

# Capítulo 1

## Geometría de los espacios euclídeos

En este capítulo introductorio recordamos los conceptos básicos de la geometría de los espacios euclídeos  $n$ -dimensionales, sus elementos llamados vectores, las operaciones con vectores y sus propiedades, así como los conceptos topológicos de compacidad, convexidad, convergencia, etc.

### 1.1. Vectores. Operaciones con vectores

En este curso se estudian las funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , es decir, funciones definidas sobre el espacio euclídeo de dimensión  $n$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\},$$

y con imagen en el espacio análogo  $\mathbb{R}^m$  de dimensión arbitraria  $m$ .

Como la representación gráfica de estas funciones debe hacerse en el espacio  $\mathbb{R}^{n+m}$ , debemos recordar en primer lugar los resultados fundamentales de la geometría del espacio euclídeo real  $\mathbb{R}^n$ .

Como es usual, estableceremos la equivalencia entre los puntos  $P = (x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  y los vectores libres  $\vec{v} = \vec{OP}$  que unen el origen con el punto  $P$ .

Las operaciones básicas que se definen en el espacio  $\mathbb{R}^n$  son las siguientes:

**Suma de vectores.** Dados  $\vec{v} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\vec{w} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\vec{v} + \vec{w} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

**Multiplicación por un escalar.** Dados  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{v} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$a\vec{v} = (ax_1, \dots, ax_n).$$

Con estas operaciones,  $\mathbb{R}^n$  tiene estructura de espacio vectorial (de ahí que los elementos de  $\mathbb{R}^n$  reciban el nombre de vectores, a diferencia de los elementos de  $\mathbb{R}$  que llamaremos escalares).

Todo vector de  $\vec{v} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  puede descomponerse de forma única como combinación lineal de los vectores  $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$  (los cuales corresponden a las direcciones de los ejes de coordenadas rectangulares), como  $\vec{v} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$ . Estos vectores forman lo que llamamos la *base canónica* de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición.** Dados  $\vec{v} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\vec{w} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , llamamos *producto escalar* de  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  al número real

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n.$$

El producto escalar verifica las siguientes propiedades básicas:

- I)  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$  si  $\vec{v} \neq 0$ .
- II)  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$  si  $\vec{v} = 0$ .
- III)  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ ,  $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ .
- IV)  $\alpha \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \alpha \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \alpha \vec{w} \rangle$ ,  $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- V)  $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ ,  $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ .

Llamamos *norma* de un vector  $\vec{v} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  al número real positivo

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Si  $\vec{v} = \vec{OP}$ , la norma de  $\vec{v}$  representa la distancia del punto  $P$  al origen de coordenadas.

De forma análoga, se define la *distancia* entre dos puntos  $P$  y  $Q$  como

$$d(P, Q) = \|\vec{OQ} - \vec{OP}\|.$$

Las siguientes propiedades son resultados importantes.

**Proposición 1.1.1** (desigualdad de Cauchy-Schwarz).  $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$ ,  $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Dado  $\lambda \in \mathbb{R}$ , como  $\|\lambda \vec{v} + \vec{w}\|^2 \geq 0$ , resulta que  $\lambda^2 \|\vec{v}\|^2 + 2\lambda \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \|\vec{w}\|^2 \geq 0$ . Esto significa que  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 - \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \leq 0$ , lo que conduce al resultado.  $\square$

**Proposición 1.1.2** (desigualdad triangular).  $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ ,  $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Si aplicamos la desigualdad anterior, tenemos que

$$0 \leq \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \|\vec{w}\|^2 \leq \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| + \|\vec{w}\|^2 = (\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|)^2,$$

con lo que basta sacar raíces cuadradas para llegar al resultado.  $\square$

La siguiente propiedad es consecuencia directa del resultado anterior.

**Proposición 1.1.3** (teorema de Pitágoras).  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \iff \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$ .

En el caso particular  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ , si llamamos  $\vartheta$  al ángulo que forman, el teorema de los cosenos afirma que

$$\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \vartheta.$$

Al desarrollar el primer miembro, llegamos a

$$\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \vartheta,$$

de lo que se deduce que  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \vartheta$ .

Esto sugiere la definición de *ángulo* entre dos vectores  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$  como el número  $\vartheta \in [0, \pi]$  tal que

$$\cos \vartheta = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}.$$

Esta definición proporciona otra fórmula para el producto escalar de dos vectores:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \vartheta.$$

En el caso de que  $\vartheta = \pi/2$ , los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son *perpendiculares u ortogonales*, en cuyo caso utilizamos la notación  $\vec{v} \perp \vec{w}$ . De la definición deducimos que, en este caso,  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ .

En general, decimos que  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un *conjunto ortogonal* cuando  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ ,  $\forall \vec{v}, \vec{w} \in A$ . Si, además, todos los vectores son unitarios, decimos que  $A$  es un *conjunto ortonormal*. Así pues, una *base ortonormal* de  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto ortonormal formado por  $n$  vectores. Es fácil comprobar que, dada una base ortonormal  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ , todo vector  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  puede expresarse como  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{u}_i$ , donde  $x_i = \langle \vec{x}, \vec{u}_i \rangle$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

En el caso particular de  $\mathbb{R}^3$  se define también el *producto vectorial* de dos vectores  $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$  y  $\vec{w} = (y_1, y_2, y_3)$  como el siguiente vector:

$$\vec{v} \times \vec{w} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

donde denotamos, como es usual,  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  y  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  a los vectores unitarios de la base canónica en  $\mathbb{R}^3$ .

