras, el centro de gravedad es la **posición media**.

Se sigue cumpliendo la propiedad de combinación de los centros de gravedad en una unión $A = \bigcup_{k=1}^r A_k$ de partes A_k que no se solapan, con peso la proporción de masa de la parte relativa al total:

$$c_A = \sum_{k=1}^r \frac{\mu(A_k)}{\mu(A)} c_{A_k} \quad [2.5.1]$$

El centro de gravedad es el punto donde se equilibran las fuerzas producidas sobre A en un campo gravitacional uniforme, actuando el cuerpo A para muchas aplicaciones como si toda su masa estuviera concentrada en el centro de gravedad.

Nota 2.5.2: Advertencia sobre el centro de masa

El centro de masa de A no pertenece necesariamente á A .

Definición 2.5.3: Momentos de inercia

Sea L una **subvariedad lineal** de \mathbb{R}^n , es decir, el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales: un punto, una recta, un plano, etc.

El **momento de inercia** de un conjunto d -dimensional A respecto á L está definido por la integral

$$I_L(A) = \int_A \left(d_L(x) \right)^2 d\mu(x)$$

donde $d_L(x)$ es la distancia mínima de un punto x á L .

Enunciado 2.5.3: Simetría y centro de gravedad

Si un conjunto d-dimensional $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es simétrico respecto a la subvariedad lineal L , su centro de gravedad c_G se halla en L .

► Ejemplo 2.5.1

Si A es simétrico respecto a un punto p , entonces $c_A = p$. Por ejemplo, la región anular $A : 1 < \|x - p\| < 2$ tiene centro de gravedad en p . En este caso, $p \notin A$.

**Definición 2.5.4: Medida de masa relativa a una densidad**

Sea ρ una función no negativa en un recinto d-dimensional $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se puede interpretar $\rho(x)$ como la **densidad de masa por unidad de medida d-dimensional** y entonces la integral

$$m_\rho(A) = \int_A \rho \, d\mu$$

representa la **masa total** de A con esta distribución de densidad.

Nota 2.5.3: Masa y unidades medida

El único cambio es en las **unidades de medida**. Si A es una curva, la densidad es la masa por unidad de longitud, si es una superficie, por área, etc.

Recordamos que una ρ en general se puede interpretar como una densidad de *carga*, y $\mu(A)$ como la carga total de A , que podría ser 0 por cancelación de cargas positivas y negativas.

Enunciado 2.5.4: Integral relativa a una medida de masa

Sea ρ una densidad en \mathbb{R}^n . La masa $\mu_\rho(A)$, considerada como función del conjunto A , es una medida. La diferencial respecto a esta medida viene dada por

$$d\mu_\rho = \rho \, d\mu$$

donde la medida infinitesimal en x se multiplica por la densidad $\rho(x)$. La integral de una función f sobre A respecto a la masa μ_ρ es

$$\int_A f \, d\mu_\rho = \int_A f\rho \, d\mu$$

De este modo, los valores medios se pueden definir en términos de una masa

d-dimensional:

$$f_A = \frac{1}{\mu_\rho(A)} \int_A f d\mu_\rho = \frac{\int_A f\rho d\mu}{\int_A \rho d\mu} \quad [2.5.2]$$

e igualmente el centro de gravedad, que pasa a llamarse **centro de masas** o **baricentro**.

$$c_A = (c_1, c_2, \dots, c_n), \quad c_k = \frac{\int_A x_k \rho(x) d\mu(x)}{\int_A \rho(x) d\mu(x)} \quad [2.5.3]$$

y los momentos de inercia respecto a una subvariedad lineal L,

$$I_L(A) = \int_A (d_L(x))^2 \rho(x) d\mu(x) \quad [2.5.4]$$

donde d_L es la distancia á L.

Nota 2.5.4: Integrales relativas a una masa cualquiera

Las propiedades de la integral y de los valores medios enunciadas anteriormente son válidas para la integral relativa a una medida de masa cualquiera.

Procedemos a analizar en detalle los casos particulares visualizables de esta teoría general que vamos a utilizar. Corresponden a los pares de dimensiones (d, n) donde $d, n = 1, 2, 3$. Recordar que $d \leq n$ (el espacio «contenedor» es \mathbb{R}^n y todo está dentro de este espacio).

Como ya hemos resaltado anteriormente, descartamos los casos con $d = n$ que ya estudiamos ([capítulo 1](#)). Quedan:

$d = 0$: conjuntos de puntos aislados.

$d = 1$: curvas.

$d = 2, n = 3$: superficies en \mathbb{R}^3 .

2.6 La integral en dimensión 0: puntos aislados

En dimensión $d = 0$ medir es simplemente **contar** el número de puntos que contiene un subconjunto A , que, para ser ni nula ni infinita, debe ser un conjunto no vacío finito de puntos

$$A = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$$

en \mathbb{R}^n . La integral 0-dimensional es simplemente la **suma** de valores:

Enunciado 2.6.1: Integrar en dimensión 0 es sumar

Si $A = \{p_i : 1 \leq i \leq k\}$ y μ es la medida 0-dimensional en \mathbb{R}^n , entonces

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^k f(p_i).$$

Una parametrización es entonces una aplicación biyectiva de un conjunto finito de reales $A^* = \{p_1^*, \dots, p_k^*\}$ con $\varphi(p_k^*) = p_k$, y la fórmula de cambio de variable es

$$\sum_{i=1}^k f(\varphi(p_i^*)) = \sum_{i=1}^k f(p_i).$$

Podemos decir que el factor Jacobiano es siempre $J_\varphi = 1$ para dimensión 0. No es demasiado interesante desde el punto de vista geométrico...

► Ejemplo 2.6.1: valores medios y centros de masas en dimensión 0

Para dimensión $d = 0$ con $A = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ y una densidad constante ρ , la definición del valor medio de f sobre A es

$$f_A = \frac{f(p_1) + f(p_2) + \dots + f(p_k)}{k} \quad [2.6.1]$$

o sea, el valor medio es la media aritmética de los valores de f en los puntos de A . En dimensión 0, dar una densidad es asignar una masa m_i a cada punto a_i , y entonces

$$f_A = \frac{m_1 f(a_1) + \dots + m_k f(a_k)}{m_1 + \dots + m_k} \quad [2.6.2]$$

que es lo que se conoce como la **media ponderada**. El **centro de masas** de A es

$$c_A = \frac{m_1 p_1 + \dots + m_k p_k}{m_1 + \dots + m_k} \quad [2.6.3]$$

Mencionaremos también aquí que la teoría de integrales impropias aplicada a la medida de contar y la correspondiente integral 0-dimensional, es la teoría de las series infinitas.

Habiendo hecho estos breves comentarios correspondientes al caso $(d, n) = (0, n)$, volviendo a los casos de mayor interés, observamos que los casos *planos* estudiados anteriormente (en el [capítulo 1](#)) son los correspondientes a $d = n$. Así, tenemos

- 1.** $d = n = 1$: la integral **habitual** en una variable sobre un intervalo.
- 2.** $d = n = 2$: las integrales de **área** sobre regiones del plano.
- 3.** $d = n = 3$: las integrales de **volumen** sobre recintos sólidos del espacio 3D.

Vamos a estudiar también el caso $d = 1$, es decir, $(d, n) = (1, n)$, correspondiente a **curvas** en dimensión n , haciendo énfasis en los casos visualizables $n = 2, 3$, y también el caso $(d, n) = (2, 3)$, correspondiente a una **superficie** en el espacio tridimensional.

2.7 Curvas

Una **curva** $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ corresponde al caso de subvariedad parametrizada de dimensión $d = 1$. Como es un caso relativamente sencillo, podemos dejar n general, aunque nos interesarán sobre todo $n = 2, 3$ (el caso $d = n = 1$ ya lo hemos estudiado: es la integral habitual en una variable real).

Definición 2.7.1: Curva parametrizada general

Una **parametrización** de la curva \mathcal{C} es una función de una variable (ya que $d = 1$)

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) : [a, b] = \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{C}$$

definida en un intervalo de \mathbb{R} (el conjunto \mathcal{C}^* en la notación anterior).

Habitualmente el intervalo es compacto, pero en general puede ser de cualquier tipo, por ejemplo, todo \mathbb{R} . A medida que t varía en el intervalo, la *posición* $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ describe una *trayectoria* que geométricamente es el conjunto de puntos que forman la curva \mathcal{C} .

Una curva está parametrizada por **una** variable real en un intervalo

Las condiciones sobre las parametrizaciones ([definición 2.2.1](#)) que impusimos corresponden a

- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ es biyectiva.
- γ, γ^{-1} son derivables con derivadas continuas.
- La derivada $\gamma'(t)$ no se anula (rango máximo).

De todas formas, por la necesidad de abarcar otros casos, también se pueden relajar algunas de estas condiciones.

Definición 2.7.2: Curvas cerradas o circuitos

Suponemos que una parametrización $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ de una curva \mathcal{C} cumple las condiciones generales ([definición 2.2.1](#)) que expusimos antes, salvo que se permite **relajar la condición de biyectividad** para admitir que pueda ser

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

es decir, la curva acaba en el mismo punto donde empieza. En este caso decimos que la curva es **cerrada** o un **círculo**. De lo contrario diremos que es un **arco**.

Nota 2.7.1: Puntos de auto-intersección

La condición de biyectividad (salvo en los extremos) en una parametrización significa geométricamente que la curva es **simple**, lo cual quiere decir que no tiene puntos de **auto-intersección**, es decir, no se vuelve a pasar por ningún punto ya atravesado, exceptuando posiblemente el punto inicial al que se vuelve en un circuito.

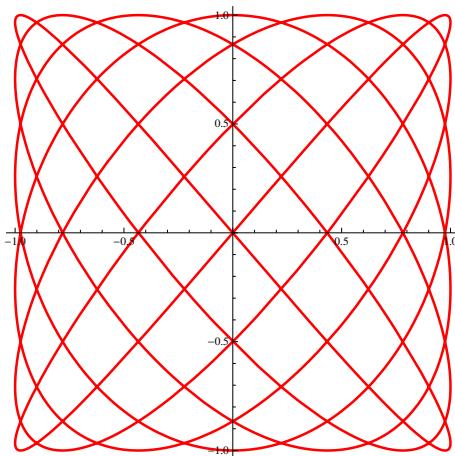


Figura 2.2 – Las curvas de *Lissajous*, como ésta, correspondiente a $(\sin 6t, \sin 7t)$, son curvas con auto-intersecciones.

► Ejemplo 2.7.1

En \mathbb{R}^2 , una curva corresponde a una ecuación

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

donde x, y son funciones de t en algún intervalo. En \mathbb{R}^3 , una curva corresponde a una ecuación

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

donde x, y, z son funciones de t en algún intervalo. ◀

► Ejemplo 2.7.2: circunferencias

La parametrización habitual de la circunferencia en \mathbb{R}^2 de radio R y centro en (a, b) es

$$x(t) = a + R \cos t, \quad y(t) = b + R \sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \quad [2.7.1]$$

► Ejemplo 2.7.3: segmentos

Dados dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^n$, el **segmento** entre p y q se denotará con la misma notación que los intervalos en \mathbb{R} :

[p, q] denota el segmento entre p y q en \mathbb{R}^n

La parametrización habitual del segmento $[p, q]$ viene dada por la **combinación convexa**

$$\sigma(t) = p + t(q - p) = (1 - t)p + tq, \quad t \in [0, 1] \quad [2.7.2]$$

Por ejemplo, en \mathbb{R}^2 , la parametrización habitual del segmento entre los puntos $p = (a, b)$ y $q = (A, B)$ en \mathbb{R}^2 es

$$\sigma(t) = (1 - t)p + tq = ((1 - t)a + tA, (1 - t)b + tB), \quad t \in [0, 1]$$

y la del segmento entre los puntos $p = (a, b, c)$ y $q = (A, B, C)$ en \mathbb{R}^3 es

$$\sigma(t) = (1 - t)p + tq = ((1 - t)a + tA, (1 - t)b + tB, (1 - t)c + tC), \quad t \in [0, 1].$$



Definición 2.7.3: Interpretación de una curva como trayectoria

A menudo el parámetro t se interpreta como **tiempo**. Entonces La ecuación $x = \gamma(t)$ nos da la **posición en el instante t** del punto x sobre la curva. Por este motivo es habitual escribir también la parametrización en la **notación vectorial**

$$\vec{r}(t) = \gamma(t), \quad r(t) = \|\vec{r}(t)\|$$

Definición 2.7.4: El vector tangente o velocidad

La derivada vectorial

$$\gamma'(t) = \vec{r}'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{v}(t)$$

nos da la **velocidad vectorial** en el instante t . También representa al **vector tangente** a C en el punto $p = \gamma(t) = \vec{r}(t)$. A menudo al trabajar con curvas también se usa la **notación de Newton** para las derivadas, con puntos sobre las variables:

$$x, \quad \dot{x}, \quad \ddot{x}, \dots \quad \dot{\gamma} = \dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n).$$

La magnitud ó longitud de la derivada

$$v(t) = \|\gamma'(t)\| = \left(\sum_{i=1}^n \gamma'_i(t)^2 \right)^{1/2}$$

representa la **velocidad escalar** en el instante t

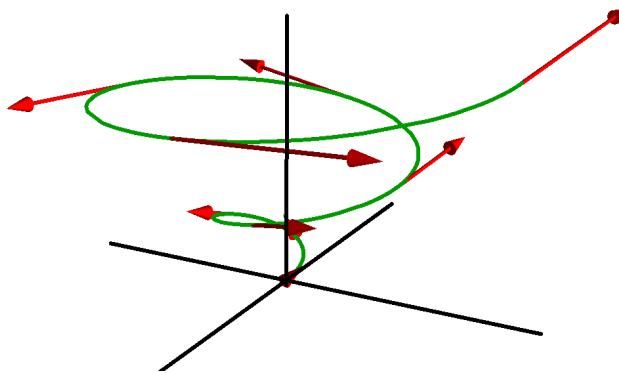


Figura 2.3 – El vector tangente de velocidad en una curva indica la dirección de movimiento además de la velocidad escalar a la que se mueve.

La derivada vectorial segunda de la posición \vec{r} es la **aceleración**, denotada $\vec{a}(t) = \gamma''(t)$. Su magnitud es la **aceleración escalar** $a(t) = \|\vec{a}(t)\|$.

Enunciado 2.7.1: El jacobiano de una parametrización de una curva

El factor Jacobiano de una parametrización $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ de una curva para la medida de longitud, que denominaremos ℓ , es

$$J_\gamma(t) = \|\gamma'(t)\|$$

■ **Demostración:** Esto se puede ver directamente sustituyendo en la fórmula del jacobiano general ([definición 2.3.1](#)); en este caso sólo hay una derivada, al haber sólo un parámetro, y la fórmula dice que J_γ es la raíz cuadrada del determinante 1×1 formado por $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = \|\gamma'(t)\|^2$, por tanto $J_\gamma(t) = \|\gamma'(t)\|$. ■

Definición 2.7.5: El vector tangente unitario y la orientación de una curva

Es conveniente en muchas ocasiones **normalizar** el vector tangente para que tenga longitud 1, lo que se llama un **vector unitario**. Esto se hace dividiendo por su longitud:

$$\vec{t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

A diferencia de $\gamma'(t)$, que depende de la parametrización concreta γ utilizada para describir los puntos de la curva, el tangente unitario \vec{t} no depende de γ , una vez que determinamos una **orientación** de la curva, que describe el sentido de movimiento a lo largo de ella.

No diremos más de momento acerca de la orientación; se hace indispensable más adelante al estudiar las integrales de línea ([apartado 3.1](#)).

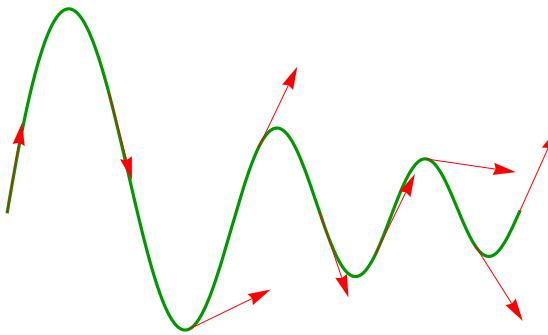


Figura 2.4 – Vector tangente unitario sobre una curva.

► Ejemplo 2.7.4

Por ejemplo, para la circunferencia de centro $p = (a, b)$ y radio R (que es cerrada ([definición 2.7.2](#))), con la parametrización estándar,

$$\vec{r}(t) = \gamma(t) = (a + R \cos t, b + R \sin t)$$

$$\vec{v}(t) = \gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$$

$$v(t) = J_\gamma(t) = \|\gamma'(t)\| = R$$

$$\vec{t} = \frac{1}{R} \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$\vec{a}(t) = \gamma''(t) = (-R \cos t, -R \sin t)$$

$$a(t) = \|\gamma''(t)\| = R$$

Observar que el vector tangente es perpendicular al **radio vector**

$$\vec{r} - p = (R \cos t, R \sin t)$$

trazado desde $p = (a, b)$ hasta la posición $\vec{r}(t)$. Esta propiedad caracteriza el movimiento circular. Además, la aceleración es precisamente el negativo del radio vector (fuerza centrípeta/centrifuga). ◀

► Ejemplo 2.7.5

Para el segmento entre dos puntos p, q , con la parametrización estándar,

$$\vec{r}(t) = \sigma(t) = (1-t)p + tq = p + t(q-p)$$

$$\vec{v}(t) = \sigma'(t) = q - p$$

$$v(t) = J_\gamma(t) = \|\gamma'(t)\| = \|q-p\|$$

$$\vec{t} = \frac{q-p}{\|q-p\|}$$

$$\vec{a}(t) = \gamma''(t) = 0$$

$$a(t) = 0$$

en particular, el segmento se recorre a velocidad constante (por tanto aceleración nula) igual en magnitud a la distancia entre sus extremos. ◀

Nota 2.7.2: Parametrización e imagen

Debemos mantener separados los conceptos de **curva** y la **parametrización** que es la **ecuación** de la curva. En particular, **la misma curva \mathcal{C} puede parametrizarse de infinitas maneras**, correspondientes físicamente a recorrer el mismo trayecto a distintas velocidades. Por ejemplo, tanto

- $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ como
- $\beta(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ con $t \in [0, 1]$

recorren la circunferencia unidad \mathcal{C} en sentido antihorario. La primera lo hace a velocidad escalar 1 y la segunda a velocidad escalar 2π .

2.8 Integrales de longitud sobre una curva

La medida de longitud ℓ sobre una curva $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ es la medida 1-dimensional en \mathbb{R}^n , siendo $n \geq 1$. Como caso particular de la fórmula de cambio de variable interdimensional ([enunciado 2.3.2](#)) sabiendo que el jacobiano de longitud correspondiente a una parametrización $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ es $J_\gamma(t) = \|\gamma'(t)\|$, obtenemos las fórmulas para las integrales de longitud.

Enunciado 2.8.1: La integral de longitud sobre una curva

Sea ℓ la medida de longitud. Si \mathcal{C} es una curva parametrizada por $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ y $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} f d\ell = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

que es una integral plana de una variable. En coordenadas, si la parametrización es $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} f d\ell = \int_a^b f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \sqrt{x'_1(t)^2 + \dots + x'_n(t)^2} dt.$$

En notación vectorial, si la posición es $\vec{r}(t)$ y la velocidad $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} f d\ell = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{v}(t)\| dt = \int_a^b f(\vec{r}(t)) v(t) dt$$

donde $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$ es la velocidad escalar.

Poniendo $f = 1$ en las fórmulas anteriores obtenemos la fórmula para la longitud de una curva \mathcal{C} .

Enunciado 2.8.2: La longitud de una curva

Sea ℓ la medida de longitud. Si \mathcal{C} es una curva parametrizada por $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$, su longitud es

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} d\ell = \int_{[a,b]} J_\gamma(t) dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

En coordenadas, si la parametrización es $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, entonces

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{x'_1(t)^2 + \dots + x'_n(t)^2} dt.$$

En notación vectorial, si la posición es $\vec{r}(t)$ y la velocidad $\vec{v}(t)$, entonces

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\vec{v}(t)\| dt = \int_a^b v(t) dt$$

donde $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$ es la velocidad escalar.

Nota 2.8.1: La longitud es el recorrido total

La fórmula para la longitud se puede interpretar como la formulación rigurosa de la frase **la distancia total recorrida es la integral de la velocidad**.

Geométricamente,

$$d\ell = \|\gamma'(t)\| dt$$

representa un **elemento de longitud** infinitesimal sobre la curva, que al «sumar» (es decir, integrar) da la longitud total.

► Ejemplo 2.8.1

La integral sobre el segmento entre p, q es

$$\int_C f d\ell = \int_0^1 f((1-t)p + tq) \|q - p\| dt$$

En particular, como se sabe de antemano,

$$\ell([a, b]) = \int_0^1 \|q - p\| dt = \|q - p\|.$$



► Ejemplo 2.8.2

La integral sobre la circunferencia \mathcal{C} de centro (a, b) y radio R es

$$\int_C f d\ell = \int_0^{2\pi} f(a + R \cos t, b + R \sin t) R dt.$$

En particular,

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$



Definición 2.8.1

Los conceptos de **valor medio**, **centro de masas**, **momento de inercia** se definen para curvas como casos particulares de los conceptos generales en cualquier subvariedad.

Valor medio de una función sobre una curva \mathcal{C} :

$$vm_{\mathcal{C}}(f) = \frac{1}{\ell(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} f d\ell \quad [2.8.1]$$

Centro de gravedad de una curva \mathcal{C} :

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n) : c_k = vm_{\mathcal{C}}(x_k) = \frac{1}{\ell(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} x_k d\ell \quad [2.8.2]$$

Momento de inercia de una curva \mathcal{C} respecto una subvariedad lineal L :

$$I_L(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} d_L^2 d\ell \quad [2.8.3]$$

donde d_L es la distancia á L .

2.9 Coordenadas particulares de longitud

2.9.1 Longitudes en tres dimensiones

La parametrización general de una curva $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ tiene la forma

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

por tanto el vector tangente es

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

y las fórmulas correspondientes a este caso particular son

$$d\ell = \|\gamma'(t)\| dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \quad [2.9.1]$$

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \quad [2.9.2]$$

$$\int_{\mathcal{C}} f d\ell = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \quad [2.9.3]$$

El elemento de longitud corresponde infinitesimalmente al [Teorema de Pitágoras](#),

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

entendiendo que $dx = x'(t) dt$, $dy = y'(t) dt$ al parametrizar.

2.9.2 Longitudes en dos dimensiones

La parametrización general de una curva plana \mathcal{C} tiene la forma

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

por tanto el vector tangente es

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

y entonces

$$d\ell = \|\gamma'(t)\| dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad [2.9.4]$$

2.9 Coordenadas particulares de longitud

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad [2.9.5]$$

$$\int_{\mathcal{C}} f d\ell = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad [2.9.6]$$

siendo en este caso

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2$$

entendiendo que $dx = x'(t) dt$, $dy = y'(t) dt$ al parametrizar.

2.9.3 Longitud sobre una gráfica bidimensional en x

Si la curva \mathcal{C} es la gráfica de $y = y(x)$ entre $x = a$ y $x = b$, una parametrización sencilla es $\gamma(x) = (x, y(x))$, o sea, tomar el parámetro $t = x$. Entonces

$$d\ell = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad [2.9.7]$$

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad [2.9.8]$$

$$\int_{\mathcal{C}} f d\ell = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad [2.9.9]$$

► Ejemplo 2.9.1: longitud de una semicircunferencia

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

con $x \in [-1, 1]$. Se tiene

$$dy = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \therefore \quad d\ell^2 = 1 + \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

y por tanto

$$\ell = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$



2.9.4 Longitud sobre una gráfica bidimensional en y

Si la curva \mathcal{C} es la gráfica de $x = x(y)$ entre $y = a$ y $y = b$, una parametrización sencilla es $\gamma(x) = (x(y), y)$, o sea, tomar el parámetro $t = y$. Entonces

$$d\ell = \sqrt{1 + x'(y)^2} dy \quad [2.9.10]$$

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + x'(y)^2} dy \quad [2.9.11]$$

$$\int_{\mathcal{C}} f d\ell = \int_a^b f(x(y), y) \sqrt{1 + x'(y)^2} dy \quad [2.9.12]$$

2.9.5 Curvas polares radiales

Si la curva \mathcal{C} viene dada por una ecuación en coordenadas polares de la forma

$$r = r(\theta), \quad \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$$

entonces una parametrización es la transformación a coordenadas polares, **restringiendo el radio a ser función del ángulo**:

$$\gamma(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$$

Usando la notación punto de Newton para derivadas, y abreviando $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$,

$$\gamma'(\theta) = (\dot{r}c - rs, \dot{r}s + rc)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \|\gamma'(\theta)\|^2 &= (\dot{r}c - rs)^2 + (\dot{r}s + rc)^2 \\ &= \dot{r}^2 c^2 - 2\dot{r}rcs + r^2 s^2 + \dot{r}^2 s^2 + 2\dot{r}rcs + r^2 c^2 \\ &= \dot{r}^2 + r^2 \end{aligned}$$

quedando entonces como «fórmula polar radial» para el elemento de longitud, las longitudes y las integrales de longitud en general, las fórmulas

$$d\ell = \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta \quad [2.9.13]$$

2.9 Coordenadas particulares de longitud

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta \quad [2.9.14]$$

$$\int_{\mathcal{C}} f d\ell = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} f(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta \quad [2.9.15]$$

2.9.6 Curvas polares angulares

Si la curva \mathcal{C} viene dada por una ecuación en coordenadas polares de la forma

$$\theta = \theta(r), \quad r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$$

entonces una parametrización es la transformación a coordenadas polares, **restringiendo el ángulo a ser función del radio**:

$$\gamma(r) = (r \cos \theta(r), r \sin \theta(r))$$

Usando la notación punto de Newton para derivadas, y abreviando $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$,

$$\gamma'(r) = (c - rs\dot{\theta}, s + rc\dot{\theta})$$

se tiene

$$\begin{aligned} \|\gamma'(\theta)\|^2 &= (c - rs\dot{\theta})^2 + (s + rc\dot{\theta})^2 \\ &= c^2 - 2rs\dot{\theta} + r^2 s^2 \dot{\theta}^2 + s^2 + 2rs\dot{\theta} + r^2 c^2 \dot{\theta}^2 \\ &= 1 + r^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

quedando entonces como «fórmula polar radial» para el elemento de longitud, las longitudes y las integrales de longitud en general, las fórmulas

$$d\ell = \sqrt{1 + r^2 \theta'(r)^2} dr \quad [2.9.16]$$

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{1 + r^2 \theta'(r)^2} dr \quad [2.9.17]$$

$$\int_{\mathcal{C}} f d\ell = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f(r \cos \theta(r), r \sin \theta(r)) \sqrt{1 + r^2 \theta'(r)^2} dr \quad [2.9.18]$$

2.9.7 El elemento de longitud polar en notación diferencial

La ventaja de la notación infinitesimal es que resalta que de hecho es la misma fórmula en ambos casos, radial o angular. Si el parámetro es θ (caso radial), derivando respecto a él queda

$$\begin{aligned}x = r \cos \theta &\implies \frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta \implies dx = c dr - rs d\theta \\y = r \sin \theta &\implies \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta \implies dy = s dr + rc d\theta\end{aligned}$$

mientras que si el parámetro es r (caso angular), derivando respecto a él queda

$$\begin{aligned}x = r \cos \theta &\implies \frac{dx}{dr} = \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dr} \implies dx = c dr - rs d\theta \\y = r \sin \theta &\implies \frac{dy}{dr} = \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dr} \implies dy = s dr + rc d\theta\end{aligned}$$

Entonces, utilizando esta notación diferencial,

$$\begin{aligned}d\ell^2 &= dx^2 + dy^2 \\&= c^2 dr^2 - 2rsc dr d\theta + r^2 s^2 d\theta^2 + s^2 dr^2 + 2rsc dr d\theta + r^2 c^2 d\theta^2 \\&= dr^2 + r^2 d\theta^2.\end{aligned}$$

De este modo queda una única fórmula. Como infinitésimos, dr es el incremento del radio y $r d\theta$ el de longitud de arco subtendido por $d\theta$ con radio r .

Enunciado 2.9.1: El elemento de longitud polar

El elemento de longitud en coordenadas polares está dado por

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

Los casos anteriores, radial y angular, corresponden a observar que

$$\begin{aligned}dr &= \frac{dr}{d\theta} d\theta = r'(\theta) d\theta \quad \text{si } r \text{ es función de } \theta, \text{ es decir } r = r(\theta), \\d\theta &= \frac{d\theta}{dr} dr = \theta'(r) dr \quad \text{si } \theta \text{ es función de } r, \text{ es decir } \theta = \theta(r),\end{aligned}$$

obteniéndose las fórmulas anteriores correspondientes a cada caso.

Nota 2.9.1

Estas cuentas, en apariencia manipulaciones poco rigurosas o no justificadas de la notación diferencial, son válidas en el marco de la Geometría Diferencial, en particular, de la teoría de **formas diferenciales**.

2.9.8 Ejemplos de integrales de longitud sobre curvas**► Ejemplo 2.9.2: longitud de una circunferencia de radio R**

$$r = R, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad dr = 0, \quad \therefore \quad d\ell^2 = r^2 d\theta^2 = R^2 d\theta^2 \quad \therefore \quad d\ell = R d\theta$$

y la longitud es

$$\ell = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R$$

como es bien conocido. ◀

► Ejemplo 2.9.3: longitud de una circunferencia de diámetro D

Colocada de modo que sea tangente al eje $x = 0$ y quede a su derecha, con diámetro sobre el eje $y = 0$, su ecuación es

$$r = D \cos \theta, \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2], \quad dr = -D \sin \theta d\theta$$

luego

$$d\ell = (D^2 \cos^2 \theta + D^2 \sin^2 \theta) d\theta^2 = (D d\theta)^2 \quad \therefore \quad d\ell = D d\theta$$

y la longitud es

$$\ell = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D d\theta = \pi D$$

**► Ejemplo 2.9.4: longitud de la cardioide**

La cardioide es la curva con forma de corazón ([figura 2.5](#)) está definida por la ecuación polar

$$r = 1 + \cos \theta \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Se tiene

$$dr = -\sin \theta d\theta$$

luego, abreviando $s = \sin \theta$, $c = \cos \theta$,

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 = (s^2 + (1 + c)^2) d\theta^2 = (s^2 + 1 + 2c + c^2) d\theta^2 = (2 + 2c) d\theta^2$$

por tanto

$$d\ell = \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta.$$

Por simetría podemos restringir a $[0, \pi]$ y multiplicar por 2. Como $\sin \theta \geq 0$ en $[0, \pi]$, si $\cos \theta \neq 1$,

$$d\ell = \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta = \sqrt{2} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\sqrt{1 - \cos \theta}} d\theta = \sqrt{2} \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \cos \theta}} d\theta$$

y entonces

$$\int d\ell = \sqrt{2} \cdot 2 \sqrt{1 - \cos \theta}$$

es una primitiva en $[0, \pi]$, salvo que no es derivable en $\pi/2$. Por tanto la longitud es

$$\ell = 2 \left[\sqrt{2} \cdot 2 \sqrt{1 - \cos \theta} \right]_0^\pi = 4\sqrt{2}\sqrt{2} = 8$$

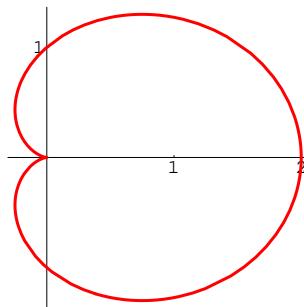


Figura 2.5 – cardioide

► Ejemplo 2.9.5: longitud de la espiral de Arquímedes

La espiral de Arquímedes básica ([figura 2.6](#)) tiene ecuación polar

$$r = \theta \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Se tiene

$$dr = d\theta$$

luego

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 = (1 + \theta^2) d\theta^2$$

por tanto

$$d\ell = \sqrt{1 + \theta^2} d\theta$$

y la longitud, sustituyendo $\theta = \sinh x$, es

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta &= \int_0^{\sinh^{-1}(2\pi)} \sqrt{1 + \sinh^2 x} \cosh x dx \\ &= \int_0^{\sinh^{-1}(2\pi)} \cosh^2 x dx \end{aligned}$$

2.9 Coordenadas particulares de longitud

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\sinh^{-1}(2\pi)} \frac{1 + \cosh 2x}{2} dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sinh 2x \right]_0^{\sinh^{-1}(2\pi)} \\
 &= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sinh x \cosh x \right]_0^{\sinh^{-1}(2\pi)} \\
 &= \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\theta\sqrt{1+\theta^2} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\sinh^{-1}(2\pi) + \pi \cdot \sqrt{1+4\pi^2}
 \end{aligned}$$

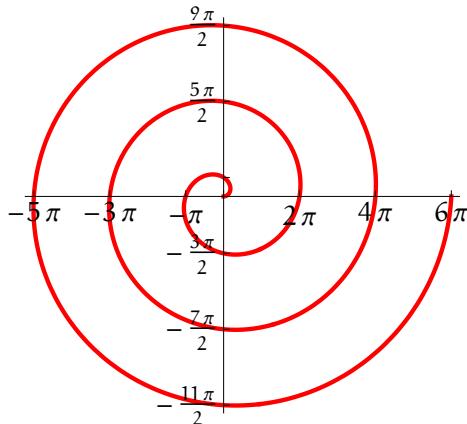


Figura 2.6 – espiral de Arquímedes $r = \theta$

► Ejemplo 2.9.6

Calcular la masa de un muelle cuya forma viene dada por la hélice

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, t), \quad t \in [0, 6\pi]$$

si la densidad es $\rho(x, y, z) = 1 + z$. Calculamos

$$\gamma'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, 1), \quad \|\gamma'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin^2 t + \cos^2 t + 1)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1.$$

Por tanto la masa es

$$m(C) = \int_C (1+z) dl = \int_0^{6\pi} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) 1 dt = \left[t + \frac{t^2}{2\sqrt{2}}\right]_0^{6\pi} = 6\pi \left(1 + \frac{3\pi}{\sqrt{2}}\right).$$



► Ejemplo 2.9.7

Calculamos el momento de inercia de un segmento (barra unidimensional) B de longitud L y masa m (suponiendo densidad uniforme ρ) respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro ([figura 2.7](#)).

Podemos colocar la barra a lo largo del eje x, con su centro en el origen. Entonces $(x, 0)$ con $|x| \leq \frac{L}{2}$ son coordenadas sobre la barra, con elemento de longitud $dl = dx$ y por tanto elemento de masa $dm = \rho dx$. También podemos suponer que el eje de rotación es el eje z. La distancia de $(x, 0)$ a este eje es x, luego el momento de inercia es

$$I_{zz}(B) = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \rho dx = 2 \int_0^{L/2} x^2 \rho dx = \frac{2}{3} \rho \cdot \frac{L^3}{8} = \rho \frac{L^3}{12} = \frac{1}{12} m L^2$$

donde $m = \rho L$ es la masa de la barra. ◀

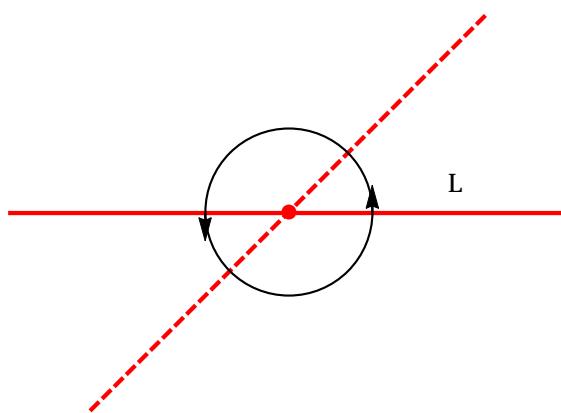


Figura 2.7 – Una barra que gira alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro.

► Ejemplo 2.9.8

Consideremos la misma barra que en el ejemplo anterior pero girando alrededor de un eje que está a distancia R de su centro ([figura 2.8](#)). Suponemos que es el eje z y colocamos la barra en posición vertical, con centro en $(R, 0)$. Entonces (R, y) con $|y| \leq \frac{L}{2}$ son coordenadas sobre la barra, con elemento de longitud $dl = dy$ y elemento de masa $dm = \rho dy$. La distancia al cuadrado de un punto (R, y) al eje z es $R^2 + y^2$, por tanto

$$\begin{aligned} I_{zz}(B) &= \int_{-L/2}^{L/2} (R^2 + y^2) dm = \int_{-L/2}^{L/2} (R^2 + y^2) \rho dy = 2\rho \int_0^{L/2} (R^2 + y^2) dy \\ &= 2\rho \left[R^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=L/2} = 2\rho \cdot \frac{R^2 L}{2} + 2\rho \cdot \frac{L^3}{24} = \rho L R^2 + \rho \frac{L^3}{12} = m R^2 + \frac{1}{12} m L^2. \end{aligned}$$

Esto es un caso particular del **Teorema (de Steiner) del Eje Paralelo**: el momento de inercia respecto a un eje desplazado es igual al momento de inercia

2.9 Coordenadas particulares de longitud

respecto al eje paralelo que pasa por el centro de masas más mR^2 donde R es la distancia entre los dos ejes.

