Soluciones

P1) Las opciones a), b) y d) son correctas. En el apartado c), el vector $(2,1,1)$ es no nulo pero $n(2,1,1)=0$.

P2) Por definición del producto escalar asociado a una norma,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= \langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle+2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle+\langle x,x\rangle-2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle = 2\|x\|^2+2\|y\|^2.\end{aligned}$$

Si tomamos los vectores $x=(1,0)$ e $y=(0,1)$, entonces $\|x\|_1=\|y\|_1=1$ y $\|x+y\|_1=\|x-y\|_1=2$. Por tanto, $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=8$ pero $2\|x\|^2+2\|y\|^2=4$.

P3) Es falso porque, si tomamos los vectores $x=(1,1)$ e $y=(-1,-1)$, entonces existe $\lambda=-1$ tal que $y=\lambda x$. Sin embargo, $\|x+y\|=0$ pero $\|x\|+\|y\|=2\sqrt{2}$.

P4) a) $A=\operatorname{int}(A)\cup\operatorname{fr}(A)$ es falso. Basta elegir $A=(a,b)\subset\mathbb{R}$. Entonces $\operatorname{int}A=(a,b)$ y $\operatorname{fr}A=\{a,b\}$. Por tanto, $\operatorname{int}(A)\cup\operatorname{fr}(A)=[a,b]\neq A$.

b) $A\subset A'$ es falso. Si $A=\{a,b\}\subset\mathbb{R}$, entonces $A'=\emptyset$.

c) A es abierto si y sólo si $A\cap\operatorname{fr}(A)=\emptyset$ es verdadero.

Por un lado, si A es abierto, supongamos que existe $x\in A\cap\operatorname{fr}(A)$. Como $x\in A$, entonces existe $r>0$ tal que $B(x,r)\subset A$, es decir $B(x,r)\cap A^c=\emptyset$. Pero, como $x\in\operatorname{fr}(A($, $B(x,r)\cap A^c\neq\emptyset$, lo que es absurdo.

Recíprocamente, si $A\cap\operatorname{fr}(A)=\emptyset$, dado $x\in A$, entonces $x\notin\operatorname{fr}(A)$. Por tanto, existe $r>0$ tal que $B(x,r)\cap A^c=\emptyset$, de donde $B(x,r)\subset A$. Así pues, A es abierto.

d) A es cerrado si y sólo si $\operatorname{fr}(A)\subset A$ es verdadero.

Si A es cerrado, dado $x\in\operatorname{fr}(A)$, entonces $x\in\overline{A}$. Como $\overline{A}=A$, entonces $x\in A$.

Por otra parte, si $\operatorname{fr}(A)\subset A$, entonces $\overline{A}\subset A$, de donde A es cerrado.

P5) Todas las proposiciones son correctas.

a) Veamos en primer lugar que, si $A\subset B$, entonces $\overline{A}\subset\overline{B}$.

Para ello, si $x\in\overline{A}$, entonces $B(x,r)\cap A\neq\emptyset$, para todo $r>0$. Como $A\subset B$, entonces $B(x,r)\cap B\neq\emptyset$, para todo $r>0$, de donde $x\in\overline{B}$.

Así pues, si A es acotado, existe $k>0$ tal que $A\subset B(0,k)$. Por tanto, $\overline{A}\subset\overline{B}(0,k)$. Como A' es cerrado y $A'\subset\overline{A}$, entonces $A'\subset\overline{B}(0,k)$, de modo que A' es compacto.

b) Como $\operatorname{fr}B\subset\overline{B}$ y B es cerrado, entonces $B=\overline{B}$, con lo que $\operatorname{fr}B\subset B$.

c) La prueba es similar a la del apartado a).

d) Por una parte, como $A\subset A\cup B$ y $B\subset A\cup B$, entonces $\overline{A}\subset\overline{A\cup B}$ y $\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$. Por tanto, $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$.

Por otra parte, si $x\in\overline{A\cup B}$, entonces $B(x,r)\cap(A\cup B)\neq\emptyset$, para todo $r>0$, de donde $B(x,r)\cap A\neq\emptyset$ ó $B(x,r)\cap B\neq\emptyset$. Entonces $x\in\overline{A}$ ó $x\in\overline{B}$, es decir $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$.

P6) Los conjuntos A y B no son abiertos pero sí lo son los conjuntos C y D. En concreto, $\operatorname{int} A = \operatorname{int} B = \emptyset$.

P7) a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \operatorname{sen} \frac{1}{xy} = 0$ porque se trata del producto de una función acotada por una función cuyo límite es cero.

b) $\lim_{(x,y)\to(2,\infty)} y \operatorname{sen} \frac{1}{xy} = \lim_{(x,y)\to(2,\infty)} \frac{1}{x} xy \operatorname{sen} \frac{1}{xy} = \frac{1}{2}$ debido a la equivalencia de infinitésimos $f(x) \sim \operatorname{sen} f(x)$ cuando $f(x) \to 0$.

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{xy}\frac{xy}{x+y}} = e^{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}}$.

Este límite no existe porque

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2-x}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2-x)}{x^2} = -1$$

pero los límites laterales son cero.

d) Como no existe $\lim_{(x,y)\to(0,\infty)} xy$, tampoco existe $\lim_{(x,y)\to(0,\infty)} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$.

e) Descomponemos el límite como

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2|x|^3-|y|^2}{|x|+|y|} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{2|x|^3}{|x|+|y|} - \frac{|y|^2}{|x|+|y|}\right)\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(2|x|^2 \cdot \frac{|x|}{|x|+|y|} - |y| \cdot \frac{|y|}{|x|+|y|}\right).\end{aligned}$$

Como $0 \leqslant \frac{|x|}{|x|+|y|} \leqslant \frac{|x|+|y|}{|x|+|y|} = 1$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2|x|^2 \cdot \frac{|x|}{|x|+|y|} = 0$.

Análogamente, como $0 \leqslant \frac{|y|}{|x|+|y|} \leqslant \frac{|x|+|y|}{|x|+|y|} = 1$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| \cdot \frac{|x|}{|x|+|y|} = 0$.

f) Descomponemos el límite como

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2|x|^3-|y|^2}{|x|+|y|} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{2|x|^3}{|x|+|y|} - \frac{|y|^2}{|x|+|y|}\right)\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(2|x|^2 \cdot \frac{|x|}{|x|+|y|} - |y| \cdot \frac{|y|}{|x|+|y|}\right).\end{aligned}$$

Como $0 \leqslant \frac{|x|}{|x|+|y|} \leqslant \frac{|x|+|y|}{|x|+|y|} = 1$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2|x|^2 \cdot \frac{|x|}{|x|+|y|} = 0$.

Análogamente, como $0 \leqslant \frac{|y|}{|x|+|y|} \leqslant \frac{|x|+|y|}{|x|+|y|} = 1$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| \cdot \frac{|x|}{|x|+|y|} = 0$.