Destacaremos las siguientes propiedades básicas del producto vectorial:

- I)  $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ ,  $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ .
- II)  $\vec{v} \times \vec{w} = -(\vec{w} \times \vec{v})$ ,  $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ .
- III)  $(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \times \vec{w} = \alpha(\vec{u} \times \vec{w}) + \beta(\vec{v} \times \vec{w})$ ,  $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- IV)  $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin \alpha$ , donde  $\alpha$  es el ángulo entre  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ .

Esto indica que la norma de  $\vec{v} \times \vec{w}$  mide el área del paralelogramo que determinan los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  (ver ejercicio 1.4).

- V)  $\|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - |\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle|^2$ ,  $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ .

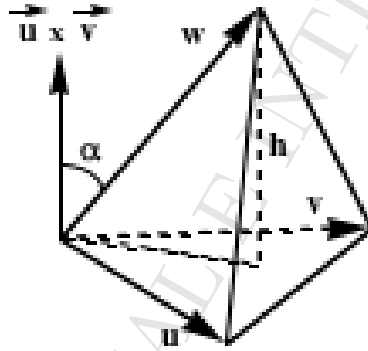
También en el espacio tridimensional definimos el *producto mixto* de tres vectores  $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)$ ,  $\vec{w} = (z_1, z_2, z_3)$  como el número real dado por

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

El producto mixto representa el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ .

En efecto, si la base del paralelepípedo es el paralelogramo generado por los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , como la altura es  $h = \|\vec{w}\| \cdot \cos \alpha$ , el volumen del paralelepípedo tiene la fórmula

$$V = S \cdot h = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \alpha = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|.$$



De la definición, se deducen fácilmente las siguientes propiedades.

I)  $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle, \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3.$

II)  $\langle \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = 0, \forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3.$

Esto quiere decir que  $\vec{v} \times \vec{w}$  es ortogonal a ambos vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ .

## 1.2. Curvas y superficies en $\mathbb{R}^3$

Una ecuación en tres variables  $F(x, y, z) = 0$  representa geoméricamente una superficie en el espacio euclídeo tridimensional  $\mathbb{R}^3$ , mientras que una curva se obtiene como intersección

de dos superficies,  $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$

La ecuación general de primer grado (o ecuación lineal)

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

es la más sencilla de las ecuaciones en tres variables y representa un plano que corta a los ejes de coordenadas en los puntos  $(-D/A, 0, 0)$ ,  $(0, -D/B, 0)$ ,  $(0, 0, -D/C)$  (siempre que los coeficientes  $A$ ,  $B$  y  $C$  sean no nulos).

**Planos en  $\mathbb{R}^3$ .** Dados un punto  $P$  y dos vectores no paralelos  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ , definimos el *plano* que pasa por  $P$  y está generado por  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  como el conjunto

$$\{P + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Distintas parametrizaciones de un mismo plano se obtienen utilizando un punto distinto a  $P$  o dos vectores  $\vec{v}'$  y  $\vec{w}'$  tales que

$$\{\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha\vec{v}' + \beta\vec{w}' : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

(es decir, el subespacio generado por  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  coincide con el generado por  $\vec{v}'$  y  $\vec{w}'$ ).

Otra forma de definir un plano es mediante un punto  $P$  del mismo y un vector  $\vec{u}$  perpendicular al mismo, pues todo punto  $Q$  del plano verifica la condición

$$\langle \vec{PQ}, \vec{u} \rangle = 0.$$

Un tercer método es dar tres puntos del plano  $P_1, P_2, P_3$  no alineados, pues los vectores  $\vec{P_1P_2}$  y  $\vec{P_1P_3}$  generan dicho plano. Un punto genérico  $P$  del plano verifica la ecuación

$$[\vec{P_1P}, \vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3}] = 0.$$

Del mismo modo, el sistema formado por dos ecuaciones de primer grado representa la recta intersección de los dos planos definidos por dichas ecuaciones.

**Rectas en  $\mathbb{R}^3$ .** Dados un punto  $P$  y un vector  $\vec{v} \neq 0$ , definimos la *recta* que pasa por  $P$  y tiene la dirección de  $\vec{v}$  como el conjunto

$$\{P + \alpha\vec{v} : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

El vector  $\vec{v}$  recibe el nombre de *vector director* (o *vector direccional*) de la recta.

Decimos que dos rectas son *paralelas* si sus vectores direccionales son paralelos. A diferencia de lo que sucede en  $\mathbb{R}^2$ , dos rectas que no son paralelas no necesariamente se cortan en algún punto.

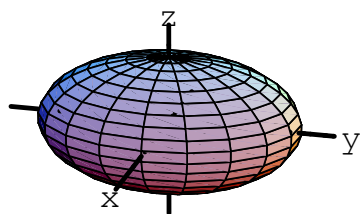
Una misma recta puede definirse utilizando puntos distintos a  $P$  o vectores paralelos a  $\vec{v}$ , lo que produce distintas *parametrizaciones* de la recta.

También puede definirse una recta mediante dos puntos distintos  $P$  y  $Q$ , ya que el vector  $\vec{v} = \vec{OQ} - \vec{OP}$  es un vector direccional de la recta.

Otras superficies que utilizaremos frecuentemente en lo sucesivo son las *cuádricas* cuya expresión general, en su forma canónica, corresponde a una ecuación de segundo grado en las variables  $x, y$  y  $z$ :

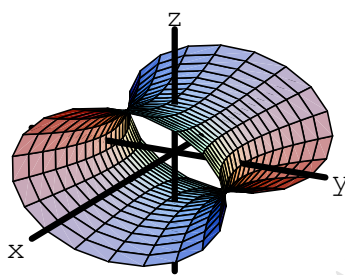
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0.$$

Como regla general, las cuádricas se obtienen de las cónicas haciendo girar éstas alrededor de un eje y dilatando convenientemente uno de los ejes. La excepción es el paraboloide hiperbólico (también llamado silla de montar). En las imágenes siguientes se muestran las figuras correspondientes a las distintas cuádricas y sus ecuaciones canónicas.