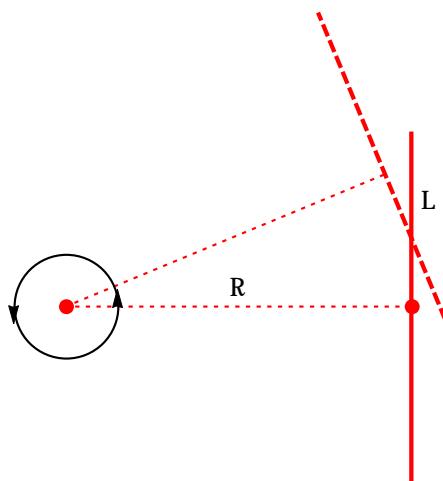


Figura 2.8 – Una barra que gira alrededor de un eje perpendicular desplazado.

► Ejemplo 2.9.9: centro de gravedad de un semicírculo

Podemos suponer que es el semicírculo C descrito por $x^2 + y^2 = R^2$ con $y \geq 0$. En coordenadas polares su ecuación es $r = R$ con $0 \leq \theta \leq \pi$. Su longitud es πR . Por simetría, $x_C = 0$, y

$$\int_C y \, d\ell = \int_0^\pi R \sin \theta \cdot R \, d\theta = 2R^2$$

por tanto

$$y_C = \frac{1}{\ell(C)} \int_C y \, d\ell = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2}{\pi} R,$$

siendo $2/\pi \approx 0,63662$.

► Ejemplo 2.9.10: momentos de un semicírculo

Para el semicírculo C descrito por $x^2 + y^2 = R^2$ con $y \geq 0$,

$$\int_C x^2 \, d\ell = \int_0^\pi R^2 \cos^2 \theta \cdot R \, d\theta = R^3 \int_0^\pi \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{1}{2} m R^2$$

donde $m = \pi R$ es la masa de C suponiendo densidad 1. De manera similar

$$\int_C y^2 \, d\ell = \int_0^\pi R^2 \sin^2 \theta \cdot R \, d\theta = R^3 \int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{1}{2} m R^2$$

y, más sencillamente,

$$\int_C (x^2 + y^2) \, d\ell = \int_C R^2 \, d\ell = m R^2$$

2.10 Superficies en \mathbb{R}^3

2.10.1 Geometría de superficies

Una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ corresponde al caso $(d, n) = (2, 3)$. La suponemos dada por una parametrización definida en un recinto plano $S^* \subseteq \mathbb{R}^2$. Para aplicar fácilmente el Teorema de Fubini, se suele suponer que S^* es una región elemental o que se puede dividir en un número finito de tales regiones.

Definición 2.10.1: Superficie parametrizada general

Una **parametrización** de la superficie S es una función de dos variables (ya que $d = 2$)

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (u, v) \in S^* \subseteq \mathbb{R}^2$$

definida en un recinto plano $S^* \subseteq \mathbb{R}^2$ y con valor tridimensional.

Se dice que las dos variables u, v son un **sistema de coordenadas en S** .

Por ejemplo, la latitud y la longitud geográficas son un sistema de coordenadas en una superficie esférica.

El lenguaje es un tanto impreciso, pues en realidad, u, v son coordenadas rectangulares en el recinto plano S^* , y realmente lo que queremos decir es que la **imagen** $p = \varphi(u, v)$ es un punto que varía en la superficie S , pero es habitual hablar de «coordenadas en la superficie».

Una superficie está parametrizada por **dos** variables en un recinto plano

Las condiciones generales sobre las parametrizaciones ([definición 2.2.1](#)) en este caso significan que

- φ es biyectiva entre la región plana S^* y la superficie S .
- φ y φ^{-1} son de clase C^1 (derivadas parciales continuas).
- la matriz jacobiana $d\varphi_{(u,v)} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ tiene rango máximo, en este caso, 2

Al igual que hacemos para las curvas, se pueden relajar estas condiciones. En general, las fórmulas con integrales no se ven afectadas si las condiciones dejan de ser ciertas en un conjunto de **medida nula**, que en este caso significa **área nula**. Por ejemplo, pueden dejar de ser ciertas las condiciones a lo largo de curvas, ya que una curva, al ser de dimensión 1, tiene área nula ([enunciado 1.6.2](#)).

Definición 2.10.2: Tipos generales de superficies

Relajando la condición de biyectividad se pueden conseguir superficies **cerradas** (que no tienen borde) como la esfera, y también superficies con **auto-intersecciones**. Una superficie es **simple** si no tiene auto-intersecciones.

Como ya hemos visto anteriormente (figura 1.13) la visualización de superficies puede ser complicada, incluso siendo simples, pues en \mathbb{R}^3 ya hay «suficiente» espacio para dar lugar por ejemplo, a los **nudos**.

Si fijamos el valor de una de las variables, poniendo $u = u_0$ ó $v = v_0$, dejando variar la otra, en el plano obtenemos una malla de rectas verticales y horizontales, cuyas imágenes sobre la superficie S son una **malla de curvas**

$$\begin{aligned} u &\rightarrow \varphi(u, v_0), \\ v &\rightarrow \varphi(u_0, v) \end{aligned}$$

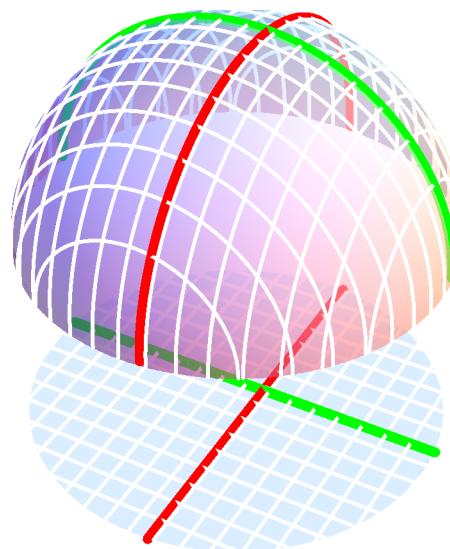


Figura 2.9 – Malla de rectas horizontales y verticales transferida a una superficie.

Estudiando la variación de la parametrización a lo largo de la malla de rectas horizontales y verticales $u = u_0$, $v = v_0$ se obtienen las dos derivadas parciales **vectoriales**

$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

Enunciado 2.10.1: Independencia de las derivadas parciales

Las dos derivadas parciales vectoriales φ_u, φ_v son linealmente independientes.

- **Demostración:** Es una consecuencia inmediata de la condición de rango máximo ([definición 2.2.1](#)) pues las parciales son las **columnas** de la matriz jacobiana $d\varphi_{(u,v)} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ y el rango es la dimensión del espacio imagen, que está generado por las columnas. ■

Al igual que ocurre para curvas, las derivadas respecto a un parámetro son **vectores tangentes**. Ahora tenemos dos direcciones tangentes independientes, correspondiente al hecho que la superficie es una subvariedad de dimensión 2.

En una superficie, las dos derivadas parciales representan dos direcciones tangentes independientes. Esto lleva a la siguiente definición.

Definición 2.10.3: El espacio tangente a una superficie

Los vectores de derivadas parciales

$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

generan un subespacio de \mathbb{R}^3 de dimensión 2 denominado **espacio tangente** a la superficie S en el punto $p = \varphi(u, v)$. El espacio tangente a S en el punto p se denota por

$$T_p S$$

Un **vector tangente** a la superficie S en el punto p es un elemento del espacio tangente $T_p S$, por tanto, una combinación lineal de los dos vectores de derivadas parciales φ_u, φ_v .

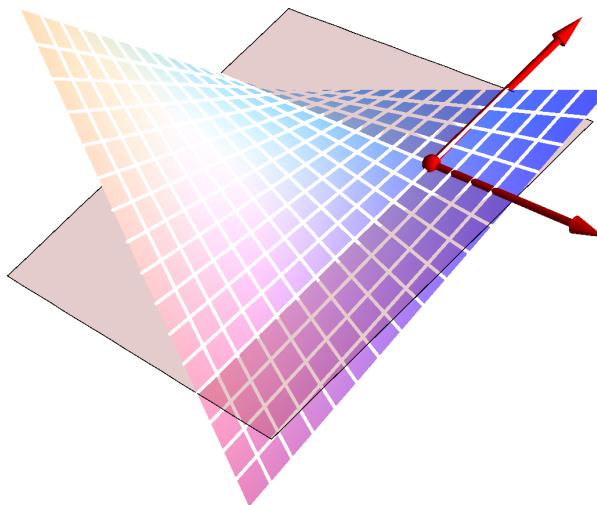
Nota 2.10.1: El plano tangente en geometría clásica

Si se quiere el concepto tradicional geométrico de **plano tangente**, que debe pasar por el propio punto p , simplemente se traslada el espacio tangente al punto p , para obtener el plano

$$p + T_p S = \{ p + v : v \in T_p S \}.$$

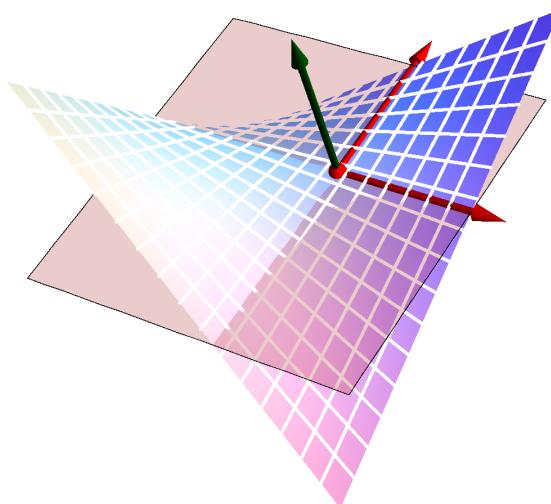
Dejando que los coeficientes de la combinación lineal pueden variar diferenciablemente con el punto, se obtiene el concepto de **campo vectorial tangente**, siendo

$$\vec{X}(p) = \alpha(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \beta(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad [2.10.1]$$

**Figura 2.10** – Plano tangente a una superficie.

su expresión general en coordenadas. A cada punto $p = \varphi(u, v) \in \mathcal{S}$ tenemos asociado el vector tangente $\vec{X}(p) \in T_p\mathcal{S}$.

Como \mathcal{S} está contenida en \mathbb{R}^3 , y las derivadas parciales φ_u, φ_v son linealmente independientes, añadiendo un tercer vector ortogonal a ambas, se obtiene una **base** de \mathbb{R}^3 . Dicho vector es un **vector normal**.

**Figura 2.11** – Base de vectores tangente y normal en un punto de una superficie.

Definición 2.10.4: El espacio normal a una superficie

Si $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie parametrizada por $\varphi : \mathcal{S}^* \rightarrow \mathcal{S}$ y $p = \varphi(u, v) \in \mathcal{S}$, el **espacio normal** a \mathcal{S} en el punto p es el espacio ortogonal al tangente:

$$N_p\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} (T_p\mathcal{S})^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in T_p\mathcal{S}\}$$

$N_p\mathcal{S}$ es un subespacio de \mathbb{R}^3 de dimensión 1, generado por cualquier vector no nulo ortogonal a φ_u, φ_v . Un **vector normal** a \mathcal{S} en p es cualquier elemento de $N_p\mathcal{S}$.

Para calcular un vector normal podemos aprovechar la existencia del **producto vectorial** en \mathbb{R}^3 , cuya definición y propiedades procedemos a repasar.

2.10.2 El producto vectorial de vectores tridimensionales

Definición 2.10.5: Definición del producto vectorial en \mathbb{R}^3

El producto vectorial de dos vectores tridimensionales está definido por

$$\begin{cases} \vec{v} = (x, y, z) \\ \vec{w} = (X, Y, Z) \end{cases} \quad \vec{v} \times \vec{w} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} \right) = (yZ - Yz, zX - ZX, xY - XY).$$

Definición 2.10.6: La regla cíclica

Observamos que en la definición del producto vectorial:

- la coordenada x del producto $v \times w$ se obtiene haciendo el determinante con y, z ,
- la coordenada y del producto $v \times w$ se obtiene haciendo el determinante con z, x ,
- la coordenada z del producto $v \times w$ se obtiene haciendo el determinante con x, y .

Esto se puede recordar escribiendo las variables x, y, z en un círculo **en orden antihorario** (figura 2.12). La coordenada deseada se obtiene haciendo el determinante de las dos **siguientes**, en el orden antihorario. Llamaremos a esto la **regla cíclica**.

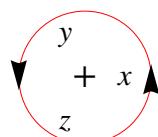


Figura 2.12 – El orden cíclico positivo de x, y, z .

Nota 2.10.2: Cambio de orden en un determinante

Dado que los determinantes cambian de signo al cambiar el orden, es importante distinguir, por ejemplo, entre el orden z, x y el orden x, z .

El producto vectorial también se puede calcular con la siguiente técnica, expresada en un «determinante simbólico,» que nos da las coordenadas en términos de una base ortonormal $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ de \mathbb{R}^3 .

Definición 2.10.7: Determinante simbólico para el producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores en \mathbb{R}^3 se puede calcular como un determinante

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

desarrollando **simbólicamente** según la primera fila, mezclando números y vectores.

El producto vectorial tiene las siguientes propiedades:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \quad \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} \quad (\text{bilinealidad})$$

$$(\lambda \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times (\lambda \mathbf{w}) = \lambda(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Es decir, el producto \times es lineal en \mathbf{v} y \mathbf{w} por separado. En particular, $0 \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times 0 = 0$ donde aquí 0 representa el vector nulo.

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \quad (\text{ley asociativa})$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{w} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{w} \quad (\text{antisimetría})$$

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (\text{ortogonalidad})$$

o sea, $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es perpendicular a \mathbf{v} y a \mathbf{w} . Aquí usamos la notación alternativa

$$\mathbf{v} = (x, y, z), \quad \mathbf{w} = (X, Y, Z), \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = xX + yY + zZ$$

para el **producto interior euclídeo**, también llamado «**producto punto**» y en Álgebra y Geometría la **métrica euclídea**.

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2 \quad (\text{identidad de Lagrange})$$

Como $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \theta$ donde θ es el ángulo entre los vectores v, w , la última ecuación dice que $\|v \times w\| = \|v\| \|w\| |\sin \theta|$, que es el **área del paralelogramo generado por v, w** .

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} = -\vec{j} \times \vec{i}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} = -\vec{k} \times \vec{j}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} = -\vec{i} \times \vec{k} \quad (\text{generadores})$$

Esto se puede recordar escribiendo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ en un círculo en orden *antihorario* que se considera «positivo». Al ir en sentido contrario, horario o «negativo», aparecen los signos negativos.

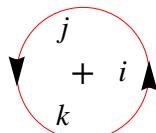


Figura 2.13 – La regla para productos vectoriales de una base ortonormal $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ de \mathbb{R}^3 .

2.10.3 El vector normal de una superficie parametrizada

Definición 2.10.8: El vector normal asociado a una parametrización de una superficie en \mathbb{R}^3

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada y $\varphi : S^* \rightarrow S$ una parametrización. El **vector normal asociado á φ** es

$$\vec{n}_\varphi(u, v) = \varphi_u \times \varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)$$

donde las componentes son los **determinantes Jacobianos** correspondientes

$$\vec{n}_{\varphi,x} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \vec{n}_{\varphi,y} = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\vec{n}_{\varphi,z} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

y el orden de las variables se determina con la regla cíclica.

La propiedad de ortogonalidad del producto vectorial implica que $\vec{n}_\varphi(u, v)$ es efectivamente un vector normal á la superficie S en el punto $p = \varphi(u, v)$, ya que es ortogonal a los vectores φ_u, φ_v que generan $T_p S$.

En general, se emplea esta notación para abreviar matrices o determinantes cualesquiera de derivadas parciales de un número de variables dependientes, escritas en las filas, respecto a un número igual de variables de las que dependen, escritas en las columnas.

Definición 2.10.9: La notación diferencial para el vector normal

También se usa la notación diferencial

$$dy \wedge dz = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv \quad dz \wedge dx = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du dv \quad dx \wedge dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv$$

cuyo significado (la teoría de *formas diferenciales*) no entraremos a valorar de momento.

El vector normal representa el concepto de «atravesar» la superficie \mathcal{S} y lo usaremos más adelante en los problemas de flujo a través de una superficie (apartado 3.4).

Nota 2.10.3: Base asociada a una parametrización de una superficie en \mathbb{R}^3

El espacio tangente (de dimensión 2) y el normal (de dimensión 1) juntos generan el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 . Es decir,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \quad \vec{n}_\varphi$$

es una base de \mathbb{R}^3 . Aunque \vec{n}_φ es perpendicular a φ_u y φ_v , en general φ_u y φ_v no son perpendiculares entre sí, y por tanto en general ésta no es una base ortogonal.

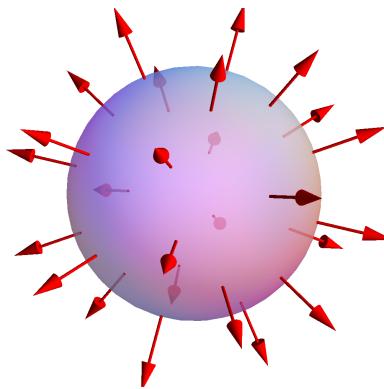
Definición 2.10.10: El vector normal unitario y la orientación en una superficie parametrizada

El vector normal unitario

$$\vec{n} = \frac{\vec{n}_\varphi}{\|\vec{n}_\varphi\|}$$

es independiente de la parametrización, salvo un signo, que sirve para dar un sentido en el cual atravesar la superficie; esto es conocido como una orientación.

Para superficies cerradas como una esfera, la orientación «positiva» por convención es aquella para el cual el normal apunta hacia fuera (normal exterior). Lo estudiamos más adelante (definición 3.4.7).

**Figura 2.14** – Vector normal exterior a una esfera.

2.11 Integrales de área en una superficie en \mathbb{R}^3

Enunciado 2.11.1: El jacobiano de una parametrización de una superficie en \mathbb{R}^3

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\varphi : S^* \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. El jacobiano de φ es la longitud del vector normal asociado:

$$J_\varphi = \|\vec{n}_\varphi\| = \|\varphi_u \times \varphi_v\|$$

Decimos que $\|\vec{n}_\varphi\| du dv$ es un **elemento de área** en la superficie.

■ **Demostración:** A partir de la fórmula general para el jacobiano ([definición 1.11.2](#)) se ve que en este caso tenemos el determinante 2×2

$$\det \begin{pmatrix} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \\ \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \end{pmatrix} = \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 = \|\varphi_u \times \varphi_v\|^2.$$

Tomando la raíz cuadrada queda demostrado el resultado. ■

Hay también una manera geométrica clásica de entender la fórmula. Por la propiedad que expresa la norma de un producto vectorial, sabemos que la magnitud del vector normal $\vec{n}_\varphi = \varphi_u \times \varphi_v$ es el área del paralelogramo generado por φ_u, φ_v . Este paralelogramo tangente aproxima infinitesimalmente a la superficie. Por tanto, la expresión $\|\vec{n}_\varphi\| du dv$ representa un **elemento infinitesimal de área** en S .

Enunciado 2.11.2: La integral de área sobre una superficie parametrizada en \mathbb{R}^3

La integral de una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre la superficie S parametrizada por $\varphi : S^* \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es

$$\iint_S f da = \iint_{S^*} (f \circ \varphi) \|\vec{n}_\varphi\| du dv = \iint_{S^*} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv$$

2.11 Integrales de área en una superficie en \mathbb{R}^3

- **Demostración:** Esto es consecuencia del Teorema de Cambio de Variable Inter-dimensional ([enunciado 2.3.2](#)) y la fórmula para el jacobiano $J_\varphi = \|\vec{n}_\varphi\|$. ■

Enunciado 2.11.3: El área de una superficie parametrizada en \mathbb{R}^3

El área de la superficie S parametrizada por $\varphi : S^* \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es

$$a(S) = \iint_{S^*} \|\vec{n}_\varphi\| = \iint_{S^*} \|(\varphi_u \times \varphi_v)\| du dv$$

- **Demostración:** Es consecuencia de la fórmula anterior y $a(S) = \iint_S 1 da$. ■

2.12 Coordenadas particulares de área

2.12.1 Coordenadas esféricas de área

Si la superficie S es un subconjunto de la esfera de radio R centrada en un punto $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Una parametrización consiste en restringir las coordenadas esféricas con $\rho = R$:

$$\varepsilon(\theta, \varphi) = (a, b, c) + R(\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi). \quad [2.12.1]$$

El **radio** en un punto $p \in S$ es el vector de posición **relativo al centro**:

$$\vec{r} = R(\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi) \quad [2.12.2]$$

Los vectores tangentes asociados a las coordenadas esféricas son

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} = R(-\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta \sin \varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} = R(\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, -\sin \varphi)$$

Geométricamente, la derivada $\partial \varepsilon / \partial \theta$ es el vector tangente que **circula por los paralelos** (obtenidos al mantener fijo φ) y $\partial \varepsilon / \partial \varphi$ es el vector tangente a lo largo de los **meridianos** (obtenidos al mantener θ fijo). Sus longitudes son

$$\left\| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \right\| = R \sin \varphi, \quad \left\| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \right\| = R,$$

es decir, los vectores tangentes a lo largo de los meridianos tienen longitud constante igual al radio de la esfera, mientras que los vectores tangentes a lo largo de los paralelos tienen longitud que varía desde 0 en los polos hasta el máximo R en el ecuador ([figura 2.15](#)).

En una esfera, el radio es ortogonal a la superficie, por tanto el vector normal unitario **exterior** de la esfera es

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{R} \quad [2.12.3]$$

de modo que

$$\vec{n}(p) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi), \quad p = \varepsilon(\theta, \varphi) \in S.$$

Lo comparamos con el vector normal \vec{n}_ε asociado a la parametrización ε .

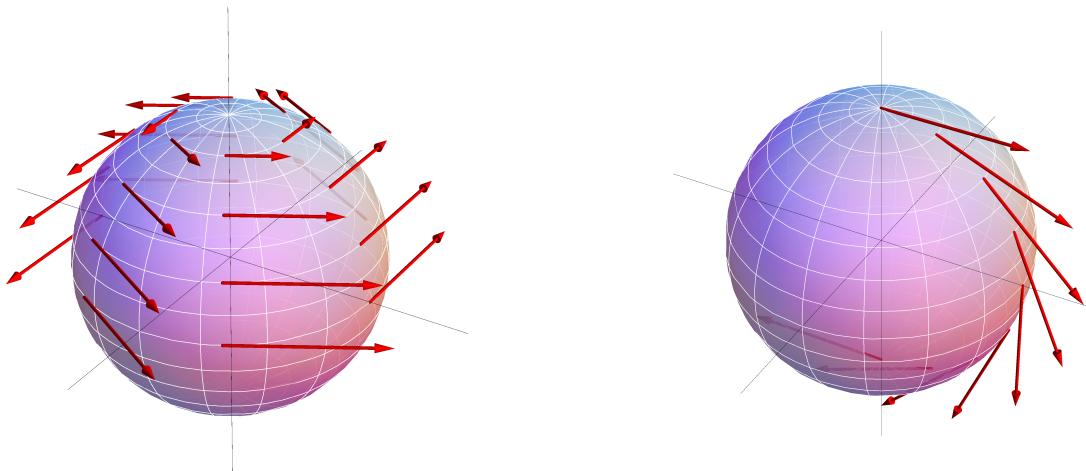


Figura 2.15 – Los vectores tangentes de las coordenadas esféricas a lo largo de los paralelos y meridianos de la esfera.

Enunciado 2.12.1: El vector normal de las coordenadas esféricas de superficie

La parametrización por coordenadas esféricas

$$\varepsilon(\theta, \varphi) = (a, b, c) + R(\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$$

tiene vector normal asociado

$$\vec{n}_\varepsilon = -(R^2 \sin \varphi) \frac{\vec{r}}{R} = -(R^2 \sin \varphi) \vec{n}$$

donde \vec{r} es el radio vector y \vec{n} el normal unitario exterior. Apunta hacia dentro, directamente al centro.

- Demostración: Calculamos el vector normal asociado como producto vectorial de los vectores tangentes,

$$\begin{aligned}\vec{n}_\varepsilon &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \times \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \\ &= R^2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & 0 \\ \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \end{vmatrix} \\ &= R^2(-\cos \theta \sin^2 \varphi, -\sin \theta \sin^2 \varphi, -\sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi - \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi) \\ &= R^2(-\cos \theta \sin^2 \varphi, -\sin \theta \sin^2 \varphi, -\sin \varphi \cos \varphi) \\ &= -R^2 \sin \varphi (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi) \\ &= -(R^2 \sin \varphi) \vec{n}\end{aligned}$$

Para $\varphi \in [0, \pi]$ se tiene $\sin \varphi \geq 0$, por tanto \vec{n}_ε apunta en dirección opuesta de \vec{n} ,

es decir, hacia *dentro* de la esfera, de hecho, al centro. ■

Nota 2.12.1: La orientación de las coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas ε inducen la **orientación negativa** sobre la esfera, es decir, con el normal unitario **interior**.

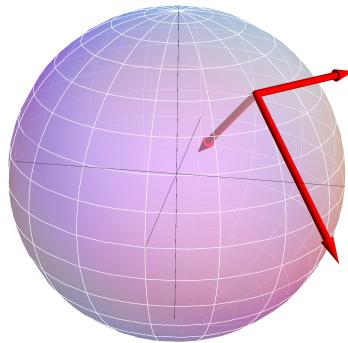


Figura 2.16 – Los dos vectores tangentes $\partial\varepsilon/\partial\theta$ y $\partial\varepsilon/\partial\varphi$ para las coordenadas esféricas $\varepsilon(\theta, \varphi)$, junto con el vector normal igual a su producto vectorial, que apunta al centro.

La dirección del vector normal \vec{n}_ε asociado a la parametrización no afecta al elemento de área, determinado por el jacobiano $J_\varepsilon = \|\vec{n}_\varepsilon\|$:

Enunciado 2.12.2: El elemento de área de las coordenadas esféricas de superficie

El jacobiano de la parametrización en coordenadas esféricas de área es $R^2 \sin \varphi$ y por tanto el elemento de área correspondiente es

$$da = R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta$$

Con la convención $\varphi \in [0, \pi]$ se puede quitar el valor absoluto ya que $\sin \varphi \geq 0$.

La integral de área de una función sobre una parte S de la esfera es por tanto

$$\iint_S f \, da = \iint_{S^*} f(a + R \cos \theta \sin \varphi, b + R \sin \theta \sin \varphi, c + R \cos \varphi) R^2 \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi$$

donde $S^* \subseteq \mathbb{R}^2$ es la región plana en las coordenadas θ, φ que describe S en las coordenadas ε , es decir, con $\varepsilon(S^*) = S$. En particular, si S es la esfera completa, la

2.12 Coordenadas particulares de área

integral es

$$\iint_S f \, da = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(a + R \cos \theta \sin \varphi, b + R \sin \theta \sin \varphi, c + R \cos \varphi) R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta$$

► Ejemplo 2.12.1: el área de una esfera

Poniendo $f = 1$ obtenemos la bien conocida fórmula

$$a(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi = R^2 \cdot 2\pi \cdot 2 = 4\pi R^2.$$



► Ejemplo 2.12.2: el centro de gravedad de un hemisferio

Podemos suponer que es el hemisferio norte H de la esfera $\rho = R$, con lo cual H está descrito por $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Su área es la mitad que el área de la esfera completa, es decir, $2\pi R^2$. Por simetría, el centro de gravedad se halla sobre el eje z . Se tiene

$$\begin{aligned} \iint_H z \, da &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (R \cos \varphi) R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = R^3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \\ &= R^3 \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} = R^3 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi R^3 \end{aligned}$$

por tanto el valor medio de z sobre H es

$$z_H = \frac{\pi R^3}{2\pi R^2} = \frac{R}{2},$$

es decir, el centro de gravedad de un hemisferio se halla sobre su eje de simetría a distancia igual a la mitad del radio.



► Ejemplo 2.12.3: el momento de inercia de una esfera respecto a un eje central

Consideramos una esfera S de radio R . Si aprovechamos la simetría de la esfera, no necesitamos parametrizar: como la esfera es simétrica respecto a cualquier permutación de las coordenadas, se tiene

$$\iint_S x^2 \, da = \iint_S y^2 \, da = \iint_S z^2 \, da = \frac{1}{3} \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \, da = \frac{1}{3} \iint_S R^2 \, da = \frac{1}{3} m R^2$$

donde $m = 4\pi R^3$ es la masa de S (suponiendo densidad 1) y entonces, por ejemplo, el momento respecto al eje z , que es igual al momento respecto a cualquier otro eje central, es

$$I = \iint_S (x^2 + y^2) \, da = \iint_S x^2 \, da + \iint_S y^2 \, da = \frac{2}{3} m R^2.$$



► Ejemplo 2.12.4: la superficie de un elipsoide

El elipsoide E de centro el origen y semiejes paralelos a los ejes de coordenadas con longitudes a, b, c tiene ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ y por tanto se puede parametrizar en coordenadas esféricas modificadas por estas longitudes:

$$\sigma(\theta, \varphi) = (a \cos \theta \sin \varphi, b \sin \theta \sin \varphi, c \cos \varphi), \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi].$$

Esto cambia las derivadas parciales:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = (-a \sin \theta \sin \varphi, b \cos \theta \cos \varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = (a \cos \theta \cos \varphi, b \sin \theta \cos \varphi, -c \sin \varphi)$$

y también el vector normal

$$\begin{aligned} \vec{n}_\sigma &= \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \times \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = (-bc \cos \theta \sin^2 \varphi, -ac \sin \theta \sin^2 \varphi, -ab \sin \varphi \cos \varphi) \\ &= -\begin{pmatrix} bc & ac & ab \end{pmatrix} \varepsilon(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

El jacobiano de área ya no es tan sencillo:

$$J_\sigma = (b^2 c^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + a^2 c^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + a^2 b^2 \cos^2 \varphi)^{1/2} \sin \varphi.$$

El **sólido** encerrado por el elipsoide E está parametrizado añadiendo la coordenada ρ :

$$x = a\rho \cos \theta \sin \varphi, \quad y = b\rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = c\rho \cos \varphi, \quad (\rho, \theta, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi].$$

El jacobiano de volumen de este cambio de variable es abc pues este sólido es la imagen de la bola unidad bajo la transformación cuya matriz es la diagonal con a, b, c .



2.12.2 Coordenadas de área para gráficas

Supongamos que la superficie S es la gráfica de $z = f(x, y)$ para $(x, y) \in G$, una región plana. Una parametrización sencilla de S es

$$\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

Entonces

$$\sigma_x = (1, 0, f_x)$$

2.12 Coordenadas particulares de área

$$\begin{aligned}\sigma_y &= (0, 1, f_y) \\ \vec{n}_\sigma &= \sigma_x \times \sigma_y = (-f_x, -f_y, 1)\end{aligned}$$

por tanto el elemento de área para una gráfica es

$$da = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} dx dy \quad [2.12.4]$$

donde ∇f es el **gradiente** (definición 3.2.3).

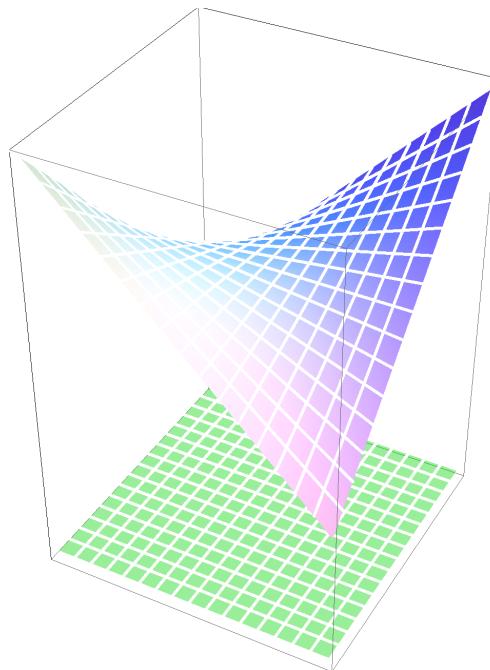


Figura 2.17 – Superficie dada por la gráfica de $z = 2 + uv$ sobre $G = [-1, 1]^2$.

► Ejemplo 2.12.5: área de un hemisferio, como gráfica

Consideremos el hemisferio norte H de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Es la gráfica de $z = f(x, y) = (R^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$ sobre el disco unidad $D : x^2 + y^2 \leq R^2$. Se tiene

$$f_x = \frac{-2x}{2f} = -\frac{x}{f}, \quad f_y = \frac{-2y}{2f} = -\frac{y}{f},$$

y por tanto

$$1 + f_x^2 + f_y^2 = 1 + \frac{x^2 + y^2}{f^2} = \frac{f^2 + x^2 + y^2}{f^2} = \frac{R^2}{f^2}$$

con lo cual el jacobiano de área es

$$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \frac{R}{f} = \frac{R}{(R^2 - x^2 - y^2)^{1/2}}.$$

En estas coordenadas el área del hemisferio está dada por la integral

$$a(H) = \iint_D \frac{R}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

Para calcularla, se puede cambiar a coordenadas polares:

$$a(H) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{R r}{\sqrt{1-r^2}} dr d\theta = 2\pi R \int_0^R \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = 2\pi R \left[-\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^R = 2\pi R^2.$$



2.12.3 Superficies implícitas

Si la superficie S es la solución de la **ecuación implícita**

$$F(x, y, z) = 0,$$

la dividimos en partes donde se pueda despejar (al menos teóricamente) una variable explícitamente en función de las otras.

Por ejemplo, si $F_z \neq 0$, se puede despejar $z = f(x, y)$ por el Teorema de la Función Implícita, y las derivadas están relacionadas por

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z} \quad f_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

Entonces, por el caso correspondiente a una gráfica, se tiene

$$da^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2 = 1 + \frac{F_x^2}{F_z^2} + \frac{F_y^2}{F_z^2} = \frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{F_z^2}$$

luego

$$da = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} dx dy = \frac{\|\nabla F\|}{|F_z|} dx dy \quad [2.12.5]$$

Nota 2.12.2: Fórmulas implícitas

La fórmula implícita tiene la desventaja de que, si para calcular la integral, hace falta poder despejar una variable, entonces de hecho ya se tiene una fórmula explícita.

► Ejemplo 2.12.6: el área de un hemisferio de radio R , como superficie implícita

Consideremos el hemisferio norte H de la esfera de radio R con centro en el origen. La ecuación implícita de la esfera es $F = 0$ donde $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$. Como $F_x = 2x$, $F_y = 2y$, $F_z = 2z$, tenemos, para el hemisferio norte,

2.12 Coordenadas particulares de área

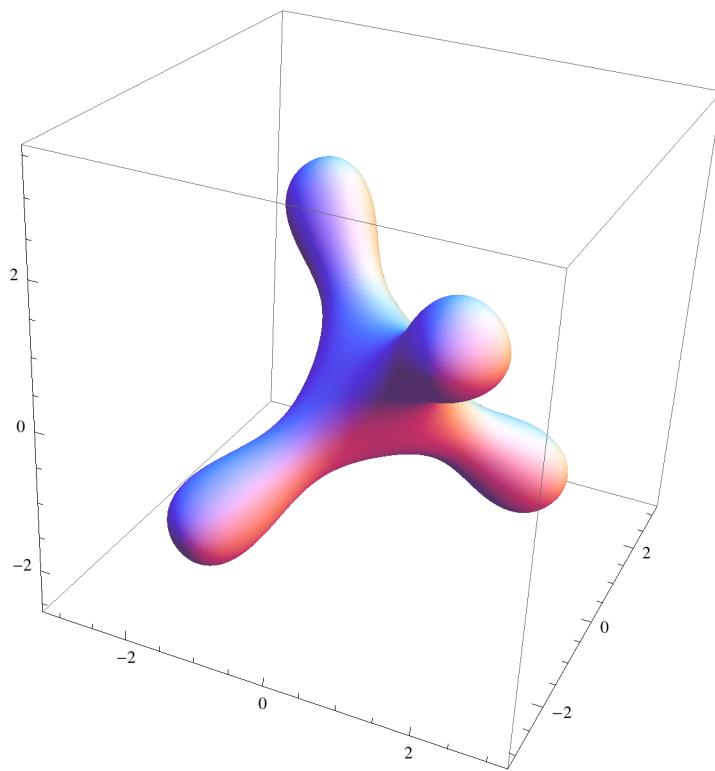


Figura 2.18 – La superficie cuya ecuación implícita es $x^2 + y^2 + z^2 + xy \sin z + xz \sin y + yz \sin x = 1$.

donde $z > 0$,

$$da = \frac{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{2z} dz = \frac{R}{z} = \frac{R}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

al poder despejar fácilmente $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ para $z > 0$. El recinto de integración es la proyección del hemisferio sobre el plano $z = 0$, que es el disco $D : x^2 + y^2 < R^2$. Por tanto el área del hemisferio es

$$a = \iint_D \frac{R}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy$$

Parametrizando en coordenadas polares queda

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{R r}{\sqrt{1-r^2}} dr d\theta = 2\pi R \int_0^R \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = 2\pi R \left[-\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^R = 2\pi R^2$$

que efectivamente es el área del hemisferio, la mitad del área de la esfera. ◀

2.12.4 Coordenadas cilíndricas de área

Si la superficie viene dada por una ecuación en coordenadas cilíndricas de la forma

$$z = f(r, \theta),$$

entonces la parametrización son las coordenadas cilíndricas **restringidas**. Abreviando por $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$,

$$\sigma(r, \theta) = (rc, rs, f(r, \theta)).$$

Escribiendo las derivadas parciales como subíndices,

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (c, s, z_r) \\ \sigma_\theta &= (-rs, rc, z_\theta)\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}\vec{n}_\sigma &= \sigma_r \times \sigma_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ c & s & z_r \\ -rs & rc & z_\theta \end{vmatrix} = (sz_\theta - rcz_r, -rsz_r - cz_\theta, rc^2 + rs^2) \\ &= (sz_\theta - rcz_r, -(rsz_r + cz_\theta), r)\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}da^2 &= (sz_\theta - rcz_r)^2 + (rsz_r + cz_\theta)^2 + r^2 \\ &= s^2 \cancel{z_\theta^2} - \cancel{2rscz_rz_\theta} + r^2 c^2 \cancel{z_r^2} + r^2 s^2 \cancel{z_r^2} + \cancel{2rscz_rz_\theta} + c^2 \cancel{z_\theta^2} + r^2 \\ &= r^2 + r^2 z_r^2 + z_\theta^2\end{aligned}$$

por tanto

$$da = \sqrt{r^2(1 + z_r^2) + z_\theta^2} dr d\theta \quad [2.12.6]$$

En particular, si f es *radial* (sólo depende de r), entonces $z_\theta = 0$ y en este caso se tiene

$$da = |r| \sqrt{1 + z_r^2} dr d\theta \quad z = f(r) \text{ radial} \quad [2.12.7]$$

Esta última fórmula corresponde al caso particular de una superficie de revolución, que procedemos a estudiar en el siguiente apartado.

2.12.5 Superficies de revolución

Una curva plana \mathcal{C} en la parte $r > 0$ del plano rz describe al girar alrededor del eje z una superficie S . Dada una parametrización general de la curva

$$\gamma(t) = (r(t), 0, z(t)) \quad t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

entonces una parametrización de S está dada por las coordenadas cilíndricas.

Enunciado 2.12.3: Parametrización de una superficie de revolución

Sea \mathcal{C} una curva en las coordenadas r, z , parametrizada por la variable t . La superficie de revolución \mathcal{S} que genera \mathcal{C} al girar alrededor del eje z , con coordenada angular θ , está parametrizada por

$$\sigma(t, \theta) = (r(t) \cos \theta, r(t) \sin \theta, z(t))$$

Esta parametrización refleja que el punto $(r, 0, z)$ que gira se mantiene a altura constante z y gira con radio $r > 0$ alrededor del eje, y r, z son funciones del parámetro t que describe la curva.



Figura 2.19 – Una curva y la superficie que genera.

Por tanto, abreviando $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$ y denotando las derivadas parciales con subíndices, y la derivada respecto a c con el punto de Newton,

$$\begin{aligned}\sigma_t &= (\dot{r}c, \dot{r}s, \dot{z}) \\ \sigma_\theta &= (-rs, rc, 0).\end{aligned}$$

Geométricamente, la derivada $\partial\sigma/\partial t$ es el vector tangente a lo largo de los **meridianos** de la superficie de revolución, obtenidos al mantener fijo θ , mientras que $\partial\sigma/\partial\theta$ es el vector tangente que **circula por los paralelos**, obtenidos al mantener fijo t ([figura 2.20](#)).

El producto vectorial de los dos vectores tangentes nos da el vector normal asociado

$$\begin{aligned}n_\sigma &= \sigma_t \times \sigma_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{r}c & \dot{r}s & \dot{z} \\ -rs & rc & 0 \end{vmatrix} = (-r\dot{z}c, -r\dot{z}s, r\dot{r}(c^2 + s^2)) \\ &= (-r\dot{z}c, -r\dot{z}s, r\dot{r}) \\ &= r(-\dot{z}c, -\dot{z}s, \dot{r})\end{aligned}$$

Entonces

$$\|\vec{n}_\sigma\|^2 = r^2(\dot{z}^2(c^2 + s^2) + \dot{r}^2) = r^2(\dot{r}^2 + \dot{z}^2)$$



Figura 2.20 – Los vectores tangentes a una superficie de revolución a lo largo de los paralelos y meridianos.

luego el elemento de área es

$$da = r \sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2} dt d\theta$$

Análogamente a lo que ocurre con elemento de volumen para un sólido de revolución, $r dr dz d\theta$, esta fórmula indica que el elemento de área en una *superficie* de revolución es el **producto** de la medida $r d\ell$ sobre la curva \mathcal{C} que gira, donde $d\ell$ es elemento de longitud sobre \mathcal{C} , y la medida angular $d\theta$ sobre el círculo. Dicho de otra manera, el parámetro t sobre la curva y el ángulo θ son independientes.

Enunciado 2.12.4: El elemento de área en una superficie de revolución

Sea \mathcal{C} una curva en las coordenadas r, z , parametrizada por la variable t . El elemento de área en la superficie de revolución que genera \mathcal{C} al girar alrededor del eje z , con coordenada angular θ , es

$$da = r d\ell d\theta = r(t) d\ell(t) dt d\theta$$

donde $d\ell$ es el **elemento de longitud** sobre \mathcal{C} (enunciado 2.8.1).

Del resultado anterior se deduce inmediatamente la expresión general para una integral de área sobre una superficie de revolución.

Enunciado 2.12.5: Integral de área general sobre una superficie de revolución

Sea \mathcal{C} una curva en las coordenadas r, z , parametrizada por la variable t y que genera la superficie de revolución \mathcal{S} al girar alrededor del eje z , con coordenada

2.12 Coordenadas particulares de área

angular θ . La integral de una función f sobre S en estas coordenadas es

$$\begin{aligned}\iint_S f \, da &= \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{C}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \, r \, d\ell \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_I f(r(t) \cos \theta, r(t) \sin \theta, z(t)) \, r(t) \sqrt{r'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt \, d\theta\end{aligned}$$

donde $d\ell$ es el elemento de longitud sobre \mathcal{C} .

Si la función que se integra, cambiada de variable a coordenadas cilíndricas, no depende del ángulo θ , será una integral de variables separadas y habrá un factor 2π correspondiente a la integral $\int_0^{2\pi} d\theta$, pero si depende de θ , entonces habrá que calcular la integral directamente con el Teorema de Fubini.

En particular, se obtiene una fórmula general para el área de S .

Enunciado 2.12.6: Área de una superficie de revolución

El área de la superficie de revolución S generada por una curva \mathcal{C} en las coordenadas r, z , parametrizadas por la variable t , al girar alrededor del eje z , con coordenada angular θ , es

$$a(S) = \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{C}} r \, d\ell \, d\theta = 2\pi \int_I r(t) \sqrt{\dot{r}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \, dt$$

donde se integra sobre el intervalo I que recorre el parámetro t sobre la curva.

A su vez, esta fórmula lleva a otro teorema clásico.

Enunciado 2.12.7: El teorema de Pappo para superficies de revolución

El área de la superficie de revolución S generada por una curva \mathcal{C} en las coordenadas r, z , parametrizadas por la variable t , al girar alrededor del eje z es

$$a(S) = \int_{\mathcal{C}} 2\pi r \, d\ell = 2\pi \int_{\mathcal{C}} r \, d\ell = 2\pi r_{\mathcal{C}} \ell(\mathcal{C})$$

donde $r_{\mathcal{C}}$ es el valor medio del radio de giro r sobre \mathcal{C} , es decir, la coordenada r del centro de gravedad $c_{\mathcal{C}}$ de \mathcal{C} .

- **Demostración:** Simplemente se observa que

$$2\pi \int_{\mathcal{C}} r \, d\ell = 2\pi \cdot \frac{1}{\ell(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} r \, d\ell \cdot \ell(\mathcal{C}) = 2\pi r_{\mathcal{C}} \ell(\mathcal{C})$$

dada la definición del valor medio ([definición 2.5.1](#)). ■

Esta es la versión para superficies de revolución del Teorema de Pappo para sólidos de revolución ([enunciado 1.12.9](#)). En palabras, dice que el área de la superficie de revolución generada por \mathcal{C} es igual a la longitud de \mathcal{C} multiplicada por el **recorrido del centro de gravedad** de \mathcal{C} , ya que éste es $c_{\mathcal{C}} = (r_{\mathcal{C}}, z_{\mathcal{C}})$, y al girar alrededor del eje z recorre una circunferencia de radio $r_{\mathcal{C}}$, que mide $2\pi r_{\mathcal{C}}$.

Pregunta 2.12.1: Giro por menos de una vuelta completa

Si giramos la curva \mathcal{C} por una parte arbitraria α de una vuelta completa (caso de $\alpha = 2\pi$), ¿cómo cambian los resultados anteriores?

► Ejemplo 2.12.7: el caso particular cuando la curva es una gráfica

- Si la curva es la gráfica en el plano rz de $z = z(r)$, obtenemos

$$da = 2\pi r \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2} dr d\theta \quad [2.12.8]$$

(usando $t = r$ como parámetro)

- Si la curva es la gráfica en el plano rz de $r = r(z) > 0$, obtenemos

$$da = 2\pi r(z) \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} dz d\theta \quad [2.12.9]$$

(usando $t = z$ como parámetro)



Nota 2.12.3: Coordenadas en superficies de revolución

Permutando coordenadas y cambiándolas de nombre, uno siempre puede suponer la situación dada de una curva en r, z con $r > 0$. Por ejemplo, si se gira la gráfica de $y = f(x)$, contenida en el plano xy , alrededor del eje x , el radio de giro es y ; en este caso, para obtener la situación estudiada, ponemos $x = z, y = r$. Con las técnicas del Álgebra Lineal se pueden expresar rotaciones alrededor de un eje arbitrario, no necesariamente de coordenadas.

► **Ejemplo 2.12.8: el centro de gravedad de una superficie de revolución**

Por simetría, el centro de gravedad de \mathcal{S} en la posición descrita en esta sección, se halla sobre el eje z , y para calcularlo sólo necesitamos su altura, dada por

$$\begin{aligned} z_{\mathcal{S}} &= \frac{1}{a(\mathcal{S})} \iint_{\mathcal{S}} z \, da = \frac{1}{a(\mathcal{S})} \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{C}} zr \, dl \, d\theta = \frac{2\pi}{a(\mathcal{S})} \int_{\mathcal{C}} zr \, dl \\ &= \frac{2\pi \int_{\mathcal{C}} zr \, dl}{2\pi \int_{\mathcal{C}} r \, dl} = \frac{\int_{\mathcal{C}} zr \, dl}{\int_{\mathcal{C}} r \, dl}, \end{aligned}$$

que es la fórmula análoga a la de los sólidos de revolución ([ecuación \(1.12.12\)](#)). La destacamos:

$$z_{\mathcal{S}} = \frac{\int_{\mathcal{C}} zr \, dl}{\int_{\mathcal{C}} r \, dl}$$

[2.12.10]



► **Ejemplo 2.12.9: área de una esfera de radio R , como superficie de revolución**

Se obtiene al girar la semicircunferencia ([figura 2.21](#))

$$(r, z) = (R \cos t, R \sin t) \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Entonces

$$dl = \sqrt{(-Rs)^2 + (Rc)^2} dt = R dt$$

sobre la curva, y

$$da = r R dt \, d\theta = R^2 \cos t \, dt \, d\theta$$

sobre la esfera. Por tanto el área de la esfera es

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos t \, dt \, d\theta = 2\pi R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \, dt = 2\pi R^2 \cdot 2 = 4\pi R^2.$$



► **Ejemplo 2.12.10: centro de gravedad de un hemisferio, como superficie de revolución**

Suponemos que se trata del hemisferio norte de la esfera de radio R con centro en el origen, que se obtiene al girar el cuarto de circunferencia \mathcal{C} : $r^2 + z^2 = R^2$ contenido en el primer cuadrante del plano rz , alrededor del eje z ([figura 2.22](#)).

Parametrizamos \mathcal{C} en coordenadas polares, usando t como ángulo polar para

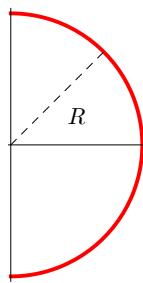


Figura 2.21 – La esfera es la superficie de revolución obtenida al girar una semicircunferencia alrededor de su diámetro.

evitar la confusión con la notación θ para el ángulo de giro alrededor del eje z :

$$r = R \cos t, \quad z = R \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Como hemos visto también en el ejemplo anterior, el elemento de longitud sobre C en estas coordenadas es

$$d\ell^2 = dr^2 + dz^2 = R^2(\sin^2 t + \cos^2 t) dt^2 = R^2 dt^2, \quad \therefore \quad d\ell = R dt.$$

Obtenemos entonces, sustituyendo en la fórmula general para el centro de gravedad,

$$\int_C r d\ell = \int_0^{\pi/2} (R \cos t) R dt = R^2 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos t dt = R^2$$

(esta integral multiplicada por 2π da el área del hemisferio, $2\pi R^2$) y

$$\begin{aligned} \int_C rz d\ell &= \int_C xy d\ell = \int_0^{\pi/2} (R \cos t)(R \sin t) R dt = R^3 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt \\ &= \frac{R^3}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\pi/2} = \frac{R^3}{2} \end{aligned}$$

por tanto el centro de gravedad está en $(0, 0, z_S)$, siendo

$$z_S = \frac{R^3}{2R^2} = \frac{R}{2}.$$

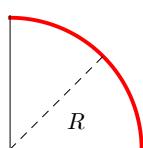


Figura 2.22 – Un hemisferio se obtiene girando un cuarto de circunferencia.

► **Ejemplo 2.12.11: área de una superficie tórica**

Se obtiene al girar una circunferencia \mathcal{C} de radio a en el plano rz cuyo centro está a distancia $b > a$ del eje z . Equivalentemente, es la superficie obtenida como composición de dos movimientos circulares, un punto en órbita plana a distancia fija de otro punto que a su vez gira en órbita plana alrededor de un eje (figura 2.23).

Como el centro de gravedad de \mathcal{C} es su centro geométrico, por simetría $r_{\mathcal{C}} = b$ y como la longitud de la circunferencia \mathcal{C} es $2\pi a$, el área del toro es

$$(2\pi a)(2\pi b) = 4\pi^2 ab$$

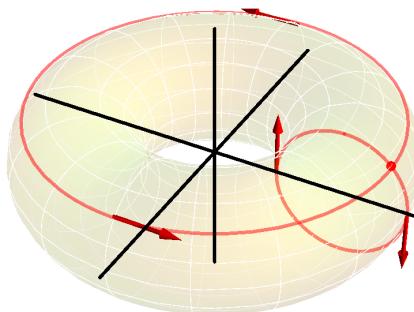


Figura 2.23 – Una superficie tórica se obtiene girando una circunferencia.

► **Ejemplo 2.12.12: superficie cilíndrica, como superficie de revolución**

Supongamos que el cilindro tiene radio R y altura H . Se obtiene al girar un segmento \mathcal{C} , a distancia $r = R$ del eje z , con altura H (figura 2.24). Una parametrización en coordenadas cilíndricas es

$$\sigma(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$$

con vectores tangentes

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = (0, 0, 1).$$

El vector $\partial \sigma / \partial \theta$ circula alrededor de los paralelos, es un vector horizontal (paralelo al plano xy) y $\partial \sigma / \partial z$ es el vector constante $\vec{k} = (0, 0, 1)$ que sube a lo largo de los meridianos (figura 2.25).

El vector normal asociado es

$$\vec{n}_\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \times \frac{\partial \sigma}{\partial z} = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$$

y también es horizontal, apuntando radialmente hacia fuera desde el eje z . El jacobiano de área es R y el elemento de área $da = R d\theta dz$. El área del cilindro es

$$a = \int_0^{2\pi} \int_0^H R dz d\theta = 2\pi RH.$$

Si aplicamos el Teorema de Pappo, observamos que por simetría $r_c = R$, y la longitud es $\ell(\mathcal{C}) = H$, por tanto el área del cilindro es $2\pi RH$.

Esto también se puede ver «desenrollando» el cilindro para obtener una hoja plana rectangular de base $2\pi R$ y altura H . Sin embargo, la parametrización que desenrolla **no** es la dada, pues ésta estira la longitud, ya que la matriz de Gram es

$$g = \begin{pmatrix} \langle \sigma_\theta, \sigma_\theta \rangle & \langle \sigma_\theta, \sigma_z \rangle \\ \langle \sigma_z, \sigma_\theta \rangle & \langle \sigma_z, \sigma_z \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La correcta es

$$\sigma(u, z) = \left(R \cos\left(\frac{u}{R}\right), R \sin\left(\frac{u}{R}\right), z \right), \quad (u, z) \in [0, 2\pi R] \times [0, H]$$

que tiene **tangentes unitarios ortogonales**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u} &= \left(-\sin\left(\frac{u}{R}\right), \cos\left(\frac{u}{R}\right), 0 \right) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Equivalentemente, la matriz de Gram es la identidad

$$g = \begin{pmatrix} \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle & \langle \sigma_u, \sigma_z \rangle \\ \langle \sigma_z, \sigma_u \rangle & \langle \sigma_z, \sigma_z \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

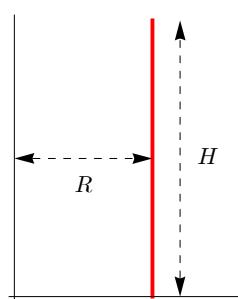


Figura 2.24 – Una superficie cilíndrica se obtiene girando un segmento paralelo al eje de revolución.

► Ejemplo 2.12.13: superficie cónica, como superficie de revolución

Suponemos un cono de radio R y altura H . Se obtiene al girar el segmento \mathcal{C} entre $(0, 0)$ y (R, H) ([figura 2.26](#)). Por simetría, el centro de gravedad del seg-

2.12 Coordenadas particulares de área



Figura 2.25 – Vectores tangentes a un cilindro correspondientes a la parametrización en coordenadas cilíndricas.

mento es su punto medio $\frac{1}{2}(R, H)$, o sea, el radio medio es $r_c = \frac{R}{2}$, y la longitud del segmento es $L = \sqrt{R^2 + H^2}$, luego el área del cono es

$$2\pi \cdot \frac{R}{2} \cdot \sqrt{R^2 + H^2} = \pi R \sqrt{R^2 + H^2} = \pi RL.$$

Esto también se puede ver «desenrollando» el cono para obtener un **sector circular** de altura L y base un arco de longitud $2\pi R$, la longitud de la base del cono. El área del sector es $\frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot L = \pi RL$.

El cono se puede parametrizar teniendo en cuenta la **relación de proporcionalidad**

$$\frac{r}{z} = \frac{R}{H}.$$

Se puede despejar r en función de z ó z en función de r .

Despejando z en función de r se obtiene la parametrización

$$\sigma(r, \theta) = \left(r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{H}{R} r \right) = r \left(\cos \theta, \sin \theta, \frac{H}{R} \right), \quad (r, \theta) \in [0, R] \times [0, 2\pi],$$

con vectores tangentes asociados

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = \left(\cos \theta, \sin \theta, \frac{H}{R} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0).$$

y vector normal

$$\vec{n}_\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial r} \times \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = \left(-\frac{H}{R} r \cos \theta, -\frac{H}{R} r \sin \theta, r \right) = r \left(-\frac{H}{R} \cos \theta, -\frac{H}{R} \sin \theta, 1 \right)$$

con jacobiano y elemento de área

$$J_\sigma = \|\vec{n}_\sigma\| = r \sqrt{\frac{H^2}{R^2} + 1} = r \sqrt{\frac{H^2 + R^2}{R^2}} = r \frac{L}{R}, \quad da = \frac{L}{R} r dr d\theta.$$

Despejando r en función de z se obtiene la parametrización

$$\sigma(\theta, z) = \left(\frac{R}{H} z \cos \theta, \frac{R}{H} z \sin \theta, z \right) = z \left(\frac{R}{H} \cos \theta, \frac{R}{H} \sin \theta, 1 \right)$$

con vectores tangentes asociados

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} &= z \left(-\frac{R}{H} \sin \theta, \frac{R}{H} \cos \theta, 0 \right) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= \left(\frac{R}{H} \cos \theta, \frac{R}{H} \sin \theta, 1 \right). \end{aligned}$$

y vector normal

$$\vec{n}_\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \times \frac{\partial \sigma}{\partial z} = z \left(\frac{R}{H} \cos \theta, \frac{R}{H} \sin \theta, -\frac{R^2}{H^2} \right) = \frac{R}{H} z \left(\cos \theta, \sin \theta, -\frac{R}{H} \right)$$

con jacobiano y elemento de área

$$J_\sigma = \|\vec{n}_\sigma\| = \frac{R}{H} z \sqrt{1 + \frac{R^2}{H^2}} = \frac{R}{H} z \sqrt{\frac{R^2 + H^2}{H^2}} = \frac{RL}{H^2} z, \quad da = \frac{RL}{H^2} z d\theta dz.$$

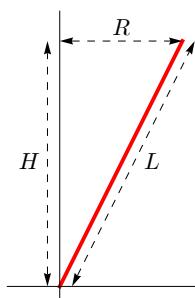


Figura 2.26 – Una superficie cónica se obtiene girando un segmento no paralelo al eje de revolución.

Nota 2.12.4: Influencia de la curvatura en el jacobiano

Observamos que el jacobiano de área del cono no es simplemente $r dr d\theta$. Cortando la superficie cónica en rodajas no funciona igual que para el cono sólido (donde se aplica el principio de Cavalieri) pues hay que tener en cuenta el factor $L/R = \csc(\alpha)$, donde α es el *ángulo de inclinación* de la generatriz del cono respecto al eje z positivo.

Pregunta 2.12.2: Relación entre los elementos de área al despejar variables

Puede observarse que las dos expresiones para los jacobianos son iguales si se tiene en cuenta la ecuación del cono $r/z = R/H$. Demostrar que esto ocurre para una superficie de revolución en general, teniendo en cuenta las fórmulas para el elemento de área en superficies de revolución generadas por gráficas ([ecuaciones \(2.12.8\)](#) y [\(2.12.9\)](#)).

► Ejemplo 2.12.14: el cuerno de Gabriel o trompeta de Torricelli

Es la superficie de revolución \mathcal{T} obtenida girando la gráfica \mathcal{C} de $y = 1/x$ para $x \in [1, +\infty)$ alrededor del eje x ([figura 2.27](#)). Para compaginar con la notación que hemos usado anteriormente, ponemos

$$x = z \quad y = r = f(z) = \frac{1}{z} \quad f'(z) = -\frac{1}{z^2}$$

El área de la trompeta es infinita.

Aunque la antiderivada en la integral del área se puede calcular explícitamente ([ejercicio](#)), para nuestro propósito basta con estimarla de manera sencilla por

$$a(\mathcal{T}) = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{z} \sqrt{1 + \frac{1}{z^4}} dz \geqslant 2\pi \int_1^\infty \frac{dz}{z} = \infty.$$

El volumen de la región sólida que encierra la trompeta es finito.

Calculando el volumen por el Principio de Cavalieri con «rodajas» paralelas al eje r se obtiene

$$\int_1^\infty \pi r^2 dz = \pi \int_1^\infty \frac{dz}{z^2} = \pi \left[-\frac{1}{z} \right]_1^\infty = \pi < \infty$$

La paradoja (matemática, pero no tanto física: véase la discusión en http://es.wikipedia.org/wiki/Cuerno_de_Gabriel) es que esta trompeta de extensión infinita se puede «llenar» con π litros de pintura ¡pero su superficie jamás quedará pintada!

Si truncamos la trompeta en $x = H$, el volumen será

$$\pi \int_1^H \frac{dz}{z^2} = \pi \left(1 - \frac{1}{H} \right)$$

mientras que, como $z^{-1} \leqslant 1$ para $z \geqslant 1$, el área está acotada por

$$2\pi \log H = 2\pi \int_1^H \frac{dz}{z} < 2\pi \int_1^H \frac{1}{z} \sqrt{1 + \frac{1}{z^4}} dz < 2\sqrt{2}\pi \int_1^H \frac{dz}{z}.$$

Para hacerse una idea de lo lento que es el crecimiento logarítmico, tomando $H \approx 8,8 \times 10^{29}$ cm, la estimación actual para el diámetro del Universo conocido, el área será sólo de unos 434cm^2 , aproximadamente el tamaño de una baldosa mediana... ◀



Figura 2.27 – Dos perspectivas de la trompeta de Torricelli, truncado su eje en longitud 9.

2.12 Coordenadas particulares de área

Cálculo Vectorial

En este capítulo se estudian las llamadas **integrales vectoriales** que surgieron en el siglo XIX sobre todo para estudiar algunos problemas clásicos en Mecánica y Electromagnetismo.

3.1 Integrales de Línea

3.1.1 Definición de la integral de línea

Empezaremos definiendo la noción clave de campo.

Definición 3.1.1: Definición de campo escalar y vectorial

Un **campo escalar** en $W \subseteq \mathbb{R}^n$ es una función $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ (o sea, con valor numérico).

Un **campo vectorial** en $W \subseteq \mathbb{R}^n$ es una función $\vec{F} : W \rightarrow \mathbb{R}^n$; es decir, a un punto $p \in W$ se le asocia un vector $\vec{F}(p) \in \mathbb{R}^n$.

En componentes, $\vec{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ donde $f_i : W \rightarrow \mathbb{R}$ son campos escalares.

En lo que sigue denotamos a la métrica euclídea también con la notación de **producto punto**:

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y$$

La idea detrás de las integrales de línea es la del **trabajo realizado por una fuerza** en mover una masa puntual a lo largo de una curva. Dado que trabajo es fuerza multiplicado por desplazamiento, y que sólo contribuye al trabajo la componente **tangencial** de la fuerza, llegamos a la siguiente definición.

3.1 Integrales de Línea

Definición 3.1.2: Definición de integral de línea

Dados

- $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$, una curva parametrizada por $\gamma(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$,
- $\vec{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$, un campo vectorial sobre la curva,

se define la **integral de línea** (ó **de camino, de trabajo**) de \vec{F} a lo largo de \mathcal{C} por

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b [(\vec{F} \circ \gamma) \cdot \gamma'](t) dt$$

El símbolo $d\vec{\ell}$ se llama el **elemento de longitud dirigido**.

Nota 3.1.1: Procedimiento geométrico para calcular una integral de línea

1. **Parametrizar la curva**, o sea, dar coordenadas $x = \gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $t \in [a, b]$
2. **Hallar el vector tangente** o sea, calcular las derivadas $\gamma'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$.
3. **Sustituir $x = \gamma(t)$** en $\vec{F}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$; se obtiene $(\vec{F} \circ \gamma)(t) = \vec{F}(\gamma(t))$.
4. **Hacer el producto** interior de $\vec{F}(\gamma(t))$ con $\gamma'(t)$; queda una función de una variable.
5. **Calcular la integral** de la función anterior respecto a $t \in [a, b]$.

3.1.2 La integral de línea en coordenadas

Si escribimos las componentes de γ y de \vec{F} ,

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (f_1, f_2, \dots, f_n), \quad f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \gamma(t) &= (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

entonces se trata de calcular n integrales de una variable y sumar:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \int_a^b ((f_1 \circ \gamma)(t), (f_2 \circ \gamma)(t), \dots, (f_n \circ \gamma)(t)) \cdot (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)) dt \\ &= \int_a^b [(f_1 \circ \gamma)(t) x'_1(t) + (f_2 \circ \gamma)(t) x'_2(t) + \dots + (f_n \circ \gamma)(t) x'_n(t)] dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b \sum_{k=1}^n (f_k \circ \gamma)(t) x'_k(t) \\
 &= \sum_{k=1}^n \int_a^b (f_k \circ \gamma)(t) x'_k(t) dt \\
 &= \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) x'_k(t) dt.
 \end{aligned}$$

Definición 3.1.3: La notación diferencial para integrales de línea

En notación diferencial, la integral de línea se escribe como un cambio de variable

$$\begin{aligned}
 dx_k &= x'_k(t) dt, \\
 f_k(x) dx_k &= f_k(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) x'_k(t) dt
 \end{aligned}$$

y entonces la integral queda expresada como

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_C f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n$$

pudiéndose así integrar por separado cada expresión $f_i dx_i$ y sumar.

Definición 3.1.4: 1-formas diferenciales

A una expresión general del tipo

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n$$

con f_k campos escalares en las coordenadas x_j , se le llama **1-forma diferencial**.

Nota 3.1.2: Definiciones no rigurosas de las diferenciales

Decir que una 1-forma es «una expresión» **no dice nada** realmente. No es una definición rigurosa. Para esto habría que dar sentido a las **diferenciales** dx_k . Con todo esto, hemos dado una definición de cómo integrar una 1-forma diferencial sobre una curva, haciéndola corresponder a una integral de línea. Será un caso en el cual una cosa se conoce a través de sus propiedades antes de haber sido definida rigurosamente!

Ilustramos las definiciones anteriores para el plano ($n = 2$) y el espacio ($n = 3$).

3.1 Integrales de Línea

3.1.3 Integrales de línea en dos dimensiones

Usando x, y para las funciones coordenadas, y P, Q para las componentes del campo,

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad \vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = P\vec{i} + Q\vec{j}$$

donde \vec{i}, \vec{j} representan una base ortonormal de \mathbb{R}^2 , tenemos

$$dx = x'(t) dt, \quad dy = y'(t) dt$$

y entonces

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_C P dx + Q dy \quad \begin{aligned} \int_a^b P dx &= \int_a^b P(x(t), y(t)) x'(t) dt \\ \int_a^b Q dy &= \int_a^b Q(x(t), y(t)) y'(t) dt \end{aligned}$$

3.1.4 Integrales de línea en tres dimensiones

Usando x, y, z para las funciones coordenadas y P, Q, R para las componentes del campo,

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (x(t), y(t), z(t)), \quad \vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \\ &= P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \end{aligned}$$

donde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ representan una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , tenemos

$$dx = x'(t) dt, \quad dy = y'(t) dt, \quad dz = z'(t) dt$$

y entonces

$$\begin{aligned} \int_C P dx &= \int_a^b P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt \\ \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \int_C P dx + Q dy + R dz, \quad \begin{aligned} \int_a^b Q dy &= \int_a^b Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt \\ \int_a^b R dz &= \int_a^b R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt \end{aligned} \end{aligned}$$

► Ejemplo 3.1.1

Calcular el trabajo realizado por $\vec{F}(x, y, z) = -\frac{1}{2}x\vec{i} - \frac{1}{2}y\vec{j} + \frac{1}{4}\vec{k}$ al mover una partícula a lo largo de la hélice $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k}$ desde el punto $(1, 0, 0)$ al punto $(-1, 0, 3\pi)$.

En notación de coordenadas, la parametrización es $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ con $t \in [0, 3\pi]$, y el campo es $\vec{F}(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}x, -\frac{1}{2}y, \frac{1}{4}\right)$. Es decir,

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad z(t) = t, \quad t \in [0, 3\pi].$$

Entonces

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \quad \vec{F}(\gamma(t)) = \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) = \left(-\frac{1}{2}\cos t, -\frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{4}\right)$$

por tanto

$$\begin{aligned} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= \left(-\frac{1}{2}\cos t, -\frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{4}\right) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) \\ &= \cancel{\frac{1}{2}\sin t \cos t} - \cancel{\frac{1}{2}\sin t \cos t} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

luego el trabajo es

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{t} = \int_0^{3\pi} \frac{1}{4} dt = \frac{3\pi}{4}.$$



► Ejemplo 3.1.2: integral de línea a lo largo de un segmento

Sea $\mathcal{C} = [p, q]$ el segmento en \mathbb{R}^n que une los puntos p, q . La parametrización habitual o estándar de \mathcal{C} es

$$\sigma(t) = p + t\vec{h}, \quad \vec{h} = q - p, \quad t \in [0, 1]$$

que cumple

$$\sigma(0) = p, \quad \sigma(1) = q, \quad \sigma'(t) = \vec{h} = q - p.$$

Es decir, σ recorre el segmento a velocidad constante igual a \vec{h} . Para cualquier campo vectorial \vec{F} se tiene

$$\int_{[p,q]} \vec{F} \cdot d\vec{t} = \int_0^1 \vec{F}(p + t\vec{h}) \cdot \vec{h} dt = \int_0^1 \vec{F}(p + t(q - p)) \cdot (q - p) dt.$$



► Ejemplo 3.1.3

Calcular $\int_{\mathcal{C}} (x^2 - y + 3z) dx$ donde \mathcal{C} es el segmento entre el origen y $(1, 2, 1)$.

Parametrizamos \mathcal{C} por

$$\sigma(t) = (1-t)(0, 0, 0) + t(1, 2, 1) = (t, 2t, t), \quad t \in [0, 1], \quad \sigma'(t) = (1, 2, 1)$$

3.1 Integrales de Línea

o, en notación diferencial,

$$\begin{aligned} x &= x(t) = t, & dx &= x'(t) dt = dt, \\ y &= y(t) = 2t, & dy &= y'(t) dt = 2dt, \\ z &= z(t) = t, & dz &= z'(t) dt = dt, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\int_{\mathcal{C}} (x^2 - y + 3z) dx = \int_0^1 (t^2 - 2t + 3t) dt = \int_0^1 (t^2 + t) dt = \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{6}.$$



► Ejemplo 3.1.4

Calcular $\int_{\mathcal{C}} (x+2) dx$ donde \mathcal{C} es la curva parametrizada por $\gamma(t) = (t, \frac{4}{3}t^{3/2}, \frac{1}{2}t^2)$ para $t \in [0, 2]$.

Se tiene $\gamma'(t) = (1, 2t^{1/2}, t)$ o, en notación diferencial

$$\begin{aligned} x &= x(t) = t, & dx &= x'(t) dt = dt, \\ y &= y(t) = \frac{4}{3}t^{3/2}, & dy &= y'(t) dt = 2t^{1/2} dt, \\ z &= z(t) = \frac{1}{2}t^2, & dz &= z'(t) dt = t dt, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\int_{\mathcal{C}} (x+2) dx = \int_0^2 (t+2) dt = \left[\frac{t^2}{2} + 2t \right]_{t=0}^{t=2} = 6.$$



► Ejemplo 3.1.5

Calcular $\int_{\mathcal{C}} x dy - y dx$ donde \mathcal{C} es la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ recorrida en sentido antihorario.

Parametrizamos en coordenadas polares. En notación diferencial

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta & dx &= -R \sin \theta d\theta \\ y &= R \sin \theta & dy &= R \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} x dy - y dx &= (R \cos \theta)(R \cos \theta) d\theta - (R \sin \theta)(-R \sin \theta) d\theta \\ &= R^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = R^2 d\theta, \end{aligned}$$

con lo cual

$$\int_{\mathcal{C}} x \, dy - y \, dx = \int_0^{2\pi} R^2 \, d\theta = 2\pi R^2.$$



3.1.5 La integral de línea bajo cambio de parametrización

Si nos fijamos en la definición de la integral de línea (definición 3.1.2) de un campo \vec{F} sobre una curva \mathcal{C} , nos daremos cuenta que en principio depende de la elección de una parametrización $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$. Si esto fuera así, la integral no estaría bien definida, pues la notación implica que depende sólo de la curva \mathcal{C} y no del modo en que se recorre, que es la parametrización γ . Para resolver esta duda debemos estudiar qué ocurre con la definición de la integral de línea cuando se tienen dos parametrizaciones de la misma curva \mathcal{C} .

Sean entonces

$$\alpha(t) : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}, \quad \beta(s) : [A, B] \rightarrow \mathcal{C}$$

ambas parametrizaciones de la misma curva \mathcal{C} . Esto significa que son funciones **biyectivas** entre el intervalo y la curva, de clase C^1 (es decir, derivables con derivada continua), y con inversas también de clase C^1 (este último punto requiere desarrollar el Cálculo Diferencial multivariable para poder formularlo rigurosamente).

Suponemos también que las derivadas no se anulan en ningún punto. Físicamente, esto corresponde a recorrer la curva con una velocidad que no es nula en ningún momento. Algebraicamente, corresponde a la condición de rango máximo (en este caso, 1) de la matriz diferencial jacobiana (que a su vez corresponde al vector tangente).

Con las dos parametrizaciones, obtenemos dos integrales cuyo valor vamos a comparar:

$$\int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \, dt, \quad \int_A^B \vec{F}(\beta(s)) \cdot \beta'(s) \, ds.$$

Consideremos la composición

$$\varphi = \beta^{-1} \circ \alpha : [a, b] \rightarrow [A, B]$$

que es una función real de clase C^1 de una variable, biyectiva entre los dos intervalos, y con derivada no nula en todo punto (figura 3.1).

El Cálculo Diferencial en una variable implica entonces que φ es estrictamente monótona, creciente si $\varphi' > 0$ y decreciente si $\varphi' < 0$ (figura 3.2). Es habitual

3.1 Integrales de Línea

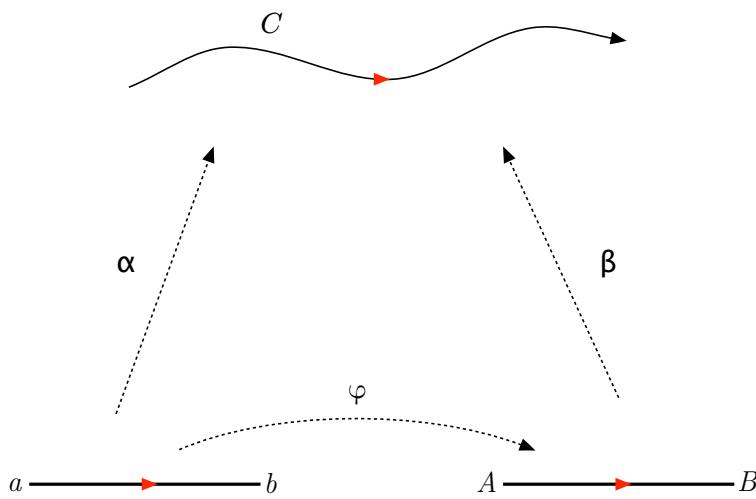


Figura 3.1 – Dos parametrizaciones de la misma curva difieren en un cambio de variable entre intervalos.

denotar por $(-1)^\varphi$ al **signo de la derivada**. Usaremos la Regla de la Cadena en una variable

$$\alpha(t) = \beta(\varphi(t)), \quad \alpha'(t) = \beta'(\varphi(t))\varphi'(t),$$

y consideramos los dos casos (creciente y decreciente) por separado.