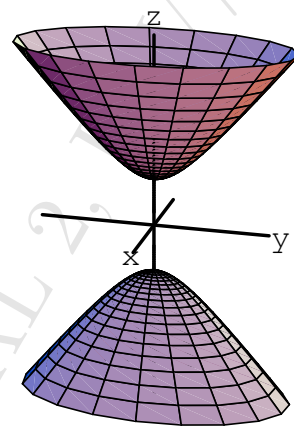
Elipsoide  

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



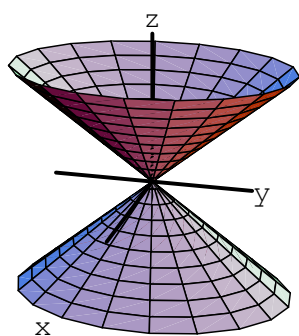
Hiperboloide de una hoja  

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



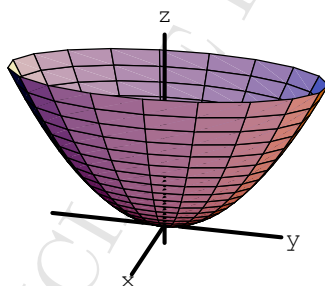
Hiperboloide de dos hojas  

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



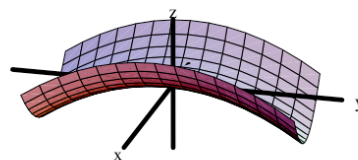
Cono  

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



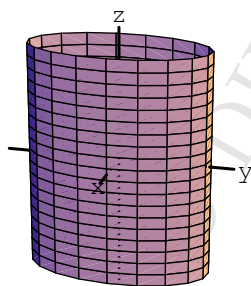
Paraboloide elíptico  

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



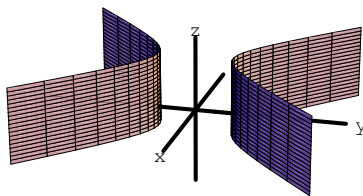
Paraboloide hiperbólico  

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$



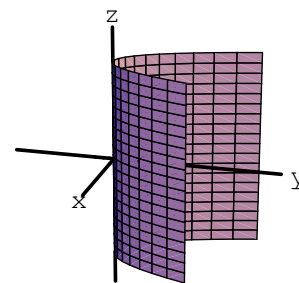
Cilindro elíptico  

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Cilindro hiperbólico  

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Cilindro parabólico  

$$x^2 = py$$

### 1.3. Nociones de topología métrica

En la sección 1.1 se ha definido la noción de producto escalar de vectores en  $\mathbb{R}^n$ , la cual permitía a su vez definir la norma de un vector (llamada *norma euclídea*) y la distancia entre dos puntos (llamada a su vez *distancia euclídea*). Ahora bien, esta forma de definir distancia entre dos puntos no es la única posible.

**Definición.** En general, se dice que una aplicación  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es *distancia* (o *métrica*) cuando verifica los cuatro axiomas siguientes:

- (1)  $d(\vec{x}, \vec{y}) > 0 \iff \vec{x} \neq \vec{y}$ .
- (2)  $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$ .
- (3)  $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ .
- (4)  $d(\vec{x}, \vec{z}) \leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z}), \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$  (desigualdad triangular).

El par  $(\mathbb{R}^n, d)$  recibe el nombre de *espacio métrico*.

Un ejemplo trivial de distancia en  $\mathbb{R}^n$  es la aplicación definida por

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{x} = \vec{y}, \\ 1 & \text{si } \vec{x} \neq \vec{y}. \end{cases}$$

**Definición.** Análogamente, toda aplicación  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que verifique los siguientes axiomas:

- (1)  $\|\vec{x}\| \geq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- (2)  $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$ .
- (3)  $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- (4)  $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  (desigualdad triangular).

recibe el nombre de *norma*, y el par  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  se llama *espacio normado*.

Dada una norma arbitraria  $\|\cdot\|$  en  $\mathbb{R}^n$ , la aplicación  $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$  es una distancia. Recíprocamente, dada una distancia  $d$  (con ciertas propiedades que no vamos a especificar aquí), la aplicación  $\|\vec{x}\| = d(\vec{x}, \vec{0})$  es una norma.

Ejemplos de normas en  $\mathbb{R}^n$  son las siguientes aplicaciones:

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_n)\|_p &= (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}, \quad \forall p \in [1, \infty); \\ \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty &= \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \end{aligned}$$

Es fácil en todos los casos comprobar los tres primeros axiomas, pero no es tan sencillo demostrar la desigualdad triangular. En el ejercicio 1.6 proponemos la demostración de esta propiedad para los casos extremos. Veremos aquí la prueba del caso general, resultado conocido como desigualdad de Minkowski. Para la demostración necesitaremos dos resultados previos.