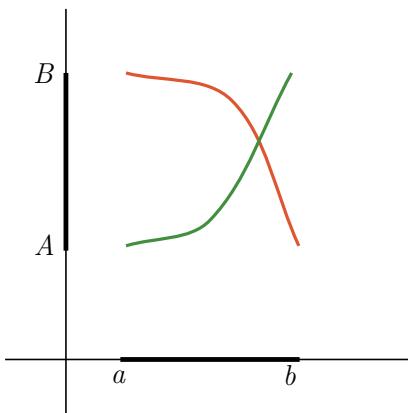


Figura 3.2 – La función que realiza el cambio de variable es estrictamente monótona.

- Si φ es **creciente**, entonces $\varphi(a) = A$ y $\varphi(b) = B$. Haciendo el cambio de variable $s = \varphi(t)$ queda

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{F}(\beta(s)) \cdot \beta'(s) ds &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \vec{F}(\beta(s)) \cdot \beta'(s) ds = \int_a^b \vec{F}(\beta(\varphi(t))) \cdot \beta'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt. \end{aligned}$$

En este caso, usar α y β lleva al **mismo valor** de las integrales correspondientes.

- Si φ es **decreciente**, entonces $\varphi(a) = B$ y $\varphi(b) = A$. Es decir, **se intercambia el**

orden de los extremos. Ahora, al hacer el cambio de variable $s = \varphi(t)$, queda

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{F}(\beta(s)) \cdot \beta'(s) ds &= \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} \vec{F}(\beta(s)) \cdot \beta'(s) ds = \int_b^a \vec{F}(\beta(\varphi(t))) \cdot \beta'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= \int_b^a \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= - \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt. \end{aligned}$$

Es decir, usar α y β lleva a integrales iguales en magnitud pero **opuestas en el signo**.

3.1.6 Orientación de una curva

El significado geométrico del signo que aparece en la integral cuando el cambio de variable entre dos parametrizaciones de la misma curva es **decreciente** es que las parametrizaciones **recorren la misma curva pero en sentidos opuestos**. Usando la misma notación que en la sección anterior, esto se ve en la fórmula $\alpha'(t) = \beta'(s)\varphi'(t)$, con $s = \varphi(t)$. Si φ es decreciente, entonces $\varphi' < 0$, luego $\alpha'(t)$ y $\beta'(s)$, que son los vectores tangentes o de velocidad, son paralelos pero con direcciones opuestas.

La conclusión es que **las integrales de línea son integrales orientadas. Importa el sentido en el que se recorre la curva**. Esto contrasta con las integrales de longitud que estudiamos antes ([apartado 2.8](#)), donde el sentido del recorrido no importa para medir longitudes, calcular centros de gravedad, momentos de inercia, etc.

Vamos a resaltar algunos aspectos de lo que hemos hecho anteriormente ([apartado 3.1.5](#)) enfatizando este aspecto geométrico.

Definición 3.1.5: Orientación en una curva

Una **orientación** de una curva \mathcal{C} es una determinación del **sentido** en el que se recorre.

- Si \mathcal{C} une dos extremos *distintos* p, q , orientar equivale a decir cuál es el **punto inicial** y cuál el **punto final**.
- Si \mathcal{C} es una curva **cerrada** en el plano, orientar equivale a decir si se recorre en sentido **antihorario** (considerado «positivo») u **horario** (considerado «negativo»).

Dada una curva \mathcal{C} orientada, \mathcal{C}^{op} denota la misma curva con la **orientación opuesta**.

Definición 3.1.6: Circulación

La integral de un campo \vec{F} alrededor de una curva cerrada o circuito orientado \mathcal{C} se llama **circulación** de \vec{F} . Para indicar que la integral es sobre un circuito, se representa como

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}.$$

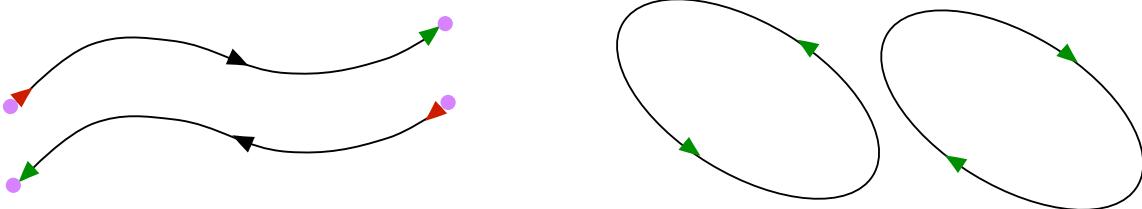


Figura 3.3 – Arcos y circuitos orientados y sus opuestos. En los arcos, la flecha roja indica el punto de entrada (initial) y la verde el punto de salida (final).

Una de las conclusiones a la que lleva el estudio de los cambios de parametrización ([apartado 3.1.5](#)) es que un cambio de orientación en la curva corresponde a un cambio de signo en las integrales de línea sobre ella.

Enunciado 3.1.1: Cambio de orientación en una integral de línea

Cambiar de orientación la curva en una integral de línea cambia el signo de la integral:

$$\int_{\mathcal{C}^{\text{op}}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

- **Demostración:** Si \mathcal{C} está parametrizada por $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ entonces una manera de parametrizar la curva con la orientación opuesta \mathcal{C}^{op} es

$$\gamma^{\text{op}}(t) := \gamma(a + b - t) : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$$

ya que cuando t recorre el intervalo $[a, b]$, $s = a + b - t$ recorre el mismo intervalo pero en sentido opuesto (cambiando el sentido del «tiempo» t cambia el sentido de recorrido de la curva). El cambio de variable que relaciona γ con γ^{op} es claramente $\varphi(t) = a + b - t$, con derivada $\varphi'(t) = -1$, negativa como refleja ya la correspondencia inversa entre los extremos, $\varphi(a) = b$ y $\varphi(b) = a$. Por lo visto anteriormente ([apartado 3.1.5](#)), esto implica que

$$\int_{\mathcal{C}^{\text{op}}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{F}(\gamma^{\text{op}}(t)) \cdot \gamma^{\text{op}}'(t) dt = - \int_a^b \vec{F}(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) ds = - \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}.$$

■

Definición 3.1.7: Parametrización y orientación de curvas

Dadas dos parametrizaciones α, β de la misma curva \mathcal{C} :

- Si α y β están relacionadas por un cambio de variable **creciente**, entonces ambas recorren \mathcal{C} en el mismo sentido, es decir, **con la misma orientación**. En este caso decimos que son parametrizaciones **compatibles** o **co-orientadas**.
- Si α y β están relacionadas por un cambio de variable **decreciente**, entonces recorren \mathcal{C} **con orientaciones opuestas**. En este caso decimos que son **incompatibles** o que están **anti-orientadas**.

Nota 3.1.3: Compatibilidad con una orientación dada

Al hacer una integral de línea, debemos especificar de antemano una orientación de la curva y por tanto elegir **parametrizaciones compatibles con la orientación dada**. De lo contrario, obtendremos la integral cambiada de signo.

3.1.7 El campo tangente unitario a una curva

Recordemos la definición del vector tangente unitario ([definición 2.7.5](#))

$$\vec{t}(p) = \vec{t}(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \quad p = \gamma(t) \in \mathcal{C}.$$

Enunciado 3.1.2: Orientación y tangente unitario

Una curva tiene exactamente dos campos tangentes unitarios **continuos**, opuestos en signo. Una orientación equivale a la elección de campo tangente unitario continuo.



Figura 3.4 – Campo tangente unitario

- **Demostración:** Volvemos a usar el razonamiento anterior sobre cambio de parametrización ([apartado 3.1.5](#)). Sean

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}, \quad \beta : [A, B] \rightarrow \mathcal{C}$$

3.1 Integrales de Línea

dos parametrizaciones de la misma curva \mathcal{C} . Entonces la función

$$\varphi = \beta^{-1} \circ \alpha : [a, b] \rightarrow [A, B]$$

es estrictamente monótona. Sea $\varepsilon = (-1)^\varphi = \pm 1$ el signo de φ' . Por la Regla de la Cadena,

$$\beta(\varphi(t)) = \alpha(t) \implies \beta'(\varphi(t)) \varphi'(t) = \alpha'(t)$$

por tanto, escribiendo $s = \varphi(t)$, si $p = \alpha(t) = \beta(\varphi(t)) = \beta(s)$, entonces

$$\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{\beta'(\varphi(t)) \varphi'(t)}{\|\beta'(\varphi(t)) \varphi'(t)\|} = \frac{\beta'(\varphi(t))}{\|\beta'(\varphi(t))\|} \cdot \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} = \frac{\beta'(s)}{\|\beta'(s)\|} \cdot \varepsilon = \pm \frac{\beta'(s)}{\|\beta'(s)\|}$$

es decir, se obtiene o bien el mismo vector unitario o dos vectores unitarios opuestos en signos. La continuidad obliga a que el signo sea constante a lo largo de toda la curva. El caso $\varepsilon = 1$ corresponde a cuando las parametrizaciones α, β dan la misma orientación a la curva, y el caso $\varepsilon = -1$ a cuando dan orientaciones opuestas. ■

Enunciado 3.1.3: La integral de línea en términos del campo tangente unitario

Para un campo \vec{F} sobre una curva \mathcal{C} orientada con tangente unitario \vec{t} ,

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{t} dl$$

es decir, la integral de línea es la integral de longitud sobre \mathcal{C} de la componente tangencial $\vec{F} \cdot \vec{t}$ del campo \vec{F} a lo largo de la curva \mathcal{C} .

■ *Demostración:* Podemos expresar la integral de línea como

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{t}(\gamma(t)) J_\gamma(t) dt \\ &= \int_a^b (\vec{F} \cdot \vec{t})(\gamma(t)) J_\gamma(t) dt = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{t} dl \end{aligned}$$

■

Este resultado también explica el cambio de signo al cambiar de orientación: el campo tangente unitario \vec{t} se cambia al campo opuesto $-\vec{t}$.

El resultado anterior se expresa en la notación diferencial como

$$d\vec{\ell} = \vec{t} dl \stackrel{\text{def}}{=} d\vec{t}$$

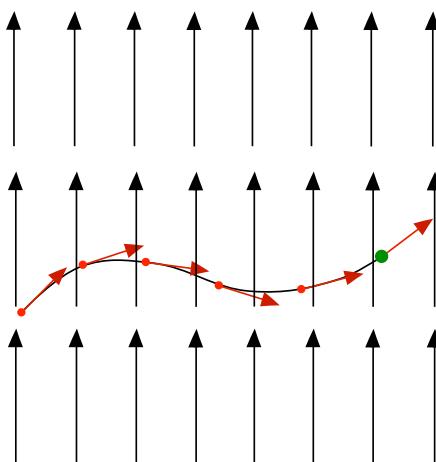


Figura 3.5 – Una curva inmersa en un campo vectorial. Sólo se realiza trabajo en la dirección tangente en la curva.

es decir, el elemento dirigido de longitud es el tangente unitario cambiado por el elemento de longitud escalar. En particular, la integral de línea se puede denotar también por

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell},$$

para recordar que se toma la integral de la componente tangencial del campo.

► Ejemplo 3.1.6

Sea $\gamma(t) = R(\cos t, \sin t)$ para $t \in [\alpha, \beta]$. Es una parametrización de un arco C de la circunferencia de radio R y centro en el origen, correspondiente a la ecuación $x^2 + y^2 = R^2$. Sea $\vec{F} = \vec{r}$ el **campo posición**, dado por $\vec{r}(p) = p$ para todo punto p . Entonces

$$\int_C \vec{r} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{r}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \gamma(t) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} 0 dt = 0,$$

ya que

$$\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = R(\cos t, \sin t) \cdot R(-\sin t, \cos t) = R^2(-\sin t \cos t + \sin t \cos t) = 0,$$

reflejando el hecho que en una circunferencia, el radio es perpendicular a la tangente.

En términos del campo tangente unitario, con esta orientación (antihoraria) es

$$\vec{t}(p) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{R(-\sin t, \cos t)}{R} = (-\sin t, \cos t)$$

y efectivamente se tiene $\vec{r} \cdot \vec{t} = 0$, luego

$$\int_C \vec{r} \cdot d\vec{\ell} = \int_C \vec{r} \cdot \vec{t} d\ell = \int_C 0 d\ell = 0.$$

3.1.8 Propiedades generales de las integrales de línea

Como ahora sabemos que las integrales de línea son también integrales respecto al elemento de longitud, las propiedades de estas últimas nos dan propiedades correspondientes para las integrales de línea.

Primero, la integral de línea sobre una curva fija es lineal como función del campo que se integra.

$$\int_C (\vec{F} + \vec{G}) \cdot d\vec{\ell} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} + \int_C \vec{G} \cdot d\vec{\ell}, \quad \int_C (k\vec{F}) \cdot d\vec{\ell} = k \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \quad (\text{linealidad})$$

La integral de línea de un campo fijo es aditiva en la curva sobre la cual se integra. Es decir, al **concatenar** dos curvas (recorrer una y luego la otra) se tiene

$$\int_{C_1 \cup C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \quad (\text{aditividad})$$

La integral de línea cumple una versión de la desigualdad triangular.

$$\left| \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \right| \leq \int_C \|\vec{F}\| d\ell \leq \max_C \|\vec{F}\| \cdot \ell(C) \quad (\text{desigualdad triangular})$$

La desigualdad triangular para integrales de línea es consecuencia de la desigualdad triangular para integrales de longitud y la **desigualdad de Cauchy-Schwarz** $|v \cdot w| \leq \|v\| \|w\|$.

3.2 El Teorema Fundamental para integrales de línea

3.2.1 Nociones preliminares

En la teoría de funciones de una variable, el Teorema Fundamental del Cálculo es el resultado principal que une el Cálculo Diferencial con el Cálculo Integral. Vamos a ver cómo se generaliza para integrales de línea, a partir de la forma unidimensional

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

donde $f(x)$ es una función continua derivable con derivada continua.

En palabras, el teorema dice que *la integral de la derivada de una función sobre un intervalo es la diferencia entre los valores de la función en los extremos*. Para generalizarlo, hay dos cuestiones principales:

1. ¿Qué significa «una derivada» para funciones de varias variables?
2. ¿Cuál es el concepto adecuado de «extremos»?

La segunda pregunta tiene una respuesta geométrica bastante directa. Los extremos de una curva \mathcal{C} parametrizada por $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ son los puntos $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$. Estos puntos *limitan* en algún sentido a la curva.

También debemos tener en cuenta el caso de una curva **cerrada o circuito**, donde los dos «extremos» coinciden, en el sentido que $\gamma(a) = \gamma(b)$ para una parametrización. En realidad, en este caso sería más correcto decir que *no hay extremos*, pues una curva cerrada, como una circunferencia, por ejemplo, no puede decirse que esté «limitada» por ningún punto.

Estas consideraciones llevan a las siguientes definiciones.

Definición 3.2.1: El borde orientado de un arco

Si \mathcal{C} es un arco (definición 2.7.2) que une los puntos p y q , su **borde orientado** es

$$\partial\mathcal{C} = \{p-, q+\},$$

indicando con los signos que p es el punto inicial de **entrada** y q el de **salida**.

Orientando el borde $\partial\mathcal{C}$ de un arco \mathcal{C} se orienta también la propia curva \mathcal{C} .

Definición 3.2.2: El borde de un circuito

Si \mathcal{C} es una curva cerrada ([definición 2.7.2](#)), entonces su borde se considera **vacío**: $\partial\mathcal{C} = \emptyset$, al no haber puntos que limitan la curva.

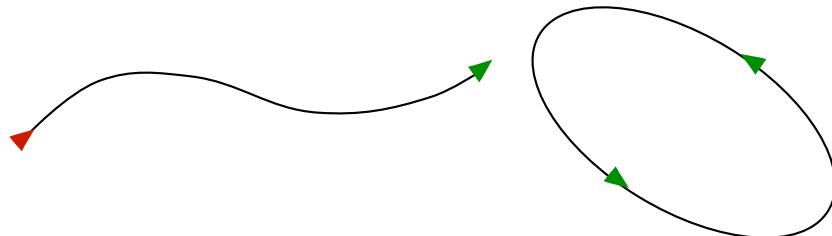


Figura 3.6 – Arco y circuito orientados. Para el arco, en rojo el punto de entrada (negativo) y en verde el de salida (positivo).

En cuanto a la noción adecuada de *derivada* que sirva para generalizar el Teorema Fundamental a integrales de línea, ésta viene dada por la noción de *gradiente*.

Definición 3.2.3: El gradiente de un campo escalar

Sea $W \subseteq \mathbb{R}^n$ una región n -dimensional. Si $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable, su **gradiente** es

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

(el símbolo ∇ se llama **nabla** ó **del**). Siempre supondremos que f es de clase C^1 (parciales continuas), de modo que el gradiente sea un **campo vectorial continuo**.

En realidad, la fórmula dada ([definición 3.2.3](#)) no es la «verdadera» definición del gradiente. Parece que depende de las coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) elegidas y no es así. Una definición más adecuada es que el gradiente es el vector determinado de manera única por la relación

$$\nabla f(p) \cdot v = D_v f(p) \quad [3.2.1]$$

para cualquier vector v , donde $D_v(p)$ es la **derivada direccional** de f en el punto p en dirección v , definida por el límite

$$D_v f(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + hv) - f(p)}{h} \quad [3.2.2]$$

$D_v f(p)$ es un vector que expresa la variación de f en el punto p y dirección v .

Un resultado del Cálculo Diferencial multivariante dice que el gradiente de un campo escalar representa la **dirección en la cual cambia más rápidamente**. Esto se

deduce de la fórmula [3.2.2] por la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Suponiendo que $\|v\| = 1$, se tiene $|D_v f(a)| \leq \|\nabla f(a)\|$, con igualdad si y sólo si v es paralelo a $\nabla f(a)$.

Resulta entonces que dado un campo vectorial \vec{F} en una región n -dimensional W , para decir que \vec{F} «es una derivada» el concepto correcto es que \vec{F} es el gradiente de algún campo escalar.

Definición 3.2.4: Definición de campo gradiente y potencial

Un campo vectorial $\vec{F} : W \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un **campo gradiente** si existe un campo escalar $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ tal que^a

$$\vec{F}(p) = \nabla f(p) \quad \forall p \in W.$$

En este caso se dice que f es un **potencial (escalar)** de \vec{F} en W .

De este modo, los potenciales generalizan la noción de **antiderivada** en una variable. Sin embargo, hay una diferencia clave entre este caso sencillo y el caso general en n dimensiones. El problema es que, mientras toda función continua $f(x)$ en un intervalo compacto $[a, b]$ tiene una antiderivada, dada por la integral $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, esto *no* es cierto para campos vectoriales continuos en regiones de \mathbb{R}^n para $n \geq 2$.

Puede haber campos vectoriales en una región sin potencial en ella.

Una propiedad de las antiderivadas que sí se mantiene al generalizar a potenciales, es que el potencial está determinado de manera único salvo por la suma de una constante arbitraria. Debemos matizar un poco el enunciado, debido a consideraciones *topológicas*. El dominio donde está definido el campo debe suponerse *conexo*, intuitivamente, «de una sola parte» (figura 3.7).

Definición 3.2.5: Conectividad (por arcos)

Un dominio $W \subseteq \mathbb{R}^n$ es **conexo por arcos** si para cualquier par de puntos $p, q \in W$, existe una curva C contenida en W y con extremos en p, q .

Es decir, W es conexo por arcos si dado cualquier par de puntos en W se puede ir de uno a otro a lo largo de una curva sin salirse fuera de W (figura 3.7). Abreviaremos diciendo que W es *conexo*, aunque existe un concepto más general con este nombre en **Topología**, que resulta ser equivalente para conjuntos *abiertos*.

La denominación **región** suele incluir la hipótesis de conectividad o conectividad

^aEn Física se cambia el signo: $\vec{F} = -\nabla f$ debido a la interpretación como energía potencial. Aquí no seguiremos esa convención pues es innecesaria para la teoría matemática.

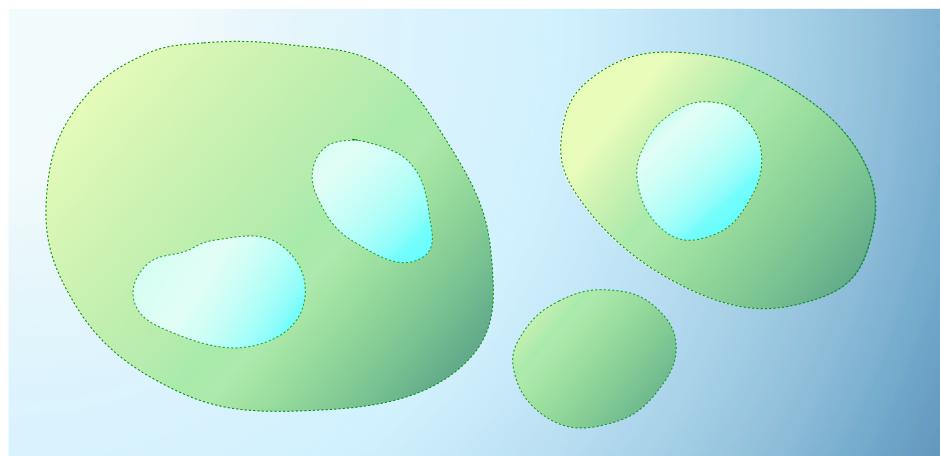


Figura 3.7 – Un «archipiélago» con varias islas (en verde). En cada isla se puede ir de cualquier punto a otro sin pasar por el agua (en azul), aunque algunas islas tengan lagunas, pero no se puede ir de una isla a otra sin cruzar el mar. Las islas son conexos, el archipiélago no.

por arcos y nosotros también seguiremos esta convención. Si queremos referirnos a un conjunto *no* conexo, lo señalaremos explícitamente. No se suele perder generalidad por suponer que un conjunto es conexo, ya que en general todo conjunto se divide en partes que son conexas y el análisis se puede hacer por separado en cada parte.

Dicho esto, podemos enunciar rigurosamente la unicidad del potencial salvo constante.

Enunciado 3.2.1: Unicidad del potencial escalar salvo constante

Si un campo \vec{F} es un gradiente en un dominio **conexo**, su potencial f está determinado de manera única salvo la adición de una constante arbitraria. Es decir, si $\vec{F} = \nabla f = \nabla g$ en la región W , entonces $g = f + k$, donde k es constante en W .

- **Demostración:** Es un resultado del Cálculo Diferencial multivariable que en un dominio conexo W , una función $h : W \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tiene gradiente nulo si y sólo si es constante en W : $\nabla h = 0 \iff h = \text{cte.}$ Por tanto, $\nabla f = \nabla g \iff \nabla(f - g) = 0 \iff f - g$ es constante en W . ■

Nota 3.2.1: Constancia y conectividad

Si no se requiere que un dominio W sea **conexo** una función constante puede tomar valores constantes pero *distintos* en *cada parte conexa de W* .

Necesitamos otro resultado del Cálculo Diferencial multivariable. Se trata de un caso particular de la Regla de la Cadena. Si $\mathcal{C} \subseteq G$ es una curva en G parametrizada por $\gamma : [a, b] \rightarrow G$, y $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar, su composición

$$(f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t))$$

es una función real de una variable real, que representa **medir el valor de f a lo largo de γ** . Como tal, se puede calcular su derivada ordinaria y relacionarla con las derivadas vectoriales del campo escalar f y de la curva γ .

Enunciado 3.2.2: La derivada de un campo escalar a lo largo de una curva

Sea $f(p)$ un campo escalar derivable a lo largo de una curva parametrizada por $p = \gamma(t)$. Entonces

$$(f \circ \gamma)'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

En palabras, la fórmula anterior dice que la variación del campo escalar a lo largo de la curva parametrizada por $\gamma(t)$ es el producto interior del vector gradiente ∇f con el vector velocidad $\vec{v} = \gamma'(t)$.

■ **Demostración:** En coordenadas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, la matriz jacobiana de un campo escalar $f : W \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una matriz $1 \times n$, es decir, un vector fila, igual al gradiente, mientras que la matriz jacobiana de una curva $\gamma : t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una matriz $n \times 1$, es decir, un vector columna, igual al vector tangente, y la matriz jacobiana de la composición $f \circ \gamma : t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una matriz 1×1 cuya única coordenada es la derivada ordinaria $(f \circ \gamma)'(t)$.

$$[df_p] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad [d\gamma_t] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t} \end{bmatrix} \quad [d(f \circ \gamma)_t] = ((f \circ \gamma)'(t))$$

Por la Regla de la Cadena del Cálculo Diferencial multivariable, la matriz jacobiana de la composición $f \circ \gamma$ es el producto de las Jacobianas de las otras dos, tomadas respectivamente en $p = \gamma(t)$ y en t :

$$\begin{aligned} [(f \circ \gamma)'(t)] &= [df_{\gamma(t)}][d\gamma_t] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t} \end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t} \right] \\ &= [\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)] \end{aligned}$$

3.2 El Teorema Fundamental para integrales de línea

y al comparar la primera con la última queda la fórmula. ■

Con estas definiciones ya podemos enunciar y demostrar la generalización del Teorema Fundamental del Cálculo a las integrales de línea. Se trata de «curvar» un intervalo, que es una subvariedad paramétrica *plana* en \mathbb{R}^1 , para formar una curva parametrizada arbitraria en \mathbb{R}^n , manteniendo la relación que expresa el Teorema Fundamental, en la versión que dice la integral de la derivada de una función en un intervalo es la diferencia de sus valores en los extremos del intervalo.

3.2.2 Enunciado y demostración del Teorema Fundamental

Enunciado 3.2.3: El Teorema Fundamental del Cálculo para integrales de línea

Sea \vec{F} un campo gradiente en $W \subseteq \mathbb{R}^n$, con potencial f . Si \mathcal{C} es un arco en W con $\partial\mathcal{C} = \{p-, q+\}$, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = f(q) - f(p)$$

■ **Demostración:** Sea $\vec{F} = \nabla f$ en W . Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ una parametrización de la curva \mathcal{C} , compatible con la orientación dada, de modo que $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt \\ &= (f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a) = f(q) - f(p) \end{aligned}$$

donde hemos usado la Regla de la Cadena para campos escalares, $(f \circ \gamma)'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ y en el penúltimo paso hemos aplicado el Teorema Fundamental para funciones de una variable sobre un intervalo. ■

El Teorema Fundamental para integrales de línea tiene un corolario inmediato de suma importancia: un campo gradiente realizará el mismo trabajo sobre *cualquier* curva en el dominio que una p con q , ya que éste es igual a la diferencia del potencial en los extremos p y q .

Enunciado 3.2.4: El trabajo realizado por un gradiente es la diferencia del potencial

El trabajo realizado por un campo gradiente sobre una curva es igual a la diferencia del potencial en sus extremos. En particular, el trabajo no depende de la curva sino solo de sus **extremos**.

Para las curvas *cerradas*, donde la trayectoria empieza y acaba en el mismo punto, obtenemos otro corolario inmediato e igual de importante.

Enunciado 3.2.5: Un campo gradiente tiene circulación nula

Si \mathcal{C} es una curva cerrada en W , entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0.$$

Es decir, la circulación de un campo gradiente alrededor de un circuito es nula.

- **Demostración:** Si \mathcal{C} es cerrada, tiene una parametrización $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ con $p = \gamma(a) = \gamma(b) = q$. Por tanto $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = f(q) - f(p) = 0$. ■

Podemos considerar estas propiedades asociadas a un campo vectorial en general.

Definición 3.2.6: Independencia del camino

Un campo vectorial \vec{F} en $W \subseteq \mathbb{R}^n$ cumple la propiedad de **independencia del camino** si para cualquier par de curvas α, β en W con los mismos extremos, sus integrales de línea correspondientes son iguales:

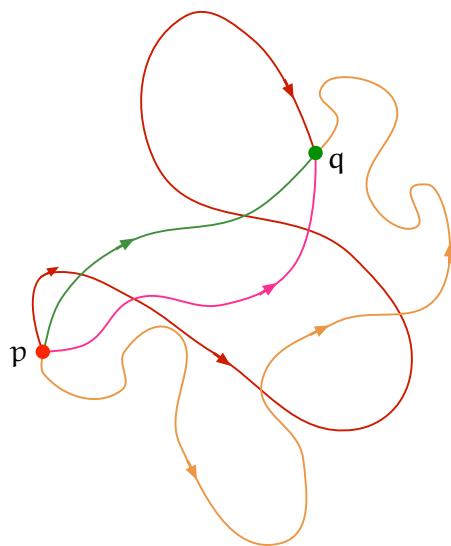
$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\beta} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}.$$

Es decir, el trabajo realizado por \vec{F} es el mismo sobre cualquier curva en W que une el mismo par de puntos (orientados) p^-, q^+ .

Para que el trabajo sea el mismo sobre una trayectoria larga y complicada que sobre una corta y sencilla, con los mismos extremos (figura 3.8), se tienen que producir **cancelaciones** netas de trabajo sobre los distintos tramos de la curva. Esto es más evidente incluso en el caso de la circulación nula.

Definición 3.2.7: Circulación nula

Un campo vectorial \vec{F} en $W \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene **circulación nula** en W si para **toda curva**

**Figura 3.8** – Curvas con extremos iguales.

cerrada $\mathcal{C} \subseteq W$, se tiene

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Resulta que estas dos propiedades son equivalentes. La demostración es de naturaleza puramente geométrica y topológica. Más adelante veremos que de hecho ambas propiedades equivalen a la existencia de un potencial, es decir, a que el campo sea un gradiente.

Enunciado 3.2.6: Equivalencia entre independencia del camino y circulación nula

Un campo tiene independencia del camino en un dominio W si y sólo si tiene circulación nula en ese dominio.

■ *Demostración:* Supongamos que el campo \vec{F} tiene circulación nula en la región W . Si \mathcal{A} y \mathcal{B} son curvas con los mismos extremos, la concatenación $\mathcal{C} = \mathcal{A} \uplus \mathcal{B}^{\text{op}}$ es un circuito (figura 3.9). Por aditividad (apartado 3.1.8) y la propiedad de cambio de signo (enunciado 3.1.1), queda

$$0 = \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathcal{A}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} - \int_{\mathcal{B}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}, \quad \therefore \quad \int_{\mathcal{A}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathcal{B}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell},$$

luego \vec{F} tiene la propiedad de independencia del camino.

Recíprocamente, si \vec{F} tiene la propiedad de independencia del camino y $\mathcal{C} \subseteq W$ es una curva cerrada, eligiendo dos puntos distintos cualesquiera $p, q \in \mathcal{C}$ obtenemos dos curvas \mathcal{A} y \mathcal{B} con los mismos extremos p, q y tales que $\mathcal{C} = \mathcal{A} \uplus \mathcal{B}^{\text{op}}$, por tanto

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathcal{A}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} - \int_{\mathcal{B}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0,$$

luego \vec{F} tiene circulación nula. ■

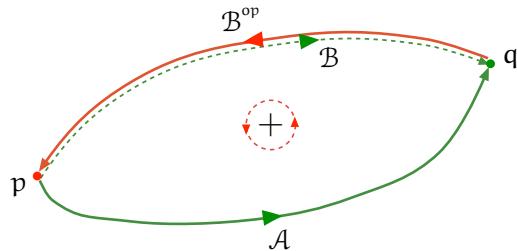


Figura 3.9 – Circuito formado por dos curvas con los mismos extremos (prestar atención a las orientaciones).

Nota 3.2.2: Complejidad geométrica de las curvas

Aunque las dos curvas \mathcal{A} , \mathcal{B} sean simples (sin auto-intersecciones), el circuito $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}^{\text{op}}$ puede que no lo sea (figura 3.8). No bastará pues con considerar solamente curvas que sean subvariedades (que por definición son simples), sino que hará falta incluir trayectorias mucho más generales. Nos limitaremos a señalar este problema aunque no entraremos aquí en las herramientas técnicas necesarias para su completa comprensión geométrica y topológica.

3.2.3 Interpretación geométrica del Teorema Fundamental

Recordamos que la integral en dimensión 0 es simplemente la suma (apartado 2.6). Necesitamos añadir una orientación a esta integral.

Definición 3.2.8: Orientación en dimensión 0

Dar una orientación a un punto $p \in \mathbb{R}^n$ es asignarle un signo. Se dice que p es

- **fuente (salida)** si el signo asignado es positivo
- **sumidero (entrada)** si el signo asignado es negativo

Definición 3.2.9: La integral orientada en dimensión 0

Sea $X = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ un conjunto finito de puntos orientados en \mathbb{R}^n , con signo $\varepsilon_j = \pm 1$ asignado al punto p_j . Dado un campo escalar $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, definimos la integral orientada de f sobre X como

$$\int_X f d\nu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^m \varepsilon_j f(p_j)$$

siendo aquí ν la medida en dimensión 0, (definición 2.1.2) que es simplemente contar.

3.2 El Teorema Fundamental para integrales de línea

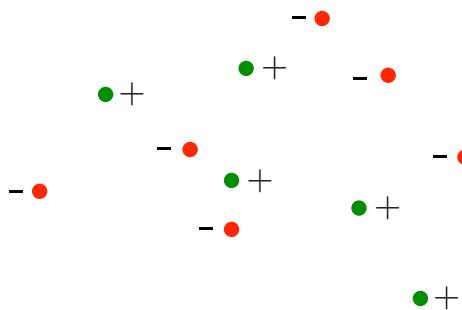


Figura 3.10 – La integral orientada en dimensión 0 es sumar o restar masas puntuales.

Por ejemplo, si \mathcal{C} es una curva con punto de entrada p y de salida q , tenemos

$$X = \partial\mathcal{C} = \{p-, q+\}, \quad \int_{\partial\mathcal{C}} f d\nu = f(q) - f(p).$$

Con esta interpretación, el Teorema Fundamental para integrales de línea es la fórmula

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot \vec{t} d\ell = \int_{\partial\mathcal{C}} f d\nu$$

que relaciona la **integral de la derivada de un campo escalar sobre una subvariedad** (la integral de línea del gradiente de un campo escalar sobre una curva) con la **integral del campo sobre el borde** (la diferencia del potencial en los extremos de la curva).

Este fenómeno, que vincula una operación **analítica** (la derivación) con una **geométrica** (el borde), culmina en Geometría Diferencial con un resultado abstracto conocido como el **Teorema de Stokes general**.

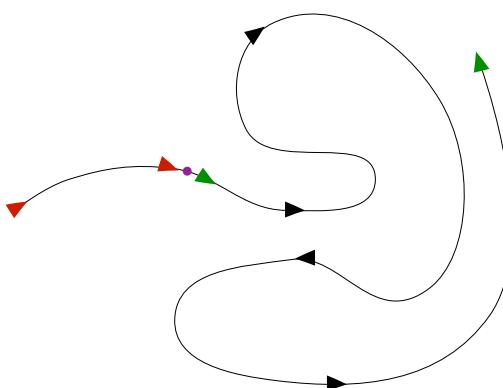


Figura 3.11 – Un campo gradiente realiza trabajo igual a la diferencia del potencial en los extremos. En los puntos no extremos se producen cancelaciones de entrada (**negativa**) y de salida (**positiva**).

Hay una interpretación relativamente sencilla de la fórmula. Si hacemos una partición de la curva colocando puntos $c_k \in \mathcal{C}, 1 \leq k \leq m$, siendo $c_0 = p, c_m = q$,

entonces, por el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial para gradientes, la diferencia de potencial en puntos «infinitesimalmente» cercanos a un punto $c \in \mathcal{C}$ es

$$\begin{aligned} f(c_k) - f(c_{k-1}) &\approx \nabla f(c_k) \cdot (c_k - c_{k-1}) \\ &= \nabla f(c_k) \cdot \frac{c_k - c_{k-1}}{\|c_k - c_{k-1}\|} \|c_k - c_{k-1}\| \underbrace{\|c_k - c_{k-1}\|}_{\text{longitud}} \underbrace{\frac{c_k - c_{k-1}}{\|c_k - c_{k-1}\|}}_{\text{cuerda unitaria}} \approx \nabla f(c) \cdot \vec{t}(c) d\ell(c) \end{aligned}$$

Sumando, las diferencias de potencial dan una **suma telescopica** que explican la cancelación que se produce para que quede $f(q) - f(p)$. A la derecha, se obtiene una aproximación a la integral de trabajo del gradiente, que en el límite cuando la distancia entre los puntos c_k tiende a 0 es igual a ella.

Intuitivamente, en cada punto $c \in \mathcal{C}$ que no sea uno de los extremos, hay una cancelación en c que puede interpretarse como una entrada cancelada por una salida ([figura 3.11](#)).

3.2.4 El Recíproco del Teorema Fundamental del Cálculo

Hemos visto, como corolario del Teorema Fundamental ([apartado 3.2.2](#)), que un campo gradiente tiene la propiedad de independencia del camino. El recíproco también es cierto y se puede considerar como recíproco del Teorema Fundamental, aunque lo es más precisamente de este corolario.

Enunciado 3.2.7: El recíproco del Teorema Fundamental para integrales de línea

Si un campo vectorial \vec{F} en una región **conexa** $W \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene la propiedad de independencia del camino, entonces es un campo gradiente, es decir, tiene un potencial.