**Lema 1.3.1** (desigualdad de Young). Si  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $p, q > 1$  verifican la identidad  $1/p + 1/q = 1$ , entonces

$$|a| \cdot |b| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

*Demostración.* Debemos recordar, en primer lugar, que la función exponencial  $f(x) = e^x$  es convexa, de modo que

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 1].$$

Basta sustituir en la desigualdad anterior los valores  $t = 1/q$ ,  $x = p \cdot \ln |a|$ ,  $y = q \cdot \ln |b|$  para obtener la desigualdad deseada.  $\square$

**Proposición 1.3.2** (desigualdad de Hölder). Dados dos vectores arbitrarios  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , si  $p, q > 1$  verifican la identidad  $1/p + 1/q = 1$ , entonces

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \cdot \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

*Demostración.* Llamamos  $A = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$  y  $B = \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}$ , y suponemos que  $A \neq 0$  y  $B \neq 0$  (en caso contrario, la desigualdad es evidente). Llamamos también  $u_i = x_i/A$  y  $v_i = y_i/B$ . Así definidos, está claro que  $\sum_{i=1}^n |u_i|^p = \sum_{i=1}^n |v_i|^q = 1$ .

Por la desigualdad de Young,

$$|u_i| \cdot |v_i| \leq \frac{|u_i|^p}{p} + \frac{|v_i|^q}{q},$$

de donde

$$\sum_{i=1}^n |u_i| \cdot |v_i| \leq \sum_{i=1}^n \frac{|u_i|^p}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{|v_i|^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

De aquí se deduce inmediatamente la desigualdad buscada.  $\square$

**Proposición 1.3.3** (desigualdad de Minkowski). Dados  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}.$$

*Demostración.* A partir de la desigualdad triangular en  $\mathbb{R}$ , podemos descomponer

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1},$$



y aplicamos a cada sumando la desigualdad de Hölder. Teniendo en cuenta que  $q(p-1) = p$ , resulta que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &\leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \cdot \left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{1/q} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} \cdot \left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{1/q} \\ &= \left[ \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} \right] \cdot \left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

En definitiva,

$$\left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1-1/q} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p},$$

lo que demuestra la desigualdad triangular.  $\square$

**Definición.** Decimos que dos normas cualesquiera  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_2$  definidas en  $\mathbb{R}^n$  son *equivalentes* cuando

$$\exists a, b > 0 : a\|\vec{v}\|_1 \leq \|\vec{v}\|_2 \leq b\|\vec{v}\|_1, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Una propiedad interesante es que todas las normas definidas en  $\mathbb{R}^n$  son equivalentes (ver ejercicio 2.3.16).

Enumeramos a continuación algunas nociones topológicas en un espacio métrico  $(\mathbb{R}^n, d)$  y sus propiedades básicas.

**Definiciones.**

1) Sean  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$ ; se llama *bola abierta* de centro  $\vec{a}$  y radio  $r$  al conjunto

$$B(\vec{a}, r) (= B_r(\vec{a})) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : d(\vec{v}, \vec{a}) < r\}.$$

Análogamente se definen las correspondientes *bolas cerradas*

$$\overline{B}(\vec{a}, r) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : d(\vec{v}, \vec{a}) \leq r\}$$

y las *esferas*

$$S(\vec{a}, r) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : d(\vec{v}, \vec{a}) = r\}.$$

Un sencillo argumento geométrico muestra que

$$B(\vec{a}, r) = \vec{a} + r \cdot B(O, 1).$$

La bola  $B(O, 1)$  de centro el origen y radio 1 es la llamada *bola unidad* del espacio métrico.

2) Dado un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ , se dice que  $\vec{a} \in A$  es *punto interior* de  $A$  si existe  $r > 0$  tal que  $B(\vec{a}, r) \subset A$ . Se llama *interior* de  $A$  al conjunto

$$\text{int } A = \{\vec{a} \in A : \vec{a} \text{ es punto interior de } A\}.$$

Si  $\text{int } A = A$ ,  $A$  se dice *abierto*. Por ejemplo, las bolas abiertas son siempre conjuntos abiertos (ver ejercicio 1.10). El conjunto vacío y el espacio  $\mathbb{R}^n$  son también conjuntos abiertos. Además, la unión arbitraria de conjuntos abiertos es abierto y la intersección finita de conjuntos abiertos es abierto.

- 3) Dado  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ , se llama *entorno* de  $\vec{a}$  a cualquier subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  tal que existe  $r > 0$  con  $B(\vec{a}, r) \subset S$ .

De la definición se deduce que un conjunto es abierto si es entorno de todos sus puntos. Es evidente que cualquier intersección finita de entornos de un punto es un entorno del punto. Además, dados dos puntos distintos, existen entornos de dichos puntos que son disjuntos (ver ejercicio 1.11).

- 4) Dado un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ , un vector  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  es *punto exterior* de  $A$  si

$$\exists r > 0, B(\vec{x}, r) \subset A^c$$

(lo que equivale a decir que  $B(\vec{x}, r) \cap A = \emptyset$ ).

Denotaremos por  $\text{ext } A$  al conjunto de los puntos exteriores de  $A$ .

- 5) Análogamente, un vector  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  es *punto frontera* de  $A$  si

$$\forall r > 0, B(\vec{x}, r) \cap A \neq \emptyset \text{ y } B(\vec{x}, r) \cap A^c \neq \emptyset.$$

El conjunto de los puntos frontera de  $A$  lo denotaremos por  $\text{fr } A$ .

- 6) Un vector  $\vec{x} \in A$  es *punto aislado* de  $A$  si

$$\exists r > 0, (B(\vec{x}, r) \setminus \{\vec{x}\}) \cap A = \emptyset.$$

- 7) Dado un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ , un vector  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  es *punto de adherencia* de  $A$  si

$$\forall r > 0, B(\vec{x}, r) \cap A \neq \emptyset.$$

El conjunto

$$\overline{A} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} \text{ es punto de adherencia de } A\}$$

se llama *clausura* de  $A$ . Un conjunto  $A$  se dice *cerrado* cuando  $\overline{A} = A$ . Las bolas cerradas son los primeros ejemplos de conjuntos cerrados (ver ejercicio 1.10). También los rectángulos  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  son cerrados en  $\mathbb{R}^2$ . En general, los *n-intervalos*  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  son cerrados en  $\mathbb{R}^n$ .