- **Demostración:** El potencial f se construye eligiendo un *punto base* $p \in G$ y definiendo para $x \in G$,

$$f(x) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_p^x \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

donde esta integral representa la integral sobre una curva C en G con su extremo de entrada en p y de salida en x . La independencia del camino garantiza que **la integral está bien definida**, es decir, que no depende de la elección de C .

Tenemos que verificar que f es un potencial, es decir, $\nabla f = \vec{F}$. En coordenadas, escribiendo

$$\vec{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n), \quad f_i : G \rightarrow \mathbb{R},$$

3.2 El Teorema Fundamental para integrales de línea

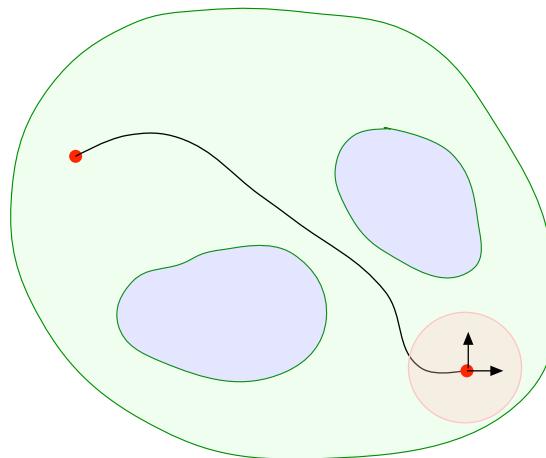


Figura 3.12 – Construcción del potencial. Las zonas en azul representan «lagunas» o «agujeros» en la región.

lo que necesitamos ver es que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(q) = f_i(q), \quad 1 \leq i \leq n, \quad q \in G.$$

Por definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(q) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(q + he_i) - f(q)}{h}, \quad e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$$

y el potencial está definido como el trabajo realizado por \vec{F} . Entonces, fijamos un camino cualquiera \mathcal{C} que va de p hasta q , y lo concatenamos con el **segmento** S que va de q hasta $x = q + he_i$, parametrizado por

$$\sigma(t) = q + the_i, \quad t \in [0, 1],$$

así obtenemos el camino $\mathcal{C} \cup S$, que une p con x . Por aditividad,

$$f(q + he_i) = \int_{\mathcal{C} \cup S} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} + \int_S \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = f(q) + \int_S \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{f(q + he_i) - f(q)}{h} &= \frac{1}{h} \int_S \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{h} \int_0^1 \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^1 \vec{F}(q + the_i) \cdot (he_i) dt = \int_0^1 f_i(q + the_i) dt \end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(q) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(q + he_i) - f(q)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 f_i(q + the_i) dt \\ &= \int_0^1 \lim_{h \rightarrow 0} f_i(q + the_i) dt = \int_0^1 f_i(q) dt = f_i(q). \end{aligned}$$

El **intercambio del límite con la integral** está justificado por los resultados generales sobre integrales paramétricas, al tratarse de una función continua en un intervalo cerrado y acotado, que se puede dominar por su máximo. ■

Pregunta 3.2.1: Otra condición que garantiza un potencial

Extrayendo la parte relevante de la demostración anterior, demostrar que si existe una función $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\int_{[p,q]} \vec{F} \cdot d\vec{t} = f(q) - f(p)$ sobre cualquier segmento $[p, q]$ contenido en W , entonces $\nabla f = \vec{F}$.

Juntando los diversos resultados de las secciones anteriores, llegamos a una serie de equivalencias fundamentales.

Enunciado 3.2.8: Condiciones equivalentes para la existencia de un potencial

Para un campo vectorial en una región $W \subseteq \mathbb{R}^n$, son equivalentes:

- \vec{F} tiene un potencial en W (es un gradiente).
- \vec{F} tiene la propiedad de independencia del camino en W .
- \vec{F} tiene circulación nula en cualquier curva cerrada en W .

Definición 3.2.10: Campo conservativo

Si el campo vectorial \vec{F} en la región W cumple cualquiera de las propiedades equivalentes dadas en el [enunciado 3.2.8](#), decimos que es **conservativo**.

3.2.5 Campos conservativos en la mecánica clásica

La denominación de campo conservativo tiene su origen en la **ley de conservación de la energía** en su versión para la mecánica clásica ó Newtoniana, donde se supone que una partícula de masa (constante) m se mueve a lo largo de una trayectoria γ obedeciendo la **segunda ley de Newton**, $\vec{F} = m\vec{a}$, donde \vec{F} representa la **suma de todas las fuerzas** que actúan sobre la partícula, y \vec{a} es la aceleración.

Una **ecuación de movimiento** es una parametrización $\vec{r} = \gamma(t)$, donde t denota el tiempo, que describe la **posición** de la partícula en el instante t . Entonces, su **distancia** relativa al origen es $r = \|\gamma(t)\|$, su **velocidad** es $\vec{v} = \gamma'(t)$, con magnitud $v = \|\gamma'(t)\|$, y su **aceleración** es $\vec{a} = \gamma''(t)$, con magnitud $a = \|\gamma''(t)\|$.

Físicamente, el elemento de longitud dirigido $d\vec{t} = d\vec{r}$ sobre la trayectoria es

$$d\vec{r} = \vec{t} d\ell = \gamma'(t) dt = \vec{v} dt \quad [3.2.3]$$

ya que $\vec{v}(x) = \gamma'(t)$ en el punto $x = \gamma(t)$ de la trayectoria.

3.2 El Teorema Fundamental para integrales de línea

El **trabajo** W ejercido por una fuerza \vec{F} sobre una partícula que se mueve en una trayectoria γ , es la integral de la fuerza por el desplazamiento tangencial,

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad [3.2.4]$$

En forma diferencial, equivale a

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad [3.2.5]$$

La **potencia mecánica** P se define como fuerza por velocidad:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad [3.2.6]$$

o sea, la potencia es la derivada (cambio instantáneo) del trabajo,

$$\frac{dW}{dt} = P \quad [3.2.7]$$

La **energía cinética** se define por

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad [3.2.8]$$

y si el campo tiene potencial f , o sea, si $\vec{F} = \nabla f$, la **energía potencial** se define por

$$U = -f, \quad \vec{F} = \nabla f \quad [3.2.9]$$

(atención al signo).

Enunciado 3.2.9: Teorema del trabajo-energía en mecánica clásica

El trabajo realizado por la suma de **todas** las fuerzas que actúan sobre una partícula en una trayectoria γ es igual al cambio en su energía cinética:

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta K, \quad \Delta K = K_{\text{final}} - K_{\text{initial}}$$

En forma diferencial, la derivada de la energía cinética es igual a la potencia:

$$\frac{dK}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = P$$

O sea, $dK(\gamma(t))/dt = \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ en la posición $\vec{r} = \gamma(t)$ sobre la trayectoria.

- **Demostración:** Por la regla del producto para el producto interior,

$$\begin{aligned}\frac{dK}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 \right) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \frac{1}{2} m \left(\cancel{2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right) = m \vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v},\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos aplicado la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, que es válida para la suma de **todas** las fuerzas que actúan sobre la partícula.

La versión integral se obtiene... integrando:

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{v} dr = \int_{\gamma} \frac{dK}{dt} dt = \Delta K. \quad \blacksquare$$

La forma diferencial del teorema de trabajo-energía lleva formalmente a la relación

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW}{dt} = P, \quad dK = dW,$$

es decir, que la potencia es tanto la derivada de la energía cinética como del trabajo. Esto **no** conlleva una equivalencia entre los conceptos **físicos** de trabajo y energía cinética. La energía cinética es una **propiedad de la partícula en movimiento**. El trabajo se ejerce **sobre** la partícula. Es el efecto de las fuerzas que actúan sobre ella, cambiando su energía cinética, como dice el teorema.

Es erróneo pensar que el teorema del trabajo-energía implica que el trabajo es independiente del camino, al ser igual a la diferencia entre la energía cinética de partida y la de llegada, sugiriendo que sólo depende de los extremos de la trayectoria. y por tanto igual para trayectorias con los mismos extremos.

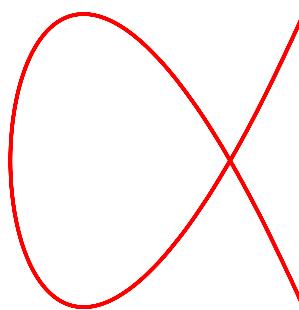


Figura 3.13 – Trayectoria que pasa por un mismo punto en dos tiempos distintos.

El problema es que la energía cinética no es una función de la **posición**, es una función de la **velocidad** v (escalar), y ésta a su vez depende del **tiempo**. Pensemos en el caso de una trayectoria cerrada o bucle. Las velocidades al pasar por una **misma posición** dada en **tiempos distintos** (Figura 3.13), pueden ser distintas, haciendo que la diferencia ΔK sea no nula. En este caso el trabajo total será no nulo y por tanto \vec{F} no será conservativa.

3.2 El Teorema Fundamental para integrales de línea

Un ejemplo de esto se da si la fuerza total que actúa es de **ficción**, para la cual el trabajo es proporcional a la **distancia recorrida**. Aunque se recorra una trayectoria cerrada, volviendo al punto de partida, la fricción habrá realizado un trabajo no nulo. Por ejemplo, se puede entrar en una serie de bucles con una misma velocidad inicial, pero debido a la longitud de éstos, acabarlo con distintas velocidades finales (Figura 3.14).

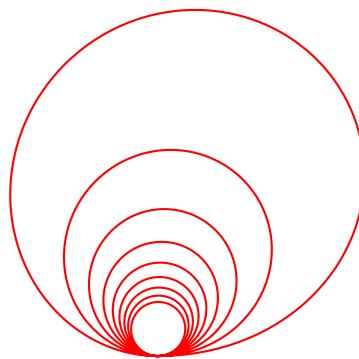


Figura 3.14 – Bucles basados en el mismo punto.

Ahora bien, si la fuerza total \vec{F} es realmente independiente del camino, es decir, es conservativa, y por tanto tiene un potencial $f = -U$, siendo $U(x)$ un campo escalar, función de la posición x en el dominio de \vec{F} , entonces tenemos la ley de conservación de la energía.

Enunciado 3.2.10: Ley de conservación de la energía en la mecánica clásica

Si la fuerza total \vec{F} tiene potencial $f = -U$ en una región, entonces la suma de la energía cinética K y la energía potencial U es constante:

$$K + U = \text{cte}$$

a lo largo de cualquier trayectoria en el dominio.

- **Demostración:** Por un lado, el Teorema Fundamental nos dice que a lo largo de una trayectoria γ ,

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{t} = \int_{\gamma} -\nabla U \cdot d\vec{t} = -\Delta U.$$

Por otro lado, el Teorema 3.2.9 del trabajo-energía dice que $W = \Delta K$, por tanto $\Delta K + \Delta U = K_{\text{final}} - K_{\text{inicial}} + U_{\text{final}} - U_{\text{inicial}} = 0$, luego $K + U$ tiene el mismo valor en los extremos de γ . Como γ puede unir cualquier par de puntos de la región, la suma $K + U$ es constante en la región. ■

3.2.6 Criterio de simetría para la existencia de un potencial

Dada la importancia del concepto en relación con las leyes de conservación de la energía, es útil saber cuándo un campo dado \vec{F} es conservativo. Por supuesto, tenemos los criterios equivalentes del [enunciado 3.2.8](#), pero ¿son prácticos? El primero plantea las [ecuaciones del potencial](#).

Definición 3.2.11: Ecuaciones de un potencial

Sea $W \subseteq \mathbb{R}^n$ una región, con coordenadas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Un campo vectorial continuo \vec{F} en W es conservativo si y sólo si existe una solución $f(x)$ de clase C^1 al sistema de n ecuaciones diferenciales en n variables

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \quad \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

donde f_j es la componente j -ésima de \vec{F} .

Las dos condiciones geométricas del [enunciado 3.2.8](#), independencia del camino y circulación nula, requieren calcular infinitas integrales de trabajo, por ejemplo, sobre cualquier curva cerrada en W . En esta forma tampoco son prácticos.

Considerando el sistema de ecuaciones, que es simplemente la ecuación $\vec{F} = \nabla f$ en coordenadas, haremos una hipótesis adicional: que el propio campo \vec{F} es de clase C^1 , es decir, que sus componentes f_j son derivables con derivadas continuas.

Enunciado 3.2.11: Criterio de simetría para que un campo sea conservativo

Sea \vec{F} un campo de clase C^1 en la región $W \subseteq \mathbb{R}^n$, con componentes $\vec{F} = (f_1, \dots, f_n)$ en las coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$. Una condición **necesaria** para que \vec{F} sea conservativo en W es que se cumplan las **relaciones de simetría**

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Dicho de otra manera, la matriz jacobiana de $\vec{F}: W \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es simétrica.

3.2 El Teorema Fundamental para integrales de línea

■ **Demostración:** Usaremos un resultado básico del Cálculo Diferencial multivariable, la **simetría de las derivadas parciales segundas**. Suponiendo que $\vec{F} = \nabla f$, al suponer \vec{F} de clase C^1 , el potencial f es de clase C^2 y por tanto esto, junto con las ecuaciones del potencial, nos dan

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

como queríamos demostrar. Usando la terminología del Cálculo Diferencial multivariable, como $\vec{F} = \nabla f$, la matriz **jacobiana** $[d\vec{F}]$ de \vec{F} es igual a la matriz **hessiana** $[Hf]$ (de derivadas parciales segundas) de f , y ésta siempre es una matriz simétrica para funciones de clase C^2 . ■

El [enunciado 3.2.11](#) es fácil de verificar, pues solo requiere calcular las derivadas del campo. Si *no* se cumple, podemos concluir inmediatamente que el campo *no* es conservativo. Si se cumple, se plantea la cuestión de cuándo este criterio será también **suficiente** para que el campo sea conservativo. Esta pregunta es más complicada de responder, pues depende de la **topología del dominio del campo**.

3.2.7 El criterio de simetría en dos y tres dimensiones

Para un campo $\vec{F} : W \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con componentes $\vec{F} = (P, Q) = P\vec{i} + Q\vec{j}$ respecto a una base ortonormal \vec{i}, \vec{j} , la matriz jacobiana es

$$\begin{matrix} P & \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{array} \right) \\ Q & x \quad y \end{matrix}$$

por tanto hay una única condición de simetría.

Enunciado 3.2.12: Criterio de simetría para campos bidimensionales conservativos

Para que el campo $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ tenga un potencial, es necesario que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Para un campo $\vec{F} : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con componentes $\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

respecto a una base ortonormal $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, la matriz jacobiana es

$$\begin{array}{c} P \\ Q \\ R \end{array} \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}$$

por tanto las condiciones de simetría son

Enunciado 3.2.13: Criterio de simetría para campos tridimensionales conservativos

Para que el campo $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ tenga un potencial, es necesario que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

Resulta que en el caso tridimensional, las condiciones de simetría se pueden expresar en términos de un **operador diferencial vectorial** conocido como el **rotacional**. Su nombre indica una relación con la «tendencia a girar» del campo, que intentaremos aclarar más adelante.

Definición 3.2.12: Operador rotacional

Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ es un campo tridimensional, su **rotacional** es el campo definido por la acción simbólica de las derivadas parciales

$$\text{rot } \vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

[3.2.10]

A la luz de esta definición, queda claro que la condición de simetría equivale a tener **rotacional nulo**.

Enunciado 3.2.14: Criterio del rotacional para campos conservativos

Para que el campo $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ tenga un potencial escalar, es necesario que tenga **rotacional nulo**:

$$\nabla \times \vec{F} = 0$$

De hecho, lo que hemos demostrado es la primera de las dos relaciones fundamentales entre los operadores diferenciales vectoriales.

Enunciado 3.2.15: El rotacional de un gradiente es nulo

Para todo campo escalar f de clase C^2 en una región de \mathbb{R}^3

$$\nabla \times \nabla f = 0$$

idénticamente sobre toda esa región.

3.2.8 Suficiencia del criterio de simetría para la existencia del potencial

El primer resultado hacia un recíproco del [enunciado 3.2.11](#) se debe a Poincaré. Antes de poder enunciarlo debemos introducir el tipo de región para el cual es válido el recíproco.

Definición 3.2.13: Región estrellada

Una región $W \subseteq \mathbb{R}^n$ es **estrellada** o **tiene forma de estrella** si existe un **punto base** $p \in W$ tal que para cualquier otro punto $q \in W$, el segmento $[p, q]$ entre p y q está contenido en W .

Dicho de otra manera, una región W es estrellada si hay un punto desde el cual se «puede ver» cualquier otro punto de la región, mirando en línea recta. Equivalentemente, si hay un punto p tal que una fuente de luz que origine en p ilumina todo el resto del conjunto ([figura 3.15](#)).

Nota 3.2.3: Los conjuntos convexos son estrellados

Un conjunto K es convexo si dados dos puntos cualesquiera $p, q \in K$, el segmento $[p, q]$ entre ellos está contenido en K . Claramente un convexo K es estrellado y *cualquier* punto vale como punto base.

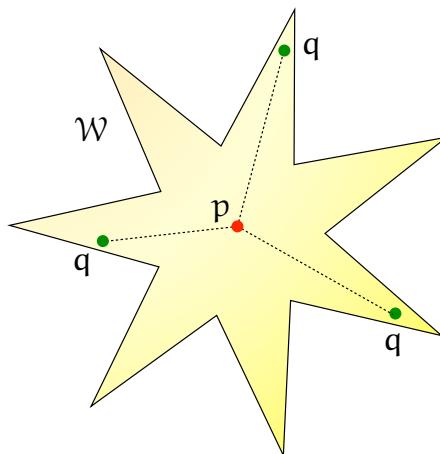


Figura 3.15 – Un conjunto estrellado es uno en el cual hay un punto visible en línea recta desde cualquier otro punto, un punto que ilumina todo el conjunto.

Enunciado 3.2.16: El Lema de Poincaré para potenciales escalares

Sea \vec{F} un campo vectorial de clase C^1 en una región estrellada $W \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $\vec{F} = (f_1, \dots, f_n)$ cumple el criterio de simetría $\partial f_j / \partial x_i = \partial f_i / \partial x_j$ sobre W , entonces es conservativo en W .

- *Demostración:* Trasladando desde cualquier punto base, podemos suponer que el origen es un punto base de W manteniendo todas las relaciones diferenciales. Entonces para todo $x \in W$, el segmento $[0, x]$ está contenido en W . Definimos

$$f(x) = \int_{[0, x]} \vec{F} \cdot d\vec{t}$$

es decir, $f(x)$ es el trabajo realizado a lo largo del segmento desde el punto base hasta x . Parametrizando el segmento $[0, x]$ mediante $\sigma(t) = tx$ con $t \in [0, 1]$, queda

$$f(x) = \int_{[0, x]} \vec{F} \cdot d\vec{t} = \int_0^1 \vec{F}(tx) \cdot x \, dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n f_j(tx)x_j \, dt = \sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 f_j(tx) \, dt.$$

Demostramos¹ que f es un potencial de \vec{F} . Derivando respecto a la variable x_i , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 f_j(tx) \, dt \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_j \int_0^1 f_j(tx) \, dt \right) \end{aligned}$$

¹Esta demostración es fundamental y se encuentra en muchos contextos, con distintos grados de generalidad. Contiene el germen de la conocida como *fórmula mágica de Cartan*.

3.2 El Teorema Fundamental para integrales de línea

y por la regla del producto,

$$= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i} \int_0^1 f_j(tx) dt + x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 f_j(tx) dt \right)$$

e intercambiando la derivada con la integral (para esto basta con la continuidad de las funciones componentes y sus derivadas ya que el intervalo $[0, 1]$ es compacto)

$$= \sum_{j=1}^n \left(\delta_{ij} \int_0^1 f_j(tx) dt + x_j \int_0^1 t \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx) dt \right)$$

donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$; aplicando la regla de la cadena

$$= \sum_{j=1}^n \left(\delta_{ij} \int_0^1 f_j(tx) dt + x_j \int_0^1 t \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx) dt \right)$$

y ahora observamos que $\delta_{ij} a_i = \delta_{ij} a_j$ para cualquier sucesión a_k (considerar los distintos casos) y **aplicamos la hipótesis de simetría** para **intercambiar los índices**

$$= \sum_{j=1}^n \left(\delta_{ij} \int_0^1 f_j(tx) dt + x_j \int_0^1 t \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(tx) dt \right)$$

con lo cual, distribuyendo la suma, obtenemos

$$= \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \int_0^1 f_i(tx) dt + \sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 t \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(tx) dt$$

viendo que en la primera suma sólo cuenta el término con $j = i$, y en el segundo, intercambiando la suma finita con la integral e incorporando el factor x_j , queda

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 f_i(tx) dt + \int_0^1 t \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(tx) dt \\ &= \int_0^1 \left(f_i(tx) + t \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(tx) \right) dt \end{aligned}$$

que en notación vectorial es simplemente

$$= \int_0^1 (f_i(tx) + t \nabla f_i(tx) \cdot x) dt$$

y ahora, **como por arte de magia**, se observa que el integrando es una derivada respecto a t , por el **enunciado 3.2.2** aplicado a la composición del campo escalar f_i con la curva $t \mapsto tx$,

$$= \int_0^1 \left(\frac{dt}{dt} f_i(tx) + t \frac{d}{dt} (f_i(tx)) \right) dt$$

3.2.8 Suficiencia del criterio de simetría para la existencia del potencial

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} (tf_i(tx)) dt$$

que, finalmente, por el Teorema Fundamental en una variable, se reduce a

$$= \left[tf_i(tx) \right]_{t=0}^{t=1} = f_i(x)$$

con lo cual queda demostrado que $\partial f / \partial x_i = f_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, o sea, f es un potencial de \vec{F} . ■

Hay una propiedad **topológica** mucho más general que la noción de conjunto estrellado, que también implica la suficiencia de la condición de simetría para la existencia del potencial. Como su enunciado riguroso requiere Topología General y Topología Algebraica, lo comentaremos aquí solamente de manera «intuitiva».

A continuación nos referiremos a **espacios topológicos**, aunque para nuestras aplicaciones, se tratará simplemente de subconjuntos del espacio euclídeo \mathbb{R}^n .

Definición 3.2.14: Concepto (no riguroso) de conjunto contractible

Un espacio topológico W es **contractible** (o **contráctil**)^a si se puede contraer o reducir a un punto suyo de manera continua, sin salirse de W .

Enunciado 3.2.17: Suficiencia de la simetría en conjuntos contractiles

Sea \vec{F} un campo vectorial de clase C^1 en una región contractible $W \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $\vec{F} = (f_1, \dots, f_n)$ cumple el criterio de simetría $\partial f_j / \partial x_i = \partial f_i / \partial x_j$ sobre W , entonces es conservativo en W .

La demostración del [enunciado 3.2.17](#) queda demasiado lejos del alcance de lo expuesto aquí.

Existe una noción más débil, digamos a medio camino entre estrellado y contráctil (aunque en abstracción está más cerca del segundo concepto) que también implica la suficiencia.

Definición 3.2.15: Concepto (no riguroso) de conjunto simplemente conexo

Un espacio topológico W es **simplemente conexo** si **toda curva cerrada en W se puede contraer a un punto en W** de manera continua, sin salirse de W .

^aLa primera no aparece en el D.R.A.E., la segunda sí.

Enunciado 3.2.18: Suficiencia de la simetría en conjuntos simplemente conexos

Sea \vec{F} un campo vectorial de clase C^1 en una región simplemente conexa $W \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $\vec{F} = (f_1, \dots, f_n)$ cumple el criterio de simetría $\partial f_j / \partial x_i = \partial f_i / \partial x_j$ sobre W , entonces es conservativo en W .

Como puede verse, al menos abstractamente, efectivamente es un concepto más débil que el de ser un espacio contráctil, pues en éstos todo se contrae a un punto mientras que en los simplemente conexos, basta con que lo hagan las curvas cerradas. Siempre en el plano intuitivo, damos una idea de la diferencia entre ambos conceptos.

Nota 3.2.4: Contractibilidad y conectividad simple en términos de agujeros o lagunas

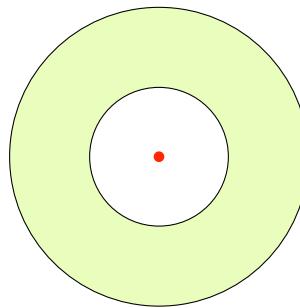
Un espacio es simplemente conexo si no tiene agujeros alrededor de los cuales se puede «enganchar» una curva cerrada, mientras que un espacio es contractible si no tiene agujeros de ningún tipo donde se puedan «enganchar» ni figuras como circunferencias, ni esferas, ni sus análogos en más dimensiones...

Nota 3.2.5: Equivalencia para regiones planas

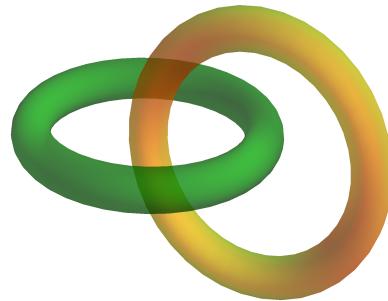
Para regiones (abiertos conexos) **planas**, simplemente conexo y contractible son equivalentes.

Para ayudar a desarrollar la intuición, damos una lista de ejemplos:

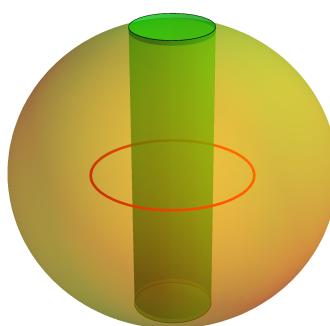
- 1.** Toda región estrellada es contractible.
- 2.** El plano sin un punto, $W = \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$, no es simplemente conexo. Una circunferencia en W que rodee p no se puede reducir a un punto sin salirse de W porque se «engancha» en p .
- 3.** Una «isla» plana con «lagunas» no será simplemente conexa: las lagunas se podrán rodear por curvas cerradas que no se pueden contraer a un punto sin salirse de la isla (recordar la [figura 3.7](#)). En particular, un «atolón» no es simplemente conexo ([figura 3.16](#)).
- 4.** El espacio tridimensional menos un punto, $W = \mathbb{R}^3 \setminus \{p\}$, sí es simplemente conexo, pues una curva cerrada se puede reducir a un punto sin «engancharse» en p . Sin embargo, no es contractible al tener un «agujero» en p .
- 5.** Una superficie cilíndrica no es simplemente conexa.
- 6.** Un toro no es simplemente conexo.

**Figura 3.16** – Un «atolón» no es simplemente conexo.

7. El espacio tridimensional menos una circunferencia \mathcal{C} , $W = \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C}$, no es simplemente conexo, pues se pueden «enganchar» otras circunferencias en W a la circunferencia omitida \mathcal{C} ([figura 3.17](#)).

**Figura 3.17** – Anillos enlazados. No se puede desenlazar uno del otro de manera continua. Quitando uno del espacio tridimensional, el otro no se puede contraer a un punto sin salirse fuera de la región.

8. Una superficie esférica es simplemente conexa, pero no contractible: tiene un «agujero» en la bola que encierra.
9. La región formada por una bola menos su centro es simplemente conexa, pero no contractible.
10. La región formada por una bola taladrada por un cilindro no es simplemente conexa. Las circunferencias que rodean al cilindro omitido no se pueden contraer sin salirse de la región ([figura 3.18](#)).

**Figura 3.18** – Bola taladrada por un cilindro.

3.2.9 Construcción de potenciales

Supongamos dado un campo \vec{F} cuyas componentes f_1, \dots, f_n satisfacen las condiciones de simetría ([enunciado 3.2.11](#)) en una región contractible ([definición 3.2.14](#)) fija.

Si el dominio de definición es [estrellado](#), entonces la demostración que hemos dado del [El Lema de Poincaré para potenciales escalares](#) proporciona una fórmula directa para el potencial en términos de una integral

$$f(x) = \int_{[p,x]} \vec{F} \cdot d\vec{t} \quad [3.2.11]$$

donde p es un punto base.

Para una región más general queremos hallar su potencial escalar f , determinado de manera única salvo constante, resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = f_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Para ello existe un procedimiento sistemático que se puede resumir en un proceso de antiderivación iterada. Procedemos por [eliminación recursiva](#) de las variables.

1. En el primer paso, integramos la primera ecuación respecto á x_1 , hallando una [antiderivada](#) o [integral indefinida particular](#) de f_1 :

$$\alpha_1 = \int f_1 dx_1, \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} = f_1$$

La solución *general* de la primera ecuación es entonces

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + C_1(x_2, \dots, x_n)$$

donde C_1 es una [constante relativa](#) respecto á x_1 , es decir, una función que no depende de x_1 pero sí puede depender de las demás variables x_j con $2 \leq j \leq n$.

2. Para determinar la función $\tilde{f} \stackrel{\text{def}}{=} C_1 = f - \alpha_1$, observamos que a su vez satisface un sistema de ecuaciones de potencial, en las $n - 1$ variables x_2, \dots, x_n ,

$$\tilde{f}_j \stackrel{\text{def}}{=} f_j - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_j} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}, \quad 2 \leq j \leq n.$$

Necesitamos verificar que este nuevo sistema no depende de x_1 y que satisface las condiciones de simetría. Efectivamente, para $2 \leq i, j \leq n$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x_1} &= \frac{\partial f_j}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x_1 \partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x_i} &= \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

por las condiciones de simetría para las f_j y la simetría de las derivadas parciales segundas.

3. Procediendo de esta manera, aplicando el primer paso a la primera ecuación de cada nuevo sistema de ecuaciones que va apareciendo, se va reduciendo el número de variables hasta que solamente queda una ecuación en una variable, que al integrar nos da una **constante absoluta** $C_n = C$, es decir, que no depende de ninguna de las variables x_1, \dots, x_n . El potencial hallado tiene la forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1(x_1, \dots, x_n) + \alpha_2(x_2, \dots, x_n) \\ + \dots + \alpha_k(x_k, \dots, x_n) + \dots + \alpha_n(x_n) + C.$$

Para los lectores interesados en la resolución simbólica de ecuaciones, damos los detalles en forma algorítmica, junto con las demostraciones que garantizan su validez.

El algoritmo parte del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = f_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

[ECP]

y produce una solución f de la forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1(x_1, \dots, x_n) + \alpha_2(x_2, \dots, x_n) \\ + \dots + \alpha_k(x_k, \dots, x_n) + \dots + \alpha_n(x_n) + C.$$

[POT]

Definición 3.2.16: Construcción del potencial: inicialización

Escribimos las ecuaciones del potencial [ECP] en algún orden de los índices $1, 2, \dots, n$. Supondremos por comodidad que es de menor a mayor. Se pone

$$C_0 = f$$

Definición 3.2.17: Construcción del potencial: paso general inductivo $k \mapsto k+1$

En el paso k -ésimo, con $1 \leq k \leq n$, tendremos una fórmula **parcial** para el potencial, de la forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1(x_1, \dots, x_n) + \alpha_2(x_2, \dots, x_n) \\ + \dots + \alpha_{k-1}(x_{k-1}, \dots, x_n) + C_{k-1}(x_k, \dots, x_n)$$

[POT(k)]

3.2 El Teorema Fundamental para integrales de línea

donde las funciones $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ son conocidas y satisfacen las relaciones

$$f_j - \sum_{i=1}^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = 0, \quad 1 \leq j \leq k-1. \quad [\text{REL}(k)]$$

Derivamos **[POT(k)]** respecto a la variable x_k y despejamos, sustituyendo la ecuación k -ésima del potencial, para obtener

$$\frac{\partial C_{k-1}}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} \quad [*]$$

Se verifica que el lado derecho de **[*]** no depende de x_1, \dots, x_{k-1} y por tanto su antiderivada general tiene la forma

$$C_{k-1}(x_k, \dots, x_n) = \alpha_k(x_k, \dots, x_n) + C_k(x_{k+1}, \dots, x_n) \quad [**]$$

que al sustituir en **[POT(k)]** lleva a **[POT(k + 1)]**. Aquí C_k es una constante arbitraria relativa á x_1, \dots, x_k y

$$\alpha_k = \int \left(f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} \right) dx_k$$

es una antiderivada explícita conocida a partir de los datos anteriores $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ y de la componente f_k , y por tanto

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_k} = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} \quad \therefore \quad f_k - \sum_{i=1}^k \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} = 0$$

con lo cual se tiene **[REL(k + 1)]** (esta nueva ecuación corresponde á $j = k$). Esto completa el paso inductivo.

Se verifica que la entrada inicial, correspondiente á $k = 1$, satisface trivialmente estas relaciones, pues **[POT(k)]** es $f = C_0$ y **[REL(k)]** es una ecuación vacía.

Debemos justificar nuestra afirmación que el lado derecho de **[*]** no depende de x_1, \dots, x_{k-1} . Para ello, comprobamos que sus derivadas respecto á x_j con $1 \leq j \leq k-1$ son todas nulas, o sea,

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x_j \partial x_k} = 0, \quad 1 \leq j \leq k-1. \quad [\text{IND}]$$

Para verlo, observemos primero que en **[POT(k)]** la función α_i sólo depende de x_i, \dots, x_n y no de x_1, \dots, x_{i-1} , por tanto se tiene

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = 0, \quad 1 \leq j < i$$

con lo cual en [IND] sólo son no triviales los sumandos con $i \leq j$, o sea, equivale a

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^j \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x_j \partial x_k} = 0, \quad 1 \leq j \leq k-1. \quad [\text{IND}']$$

Por otra parte, derivando [REL(k)] respecto á x_k se obtiene

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k \partial x_j} = 0$$

y por las condiciones de simetría, esto es lo mismo que [IND'].

Definición 3.2.18: Construcción del potencial: finalización

El algoritmo acaba tras n pasos. En el último paso, en la forma intermedia de la solución dada por [POT(k)], con $k = n$, queda sólo la última variable x_n , con una constante relativa $C_{n-1}(x_n)$; al aplicar el paso nos lleva de [POT(n)] a [POT(n + 1)], que es exactamente la forma final deseada [POT], donde la constante $C_n = C$ ya es absoluta, no depende de las variables x_1, \dots, x_n .

La característica principal del algoritmo es que se van eliminando variables a cada paso: la variable x_k desaparece en el paso k -ésimo. Esto se observará en la práctica como una cancelación, al igualar la fórmula k -ésima de las ecuaciones del potencial, $\partial f / \partial x_k = f_k$, con la derivada respecto á x_k del potencial parcial $f = \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} + C_{k-1}$ obtenido hasta este paso.

Cuesta mucho más entender el algoritmo explicado así de forma abstracta que mediante ejemplos, por lo cual procedemos a dar algunos.

► Ejemplo 3.2.1

Consideremos el campo vectorial bidimensional

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{1}{2}xy, \frac{1}{4}x^2 \right).$$

Calculamos el trabajo que realiza en las curvas con extremos en $(0, 0)$ y $(1, 1)$ dadas por

$$\mathcal{C}_1 : y = x \quad \mathcal{C}_2 : x = y^2 \quad \mathcal{C}_3 : y = x^2$$

Parametrizamos \mathcal{C}_1 por $\gamma(t) = (t, t)$ con $t \in [0, 1]$. Entonces

$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{4}t^2 \right) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 \frac{3}{4}t^2 dt = \frac{1}{4}.$$

Parametrizamos \mathcal{C}_2 por $\gamma(t) = (t^2, t)$ con $t \in [0, 1]$. Entonces

$$\int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}t^3, \frac{1}{4}t^4 \right) \cdot (2t, 1) dt = \int_0^1 \left(t^4 + \frac{1}{4}t^4 \right) dt = \int_0^1 \frac{5}{4}t^4 dt = \frac{1}{4}.$$

3.2 El Teorema Fundamental para integrales de línea

Parametrizamos \mathcal{C}_3 por $\gamma(t) = (t, t^2)$ con $t \in [0, 1]$. Entonces

$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}t^3, \frac{1}{4}t^2 \right) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^3 \right) dt = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}.$$

Dado que es el mismo valor, sospechamos que el campo puede ser conservativo. Verificamos las condiciones de simetría:

$$P = \frac{1}{2}xy, \quad Q = \frac{1}{4}x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2}x.$$

Las ecuaciones del potencial son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{4}x^2.$$

Integrando la primera ecuación respecto á x queda

$$f(x, y) = \frac{1}{4}x^2y + C(y)$$

donde $C(y)$ es una constante respecto á x , es decir, una función de y . Derivamos esta expresión respecto á y y sustituimos la segunda ecuación para obtener

$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{4}x^2 + C'(y) \quad \therefore \quad C'(y) = 0 \quad \therefore \quad C(y) = C$$

donde C es una constante absoluta. Por tanto el potencial es

$$f(x, y) = \frac{1}{4}x^2y.$$



► Ejemplo 3.2.2

Calcular $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ donde $\vec{F}(x, y) = (2xy, x^2 - y)$ y \mathcal{C} es cualquier curva de $(-1, 4)$ á $(1, 2)$.

Dado que no se indica la curva, el campo \vec{F} debería ser conservativo. Resolvemos la ecuación $\nabla f = \vec{F}$ integrando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy &\implies f(x, y) = x^2y + C(y) \\ &\implies x^2 - y = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + C'(y) \\ &\implies C'(y) = -y \\ &\implies C(y) = -\frac{y^2}{2} + C \implies f(x, y) = x^2y - \frac{y^2}{2} + C \end{aligned}$$

por tanto, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo para integrales de

línea,

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = f(1, 2) - f(-1, 4) = (2 - 2) - (4 - 8) = 4.$$



► Ejemplo 3.2.3

Calcular $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ donde $\vec{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + z^2, 2yz)$ y \mathcal{C} es cualquier curva entre $(1, 1, 0)$ y $(0, 2, 3)$.