De la definición se deduce fácilmente que un conjunto es cerrado si y sólo si su complementario es abierto. Esto implica que el conjunto vacío y el espacio  $\mathbb{R}^n$  son también conjuntos cerrados. Además, la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrado y la unión finita de conjuntos cerrados es cerrado.

- 8) Dado un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ , un vector  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  es *punto de acumulación* de  $A$  si

$$\forall r > 0, (B(\vec{x}, r) \setminus \{\vec{x}\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Es fácil probar a partir de la definición que los conjuntos finitos no tienen puntos de acumulación.

El conjunto

$$A' = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} \text{ es punto de acumulación de } A\}$$

recibe el nombre de *conjunto derivado* de  $A$ . Se puede probar también que un conjunto  $A$  es cerrado si y sólo si  $A' \subset A$  (ver ejercicio 1.12).

9) Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es *acotado* si

$$\exists r > 0 : A \subset B(O, r).$$

**Teorema 1.3.4** (Bolzano-Weierstrass). *Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto infinito y acotado, entonces  $A' \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* Veamos primero el caso  $n = 1$ . Si  $A$  es acotado, existe  $a > 0$  tal que  $A \subset [-a, a]$ . Como  $A$  es infinito, alguno de los intervalos  $[-a, 0]$  ó  $[0, a]$ , que llamaremos  $[a_1, b_1]$ , contiene un subconjunto infinito de  $A$ .

Al dividir  $[a_1, b_1]$  en dos partes iguales, alguno de los intervalos, digamos  $[a_2, b_2]$ , contiene un subconjunto infinito de  $A$ .

De forma recurrente, llegamos a una sucesión  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ , donde  $b_n - a_n = a/2^{n-1}$ , con lo que  $\sup a_n = \inf b_n = x$ . Veamos que  $x \in A'$ .

Dado  $r > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $[a_n, b_n] \subset B(x, r)$  pues basta que  $b_n - a_n < r/2$ . Por construcción,  $B(x, r)$  contiene algún punto de  $A$  distinto de  $x$ .

Con respecto al caso general, si  $A$  es acotado, existe  $a > 0$  tal que  $A \subset B(0, a)$ . Por tanto,  $A \subset J_1$ , donde  $J_1 = \{(x_1, \dots, x_n) : -a \leq x_k \leq a, k = 1, \dots, n\}$ .

Podemos escribir  $J_1 = I_1^{(1)} \times \dots \times I_n^{(1)}$ , donde  $I_k^{(1)} = \{x_k \in \mathbb{R} : -a \leq x_k \leq a\}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) y dividir cada  $I_k^{(1)}$  en dos subintervalos

$$I_{k,1}^{(1)} = \{x_k \in \mathbb{R} : -a \leq x_k \leq 0\}, I_{k,2}^{(1)} = \{x_k \in \mathbb{R} : 0 \leq x_k \leq a\}, k = 1, \dots, n.$$

Consideramos los  $2^n$   $n$ -intervalos de la forma

$$I_{1,k_1}^{(1)} \times I_{2,k_2}^{(1)} \times \dots \times I_{n,k_n}^{(1)}, k_i = 1 \text{ ó } 2.$$

Como su unión es  $J_1$ , alguno de ellos, que llamaremos  $J_2$ , contiene un subconjunto infinito de  $A$ .

Nuevamente, podemos escribir  $J_2 = I_1^{(2)} \times \dots \times I_n^{(2)}$ , donde cada  $I_k^{(2)}$  es algún subintervalo de  $I_k^{(1)}$  de longitud  $a$ .

Repetiendo el proceso de dividir cada  $I_k^{(2)}$  en dos partes iguales y construyendo un intervalo  $J_3$  que contenga un subconjunto infinito de  $A$ , y así sucesivamente, obtenemos una sucesión de  $n$ -intervalos  $(J_m)_{m \in \mathbb{N}}$  tal que  $J_m = I_1^{(m)} \times \dots \times I_n^{(m)}$ , con  $I_k^{(m)} \subset I_k^{(1)}$ , de modo que, si  $I_k^{(m)} = [a_k^{(m)}, b_k^{(m)}]$ , entonces  $b_k^{(m)} - a_k^{(m)} = a/2^{m-2}$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

Para cada  $k$  fijo,  $\sup_m a_k^{(m)} = \inf_m b_k^{(m)} = z_k$ . Entonces  $z = (z_1, \dots, z_n)$  es un punto de acumulación de  $A$  porque, dada una bola  $B(z, r)$ , si hacemos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $a/2^{m-2} < r/2$ , entonces  $z \in J_m \subset B(z, r)$ . Como  $J_m$  contiene infinitos puntos de  $A$ , también lo hará  $B(z, r)$ .  $\square$

El siguiente resultado es consecuencia del teorema anterior.

**Teorema 1.3.5** (encaje de Cantor). *Sea  $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de conjuntos cerrados y no vacíos de  $\mathbb{R}^n$  tales que  $Q_{k+1} \subset Q_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) y  $Q_1$  está acotado. Entonces  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} Q_k$  es cerrado y no vacío.*

*Demostración.* Llamamos  $A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} Q_k$  el cual es cerrado (por ser intersección numerable de cerrados). Si algún  $Q_k$  es finito, es evidente que  $A \neq \emptyset$ .

Podemos suponer, por tanto, que todos los conjuntos  $Q_k$  contienen infinitos puntos. Construimos el conjunto  $Q = \{x_1, x_2, \dots\}$ , donde  $x_k \in Q_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , y  $x_k \neq x_j$  si  $k \neq j$ . Como  $Q$  es infinito y  $Q \subset Q_1$ , por el teorema anterior, tendrá un punto de acumulación, que llamaremos  $x$ . Así pues, cada entorno de  $x$  contiene infinitos puntos de  $Q$ . Como todos, salvo un número finito, los puntos de  $Q$  están en  $Q_k$ ,  $x$  es también punto de acumulación de  $Q_k$ . Al ser  $Q_k$  cerrado,  $x \in Q_k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , es decir  $x \in A$ .  $\square$

- 10) Una familia  $\{A_i\}_{i \in I}$  de conjuntos se llama *recubrimiento* de un conjunto  $A$  cuando  $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ . Dado un recubrimiento  $\{A_i\}_{i \in I}$  de  $A$ , se llama *sub-recubrimiento* a todo recubrimiento  $\{A_i\}_{i \in J}$  tal que  $J \subset I$ .

Un conjunto es *compacto* si de todo recubrimiento por abiertos se puede extraer un sub-recubrimiento finito (esta es la llamada propiedad de Borel-Lebesgue).

Así, por ejemplo, en  $\mathbb{R}$  con la métrica usual, el intervalo abierto  $(0, 1)$  no es compacto pues del recubrimiento  $\{(1/n, 1), n \in \mathbb{N}\}$  no se puede extraer ningún sub-recubrimiento finito. Sin embargo, cualquier conjunto finito de  $\mathbb{R}^n$  es compacto.

Una importante caracterización de los conjuntos compactos es la siguiente:

**Teorema 1.3.6.** *Dado  $A \subset \mathbb{R}^n$ , las siguientes proposiciones son equivalentes.*

- a)  $A$  es compacto.
- b)  $A$  es cerrado y acotado.
- c) Todo subconjunto infinito de  $A$  tiene un punto de acumulación en  $A$ .

*Demostración.* La implicación b)  $\implies$  a) corresponde al teorema de Heine-Borel cuya demostración no daremos aquí (ver por ejemplo, [Ap]).

Para probar que a)  $\implies$  b), dado  $x \in A$ , la colección  $\{B(x, k) : k \in \mathbb{N}\}$  es un recubrimiento por abiertos de  $A$ . Por hipótesis, existe un sub-recubrimiento finito, es decir  $A \subset \bigcup_{k=1}^p B(x, k) = B(x, p)$ , de modo que  $A$  es acotado.

Si  $A$  no fuera cerrado, existiría  $y \in A'$  pero  $y \notin A$ . Dado  $x \in A$ , sea  $r_x = \|x - y\|/2$ . La colección  $\{B(x, r_x) : x \in A\}$  es un recubrimiento por abiertos de  $A$ , por tanto existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $A \subset \bigcup_{k=1}^p B(x_k, r_k)$ . Si llamamos  $r = \min\{r_1, \dots, r_p\}$ , veamos que  $B(y, r) \cap B(x_k, r_k) = \emptyset$ ,  $\forall k = 1, \dots, p$ .

En efecto, sea  $z \in B(y, r)$ , es decir  $\|z - y\| < r \leq r_k$ . Por la desigualdad triangular,  $\|y - x_k\| \leq \|y - z\| + \|z - x_k\|$ , con lo que

$$\|z - x_k\| \geq \|y - x_k\| - \|z - y\| = 2r_k - \|z - y\| > r_k.$$

Por tanto,  $z \notin B(x_k, r_k)$ .

Así pues,  $B(y, r) \cap A = \emptyset$ , lo que contradice que  $y$  es punto de acumulación de  $A$ . En definitiva,  $A$  es cerrado.

Veamos ahora que b)  $\implies$  c). Si  $M \subset A$ , entonces  $M$  está acotado. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass 1.3.4, tiene un punto de acumulación,  $x \in M'$ , de modo que  $x \in A'$ . Por ser cerrado,  $x \in A$ .

Por último, veamos que  $c) \implies b)$ . Si  $A$  no está acotado, dado  $m \in \mathbb{N}$ , existe  $x_m \in A$  tal que  $\|x_m\| > m$ . La sucesión  $M = \{x_1, x_2, \dots\}$  es un subconjunto infinito de  $A$  de modo que tiene un punto de acumulación en  $A$ , que llamaremos  $y$ . Si hacemos  $m > 1 + \|y\|$ , entonces

$$\|x_m - y\| \geq \|x_m\| - \|y\| > m - \|y\| > 1,$$

lo que es una contradicción.

Queda comprobar que  $A$  es cerrado. Para ello, sea  $x$  un punto de acumulación de  $A$ . Elegimos la sucesión  $M = \{x_1, x_2, \dots\}$  de puntos distintos  $x_k \in A$  y  $\|x - x_k\| < 1/k$ . De este modo,  $x$  es también punto de acumulación de  $M$ . Por ser  $M$  un subconjunto infinito de  $A$ , tiene un punto de acumulación en  $A$ . Veamos que  $x$  es el único punto de acumulación de  $M$ .