Dado que no se indica la curva, el campo \vec{F} debería ser conservativo. Resolvemos la ecuación $\nabla f = \vec{F}$ integrando primero respecto á x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \implies f(x, y, z) = x^2y + C(y, z)$$

ahora derivando respecto á y ,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial C}{\partial y} = x^2 + z^2 \implies \frac{\partial C}{\partial y} = z^2 \implies C(y, z) = yz^2 + K(z)$$

y derivando respecto á z ,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2yz = \frac{\partial C}{\partial z} = 2yz + K'(z) \implies K'(z) = 0 \implies K(z) = K$$

con K constante absoluta, por tanto

$$f(x, y, z) = x^2y + yz^2 + K$$

y

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = f(0, 2, 3) - f(1, 1, 0) = 18 - 1 = 17.$$



► Ejemplo 3.2.4

Sea $\vec{r}(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ el **campo posición**, que es la función identidad. Es de clase C^∞ en todo \mathbb{R}^n . Sus componentes son las funciones coordenadas, $f_j = x_j$, y satisface las condiciones de simetría:

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} = \delta_{ji} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

por tanto tiene un potencial. Para hallarlo primero integramos respecto á x_1 :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_1 \implies f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + C_1(x_2, \dots, x_n)$$

Ahora derivamos esta relación respecto á x_2 y sustituimos la segunda ecuación

3.2 El Teorema Fundamental para integrales de línea

del potencial:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_2 = 0 + \frac{\partial C_1}{\partial x_2} \implies C_1(x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2}x_2^2 + C_2(x_3, \dots, x_n)$$

por tanto

$$f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + C_2(x_3, \dots, x_n)$$

Procediendo así llegamos a

$$f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2) + C$$

donde C es una constante absoluta. En notación vectorial, hemos hallado la relación

$$\vec{r} = \nabla \left(\frac{1}{2}r^2 \right), \quad r = \|\vec{r}\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} \quad [3.2.12]$$



3.3 El Teorema de Green en el plano

3.3.1 Topología de las curvas planas

Si uno se detiene a pensar, cuando nos piden dibujar una región plana G , lo que dibujamos es de hecho su **borde** o **frontera**, denotada por ∂G (la misma notación que una derivada parcial, debido precisamente a los teoremas que generalizan el Teorema Fundamental del Cálculo). Detrás de esta al parecer evidente afirmación están algunos teorema básicos de la Topología plana, cuyos enunciados parecen «evidentes» pero con demostraciones fuera del alcance de lo que estamos viendo aquí.

Uno de estos enunciados es que una región plana acotada G suficientemente sencilla, tiene como borde ∂G una o varias curvas cerradas (figura 3.19). Este tipo de región es el caso plano del concepto geométrico de *subvariedad con borde*. En general, para una región típica de las que estudiaremos, será un hecho evidente, por lo cual no entraremos en mucho detalle ahora sobre la definición rigurosa del concepto.

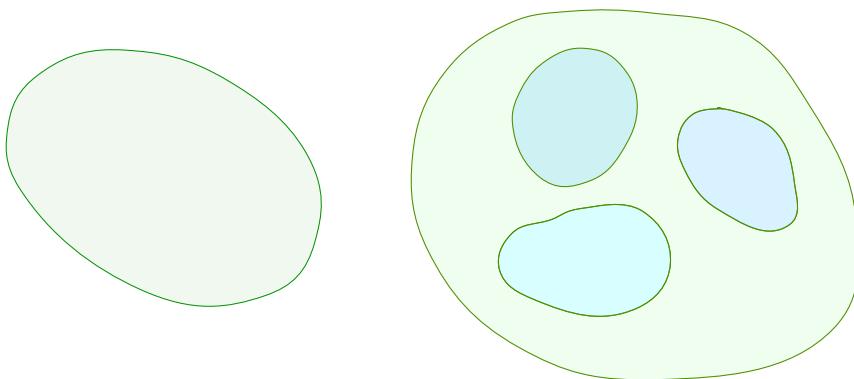


Figura 3.19 – Ejemplos de regiones planas limitadas por curvas cerradas sencillas.

Otro hecho que también parece «evidente», en la otra dirección, es que **una curva cerrada y sin auto-intersecciones tiene un «interior»**, es decir, encierra una única región plana acotada. Tales curvas se llaman también **curvas de Jordan** por el matemático que dio la primera demostración.

Enunciado 3.3.1: El Teorema de Jordan en el plano

Una curva simple y cerrada divide al plano en dos partes conexas, una acotada, llamada su **interior** y otra no acotada, llamada su **exterior**.

Este teorema es el paradigma de enunciado sencillo con demostración difícil, pues la hipótesis es muy general: ¿qué significa «cualquier curva simple y cerrada»? De

3.3 El Teorema de Green en el plano

hecho basta con suponer que es la imagen \mathcal{C} de una parametrización **continua** $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ que es inyectiva salvo por $\gamma(a) = \gamma(b)$. Es importante comprender la complicación que puede alcanzar una tal curva, para darse cuenta que incluso en la práctica puede resultar difícil determinar si uno está «dentro» o «fuera» de una tal curva ([figura 3.20](#)).

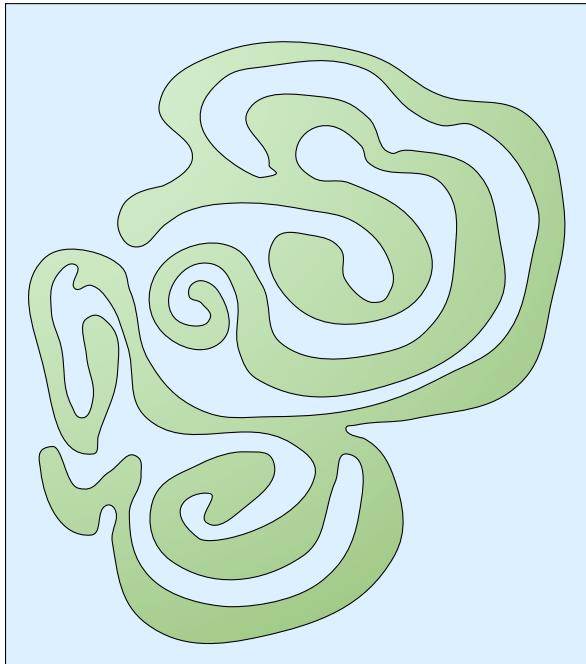


Figura 3.20 – Una curva de Jordan como cualquier otra: simple y cerrada. Algunas son **fractales**, como la **curva «copo de nieve» de Koch**.

3.3.2 El Teorema de Green

La relación entre una región y su borde, o una curva de Jordan y su interior, suponiendo todo suficientemente «**suave**» (mínimamente, datos dados por ecuaciones diferenciables con derivadas continuas, o sea de clase C^1) se refleja de manera sorprendente en una relación analítica entre funciones definidas sobre ellas. Se trata de otra generalización del **Teorema Fundamental del Cálculo**, pero ahora aparece una integral de **área** relacionada con una de **longitud**.

Enunciado 3.3.2: El Teorema de Green en notación diferencial

Sean P, Q campos escalares de clase C^1 en una región plana acotada G cuyo borde es una curva cerrada ∂G , **recorrida en sentido antihorario**. Entonces

$$\oint_{\partial G} P \, dx + Q \, dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy$$

Enunciado 3.3.3: El Teorema de Green en notación vectorial

Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ es el campo vectorial con componentes P, Q , el Teorema de Green tiene la expresión vectorial

$$\oint_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{t} d\ell = \iint_G (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} da$$

Para ver que la versión vectorial y diferencial del Teorema de Green son equivalentes, basta con poner $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + 0\vec{k}$ y calcular el rotacional

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \quad \therefore \quad (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

mientras que la expresión $\vec{F} \cdot \vec{t} d\ell$ corresponde a $P dx + Q dy$.

■ *Demostración del Teorema de Green para el cuadrado unidad:* Sea $G^* = [0, 1]^2$. Etiquetamos, orientamos y parametrizamos los lados por

$V_1 = \{1\} \times [0, 1]$	(lado vertical derecho)	$x = 1, y \in [0, 1]$	$y \rightarrow (1, y)$	+
$V_0 = \{0\} \times [0, 1]$	(lado vertical izquierdo)	$x = 0, y \in [0, 1]$	$y \rightarrow (0, y)$	-
$H_1 = [0, 1] \times \{1\}$	(lado horizontal superior)	$x \in [0, 1], y = 1$	$x \rightarrow (x, 1)$	-
$H_0 = [0, 1] \times \{0\}$	(lado horizontal inferior)	$x \in [0, 1], y = 0$	$x \rightarrow (x, 0)$	+

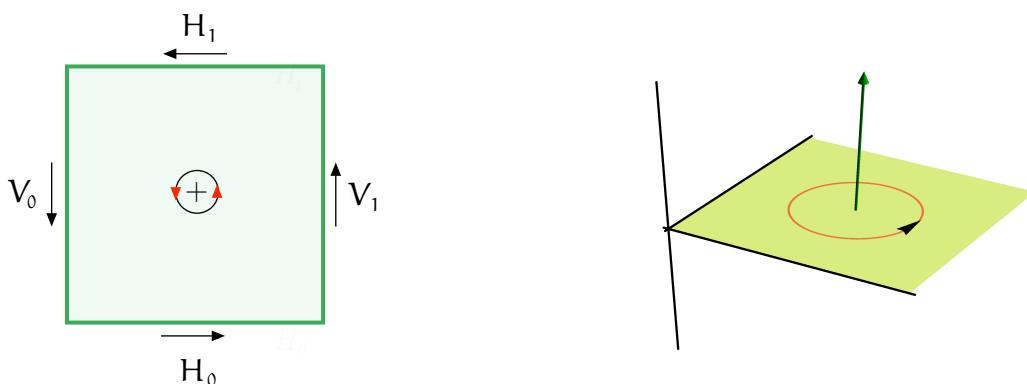


Figura 3.21 – El cuadrado unidad mostrando los lados y las orientaciones para verificar el Teorema de Green.

- $dx = 0$ sobre los lados verticales V_0, V_1 , pues x es constante en ellos.
- $dy = 0$ sobre los lados horizontales H_0, H_1 , pues y es constante en ellos.

Debemos recorrer ∂G^* en sentido antihorario, por eso, aunque hemos parametrizado siempre con la variable creciendo de 0 a 1, sobre los lados V_0 y H_1 tenemos

3.3 El Teorema de Green en el plano

que cambiar el signo, pues se recorren con la orientación **opuesta** (variable decreciente).

Entonces, separando la integral de línea, queda para la parte horizontal

$$\oint_{\partial G^*} P \, dx = \int_{H_0} P \, dx - \int_{H_1} P \, dx = \int_0^1 P(x, 0) \, dx - \int_0^1 P(x, 1) \, dx \\ = \int_0^1 (P(x, 0) - P(x, 1)) \, dx$$

y para la parte vertical,

$$\oint_{\partial G^*} Q \, dy = \int_{V_1} Q \, dy - \int_{V_0} Q \, dy = \int_0^1 Q(1, y) \, dy - \int_0^1 Q(0, y) \, dy \\ = \int_0^1 (Q(1, y) - Q(0, y)) \, dy$$

Por otra parte, por el Teorema de Fubini y el Teorema Fundamental en una variable,

$$\iint_{G^*} \frac{\partial Q}{\partial x} \, da = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx \, dy = \int_0^1 [Q(x, y)]_{x=0}^{x=1} \, dy = \int_0^1 (Q(1, y) - Q(0, y)) \, dy \\ \iint_{G^*} \frac{\partial P}{\partial y} \, da = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial y} \, dy \, dx = \int_0^1 [P(x, y)]_{y=0}^{y=1} \, dx = \int_0^1 (P(x, 1) - P(x, 0)) \, dx.$$

Finalmente, combinando ambas expresiones quedan

$$\oint_{\partial G} P \, dx = \iint_{G^*} -\frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dy,$$

$$\oint_{\partial G} Q \, dy = \iint_{G^*} \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx \, dy,$$

$$\oint_{\partial G} P \, dx + Q \, dy = \iint_{G^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy,$$

lo cual demuestra el Teorema de Green para el cuadrado unidad. ■

Pregunta 3.3.1: El Teorema de Green en regiones elementales

¿Se puede adaptar la demostración del Teorema de Green para el cuadrado unidad a una región elemental plana cualquiera?

Una demostración para el cuadrado unidad dista de ser una demostración completa. Hace falta algún mecanismo mediante el cual se pueda «propagar» la fórmula de un cuadrado a una región más general. Hay varias opciones. Una es cambiar de variable, del cuadrado unidad G^* a otra región G .

- *Demostración del Teorema de Green para imágenes del cuadrado unidad:* Consideramos un cambio de variable

$$\varphi : G^* \rightarrow G, \quad \varphi(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$$

tal que

- φ también es un cambio de variable entre los bordes ∂G^* y ∂G ,
- φ es de clase C^2 (necesitaremos la simetría de las parciales segundas).

Vemos que la validez del Teorema de Green para el cuadrado G^* implica su validez para la imagen $G = \varphi(G^*)$. Primero, las diferenciales cambian de variable por

$$dx = \frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial s} ds + \frac{\partial y}{\partial t} dt$$

y por tanto

$$\oint_{\partial G} P dx = \oint_{\partial G^*} (P \circ \varphi) \left(\frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt \right) = \oint_{\partial G^*} P^* ds + Q^* dt$$

donde

$$P^* = (P \circ \varphi) \frac{\partial x}{\partial s}, \quad Q^* = (P \circ \varphi) \frac{\partial x}{\partial t}.$$

Aplicando el Teorema de Green para G^* , que ya hemos demostrado, se tiene

$$\oint_{\partial G^*} P^* ds + Q^* dt = \iint_{G^*} \left(\frac{\partial Q^*}{\partial s} - \frac{\partial P^*}{\partial t} \right) ds dt$$

Ahora, se calculan²

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q^*}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s} \left((P \circ \varphi) \frac{\partial x}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial s} (P \circ \varphi) \right) \frac{\partial x}{\partial t} + (P \circ \varphi) \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \frac{\partial x}{\partial t} + (P \circ \varphi) \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} + (P \circ \varphi) \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} \\ \frac{\partial P^*}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left((P \circ \varphi) \frac{\partial x}{\partial s} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} (P \circ \varphi) \right) \frac{\partial x}{\partial s} + (P \circ \varphi) \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial s} + (P \circ \varphi) \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} + (P \circ \varphi) \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} \end{aligned}$$

²Observar que de hecho la segunda cuenta es completamente simétrica a la primera, cambiando s por t ; así nos podíamos ahorrar esta segunda cuenta. De todas formas la incluimos para hacer más evidente este comentario.

3.3 El Teorema de Green en el plano

con lo cual, como las parciales segundas son simétricas, queda

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q^*}{\partial s} - \frac{\partial P^*}{\partial t} &= \cancel{\frac{\partial P}{\partial x}} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial P}{\partial y}} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} - \cancel{\frac{\partial P}{\partial x}} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} - \cancel{\frac{\partial P}{\partial y}} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} \\ &= \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} \right) \\ &= \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(y, x)}{\partial(s, t)} \\ &= -\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}\end{aligned}$$

Suponemos que φ conserva la orientación antihoraria en ∂G^* y ∂G . Entonces

$$J_\varphi = \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}$$

(de lo contrario sería el negativo). Hemos abreviado escribiendo las parciales respecto á x, y , pero en realidad se trata de las **composiciones** con φ , luego queda

$$\iint_{G^*} \left(\frac{\partial Q^*}{\partial s} - \frac{\partial P^*}{\partial t} \right) ds dt = \iint_{G^*} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \circ \varphi \right) J_\varphi ds dt = \iint_G -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

por el Teorema de Cambio de Variable ([enunciado 1.11.2](#)). Esto demuestra que

$$\oint_{\partial G} P dx = \iint_G -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

De manera similar, se demuestra que

$$\oint_{\partial G} Q dy = \iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

y sumando ambas expresiones queda el Teorema de Green para G . ■

Esto demuestra que el Teorema de Green es válido para las imágenes del cuadrado que cumplan las hipótesis sobre el cambio de variable φ que hemos usado. Se pueden relajar estas hipótesis sobre conjuntos de longitud nula, y de hecho, para conseguir por ejemplo que la imagen sea un disco, debemos hacerlo para tener en cuenta las *esquinas* del cuadrado unidad.

Nota 3.3.1: Imágenes del cuadrado unidad

La demostración anterior del Teorema de Green plantea una pregunta de naturaleza geométrica: ¿cuáles son las regiones imágenes del cuadrado unidad bajo cambios de variable como los utilizados en ella (que son cambios de variable entre los bordes y son de clase C^2)?

Este tipo de pregunta pertenece al ámbito de la Topología. Un primer resultado es que tal región no podrá tener «lagunas» o «agujeros», pues el cuadrado no las tiene.

Pregunta 3.3.2: Regiones elementales imágenes del cuadrado

¿Una región elemental plana cualquiera es una imagen del cuadrado unidad bajo un cambio de variable del tipo utilizado en la demostración anterior?

Este tipo de cuestión se halla entre la Topología y la Geometría Diferencial. La segunda trata de ecuaciones donde las funciones son todas diferenciables, mientras que la primera se «conforma» con la continuidad, y por tanto tiene mayor alcance pero también presenta una categoría distinta de dificultades técnicas.

3.3.3 Regiones más generales donde es válido el Teorema de Green

Se puede utilizar la idea de **aproximación rectangular** subyacente a toda integral plana, en este caso de área, approximando una región medible por cuadrados. No hay que olvidar que las integrales en cuestión son orientadas. Se constata un fenómeno clave de **cancelación**.

Si colocamos dos cuadrados del mismo tamaño, orientados como los de la [figura 3.21](#), de modo que comparten un lado en común, vemos que las orientaciones sobre ese lado **son opuestas**.

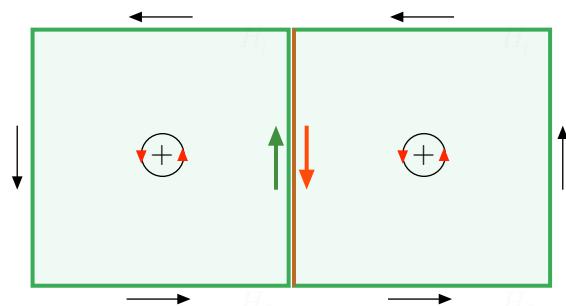


Figura 3.22 – Cancelación en un lado común.

Ahora, si estamos calculando la circulación de un campo \vec{F} definido en la unión de los cuadrados, el trabajo realizado a lo largo del lado común se cancela, pues las orientaciones opuestas sobre el mismo camino dan signos opuestos al trabajo ([enunciado 3.1.1](#)). Entonces, la circulación **neta** sobre la unión de los dos cuadrados será la suma de las circulaciones sobre cada uno de ellos.

Si seguimos colocando cuadrados de este modo, con lados comunes, sin solaparse, vemos que este fenómeno de cancelación sigue produciéndose, incluso si la región que forman **contiene agujeros** ([figura 3.23](#)). Además, en la región agujereada, se aprecia que se produce la **orientación negativa (horaria)** alrededor del agujero. Destacamos estos hechos por su utilidad.

Nota 3.3.2: Cancelación de orientaciones interiores

En una región formada por cuadrados orientados a distintas escalas que no se solapan, incluso posiblemente formando lagunas, las orientaciones en los lados interiores compartidos son opuestas.

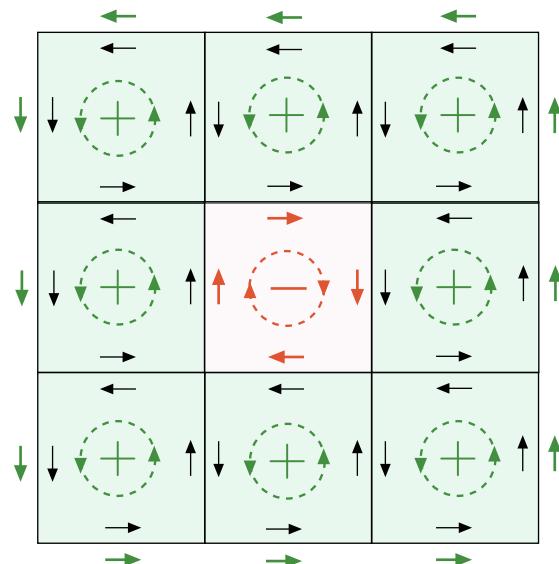


Figura 3.23 – Región con una laguna, formada por cuadrados iguales que no se solapan. Se producen integrales opuestas en los lados comunes.

Nota 3.3.3: La orientación alrededor de un agujero

Si una región plana tiene borde formado por varias curvas cerradas, una «exterior» orientada de forma positiva (antihoraria), que encierra a las demás «interiores», entonces la orientación adecuada sobre las interiores es la **negativa** (horaria).

Estas observaciones llevan a concluir que el Teorema de Green sigue siendo válido sobre regiones construidas de esta forma a partir de cuadrados de lados paralelos a los ejes de coordenadas, dada su validez sobre un cuadrado cualquiera.

Enunciado 3.3.4: Extensión del Teorema de Green a uniones de cuadrados

La validez del Teorema de Green sobre un cuadrado implica su validez sobre regiones que son uniones finitas de cuadrados (de lados paralelos a los ejes) que no se solapan.

- **Demostración:** Un cuadrado arbitrario de lados paralelos a los ejes es una traslación de una copia a escala del cuadrado unidad. El Teorema de Cambio de

3.3.3 Regiones más generales donde es válido el Teorema de Green

Variable y la validez del Teorema de Green sobre el cuadrado unidad implican entonces su validez sobre un cuadrado arbitrario.

Dado un campo definido en una región unión de cuadrados, el trabajo realizado sobre cada lado compartido se cancela debido a las orientaciones opuestas, por tanto **las circulaciones sobre cada cuadrado suman la circulación sobre el borde**. Por otra parte, como **la integral de área es aditiva**, la integral sobre la unión es igual a la suma de las integrales de cada parte. Esto significa que la fórmula del Teorema de Green es aditiva sobre uniones de cuadrados que no se solapan, lo cual extiende su validez a esta unión a partir de su validez sobre cada cuadrado. ■

Para extender la validez del Teorema de Green desde regiones formadas por cuadrados que no se solapan a una región curva general, se puede seguir un proceso de aproximación por cuadrados ([figura 3.24](#)).

Enunciado 3.3.5: Aproximación diádica de regiones

Una región plana de estructura «suave», es decir, con borde formado por una o varias curvas diferenciables, se puede aproximar «suficientemente bien» por cuadrados a distintas escalas que se reducen según potencias de 2. Esto se conoce como escala **diádica** ([figura 3.24](#)).

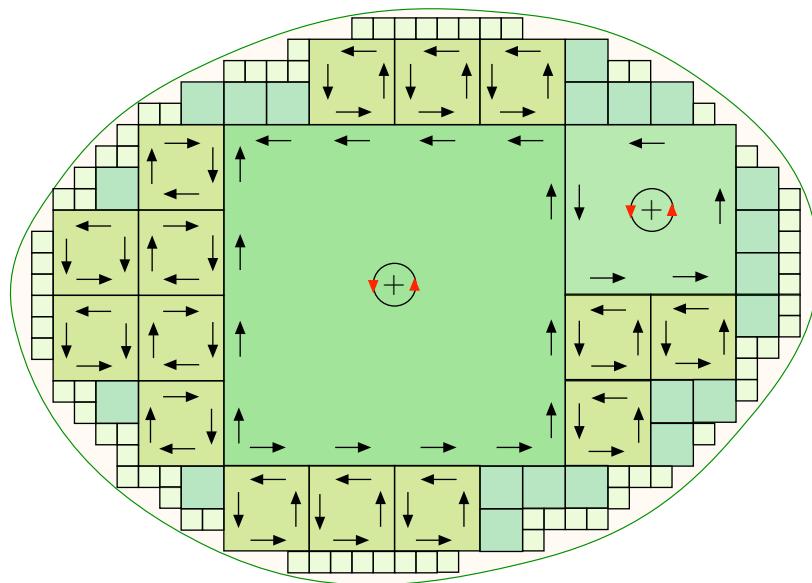


Figura 3.24 – Aproximación por cuadrados orientados a un recinto plano orientado.

Hay bastantes dificultades técnicas para convertir esta idea de aproximación en una demostración rigurosa, sobre todo debe prestarse atención a la estructura del borde de la figura y si la circulación sobre los cuadrados cerca del borde efectivamente tiende en el límite a la circulación sobre el mismo borde de la región.

Combinando algunas de las ideas anteriores con la técnica de cambio de variable

3.3 El Teorema de Green en el plano

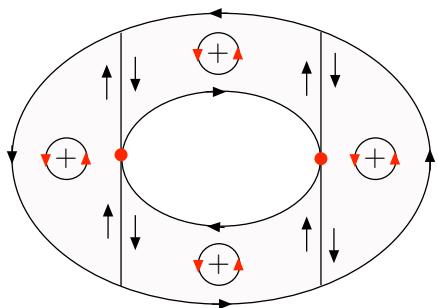


Figura 3.25 – Cancelación de las orientaciones interiores en una subdivisión. Observar como la orientación alrededor del agujero interior es la horaria (negativa).

de la sección anterior, obtenemos otro método de extender la validez del Teorema de Green a regiones curvadas generales, con posibles lagunas. Se trata de la **subdivisión en regiones que son imágenes del cuadrado unidad**. Se observan otra vez los fenómenos de la cancelación de las orientaciones interiores y la orientación negativa alrededor de los agujeros ([figura 3.25](#)).

3.4 Integrales de Flujo

3.4.1 Definición de la integral de flujo normal

Pasaremos ahora a estudiar una integral de superficie que formaliza matemáticamente la noción de **flujo** a través de una superficie en \mathbb{R}^3 . Veremos que hay ciertas analogías con las integrales de línea y también algunas diferencias. Para esto el vector relevante es el **vector normal**.

Usaremos la terminología y la notación de los [apartados 2.10 y 2.11](#).

Definición 3.4.1: Integral de flujo a través de una superficie en \mathbb{R}^3

Dados los datos:

- $S \subseteq \mathbb{R}^3$, una superficie parametrizada por una función $\sigma(u, v) : S^* \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$,
- $\vec{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, un campo vectorial sobre la superficie S ,

se define la **integral de flujo de \vec{F} a través de S** por

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{a} = \iint_{S^*} (\vec{F} \circ \sigma) \cdot \vec{n}_\sigma \, du \, dv = \iint_{S^*} \vec{F}(\sigma(u, v)) \cdot \vec{n}_\sigma(u, v) \, du \, dv$$

donde \vec{n} denota el vector normal asociado a la parametrización σ ([definición 2.10.8](#)).

Nota 3.4.1: Procedimiento geométrico para calcular una integral de flujo

1. **Parametrizar la superficie**, o sea, dar coordenadas $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$
2. **Calcular las derivadas parciales**, $\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$ y $\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$
3. **Calcular su producto vectorial**, que es el vector normal $\vec{n}_\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}$
4. **Sustituir $(x, y, z) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$** en $\vec{F}(x, y, z)$; es decir, calcular $\vec{F} \circ \sigma$.
5. **Hacer el producto** interior de $\vec{F} \circ \sigma$ con \vec{n}_σ , todo en términos de los parámetros u, v .
6. **Calcular la integral** de la expresión anterior sobre la región plana $(u, v) \in S^*$

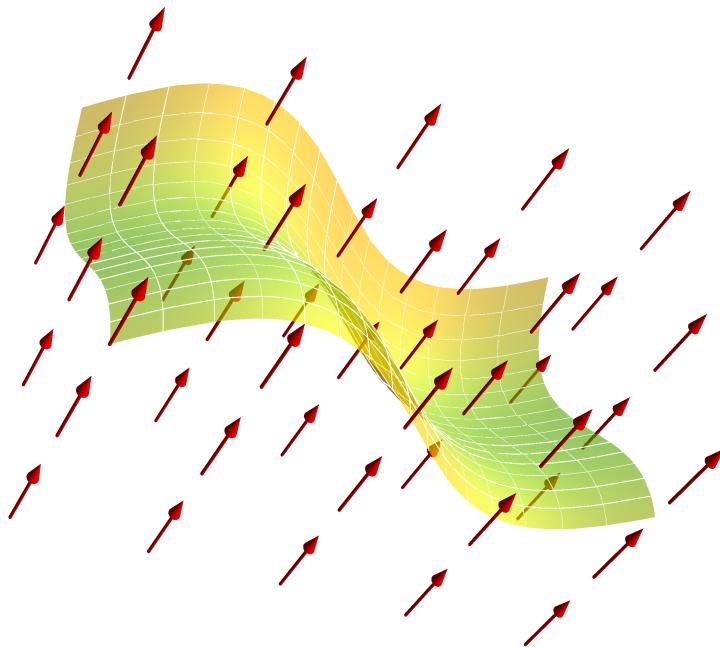


Figura 3.26 – Una superficie y un campo vectorial en un entorno suyo.

3.4.2 La integral de flujo en coordenadas

Escribimos el campo \vec{F} y la parametrización $\sigma : \mathcal{S}^* \rightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ de la superficie \mathcal{S} en componentes,

$$\begin{aligned}\vec{F}(x, y, z) &= (P, Q, R) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k} \\ \sigma(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v))\end{aligned}$$

Recordamos ([definición 2.10.8](#)) que el vector normal asociado en coordenadas es

$$\vec{n}_\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)$$

donde esta notación simboliza los ([sub\)determinantes jacobianos](#) de la matriz diferencial $d\sigma$ de tamaño 2×2 dados por las coordenadas correspondientes, que son

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

y sus correspondientes permutaciones con (y, z) y (z, x) . Entonces la integral de flujo es igual a la integral plana sobre $S^* \subseteq \mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{a} &= \iint_{S^*} \left(P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right. \\ &\quad \left. + Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) du dv. \end{aligned} \quad [3.4.1]$$

Definición 3.4.2: La notación diferencial para integrales de flujo

Las componentes del vector normal corresponden a los cambios de variable

$$\begin{aligned} n_x &\stackrel{\text{def}}{=} dy \wedge dz = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv \\ n_y &\stackrel{\text{def}}{=} dz \wedge dx = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du dv \\ n_z &\stackrel{\text{def}}{=} dx \wedge dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \end{aligned}$$

El símbolo \wedge se llama **producto exterior**. De momento no le daremos un significado más allá de notación para los determinantes combinados con las diferenciales. Entonces, para campos escalares P, Q, R , se definen

$$\begin{aligned} \iint_S P dy \wedge dz &\stackrel{\text{def}}{=} \iint_{S^*} P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv \\ \iint_S Q dz \wedge dx &\stackrel{\text{def}}{=} \iint_{S^*} Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du dv \\ \iint_S R dx \wedge dy &\stackrel{\text{def}}{=} \iint_{S^*} R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \end{aligned}$$

de modo que para un campo vectorial $\vec{F} = (P, Q, R)$, se tiene

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{a} = \iint_S \begin{matrix} P \\ x \end{matrix} dy \wedge dz + \begin{matrix} Q \\ y \end{matrix} dz \wedge dx + \begin{matrix} R \\ z \end{matrix} dx \wedge dy$$

Definición 3.4.3: 2-formas diferenciales

A una expresión general del tipo

$$\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

con P, Q, R tres campos escalares en tres coordenadas x, y, z , se le llama **2-forma diferencial** en tres dimensiones.

3.4 Integrales de Flujo

Nota 3.4.2: Correspondencia entre 2-formas y campos

Una campo vectorial corresponde a una 2-forma diferencial mediante

$$\vec{F} = (P, Q, R) \leftrightarrow \omega = \sum_x P dy \wedge dz + \sum_y Q dz \wedge dx + \sum_z R dx \wedge dy$$

Se usa la regla cíclica ([definición 2.10.6](#))

$$x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow \dots$$

para saber qué componente del campo combina con qué par de diferenciales. Queda más claro si escribimos para las componentes del campo $\vec{F} = (X, Y, Z)$:

$$\vec{F} = (X, Y, Z) \leftrightarrow \omega = X dy \wedge dz + Y dz \wedge dx + Z dx \wedge dy$$

Vemos que aparecen las tres variables seguidas en el orden cíclico, empezando con una componente del campo seguida de dos diferenciales de las variables.

3.4.3 La integral de flujo bajo cambio de parametrización

La definición que hemos dado de integral de flujo ([definición 3.4.1](#)) aparentemente depende de la parametrización elegida. Al igual que hicimos con las integrales de línea ([apartado 3.1.5](#)), debemos comprobar hasta qué punto esto es cierto. Para ello, debemos considerar qué ocurre cuando tenemos **dos parametrizaciones de la misma superficie S** ,

$$\sigma(u, v) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S, \quad \Sigma(s, t) : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

donde U, V se supondrán **abiertos conexos planos**. Las parametrizaciones σ y Σ son biyectivas, luego se puede considerar

$$\tau = \Sigma^{-1} \circ \sigma : U \rightarrow V$$

que es un cambio de variable en dos variables.

La hipótesis habitual de diferenciabilidad es que las parametrizaciones sean **de clase C^1** , con inversas que también lo son (para definir rigurosamente este concepto hace falta desarrollar algo de Geometría Diferencial). Esto implica que τ y su inversa τ^{-1} también son de clase C^1 . Esta situación común recibe terminología propia.

Definición 3.4.4: Difeomorfismo

Una aplicación biyectiva de clase C^p ($p \geq 1$) con inversa de la misma clase, se denomina un **difeomorfismo** de clase C^p .

Anotaremos un hecho sencillo pero útil acerca de los difeomorfismos, en particular, aplicable a los cambios de variable que relacionan dos parametrizaciones distintas de la misma superficie.

Enunciado 3.4.1: Constancia del signo del jacobiano de un difeomorfismo en un conexo

Sea τ un difeomorfismo entre dos abiertos conexos U, V de \mathbb{R}^n . El signo de su determinante jacobiano, $\operatorname{sgn} \det d\tau$, es constante en U .

■ **Demostración:** Como τ es de clase C^1 , su diferencial es continua, por tanto la función $\det d\tau$ es continua. Si cambiase de signo, como U es conexo, se anularía en algún punto³. Esto contradice la regla de la cadena, que implica que $d\tau$ es un isomorfismo, luego $\det d\tau \neq 0$ en todo punto. ■

Definición 3.4.5: Notación para el signo del determinante jacobiano

Sea τ un difeomorfismo entre dos abiertos conexos U, V de \mathbb{R}^n . Se denota

$$(-1)^\tau \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{sgn} \det d\tau$$

al signo del determinante jacobiano de τ , que es constante en U .

Con esta notación, el **factor jacobiano**, que es el **valor absoluto** del determinante, tiene la expresión

$$J_\tau = |\det d\tau| = (-1)^\tau \det d\tau \quad [3.4.2]$$

Dado que la definición de la integral de flujo está hecha en términos del **vector normal asociado** a una parametrización σ , el primer paso es estudiar la relación entre los vectores normales asociados a dos parametrizaciones de la misma superficie.

Enunciado 3.4.2: Transformación del normal asociado bajo cambio de parametrización

Sean U, V abiertos conexos planos y $\sigma : U \rightarrow S$ y $\Sigma : V \rightarrow S$ dos parametrizaciones de la misma superficie S . Sea $\tau : U \rightarrow V$ el cambio de variable plano que las relaciona, mediante $\sigma = \Sigma \circ \tau$. Entonces

$$\vec{n}_\sigma = (\det d\tau)(\vec{n}_\Sigma \circ \tau) \quad [3.4.3]$$

³Como en un abierto conexo cada par de puntos se puede unir por una curva continua, esto se puede reducir a una consecuencia del **Teorema de Bolzano** en una variable.

3.4 Integrales de Flujo

■ **Demostración:** Pongamos coordenadas (u, v) en U y (s, t) en V , de modo que $(s, t) = \tau(u, v)$. La relación $\sigma = \Sigma \circ \tau$ lleva a $d\sigma_{(u,v)} = d\Sigma_{(s,t)}d\tau_{(u,v)}$ (regla de la cadena) que en coordenadas es

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \frac{\partial \Sigma}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial \Sigma}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \frac{\partial \Sigma}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial \Sigma}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v},$$

observando que las parciales de σ y Σ son vectores y las de s y t son escalares. Entonces, recordando que el producto vectorial es bilineal y antisimétrico, o sea, $v \times v = 0$ y $w \times v = -v \times w$, queda

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial \Sigma}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \right) \times \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial \Sigma}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial s} \times \frac{\partial \Sigma}{\partial t} \right) \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial v} + \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial t} \times \frac{\partial \Sigma}{\partial s} \right) \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial v} \\ &= \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial s} \times \frac{\partial \Sigma}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial v} - \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial v} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial s} \times \frac{\partial \Sigma}{\partial t} \right) \frac{\partial(s, t)}{\partial(u, v)}\end{aligned}$$

o sea $\vec{n}_\sigma = (\det d\tau)(\vec{n}_\Sigma \circ \tau)$, pues las derivadas respecto a (s, t) se evalúan en (s, t) , que es $\tau(u, v)$, luego la notación abrevia la composición con τ . ■

Como corolarios inmediatos de [3.4.3] tenemos primero, tomando normas,

$$\|\vec{n}_\sigma\| = |\det d\tau| \|\vec{n}_\Sigma \circ \tau\|$$

y reconociendo en estos términos a los factores jacobianos de área, queda

$$\sigma = \Sigma \circ \tau \implies J_\sigma = (J_\Sigma \circ \tau) \cdot J_\tau \quad [3.4.4]$$

o sea, el jacobiano de superficie de σ es el producto de los jacobianos de Σ y de τ . Por otra parte, dividiendo por estas normas, queda

$$\frac{\vec{n}_\sigma}{\|\vec{n}_\sigma\|} = \frac{\det d\tau}{|\det d\tau|} \frac{\vec{n}_\Sigma}{\|\vec{n}_\Sigma\|} \circ \tau = \operatorname{sgn} \det d\tau \frac{\vec{n}_\Sigma}{\|\vec{n}_\Sigma\|} \circ \tau = (-1)^\tau \frac{\vec{n}_\Sigma}{\|\vec{n}_\Sigma\|} \circ \tau$$

o sea

$$\frac{\vec{n}_\sigma}{\|\vec{n}_\sigma\|} = (-1)^\tau \frac{\vec{n}_\Sigma}{\|\vec{n}_\Sigma\|} \circ \tau \quad [3.4.5]$$

Enunciado 3.4.3: Cambio de parametrización en una integral de flujo

Sean $\sigma(u, v) : U \rightarrow \mathcal{S}$ y $\Sigma(s, t) : V \rightarrow \mathcal{S}$ dos parametrizaciones de la misma superficie conexa \mathcal{S} y $\tau : U \rightarrow V$ el cambio de variable que las mediante $\sigma = \Sigma \circ \tau$.