Si fuera  $y \neq x$ , llamamos  $r = \|y - x\|/2$ . Entonces  $\|y - x\| \leq \|y - x_k\| + \|x_k - x\|$ ,  $\forall x_k \in M$ , de donde

$$\|y - x_k\| \geq \|y - x\| - \|x_k - x\| > 2r - 1/k.$$

Elegimos  $k_0 \in \mathbb{N}$  de modo que  $1/k < r$ , para todo  $k \geq k_0$ . De este modo,  $\|y - x_k\| > r$ ,  $\forall k \geq k_0$ . Esto prueba que  $x_k \notin B(y, r)$ , si  $k \geq k_0$ , de modo que  $y$  no puede ser punto de acumulación de  $M$ .  $\square$

- 11) Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es *no conexo* si existen dos conjuntos  $X, Y$  abiertos tales que

$$X \cap A \neq \emptyset, Y \cap A \neq \emptyset, (X \cap A) \cap (Y \cap A) = \emptyset, (X \cap A) \cup (Y \cap A) = A.$$

En caso contrario, decimos que  $A$  es *conexo*.

Por ejemplo, todos los intervalos de  $\mathbb{R}$  son conjuntos conexos (de hecho, son los únicos conjuntos conexos en  $\mathbb{R}$ ). En general, las bolas  $B(\vec{a}, r)$  son conjuntos conexos en  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.4. Sucesiones en $\mathbb{R}^n$

**Definición.** Dada una sucesión  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de puntos de  $\mathbb{R}^n$ , se dice que *converge* al punto  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , y se escribe  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}$ , cuando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \vec{x}_k \in B(\vec{x}, \varepsilon), \forall k \geq N.$$

El punto  $\vec{x}$  recibe el nombre de *límite* de la sucesión.

La condición anterior equivale a que la sucesión de números reales  $\{d(\vec{x}_k, \vec{x})\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a cero.

**Definición.** Una sucesión  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  en  $\mathbb{R}^n$  es *acotada* cuando

$$\sup\{d(\vec{x}_k, \vec{x}_j) : k, j \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Las siguientes propiedades son consecuencias sencillas de estas definiciones.

**Proposición 1.4.1.** Si  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es convergente, entonces está acotada y su límite es único.

*Demostración.* Haciendo  $\varepsilon = 1$ , sabemos que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $d(\vec{x}_k, \vec{x}) < 1, \forall k \geq N$ . Por otra parte, para los valores  $k < N$ , existe  $a = \max\{d(\vec{x}_1, \vec{x}), \dots, d(\vec{x}_{N-1}, \vec{x})\}$ . Entonces  $d(\vec{x}_k, \vec{x}) \leq 1 + a, \forall k$  y  $d(\vec{x}_k, \vec{x}_j) \leq 2(1 + a), \forall k, j$ .

Si  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}, \vec{x}_k \rightarrow y$ , entonces  $0 \leq d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{x}_k) + d(\vec{x}_k, \vec{y}) \rightarrow 0$ .  $\square$

**Proposición 1.4.2.** Si  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}, \vec{y}_k \rightarrow \vec{y}$ , entonces  $d(\vec{x}_k, \vec{y}_k) \rightarrow d(\vec{x}, \vec{y})$ .

*Demostración.* Por la desigualdad triangular,

$$d(\vec{x}_k, \vec{y}_k) \leq d(\vec{x}_k, \vec{x}) + d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{y}_k).$$

Entonces  $|d(\vec{x}_k, \vec{y}_k) - d(\vec{x}, \vec{y})| \leq d(\vec{x}_k, \vec{x}) + d(\vec{y}, \vec{y}_k) \rightarrow 0$ .  $\square$

**Proposición 1.4.3.** Dada la sucesión  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}, \vec{x}_k \rightarrow \vec{x}$  si y sólo si todas las subsucesiones de  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  convergen a  $\vec{x}$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}$ . Por hipótesis, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $d(\vec{x}_k, \vec{x}) < \varepsilon$ , para todo  $k \geq N$ . Si  $(\vec{x}_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$  es una subsucesión arbitraria, existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $k_j \geq N$  para  $j \geq M$ , con lo que  $d(\vec{x}_{k_j}, \vec{x}) < \varepsilon$ .

El recíproco es trivial.  $\square$

**Proposición 1.4.4.** Dada la sucesión  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de puntos de  $\mathbb{R}^n, \vec{x}_k \rightarrow \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  si y sólo  $x_i^k \rightarrow x_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , donde  $\vec{x}_k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ .

*Demostración.* Si  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}$ , entonces  $\|\vec{x}_k - \vec{x}\| \rightarrow 0$ . Como  $|x_i^k - x_i| \leq \|x_k - x\|$ , entonces  $|x_i^k - x_i| \rightarrow 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Recíprocamente, si  $|x_i^k - x_i| \rightarrow 0$  para todo  $i$ , como  $\|\vec{x}_k - \vec{x}\| \leq n \cdot \max\{|x_i^k - x_i| : i = 1, \dots, n\}$ , entonces  $\|\vec{x}_k - \vec{x}\| \rightarrow 0$ .  $\square$

**Definición.** Una sucesión  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy cuando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : d(\vec{x}_k, \vec{x}_j) < \varepsilon, \forall k, j \geq N.$$

Es fácil comprobar que toda sucesión convergente es de Cauchy. El recíproco también es cierto en  $\mathbb{R}^n$  (basta aplicar el resultado en  $\mathbb{R}$  y la proposición 1.4.4), pero no lo es en cualquier espacio métrico.

Muy útil en lo sucesivo serán las siguientes caracterizaciones de la clausura y del derivado de un conjunto.

**Proposición 1.4.5.**  $\vec{x} \in \overline{A} \iff \exists (\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$  tal que  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}$ .