Para todo campo vectorial $\vec{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$, se tiene

$$\iint_V (\vec{F} \circ \Sigma) \cdot \vec{n}_\Sigma \, ds \, dt = (-1)^\tau \iint_U (\vec{F} \circ \sigma) \cdot \vec{n}_\sigma \, du \, dv$$

Por tanto, las dos integrales son iguales salvo un signo.

- **Demostración:** Es una consecuencia de las [ecuaciones \(3.4.3\)](#) y [\(3.4.4\)](#) y el Teorema de Cambio de Variable para \mathbb{R}^2 ,

$$\begin{aligned} \iint_V (\vec{F} \circ \Sigma) \cdot \vec{n}_\Sigma \, ds \, dt &= \iint_{\tau(U)} (\vec{F} \circ \Sigma) \cdot \vec{n}_\Sigma \, ds \, dt \\ &= \iint_U (\vec{F} \circ \Sigma \circ \tau) \cdot (\vec{n}_\Sigma \circ \tau) J_\tau \, du \, dv \\ &= \iint_U (\vec{F} \circ \sigma) \cdot (\vec{n}_\sigma \circ \tau) (-1)^\tau \det d\tau \, du \, dv \\ &= (-1)^\tau \iint_U (\vec{F} \circ \sigma) \cdot \vec{n}_\sigma \, du \, dv \end{aligned}$$

■

3.4.4 Campo normal unitario y orientación de una superficie

En el [apartado 3.4.3](#) hemos visto que la integral de flujo es independiente de la parametrización escogida para describir la superficie, salvo una cuestión de signos. Para entender precisamente cómo eliminar esta dependencia, profundizamos en los aspectos geométricos.

Vamos a ver que el significado geométrico del signo en el [enunciado 3.4.3](#) es si las dos parametrizaciones [atraviesan](#) la superficie en el mismo sentido o en sentidos opuestos. La conclusión es que, al igual que las integrales de línea, **las integrales de flujo son integrales orientadas**. Esto contrasta con las integrales de área que estudiamos, donde esto no afecta al valor, debido a la [ecuación \(3.4.4\)](#).

Definición 3.4.6: Normal unitario continuo

Un **campo normal unitario continuo** en una superficie parametrizada \mathcal{S} es un campo vectorial $\vec{n}: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ continuo tal que $\|\vec{n}\| = 1$ y que en cada punto $p \in \mathcal{S}$ genera el **espacio normal**: $N_p \mathcal{S} = \mathbb{R} \vec{n}(p)$.

Enunciado 3.4.4: Unicidad salvo signo del campo normal unitario continuo

Una superficie parametrizada conexa tiene dos campos normales unitarios **continuos**, opuestos en signo.

- **Demostración:** Sea \mathcal{S} una superficie parametrizada en \mathbb{R}^3 . En cada punto $p \in \mathcal{S}$ sólo hay dos normales unitarios, opuestos en signo, pues el **espacio tangente** $T_p\mathcal{S}$ es un plano: $\dim T_p\mathcal{S} = 2$, y como $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$, queda solamente una dimensión ortogonal: $\dim N_p\mathcal{S} = 1$. Por tanto, si \vec{n} y \vec{n}' son ambos campos normales unitarios en \mathcal{S} ,

$$\vec{n}'(p) = \varepsilon(p)\vec{n}(p), \quad \varepsilon(p) = (\vec{n}' \cdot \vec{n})(p) = \pm 1$$

Si los campos son **continuos**, entonces ε es una **elección continua de signo**. Ahora, como se supone que \mathcal{S} es **conexa**, las únicas elecciones continuas de signos son constantes, ya que la imagen continua $\varepsilon(\mathcal{S})$ debe ser una parte conexa de $\{\pm 1\}$. Esto significa que o bien $\vec{n}' = \vec{n}$ sobre **todo** \mathcal{S} ó $\vec{n}' = -\vec{n}$ sobre todo \mathcal{S} .

El razonamiento anterior demuestra que hay **a lo sumo** dos campos normales unitarios sobre \mathcal{S} y, de hecho, si existe **alguno**, el otro será su opuesto, así que solamente falta ver que existe alguno. Para ello, sea $\sigma(u, v) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S}$ una parametrización de \mathcal{S} . Entonces

$$\frac{\vec{n}_\sigma}{\|\vec{n}_\sigma\|} \circ \sigma^{-1} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

es un campo normal unitario continuo. ■

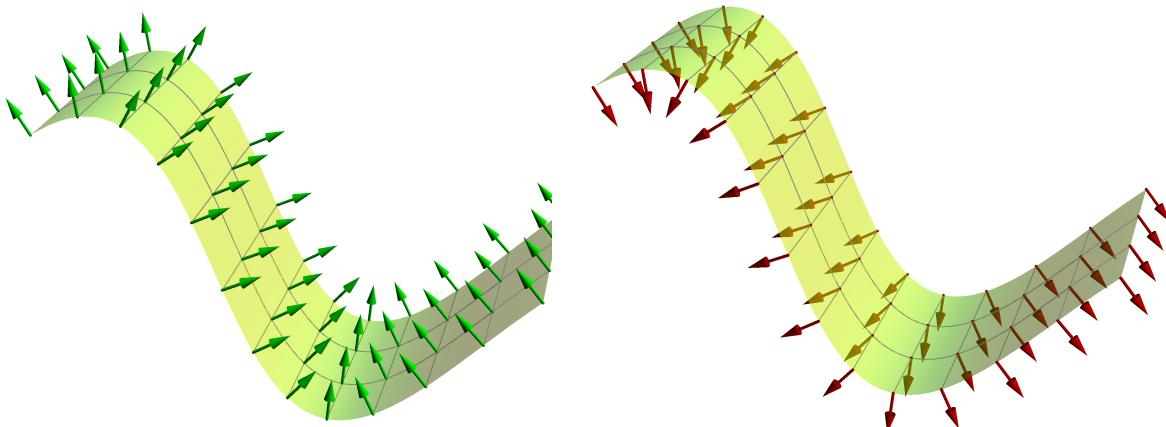


Figura 3.27 – Hay dos campos normales unitarios continuos en una superficie parametrizada conexa.

Definición 3.4.7: Orientación de una superficie parametrizada

Una **orientación** de una superficie parametrizada $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ es una determinación continua del **sentido en que se atraviesa**; formalmente, una **elección de campo normal unitario continuo**.

Sólo hay dos orientaciones posibles de una superficie parametrizada conexa. Dada una superficie \mathcal{S} orientada, \mathcal{S}^{op} denota la misma superficie con la orientación opuesta.

Nota 3.4.3: Superficies no orientables

Existen **superficies no orientables** como la **banda de Möbius** (figura 3.28) obtenida a partir de una hoja plana rectangular flexible pegando dos lados opuestos tras girarla media vuelta, que no admiten un campo normal unitario continuo.

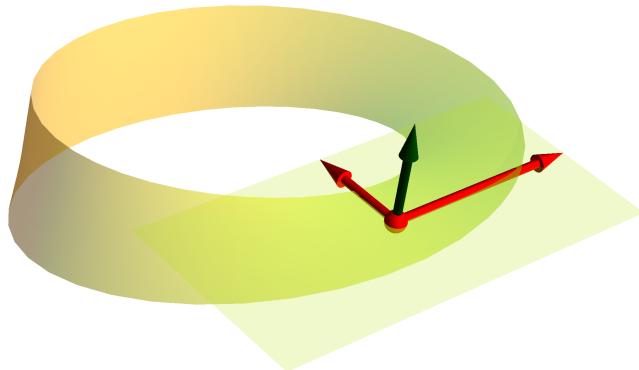


Figura 3.28 – Una banda de Möbius mostrando el plano tangente y el vector normal en un punto.

Pregunta 3.4.1: La banda de Möbius

Verificar que las ecuaciones

$$x = \left(1 + \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \cos(u), \quad y = \left(1 + \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \sin(u), \quad z = \frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right)$$

describen una banda de Möbius y estudiar la continuidad del vector normal asociado. ¿Cumplen estas ecuaciones las condiciones para ser parametrización ([definición 2.2.1](#))?

Pregunta 3.4.2: Cortes en una banda de Möbius

¿Qué ocurre si se corta una banda de Möbius por la mitad paralela a su borde. Y por un tercio, un cuarto, etc.?

3.4 Integrales de Flujo

Definición 3.4.8: Orientación inducida por una parametrización de una superficie

Sea S una superficie parametrizada por $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. El campo normal unitario **inducido** por σ es

$$\frac{\vec{n}_\sigma}{\|\vec{n}_\sigma\|} \circ \sigma^{-1} : S \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad [3.4.6]$$

Definición 3.4.9: Parametrización y orientación de superficies

Dada una orientación predeterminada de una superficie S , es decir, un campo normal unitario continuo \vec{n} , y una parametrización σ ,

- si σ induce el normal unitario \vec{n} , decimos que es **compatible** con la orientación, o que está **co-orientada**.
- si σ induce el normal unitario $-\vec{n}$, decimos que es **incompatible** con la orientación, o que está **anti-orientada**.

Dadas dos parametrizaciones σ, Σ de la misma superficie conexa S :

- Si σ y Σ inducen la misma orientación en S , decimos que son **compatibles** o **co-orientadas**.
- Si σ y Σ inducen orientaciones opuestas en S , decimos que son **incompatibles** o que están **anti-orientadas**.

Enunciado 3.4.5: Compatibilidad y signo del determinante jacobiano

Sean $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ y $\Sigma : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ dos parametrizaciones de la misma superficie conexa S , relacionadas mediante el cambio de variable $\sigma = \Sigma \circ \tau$. Entonces

- σ y Σ están co-orientadas si y sólo si $(-1)^\tau = \text{sgn} \det d\tau = 1$,
- σ y Σ están anti-orientadas si y sólo si $(-1)^\tau = \text{sgn} \det d\tau = -1$.

- **Demostración:** Por la fórmula [3.4.5] tenemos

$$\frac{\vec{n}_\sigma}{\|\vec{n}_\sigma\|} \circ \sigma^{-1} = (-1)^\tau \frac{\vec{n}_\Sigma}{\|\vec{n}_\Sigma\|} \circ \tau \circ \sigma^{-1} = (-1)^\tau \frac{\vec{n}_\Sigma}{\|\vec{n}_\Sigma\|} \circ \Sigma^{-1}$$

luego el campo normal unitario inducido por σ y el campo normal unitario inducido por Σ están relacionados precisamente por el signo $(-1)^\tau$. Por definición σ, Σ están co-orientadas si y sólo si son el mismo campo, es decir, si el signo es $+1$. ■

Nota 3.4.4: Independencia de la integral respecto a parametrizaciones compatibles

Al hacer una integral de flujo, debemos especificar de antemano una orientación de la superficie y por tanto elegir **parametrizaciones compatibles con la orientación** dada. De lo contrario, por el [enunciado 3.4.3](#), obtendremos la integral **cambiada de signo**. La integral de flujo es independiente de la parametrización **compatible** escogida para la superficie.

► **Ejemplo 3.4.1**

Como ya habíamos comprobado, ([enunciado 2.12.1](#)) las coordenadas esféricas σ en una esfera inducen la orientación *negativa* (de entrada) pues \vec{n}_σ apunta hacia el centro de la esfera. 

3.4.5 La integral de flujo en términos del campo normal unitario

El flujo en el sentido representado por esta integral es flujo **normal** a la superficie, es decir, ortogonal. Un campo puede fluir también a lo largo, es decir, tangente, a la superficie. Un campo general tendrá una componente tangencial y una normal. Aquí sólo hablamos de la componente normal.

Enunciado 3.4.6: La integral de flujo en términos del campo normal unitario

Para un campo \vec{F} sobre una superficie S orientada con normal unitario \vec{n} ,

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{a} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} da$$

es decir, la integral de flujo es la integral de área sobre S de la **componente normal** $\vec{F} \cdot \vec{n}$ del campo \vec{F} sobre la superficie S .

- **Demostración:** Supongamos que σ es una parametrización compatible con la orientación dada, o sea, que σ induce el campo normal unitario \vec{n} :

$$\vec{n}(p) = \frac{\vec{n}_\sigma(u, v)}{\|\vec{n}_\sigma(u, v)\|}, \quad p = \sigma(u, v) \in S : \quad \vec{n} \circ \sigma = \frac{\vec{n}_\sigma}{\|\vec{n}_\sigma\|}$$

Podemos expresar la integral de flujo como

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{a} &= \iint_{S^*} \vec{F}(\sigma(u, v)) \cdot \vec{n}_\sigma(u, v) du dv \\ &= \iint_{S^*} \vec{F}(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\vec{n}_\sigma(u, v)}{\|\vec{n}_\sigma(u, v)\|} \|\vec{n}_\sigma(u, v)\| du dv \end{aligned}$$

3.4 Integrales de Flujo

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{S^*} \vec{F}(\sigma(u, v)) \cdot \vec{n}(\sigma(u, v)) J_\sigma(u, v) du dv \\
 &= \iint_{S^*} (\vec{F} \cdot \vec{n})(\sigma(u, v)) J_\sigma(u, v) du dv = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} da
 \end{aligned}$$

o sea, la integral de flujo es la integral de la componente normal del campo \vec{F} sobre la superficie, respecto a la medida de área. ■

El resultado anterior se expresa en la notación diferencial como

$$d\vec{a} = \vec{n} da \stackrel{\text{def}}{=} d\vec{n}$$

es decir, un **elemento dirigido de área** igual al vector normal unitario cambiado por el elemento de área escalar. En particular, la integral de flujo se puede denotar también por

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{n}$$

para recordar que se toma el flujo en dirección normal.

Enunciado 3.4.7: Cambio de orientación en una integral de flujo

Cambiar de orientación la superficie en una integral de flujo cambia el signo de la integral:

$$\iint_{S^{\text{op}}} \vec{F} \cdot d\vec{n} = - \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{n}$$

■ *Demostración:* Cambiar la orientación cambia el signo del campo normal unitario y por tanto también el de la integral. ■

3.4.6 Propiedades generales de las integrales de flujo

Como las integrales de flujo son también integrales respecto al elemento de área, las propiedades de estas últimas nos dan propiedades correspondientes para las integrales de flujo.

$$\iint_S (\vec{F} + \vec{G}) \cdot d\vec{n} = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{n} + \iint_S \vec{G} \cdot d\vec{n}, \quad \iint_S (k\vec{F}) \cdot d\vec{n} = k \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{n} \quad (\text{linealidad})$$

La integral de flujo sobre una superficie fija S es una función lineal del campo \vec{F} .

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \vec{F} \cdot d\vec{n} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{n} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{n} \quad (\text{aditividad})$$

si las dos superficies S_1, S_2 no se solapan.

$$\left| \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{n} \right| \leq \iint_S \|\vec{F}\| da \leq \max_S \|\vec{F}\| \cdot a(S) \quad (\text{desigualdad triangular})$$

Es consecuencia de la desigualdad triangular para integrales de área y la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|v \cdot w| \leq \|v\| \|w\|$.

3.4.7 Borde de una superficie

Definición 3.4.10: El borde de una superficie, superficies cerradas

El borde ∂S de una superficie S puede ser igual a

- una o varias curvas cerradas ([figura 3.29](#))
- el vacío \emptyset (por ejemplo, una esfera). En este caso decimos que la superficie es **cerrada**.

Las integrales de flujo en superficies cerradas se denotan con un círculo para indicarlo:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{n}$$

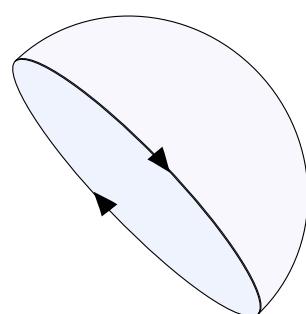
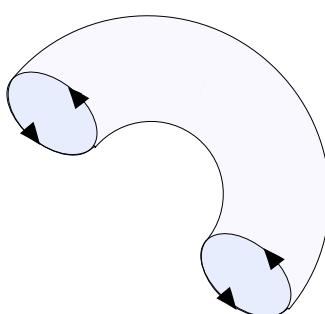


Figura 3.29 – Bordes de superficies.

Definición 3.4.11: Convenciones acerca de la orientación de una superficie

Por defecto, se usan estas convenciones:

- En una superficie **cerrada**, la orientación «positiva» es la dada por el vector normal que apunta hacia el **exterior** del recinto encerrado por la superficie:
 - flujo de salida: **positivo**
 - flujo de entrada: **negativo**
- En una **gráfica** $z = f(x, y)$, la orientación positiva es la que da un vector normal con *componente z positivo*, es decir, que «apunta hacia arriba».

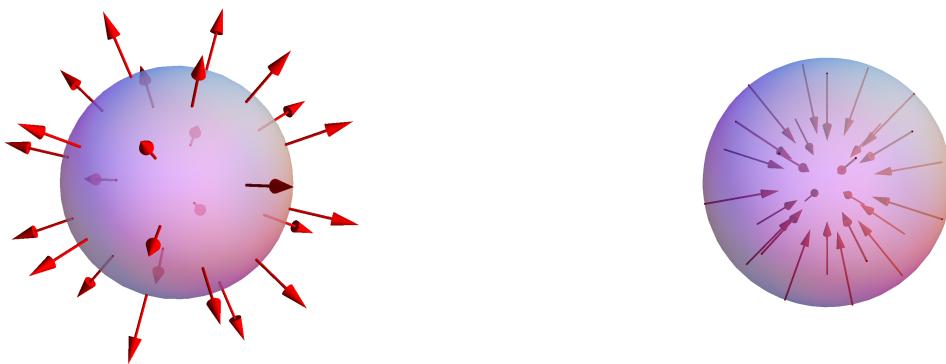


Figura 3.30 – Las dos orientaciones de una esfera.

► **Ejemplo 3.4.2**

Las coordenadas esféricas $\sigma(u, v)$ en una esfera de radio R dan la orientación **negativa**, pues como calculamos antes, ([enunciado 2.12.1](#)) el vector normal asociado es $\vec{n}_\sigma(u, v) = (-R^2 \sin v) \vec{n}$, donde \vec{n} es el normal unitario *exterior*. Por tanto, \vec{n}_σ apunta hacia *dentro* de la bola acotada por la esfera. ◀

► **Ejemplo 3.4.3**

Encontrar el flujo del campo posición $\vec{F} = \vec{r} = (x, y, z)$ a través de la parte del paraboloide $S : z = 4 - x^2 - y^2$ por encima del plano $z = 0$.

El paraboloide es una superficie de revolución, obtenida al girar la parábola $z = 4 - r^2$ en el plano rz alrededor del eje z . Parametrizamos en coordenadas cilíndricas

$$\sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 4 - r^2), \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Las derivadas parciales son

$$\sigma_r = (\cos \theta, \sin \theta, -2r)$$

$$\sigma_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$$

por tanto el vector normal asociado a σ es

$$\vec{n}_\sigma = \sigma_r \times \sigma_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & -2r \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (2r^2 \cos \theta, 2r^2 \sin \theta, r) = r(2r \cos \theta, 2r \sin \theta, 1)$$

por tanto

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{n} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \vec{r}(r \cos \theta, r \sin \theta, 4 - r^2) \cdot (2r^2 \cos \theta, 2r^2 \sin \theta, r) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r \cos \theta, r \sin \theta, 4 - r^2) \cdot (2r^2 \cos \theta, 2r^2 \sin \theta, r) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2r^3 \cos^2 \theta + 2r^3 \sin^2 \theta + 4r - r^3) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r + r^3) dr d\theta = 2\pi \left(4 \cdot \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4} \right) = 24\pi. \end{aligned}$$

También se puede calcular parametrizando el paraboloide como gráfica:

$$\sigma(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2), \quad x^2 + y^2 \leq 4$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (1, 0, -2x) \\ \sigma_y &= (0, 1, -2y) \end{aligned}$$

con vector normal asociado

$$\vec{n}_\sigma = \sigma_x \times \sigma_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (2x, 2y, 1)$$

por tanto, llamando D al disco $x^2 + y^2 \leq 4$,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{n} &= \iint_D (x, y, 4 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1) dx dy \\ &= \iint_D (2x^2 + 2y^2 + 4 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \iint_D (4 + x^2 + y^2) dx dy \end{aligned}$$

Ahora para calcular esta integral lo más fácil es cambiar a coordenadas polares, con lo cual queda la misma integral que antes:

$$\iint_D (4 + x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 + r^2) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r + r^3) dr d\theta = 24\pi.$$



► **Ejemplo 3.4.4: el flujo de un campo inverso cuadrado**

Consideremos el campo

$$\vec{F} = \rho \frac{\vec{r}}{r^3}$$

(ρ constante) a través de la esfera $S_R : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ se puede calcular geométricamente sin calcular en coordenadas. Aquí $\vec{r} = (x, y, z)$ es el campo posición y $r = \|\vec{r}\|$ es el radio.

El vector normal unitario a la esfera es simplemente el **radio normalizado**

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Esta es la propiedad geométrica de las esferas: el radio vector es ortogonal a la superficie. Entonces

$$\iint_{S_R} \vec{F} \cdot \vec{n} \, da = \iint_{S_R} \rho \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \, da = \rho \iint_{S_R} \frac{r^2}{r^4} \, da = \frac{\rho}{R^2} \iint_{S_R} \, da = \frac{\rho}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi\rho.$$

Para un campo eléctrico, esto viene a ser la *Ley de Gauss* en Física, pero es general. ◀

En el [apartado 3.2](#) vimos cómo se generaliza el Teorema Fundamental del Cálculo en una variable a las integrales de **línea**. Cabe preguntarse si hay una versión del Teorema Fundamental para integrales de **flujo** en superficies, y qué tipo de resultado generalizaría a n dimensiones.

Para abordar estas cuestiones es preciso estudiar otro tipo de derivadas aparte del gradiente, que jugaba este papel en el Teorema Fundamental para integrales de línea.

3.5 El Teorema de Stokes para superficies en \mathbb{R}^3

3.5.1 Orientación de una superficie y su borde

La versión vectorial del Teorema de Green se puede entender colocando la región plana G dentro del espacio \mathbb{R}^3 , en el plano xy . Observar que se toma la componente vertical, en dirección del vector \vec{k} , del rotacional. El vector \vec{k} es el normal unitario positivo a la región G considerada como superficie en \mathbb{R}^3 .

El fenómeno de cancelación de las orientaciones interiores se produce en una **pavimentación por elementos de área orientados** (figura 3.31), que son un pequeño «parche» de área orientada con un vector normal que indica el sentido de la circulación.

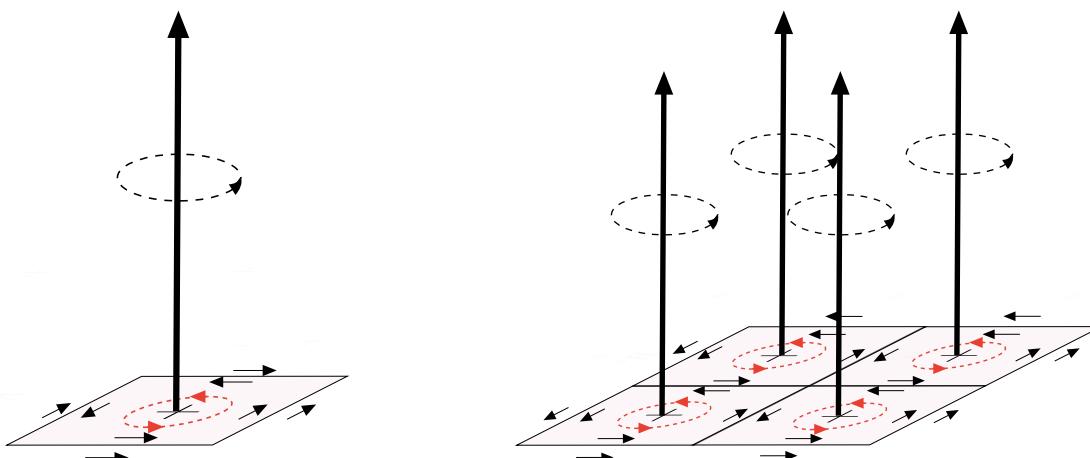
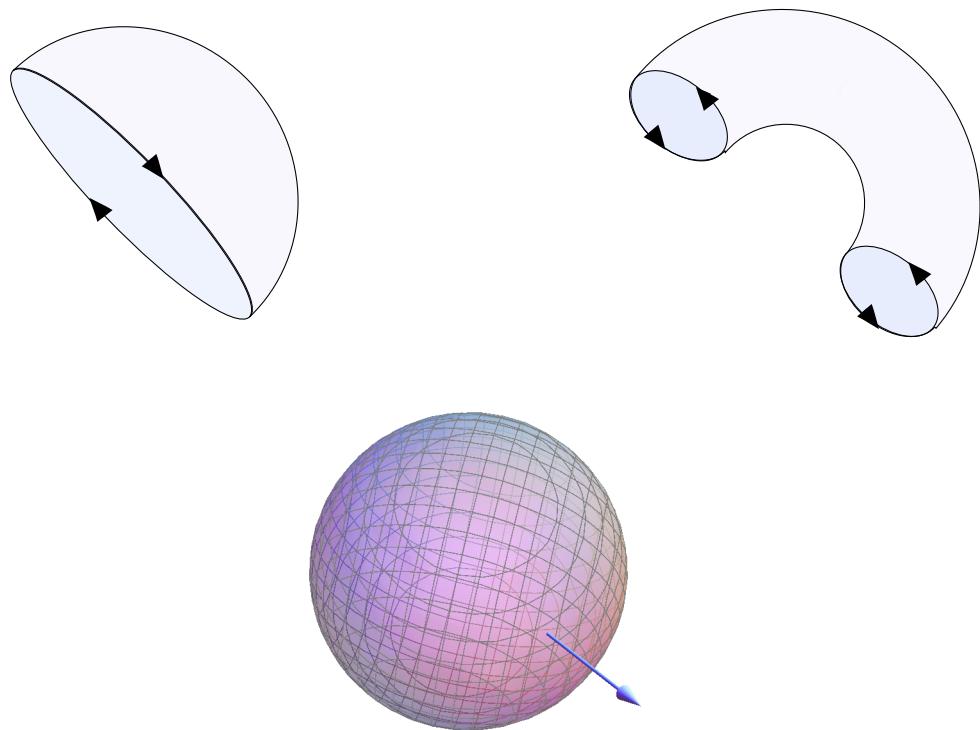


Figura 3.31 – Elemento de área orientado y varios elementos de área orientados superpuestos.

Para determinar la orientación «positiva» se usa la **regla del pulgar**: con la mano **derecha** torcida en la dirección de la circulación, el pulgar indica la dirección del vector normal compatible.

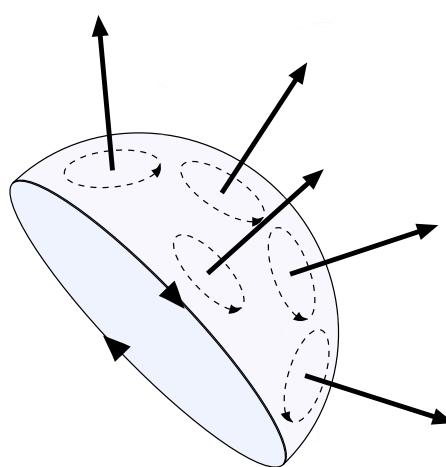
Aquí estudiamos superficies parametrizadas S , es decir, son imágenes de una región plana S^* . Geométricamente, la parametrización **deforma** la región plana en la superficie curvada. Los elementos de área orientados con su vector normal unitario también se verán deformados a la superficie en \mathbb{R}^3 . Supondremos que las parametrizaciones hacen lo que la intuición nos dice es razonable: llevan el borde ∂S^* de la región plana al borde ∂S de la superficie.

Recordamos ([definición 3.4.10](#)) que el **borde** de una superficie puede ser vacío (superficie **cerrada**) o una o varias curvas cerradas. Como tanto las curvas cerradas como las superficies deben estar orientadas ([figura 3.32](#)), es importante entender que las dos orientaciones, en la superficie S y en su borde ∂S , deben cumplir una **condición de compatibilidad**. De lo contrario, la fórmula de Stokes se cambiará con un signo.

**Figura 3.32** – Superficies y bordes orientados.**Definición 3.5.1: La orientación compatible en el borde**

Un elemento de área infinitesimal a lo largo de la superficie, orientado con un vector normal unitario **continuo** \vec{n} , al acercarse al borde, induce una dirección de circulación en él. Esta es la orientación compatible del borde.

Se puede usar la regla del pulgar para determinarla geométricamente ([figura 3.33](#)).

**Figura 3.33** – Flujo orientado en una superficie.

3.5.2 El Teorema de Stokes para superficies

Como el Teorema de Green es válido en la región plana \mathcal{S}^* , parece lógico pensar que la fórmula del teorema, cambiada de variable por la parametrización, se transformará en otro resultado análogo válido en la superficie \mathcal{S} .

Enunciado 3.5.1: El Teorema de Stokes en notación vectorial

Sea \vec{F} un campo vectorial de clase C^1 en una superficie acotada \mathcal{S} cuyo borde es o bien vacío o una o varias curva(s) cerrada(s) $\partial\mathcal{G}$. Si las orientaciones en \mathcal{S} y $\partial\mathcal{S}$ son compatibles, entonces

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{t} d\ell = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} da$$

o equivalentemente

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\vec{t} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{n}$$

Enunciado 3.5.2: El Teorema de Stokes en notación diferencial

Sean P, Q campos escalares de clase C^1 en una superficie acotada \mathcal{S} cuyo borde orientado es o bien vacío o una o varias curva(s) cerrada(s) $\partial\mathcal{G}$. Si las orientaciones en \mathcal{S} y $\partial\mathcal{S}$ son compatibles, entonces

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial\mathcal{S}} P dx + Q dy + R dz \\ &= \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

- (idea): Las dificultades técnicas aumentan, pero se pueden emplear las mismas ideas que hemos indicado se utilizan en la demostración del Teorema de Green.

Se puede subdividir una superficie en «parches» pequeños, esencialmente, reduciendo a elementos de área infinitesimales orientados, e invocar la cancelación de las orientaciones interiores ([figura 3.33](#)).

La segunda idea consiste en «deformar» el Teorema de Green, es decir, mediante la parametrización de la superficie, se pasa de una región plana a la superficie. El vector normal \vec{k} del plano se convierte en el normal \vec{n} de la superficie. Empleando la notación diferencial, hay que comprobar que la fórmula de Green corresponde por cambio de variable a la fórmula de Stokes. ■

Definición 3.5.2: Interpretación física del rotacional: vorticidad

La **vorticidad** alrededor de un eje \vec{n} (unitario) de un campo en un punto p se define como el límite del cociente de su circulación en el borde de un pequeño disco (o superficie similar) en un plano ortogonal a \vec{n} , que se reduce a p por el área del disco, es decir,

$$\lim_{\substack{G \rightarrow \{p\} \\ G \perp \vec{n}}} \frac{1}{a(G)} \oint_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{t} d\ell$$

Con unidades de trabajo/área, se puede entender como una **densidad de circulación**.

Un campo de rotacional nulo se llama **irrotacional**.

Enunciado 3.5.3: Rotacional y vorticidad

La vorticidad del campo \vec{F} en un punto p alrededor del eje \vec{n} es la componente en dirección \vec{n} del rotacional de \vec{F} :

$$((\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n})(p) = \lim_{\substack{G \rightarrow \{p\} \\ G \perp \vec{n}}} \frac{1}{a(G)} \oint_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{t} d\ell \quad [3.5.1]$$

donde G es un disco o superficie similar, en un plano ortogonal a \vec{n} , que se reduce a p .

- **Demostración:** Por el Teorema de Stokes, se tiene

$$\frac{1}{a(G)} \oint_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{t} d\ell = \frac{1}{a(G)} \iint_G (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} da$$

y la segunda integral es el valor medio de la componente normal del rotacional sobre G . Si mantenemos \vec{n} constante, en el límite cuando G se encoge a un punto $\{p\}$, estas integrales tienden al valor de $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}$ en p , por la propiedad correspondiente de los valores medios ([enunciado 2.5.2](#)). ■

Si vamos poniendo $\vec{n} = \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (un sistema de referencia ortonormal) en [\[3.5.1\]](#), obtenemos el vector rotacional completo.

Nota 3.5.1: Interpretación física de la vorticidad

En la dinámica de fluidos, el [enunciado 3.5.3](#) tiene la siguiente interpretación: si se coloca una pequeña rueda de centro p y normal \vec{n} , bajo la influencia del campo \vec{F} , la vorticidad alrededor del eje \vec{n} , que es la componente en dirección \vec{n} del rotacional, es proporcional a la velocidad angular de giro de la rueda. Es decir, mide la **tendencia a girar** de la rueda. Si no gira, la componente del rotacional en dirección \vec{n} es nula.

3.5.3 Un caso del lema de Poincaré mediante el Teorema de Stokes

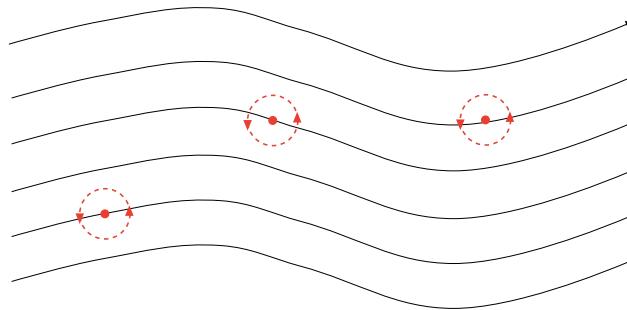


Figura 3.34 – Tendencia a girar en el movimiento de un fluido.

Es importante resaltar que se trata del movimiento de la rueda **relativo a su centro** (de gravedad), no del movimiento relativo a un eje fijo externo. Es decir, la rueda puede estar **trasladándose** a lo largo de las **líneas de corriente** del fluido, que pueden (o no) estar curvadas, **con o sin** este movimiento giratorio alrededor de su eje. En <http://en.wikipedia.org/wiki/Vorticity#Examples> y http://en.wikipedia.org/wiki/Vortex#Vorticity_profiles puede verse esta interpretación ilustrada con varias animaciones.

Como puede comprobarse inmediatamente, el Teorema de Green es un caso particular del Teorema de Stokes para superficies, donde la superficie es plana. Ambos relacionan una integral de longitud con una de área, donde una se toma sobre la superficie y otra sobre su **borde**, de este modo manteniendo la relación fundamental que se vio en el Teorema Fundamental para las integrales de línea ([apartado 3.2.3](#)).

3.5.3 Un caso del lema de Poincaré mediante el Teorema de Stokes

Vamos a dar otra demostración del Lema de Poincaré ([enunciado 3.2.16](#)) en el caso de potenciales escalares sobre una región plana.

Enunciado 3.5.4: Lema de Poincaré para potenciales escalares en tres dimensiones

Sea $W \subseteq \mathbb{R}^3$ una región (abierto conexo) **estrellada** ([definición 3.2.13](#)) y $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3) : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 sobre W de rotacional nulo: $\nabla \times \vec{F} = 0$. Entonces \vec{F} tiene un potencial escalar f en W ; o sea, existe $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ (de clase C^2) tal que $\vec{F} = \nabla f$.

- **Demostración del Lema de Poincaré utilizando el Teorema de Stokes:** Como no puede ser de otra manera, definimos

$$f(q) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{[p,q]} \vec{F} \cdot \vec{t} \, d\ell$$

3.5 El Teorema de Stokes para superficies en \mathbb{R}^3

para un punto $q \in W$, y verificamos que f es un potencial escalar de \vec{F} .

Fijamos un punto base p de W y un vector **unitario** \vec{u} . Dado un punto $q \in W$, para $h \approx 0$, el segmento $[q, q + h\vec{u}]$ estará contenido en W . Como W es estrellada, para cualquier punto en este segmento, $q' \in [q, q + h\vec{u}]$, se tiene $[p, q'] \subseteq W$. Consideremos

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{q' \in [q, q+h\vec{u}]} [p, q']$$

Esta unión es el **triángulo** de vértices p , q y $q + h\vec{u}$ ([figura 3.35](#)). Como cada segmento $[p, q']$ está contenido en W , también $T \subseteq W$.

Aquí llamaremos «triángulo» a la región plana, y su borde ∂T entonces es una curva cerrada formada por tres segmentos. Aplicando el Teorema de Stokes a la **superficie triangular** T queda

$$\oint_{\partial T} \vec{F} \cdot \vec{t} d\ell = \iint_T (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} da = 0$$

mientras que, por aditividad ([apartado 3.1.8](#)), y teniendo en cuenta la orientación,

$$\oint_{\partial T} \vec{F} \cdot \vec{t} d\ell = \left(\int_{[p,q]} + \int_{[q,q+h\vec{u}]} - \int_{[p,q+h\vec{u}]} \right) \vec{F} \cdot \vec{t} d\ell$$

con lo cual queda

$$\int_{[q,q+h\vec{u}]} \vec{F} \cdot \vec{t} d\ell = \int_{[p,q+h\vec{u}]} \vec{F} \cdot \vec{t} d\ell - \int_{[p,q]} \vec{F} \cdot \vec{t} d\ell = f(q + h\vec{u}) - f(q)$$

El resto de la demostración procede igual que en la construcción general del potencial para un campo conservativo ([enunciado 3.2.7](#)):

$$\begin{aligned} \frac{f(q + h\vec{u}) - f(q)}{h} &= \frac{1}{h} \int_{[q,q+h\vec{u}]} \vec{F} \cdot \vec{t} d\ell \\ &= \frac{1}{h} \int_0^1 \vec{F}(q + th\vec{u}) \cdot h\vec{u} dt = \int_0^1 \vec{F}(q + th\vec{u}) \cdot \vec{u} dt \end{aligned}$$

por tanto, intercambiando el límite con la integral, queda

$$D_{\vec{u}} f(q) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(q + h\vec{u}) - f(q)}{h} = \int_0^1 \vec{F}(q) \cdot \vec{u} dt = (\vec{F} \cdot \vec{u})(q)$$

con lo cual queda establecido, eligiendo para \vec{u} las direcciones $\vec{e}_k : 1 \leq k \leq 3$ de una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , dando derivadas parciales, que $D_k f(q) = f_k(q)$ para todo $q \in W$ y $1 \leq k \leq 3$, o sea $\nabla f = \vec{F}$. ■

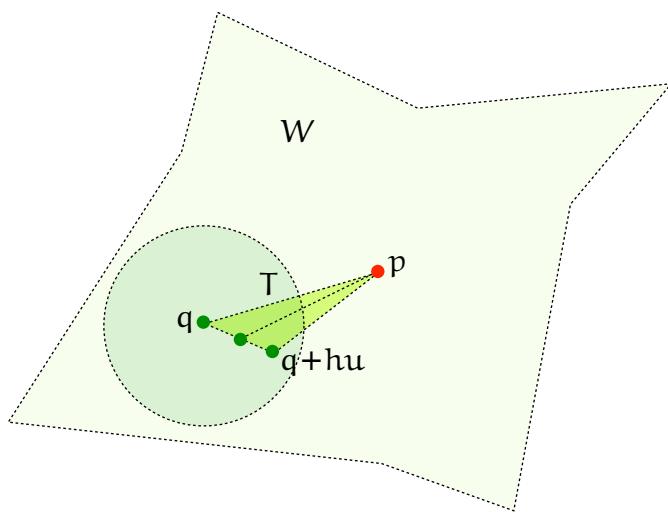


Figura 3.35 – Triángulo formado por el punto base, otro punto y una perturbación de éste en una dirección fija.

Nota 3.5.2: Adaptación de esta demostración a dimensión arbitraria

La demostración que hemos dado claramente es válida en el plano, para lo cual basta el Teorema de Green. Se puede adaptar a n dimensiones expresándola en términos de **formas diferenciales** ([capítulo 4](#)). En vez del campo \vec{F} se empieza con una 1-forma

$$\omega = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$$

cerrada ($d\omega = 0$) y se define $f(q) = \int_{[p,q]} \omega$. Para ello hace falta emplear la **fórmula de Stokes general**

$$\oint_{\partial T} \omega = \iint_T d\omega$$

3.6 El Teorema de Gauss de la divergencia

3.6.1 El borde de un sólido

El Teorema de Jordan en el plano ([enunciado 3.3.1](#)) dice que una curva simple y cerrada divide al plano en dos regiones (planas), su «interior» (acotado) y su «exterior» (no acotado). El resultado análogo para superficies en tres dimensiones dice que una **superficie simple y cerrada** («simple» quiere decir, igual que para curvas, que la superficie no tiene auto-intersecciones) divide al espacio en dos regiones **sólidas**, llamadas también el interior y el exterior.

Enunciado 3.6.1: El borde de un sólido

En general, un sólido $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ «suficientemente regular», tiene como borde $\partial\Omega$ un número finito de superficies cerradas.

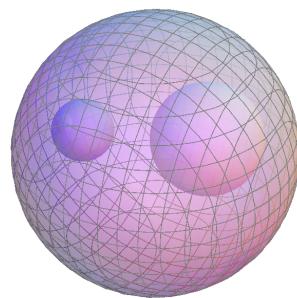


Figura 3.36 – Esfera sólida con dos burbujas esféricas.
Su borde son tres superficies esféricas.

Definición 3.6.1: La orientación en una «burbuja»

En un sólido Ω , la orientación considerada «**positiva**» es aquella determinada en su borde $\partial\Omega$ por el campo normal unitario **exterior**, es decir, que apunta fuera de Ω .

Esto obliga a que, si Ω tiene un **agujero** o «**burbuja**», la orientación positiva en su borde, desde la perspectiva de Ω , es la dada por el normal **interior** según la perspectiva de la burbuja, pues apuntar hacia fuera del sólido Ω es apuntar hacia dentro de la burbuja ([figura 3.37](#)).

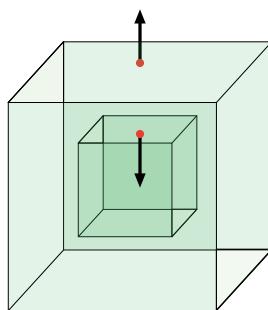


Figura 3.37 – Sólido con una burbuja, mostrando las orientaciones relativas. El normal exterior relativo al sólido es el normal *interior* relativo a la burbuja.

Pregunta 3.6.1: Sólidos cerrados

Hay curvas cerradas y superficies cerradas, que por definición tienen borde vacío. ¿Cuál sería el concepto análogo de «sólido cerrado»? La clave está en que para ser una curva (dimensión 1) cerrada, la curva debe curvarse en 2 dimensiones y encerrar una región plana. Para ser superficie (dimensión 2) cerrada, la superficie debe curvarse en 3 dimensiones y encerrar un sólido plano. Entonces, para ser sólido (dimensión 3) cerrado, el sólido debe curvarse en 4 dimensiones y encerrar un *hipersólido* plano. Por ejemplo, la bola unidad en \mathbb{R}^4 está encerrada por la esfera unidad en \mathbb{R}^4 , que es un sólido tridimensional cerrado.

Definición 3.6.2: El operador de divergencia

Sea $W \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $\vec{F}: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial diferenciable en W . Sean (x_1, \dots, x_n) coordenadas en W respecto a una base ortonormal de \mathbb{R}^n . Entonces su **divergencia** se define como la **traza** de la diferencial, o sea, si $\vec{F} = (f_1, \dots, f_n)$, entonces

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{Tr}(df) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

La divergencia se puede considerar como el **producto interior simbólico**

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F},$$

donde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ es el operador vectorial de derivadas parciales.

El significado físico de la divergencia está dado por el último de los teoremas fundamentales del Cálculo Vectorial, conocido como Teorema de la Divergencia o Teorema de Gauss.

3.6.2 El Teorema de la divergencia

Enunciado 3.6.2: El Teorema de Gauss en notación vectorial

Sea \vec{F} un campo vectorial de clase C^1 en un sólido acotado Ω cuyo borde es una o varias superficies cerradas. Entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, da = \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{F}) \, dv$$

o equivalentemente

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{n} = \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{F}) \, dv$$

Enunciado 3.6.3: El Teorema de Gauss en notación diferencial

Sean P, Q, R campos escalares de clase C^1 en un sólido acotado Ω cuyo borde es una o varias superficies cerradas. Entonces

$$\iint_{\partial\Omega} P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \, dx \, dy \, dz$$

- **Demostración:** Primero, observamos que el Teorema completo se deduce de los casos particulares de un campo dirigido a lo largo de los ejes, es decir, la fórmula es lineal en P, Q, R , por tanto podemos poner $\vec{F} = P\vec{i}, Q\vec{v}j$ y $R\vec{v}k$ y sumar para obtener la fórmula completa.

Por analogía con la demostración del Teorema de Green, podemos empezar demostrando el teorema para el cubo unidad $\Omega^* = [0, 1]^3$. El borde $\partial\Omega^*$ son las seis caras formadas por copias del cuadrado unidad colocadas paralelas a los planos de coordenadas. Las podemos designar por

$$X_0 = \{0\} \times [0, 1] \times [0, 1] \quad X_1 = \{1\} \times [0, 1] \times [0, 1]$$

$$Y_0 = [0, 1] \times \{0\} \times [0, 1] \quad Y_1 = [0, 1] \times \{1\} \times [0, 1]$$

$$Z_0 = [0, 1] \times [0, 1] \times \{0\} \quad Z_1 = [0, 1] \times [0, 1] \times \{1\}$$

Por simetría, podemos restringirnos al caso de un campo vertical $\vec{F} = R\vec{k}$. La componente normal $\vec{F} \cdot \vec{n} = R\vec{k} \cdot \vec{n}$ será nula sobre los lados X_i, Y_j , pues en ellos el vector normal exterior es $\vec{n} = \pm\vec{i}, \pm\vec{j}$.

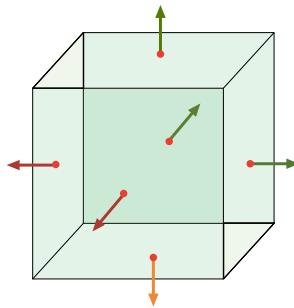


Figura 3.38 – Cubo con el campo normal unitario exterior.

Sobre la tapa horizontal superior Z_1 , el vector normal unitario exterior es $\vec{n} = \vec{k}$, y sobre la tapa horizontal inferior Z_0 , es $\vec{n} = -\vec{k}$. Entonces,

$$\iint_{\partial\Omega^*} \vec{F} \cdot \vec{n} \, da = \iint_{Z_1} \vec{F} \cdot \vec{k} \, da - \iint_{Z_0} \vec{F} \cdot \vec{k} \, da.$$

Es muy sencillo parametrizar las caras del cubo. Todas se parametrizan por el cuadrado unidad $[0, 1] \times [0, 1]$, en el cual pondremos coordenadas x, y . Sólo cambia el sitio donde se ponen las variables. Para las tapas horizontales, tenemos

$$\begin{aligned} Z_1 &: \{(x, y, 1) : (x, y) \in [0, 1]^2\} \\ Z_0 &: \{(x, y, 0) : (x, y) \in [0, 1]^2\} \end{aligned}$$

Se trata de parametrizaciones como gráficas, donde además el cambio de variable es simplemente trasladar una copia del cuadrado unidad (para las otras tapas además hay que girar). En particular son isometrías y el jacobiano es por tanto 1. Entonces

$$\iint_{Z_1} \vec{F} \cdot \vec{k} \, da = \iint_{Z_1} R \, da = \int_0^1 \int_0^1 R(x, y, 1) \, dx \, dy$$

$$\iint_{Z_0} \vec{F} \cdot \vec{k} \, da = \iint_{Z_0} R \, da = \int_0^1 \int_0^1 R(x, y, 0) \, dx \, dy$$

por tanto

$$\iint_{\partial\Omega^*} \vec{F} \cdot \vec{n} \, da = \int_0^1 \int_0^1 (R(x, y, 1) - R(x, y, 0)) \, dx \, dy.$$

El otro lado de la fórmula, la integral de la divergencia, para el campo $\vec{F} = R \vec{k}$ es

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega^*} (\nabla \cdot \vec{F}) \, dv &= \iiint_{\Omega^*} (\nabla \cdot R \vec{k}) \, dv = \iiint_{\Omega^*} \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial R}{\partial z} \, dz \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left[R(x, y, z) \right]_{z=0}^{z=1} \, dx \, dy \end{aligned}$$

3.6 El Teorema de Gauss de la divergencia

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(R(x, y, 1) - R(x, y, 0) \right) dx dy.$$

Esto demuestra el Teorema de la Divergencia para el cubo unidad.

Para conseguir un sólido general, imitando la demostración del Teorema de Green, podemos cambiar de variable y considerar imágenes del cubo unidad, o juntar copias de cubos a distintas escalas para aproximar otros sólidos.

Para entender por qué es aditivo el flujo cuando se juntan varios cubos, necesitamos entender el fenómeno análogo a la cancelación del trabajo en las orientaciones interiores en los teoremas de Green y de Stokes. De hecho es lo mismo: cada lado común interior aparece dos veces, con orientaciones opuestas, por tanto al unir, **se cancelan los flujos interiores** y queda sólo el flujo sobre el borde ([figura 3.39](#)). ■

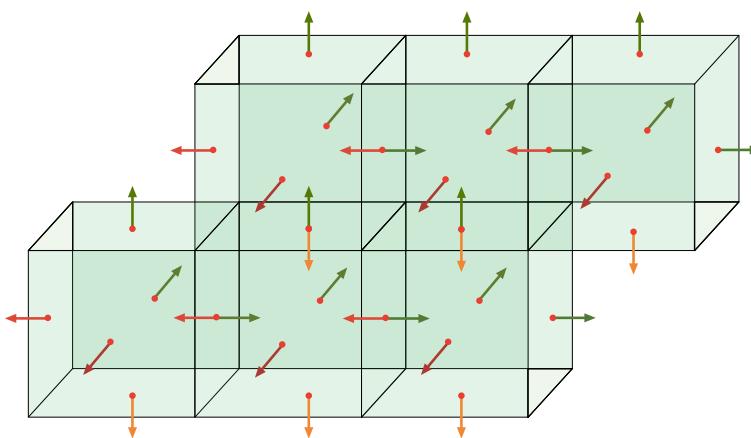


Figura 3.39 – Cancelación de flujos en caras interiores.

3.6.3 Interpretación física de la divergencia

El Teorema de Gauss nos da una interpretación de la divergencia que muestra claramente que no depende de la elección coordenadas, y además explica su significado en términos del flujo.

Enunciado 3.6.4: La divergencia como densidad de flujo

Sea \vec{F} un campo vectorial de clase C^1 en el abierto $W \subseteq \mathbb{R}^3$ y $p \in W$ cualquier punto. Entonces la divergencia es la **densidad de flujo por volumen** en p , dada por

$$(\nabla \cdot \vec{F})(p) = \lim_{\Omega \rightarrow \{p\}} \frac{1}{v(\Omega)} \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} da \quad [3.6.1]$$

donde Ω es un pequeño sólido acotado por una superficie cerrada (por ejemplo, una bola centrada en p) que se reduce a p .

- **Demostración:** Por el Teorema de la Divergencia,

$$\frac{1}{v(\Omega)} \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, da = \frac{1}{v(\Omega)} \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{F}) \, da.$$

La segunda integral es el valor medio de la divergencia sobre Ω , que tiende al valor $\operatorname{div} \vec{F}(p)$ cuando Ω se encoge a p por la propiedad correspondiente general de los valores medios ([enunciado 2.5.2](#)). ■

Definición 3.6.3: Interpretación física de la divergencia

Si el campo \vec{F} representa un fluido, la divergencia en p mide la tendencia a la **expansión** del campo en p :

- Divergencia negativa: flujo de **entrada**, contracción; p es un **sumidero**.
- Divergencia positiva: flujo de **salida**, expansión; p es una **fuente**.

Un campo de divergencia nula se llama **incompresible** (que no se puede comprimir)^a o **solenoidal**.

Con esta interpretación el Teorema de la Divergencia se puede pensar como la expresión matemática del fenómeno de las cancelaciones del flujo en las paredes interiores. La integral de la divergencia es la «suma» de todas las fuentes y sumideros dentro de la región Ω . Habrá cancelaciones en el interior, y quedará solo la «suma» del flujo sobre el borde, es decir, la integral de flujo a través del borde.

^aque no *incomprensible*; al menos, eso esperamos.

3.7 Relaciones diferenciales vectoriales en \mathbb{R}^3

Expondremos aquí algunas de las identidades que satisfacen los operadores **gradiente**, **rotacional** y **divergencia** entre ellos. Dista mucho de ser una lista completa, solamente queremos indicar aquellas directamente relacionadas con el Teorema Fundamental para integrales de línea y los teoremas de Green, Stokes y Gauss.

Consideramos el **operador simbólico en derivadas parciales** «del» o «nabla»

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad [3.7.1]$$

Si declaramos que ∇ actúa sobre campos escalares $f : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ aplicando cada derivada a f , se obtiene el **gradiente**:

$$\text{grad } f = \nabla f \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad [3.7.2]$$

simbólicamente, como si se **multiplicara** el «vector» ∇ con un «escalar» f .

Para un campo vectorial $\vec{F} = (P, Q, R) : W \rightarrow \mathbb{R}^3$, el **rotacional** corresponde a tomar el **producto vectorial** o **exterior**,

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad [3.7.3]$$

haciendo siempre que la derivada (a la izquierda) actúe sobre la función (a la derecha). Asimismo, para el campo \vec{F} , su **divergencia** corresponde al **producto escalar** o **interior**

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad [3.7.4]$$

En el estudio de los campos conservativos en dos y tres dimensiones ([apartado 3.2.7](#)) vimos que para ser conservativo el campo \vec{F} , es **necesario** que su rotacional sea nulo: $\nabla \times \vec{F} = 0$, y como ser conservativo significa ser un **campo gradiente**, esto corresponde a la primera relación fundamental $\nabla \times \nabla f = 0$. Ahora descubrimos la segunda relación fundamental.

Enunciado 3.7.1: Relaciones fundamentales entre los operadores vectoriales de derivación

$$\begin{array}{lll} \text{rot grad } f = 0 & \text{o simbólicamente,} & \nabla \times \nabla f = 0 \\ \text{div rot } \vec{F} = 0 & & \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0 \end{array}$$

para un campo escalar f y un campo vectorial \vec{F} , ambos de clase C^2 .

- **Demostración:** En coordenadas, se trata de expresar cada ecuación como combinación de derivadas parciales segundas. En ambos casos, la validez de las ecuaciones se reduce a la **simetría de las derivadas parciales** para funciones de clase C^2 . Para un campo escalar f ,

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla f &= \nabla \times \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Para un campo vectorial $F = (P, Q, R)$,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times F) &= \nabla \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \nabla \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0 \end{aligned}$$

Igualmente por simetría de las derivadas parciales. ■

Nota 3.7.1: Regla para recordar la primera relación fundamental

El producto vectorial tiene la propiedad básica de **antisimetría**

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$$

lo cual sugiere que $\nabla \times \nabla = 0$, que al aplicar a un campo escalar, resultando la primera relación $\nabla \times \nabla f = 0$.

Nota 3.7.2: Regla para recordar la segunda relación fundamental

El producto vectorial tiene la propiedad básica de **ortogonalidad**

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} \perp \mathbf{v}, \mathbf{w} \quad \therefore \quad \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$$

lo cual sugiere que $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{F}}) = 0$.

Habiendo dado estas dos reglas simbólicas, tenemos que advertir que en general es arriesgado razonar por analogía con las propiedades de los vectores, pues **∇ no es un vector hasta que no opera** sobre algún campo. Es lo que se conoce como operador diferencial.

Nota 3.7.3: Manipulación de la notación vectorial

La manipulación de la notación vectorial para ∇ sugiere pero no asegura la validez de ciertas fórmulas. La manipulación simbólica basada en tratar ∇ como vector no constituye en general una demostración válida, y en ocasiones puede llevar a conclusiones falsas. Por ejemplo, aunque $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} = 0$ para vectores, no es cierto que para todo campo $(\nabla \times \vec{\mathbf{F}}) \cdot \vec{\mathbf{F}} = 0$.

Al tratarse de derivadas, cabe esperar que se cumplan versiones análogas de las reglas de derivación para funciones. La propiedad más sencilla de verificar es la linealidad: si $a, b \in \mathbb{R}$, f, g son campos escalares, y $\vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{G}}$ son campos vectoriales, entonces

$$\nabla(af + bg) = a\nabla f + b\nabla g \tag{3.7.5}$$

$$\nabla \times (a\vec{\mathbf{F}} + b\vec{\mathbf{G}}) = a \nabla \times \vec{\mathbf{F}} + b \nabla \times \vec{\mathbf{G}} \tag{3.7.6}$$

$$\nabla \cdot (a\vec{\mathbf{F}} + b\vec{\mathbf{G}}) = a \nabla \cdot \vec{\mathbf{F}} + b \nabla \cdot \vec{\mathbf{G}} \tag{3.7.7}$$

Omitimos la demostración, al reducirse directamente a la linealidad de las derivadas parciales. Se pueden multiplicar dos campos escalares o un campo escalar con un campo vectorial. Esto da lugar a una serie de reglas para derivar vectorialmente los productos.

Enunciado 3.7.2: Las reglas del producto vectoriales

$$\nabla(fg) = f(\nabla g) + g\nabla f \quad [3.7.8]$$

$$\nabla \cdot (f\vec{F}) = (\nabla f) \cdot \vec{F} + f(\nabla \cdot \vec{F}) \quad [3.7.9]$$

$$\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G}) \quad [3.7.10]$$

$$\nabla \times (f\vec{F}) = (\nabla f) \times \vec{F} + f(\nabla \times \vec{F}) \quad [3.7.11]$$

donde f, g son campos escalares y \vec{F}, \vec{G} campos vectoriales.

- **Demostración:** Para dos campos escalares,

$$\begin{aligned}\nabla(fg) &= \left(\frac{\partial(fg)}{\partial x}, \frac{\partial(fg)}{\partial y}, \frac{\partial(fg)}{\partial z} \right) \\ &= \left(f \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial x}, f \frac{\partial g}{\partial y} + g \frac{\partial f}{\partial y}, f \frac{\partial g}{\partial z} + g \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= f \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right) + g \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= f\nabla g + g\nabla f\end{aligned}$$

Sea $\vec{F} = (a, b, c)$. Entonces

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (f\vec{F}) &= \nabla \cdot (fa, fb, fc) \\ &= \frac{\partial(fa)}{\partial x} + \frac{\partial(fb)}{\partial y} + \frac{\partial(fc)}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} a + f \frac{\partial a}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} b + f \frac{\partial b}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} c + f \frac{\partial c}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (a, b, c) + f \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \right) \\ &= (\nabla f) \cdot \vec{F} + f(\nabla \cdot \vec{F}).\end{aligned}$$

Para el rotacional,

$$\begin{aligned}\nabla \times (f\vec{F}) &= \nabla \times (fa, fb, fc) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ fa & fb & fc \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ fa & fb & fc \end{vmatrix}$$

3.7 Relaciones diferenciales vectoriales en \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial(f c)}{\partial y} - \frac{\partial(f b)}{\partial z}, \frac{\partial(f a)}{\partial z} - \frac{\partial(f c)}{\partial x}, \frac{\partial(f b)}{\partial x} - \frac{\partial(f a)}{\partial y} \right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial y} c + f \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} b - f \frac{\partial b}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} a + f \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} c - f \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x} b + f \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} a - f \frac{\partial a}{\partial y} \right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial y} c - \frac{\partial f}{\partial z} b, \frac{\partial f}{\partial z} a - \frac{\partial f}{\partial x} c, \frac{\partial f}{\partial x} b - \frac{\partial f}{\partial y} a \right) + f \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}, \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) \\
&= (\nabla f) \times \vec{F} + f(\nabla \times \vec{F})
\end{aligned}$$

pues

$$(\nabla f) \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ a & b & c \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} c - \frac{\partial f}{\partial z} b, \frac{\partial f}{\partial z} a - \frac{\partial f}{\partial x} c, \frac{\partial f}{\partial x} b - \frac{\partial f}{\partial y} a \right)$$

y

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a & b & c \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}, \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right)$$

Finalmente, si $\vec{F} = (a, b, c)$ y $\vec{G} = (d, e, f)$ entonces

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) \\
&= \nabla \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \\
&= \nabla \cdot (bf - ce, cd - af, ae - bd) \\
&= \frac{\partial(bf - ce)}{\partial x} + \frac{\partial(cd - af)}{\partial y} + \frac{\partial(ae - bd)}{\partial z} \\
&= \frac{\partial b}{\partial x} f + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial x} e - \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} d + \frac{\partial d}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} f - \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z} e + \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial z} d - \frac{\partial d}{\partial z}
\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
&(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{G} = \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}, \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) \cdot (d, e, f) \\
&\vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G}) = (a, b, c) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial e}{\partial z}, \frac{\partial d}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{\partial d}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

Expandiendo y comparando términos se llega a $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$. ■

Existen más reglas del producto, por ejemplo, para el rotacional de un producto exterior y de un producto interior, o el gradiente de un producto interior, cuya expresión es algo más complicada y que omitiremos, pues aquí no se trata de dar una lista completa.

3.7.1 Criterios diferenciales para campos gradientes y rotacionales

Hemos estudiado los **campos conservativos** (apartado 3.2.7) que son los **campos gradientes**, es decir, aquellos tales que $\vec{F} = \nabla f$ para algún campo escalar $f : W \rightarrow \mathbb{R}$. Vimos que la primera relación fundamental

$$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times \nabla f = 0,$$

implica inmediatamente que

rot $\vec{F} = 0$ es una condición *necesaria* para que \vec{F} sea un campo gradiente.

Ahora damos un concepto análogo con la divergencia.

Definición 3.7.1: Campo rotacional y potencial vectorial

Un campo \vec{F} es un **campo rotacional** en el abierto $W \subseteq \mathbb{R}^3$ si existe otro campo \vec{G} de clase C^1 en W tal que $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$. A un tal campo \vec{G} se le llama un **potencial vectorial** del campo \vec{F} .

Enunciado 3.7.3: Condición necesaria para la existencia de un potencial vectorial

Para que un campo \vec{F} de clase C^1 en el abierto $W \subseteq \mathbb{R}^3$ tenga un potencial vectorial, es **necesario** que sea de **divergencia nula**, es decir,

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0$$

- **Demostración:** Es una consecuencia inmediata de la segunda relación fundamental (enunciado 3.7.1), pues si \vec{G} es un potencial vectorial de \vec{F} , será de clase C^2 y por tanto

$$\vec{F} = \nabla \times \vec{G} \implies \nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{G}) = 0$$



Respecto a la cuestión de cuándo esta condición es también **suficiente**, resulta que el **Lema de Poincaré** (enunciado 3.2.16) es válido también para este caso.

Enunciado 3.7.4: Lema de Poincaré para potenciales vectoriales

Si \vec{F} es un campo de clase C^1 en el abierto estrellado $W \subseteq \mathbb{R}^3$ con divergencia nula, entonces \vec{F} tiene un potencial vectorial, es decir, existe un campo \vec{G} de clase C^2 en W tal que $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$.

Al igual que ocurre con el potencial escalar, una condición más general es que W sea **contractible**, es decir, que «se puede reducir a un punto de manera continua» sin salir de W e incluso, en esta dimensión, basta con que sea **simplemente conexo**, o sea, que las **curvas cerradas** se puedan contraer a un punto de manera continua en W .

Nota 3.7.4: Grados de libertad en el potencial vectorial

Si \vec{G} es un potencial vectorial de \vec{F} en el abierto W , de clase C^1 , entonces

$$\vec{G} + \nabla\varphi$$

también lo es, para cualquier campo escalar φ de clase C^2 en W . Tal campo se llama una **función gauge**. Si W es simplemente conexo, todo potencial vectorial de \vec{F} es de esta forma.

- **Demostración:** Por linealidad y la primera relación fundamental $\nabla \times \nabla\varphi = 0$, se tiene

$$\nabla \times (\vec{G} + \nabla\varphi) = \nabla \times \vec{G} + \nabla \times \nabla\varphi = \vec{F} + 0 = \vec{F}$$

Si W es simplemente conexo, dados dos potenciales vectoriales \vec{G}_1 y \vec{G}_2 de \vec{F} , de clase C^1 , entonces

$$\nabla \times (\vec{G}_2 - \vec{G}_1) = \nabla \times \vec{G}_2 - \nabla \times \vec{G}_1 = \vec{F} - \vec{F} = 0$$

luego por el Lema de Poincaré, $\vec{G}_2 - \vec{G}_1 = \nabla\varphi$ para algún campo escalar φ de clase C^2 en W . ■

Breve introducción a las formas diferenciales

4.1 Conceptos básicos

Hemos visto que las integrales de línea de un campo vectorial $\vec{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ se pueden denotar también usando la notación

$$\int_C f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n,$$

donde un término $f_j dx_j$ se integra por sustitución de una parametrización

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

de la curva, resultando en $f_j(\gamma(t)) x'_j(t) dt$. La expresión

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n \quad [4.1.1]$$

se denomina **forma diferencial de primer grado** o simplemente **1-forma**. Las formas diferenciales, expresadas en coordenadas, se pueden interpretar como combinaciones de funciones con las **diferenciales básicas**

$$dx_1, dx_2, \dots, dx_n.$$

Estas diferenciales básicas pueden considerarse como **generadores de un álgebra**, es decir, no hace falta definirlos, al menos de momento, sino que bastará decir que, en una región $W \subseteq \mathbb{R}^n$, se considera que las diferenciales básicas son una **linealmente independientes** respecto a la combinación lineal con funciones diferenciables sobre W .¹

Además, se dota al espacio de formas de un producto, llamado **producto exterior** y denotado por \wedge , que consiste en usar las reglas habituales de la aritmética junto con la «tabla de multiplicar» dada por las **relaciones de antisimetría**

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i, \quad dx_i \wedge dx_i = 0 \quad [4.1.2]$$

¹formalmente, esto corresponde en Álgebra a construir el cociente por estas relaciones del **módulo libre** sobre el **anillo de funciones diferenciales** en W con base dada por las diferenciales.

4.1 Conceptos básicos

No es coincidencia que sean análogas a las propiedades del producto vectorial en \mathbb{R}^3 . En general, una forma diferencial de grado p ó p -forma, en coordenadas, es una combinación de funciones junto con productos de p diferenciales básicas, es decir, de expresiones

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \quad [4.1.3]$$

que de hecho, por antisimetría, son nulas salvo que los índices i_k sean todos *distintos*. Si queremos ordenar los índices en orden creciente, debemos ir permutando los términos, lo cual va causando sucesivos cambios de signo.

4.2 Formas en tres variables

En \mathbb{R}^3 , con las coordenadas x, y, z , tenemos las diferenciales básicas

$$dx, \quad dy, \quad dz.$$

Al multiplicar dos de ellas, se producen las relaciones

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$$

y también

$$dy \wedge dx = -dx \wedge dy, \quad dz \wedge dx = -dx \wedge dz, \quad dz \wedge dy = -dy \wedge dz$$

por tanto, salvo cambio de signo, resultan sólo 3 tipos distintos de combinaciones no nulas,

$$dx \wedge dy, \quad dy \wedge dz, \quad dz \wedge dx$$

que son una base en el sentido del Algebra Lineal. Al multiplicar tres diferenciales básicas, si hay alguna repetición, da 0, y si no, vemos que salvo cambios de signo, sólo hay una,

$$dx \wedge dy \wedge dz$$

Finalmente, si multiplicamos cuatro o mas diferenciales básicas, siempre da 0 porque forzosamente alguna de las tres se repite.

4.3 Correspondencia entre formas y campos

Este análisis nos permite escribir todos los tipos de formas diferenciales en tres coordenadas y relacionarlas con los conceptos previamente estudiados.

- **Las 0-formas**, que por definición son simplemente **funciones**.
- **Las 1-formas**, que son combinaciones de funciones con las diferenciales básicas,

$$\omega = P \, dx + Q \, dy + R \, dz$$

y que podemos hacer corresponder de manera clara al **campo vectorial**

$$\vec{F} = P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k}$$

- **Las 2-formas**, que son combinaciones de funciones con los productos de dos diferenciales básicas, y se ordenan del modo siguiente:

$$\omega = P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy$$

siguiendo el orden cíclico ([definición 2.10.6](#)) $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow \dots$. Así, también corresponde al **campo vectorial**

$$\vec{F} = P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k},$$

aunque de manera menos obvia.

- **Las 3-formas**, que son la combinación de una función con el producto de las tres diferenciales básicas,

$$\omega = f \, dx \wedge dy \wedge dz$$

y por tanto se corresponden con la **función** f .

Estas «correspondencias» se formalizan mejor como una correspondencia entre formas en dimensión n de grado k y formas de grado $n - k$, mediante una relación de dualidad conocida como **operador estrella (*) de Hodge**, pero no es nuestra intención entrar en ese tema aquí. Bastará observar que en tres dimensiones con la métrica euclídea, $\ast\ast = \text{id}$ (la identidad), $\ast dx = dy \wedge dz$, $\ast dy = dz \wedge dx$, $\ast dz = dx \wedge dy$, además de $\ast 1 = dx \wedge dy \wedge dz$.

4.4 Derivación de formas

La noción de derivada de una forma se llama *derivada exterior* y parte de la definición para una función f , donde se define en general

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \quad [4.4.1]$$

que, como puede apreciarse, correspondería al gradiente ∇f . En general, cuando hay que derivar un término

$$f dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

se deriva simplemente f , pero luego habrá que eliminar repeticiones y reordenar los términos:

$$df \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

Por ejemplo, en \mathbb{R}^3 , con coordenadas x, y, z ,

- Si f es una función,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad [4.4.2]$$

que corresponde, como ya hemos dicho, al **gradiente** ∇f .

- Si $\omega = P dx + Q dy + R dz$ es una 1-forma, término a término, tenemos

$$\begin{aligned} d(P dx) &= dP \wedge dx = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx \\ &= \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx \\ &= -\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx \end{aligned}$$

y similarmente

$$d(Q dy) = \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz, \quad d(R dz) = -\frac{\partial R}{\partial x} dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz$$

con lo cual, juntándolas todas, queda

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

[4.4.3]

4.4 Derivación de formas

que, si uno se fija en la fórmula para el rotacional, ve que es lo mismo! O sea,

$$\omega = P \, dx + Q \, dy + R \, dz \leftrightarrow \vec{F} = P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k}$$

$$d\omega \leftrightarrow \nabla \times \vec{F}$$

la derivada de una 1-forma ω corresponde al rotacional.

- Para la 2-forma $\omega = P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy$, que también corresponde al campo vectorial $\vec{F} = P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k}$, siguiendo las mismas reglas, vemos que

$$\begin{aligned} d(P \, dy \wedge dz) &= dP \wedge dy \wedge dz = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \, dx + \frac{\partial P}{\partial y} \, dy + \frac{\partial P}{\partial z} \, dz \right) \wedge dy \wedge dz \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} \, dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

y similarmente

$$d(Q \, dz \wedge dx) = \frac{\partial Q}{\partial y} \, dx \wedge dy \wedge dz, \quad d(R \, dx \wedge dy) = \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \wedge dy \wedge dz$$

por tanto

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \quad [4.4.4]$$

la derivada de una 2-forma corresponde a la divergencia $\nabla \cdot \vec{F}$.

Nota 4.4.1: Unificación mediante la derivada exterior

Una sola regla de derivación algebraica $\omega \rightarrow d\omega$, junto con la antisimetría de las diferenciales, engloba a los tres operadores vectoriales clásicos de la Mecánica, grad, rot, div. Además, la derivación exterior está definida en cualquier dimensión, también con la misma regla, simplemente añadiendo variables. Permite demostrar todas las propiedades que relacionan estos operadores de una manera unificada.

4.5 Integración de formas

En tres variables, al menos, ya hemos visto todos los casos. Es importante tener en cuenta la regla de *concordancia*:

Se integra una forma de *grado p* sobre una subvariedad de *dimensión p*.

- Si f es una 0-forma (una función) se integra sobre un conjunto de puntos (dimensión 0) ([apartado 2.6](#)).
- La integral de una 1-forma es la integral de línea sobre una curva ([apartado 3.1](#)).
- La integral de una 2-forma es la integral de flujo a través de una superficie ([apartado 3.4](#)).
- La integral de la 3-forma $f \, dx \wedge dy \wedge dz$ es simplemente la integral plana de f respecto a la medida de volumen en un sólido ([capítulo 1](#)).

4.6 El Teorema de Stokes para formas diferenciales

El Teorema de Stokes tiene una forma muy sencilla con formas diferenciales. Sea ω una $p - 1$ -forma diferencial sobre alguna subvariedad X de dimensión p . Entonces

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega \quad [4.6.1]$$

Al aplicar la derivada exterior, **aumenta el grado en 1**, de modo que $d\omega$ tiene grado p y por tanto tiene sentido integrarla sobre X , que es de dimensión p , mientras que pasar de X al borde ∂X **disminuye la dimensión en 1**, de modo que tiene sentido integrar ω , que es de grado $p - 1$, sobre ∂X , que es de dimensión $p - 1$.

Observar la elegancia de esta fórmula, en la que no sobra ningún término, pero contiene toda la información de los teoremas clásicos de Green, Stokes y Gauss, y el Teorema Fundamental para integrales de línea.

Las Matemáticas requeridas para definir rigurosamente las formas diferenciales son las conocidas como **Álgebra Tensorial** y **Geometría Diferencial**. Constituyen también parte significativa de la base matemática moderna de la Física Teórica.