*Demostración.* Si  $\vec{x} \in \overline{A}$ , por definición,  $B(\vec{x}, 1/k) \cap A \neq \emptyset, \forall k \in \mathbb{N}$ . Elegimos un punto  $\vec{x}_k \in B(\vec{x}, 1/k) \cap A$ . Está claro que  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}$  porque  $d(\vec{x}_k, \vec{x}) < 1/k$ .

Recíprocamente, si  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}$  con  $\vec{x}_k \in A$ , dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $N(\varepsilon)$  tal que  $\vec{x}_k \in B(\vec{x}, \varepsilon), \forall k \geq N(\varepsilon)$ , de donde  $B(\vec{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ .  $\square$

**Corolario 1.4.6.** *Un conjunto  $A$  es cerrado si y sólo si dada cualquier sucesión  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  contenida en  $A$  y  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}$ , entonces  $\vec{x} \in A$ .*

**Teorema 1.4.7.** *Un conjunto  $A$  es compacto si y sólo si toda sucesión  $(\vec{x}_k) \subset A$  tiene alguna subsucesión convergente en  $A$ .*

*Demostración.* Supongamos en primer lugar que  $A$  es compacto y sea  $(\vec{x}_k) \subset A$ .

Si  $(\vec{x}_k)$  es finita, existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\vec{x}_p = \vec{x}_q = \vec{x}$ ,  $\forall p, q \geq k_0$ . Por tanto,  $\lim \vec{x}_k = \vec{x} \in A$ .

Si  $(\vec{x}_k)$  es infinita, por hipótesis existe  $\vec{x} \in A' \cap A$ , lo que significa que existe una subsucesión  $(\vec{x}_{k_j})$  que converge a  $\vec{x}$ .

Recíprocamente, sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto infinito (si fuera finito, sería compacto). Dado  $B \subset A$  infinito, existe  $\{\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_k, \dots\} \subset B$ . Por hipótesis, existe una subsucesión  $(\vec{s}_{k_j})$  tal que  $\vec{s}_{k_j} \rightarrow \vec{p} \in B$ . Como  $\vec{p} \in B'$  y  $B \subset A$ , entonces  $A$  es compacto.  $\square$

**Proposición 1.4.8.** *Dados  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $A \subset \mathbb{R}^n$ , son equivalentes:*

- I)  $\vec{x} \in A'$ ,
- II)  $\exists (\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$ ,  $\vec{x}_k \neq \vec{x}$ , tal que  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}$ .

*Demostración.* Si  $\vec{x} \in A'$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\exists \vec{x}_k \in B(\vec{x}, 1/k) \cap A$ ,  $\vec{x}_k \neq \vec{x}$ . Como  $\|\vec{x}_k - \vec{x}\| < 1/k$ , entonces  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}$ .

Recíprocamente, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $k_0$  tal que  $\vec{x}_k \in B(\vec{x}, \varepsilon)$ ,  $\forall k \geq k_0$ , de donde  $B(\vec{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ . Como además  $\vec{x}_k \neq \vec{x}$ ,  $\vec{x} \in A'$ .  $\square$

## 1.5. Ejercicios

**Ejercicio 1.1.** Clasificar las siguientes cuádricas y dibujar su intersección con los planos coordenados:

a)  $3x^2 + y^2 + 4z^2 = 1.$

g)  $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0.$

b)  $x^2 - 3y^2 + z^2 = 1.$

h)  $x^2 - 2y^2 = 0.$

c)  $-x^2 + y^2 - z^2 = 1.$

i)  $x^2 + 2y^2 = z.$

d)  $x^2 + 2y^2 = 1.$

j)  $4x^2 - 2y^2 = -z.$

e)  $x^2 - y^2 = 1.$

k)  $2x^2 = z.$

f)  $4x^2 = 1.$

**Ejercicio 1.2.** Clasificar la cuádrica  $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 5y - z + \lambda$  según los valores del parámetro  $\lambda$ .

**Ejercicio 1.3.** Clasificar las siguientes cuádricas:

a)  $x^2 + y^2 + 3y - 2z = 0.$

e)  $2x^2 + 4x + 2y^2 - 2z^2 - 4z = 0.$

b)  $2x^2 + y^2 - 2y = 0.$

f)  $x + y^2 + z^2 - \sqrt{3}z = 2.$

c)  $3x^2 = 1.$

d)  $2x^2 - 2x - z^2 - y = 0.$

g)  $-x^2 - 2z^2 = -3.$

**Ejercicio 1.4.** Si consideramos el espacio  $\mathbb{R}^3$  con la norma euclídea, ¿cuáles de las siguientes propiedades son ciertas y por qué?

a)  $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|.$

b)  $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|.$

c) Si  $\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ , entonces  $\vec{v} \perp \vec{w}$ .

d)  $\langle \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = 0.$

e) Si  $\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| = \|\vec{v} \times \vec{w}\|$ , entonces  $\vec{v} \perp \vec{w}$ .

f) Si  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ , entonces  $\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 = (\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle)^2 + \|\vec{v} \times \vec{w}\|^2.$

g)  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \implies \vec{b} = \vec{c}.$

h)  $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a} - \vec{b}\|.$



- i) Si  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ , entonces  $\vec{a} = \vec{b}$  ó  $\vec{a} = \vec{c}$  ó  $\vec{b} = \vec{c}$ .
- j)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ .
- k) Si  $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ , la ecuación  $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$  tiene solución única.
- l) Tres vectores  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  están en el mismo plano que pasa por el origen si y sólo si existen  $\alpha, \beta, \gamma$  no todos nulos tales que  $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ .
- m) El vector  $\vec{v} = \|\vec{a}\|\vec{b} + \|\vec{b}\|\vec{a}$  biseca el ángulo entre  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ .

**Ejercicio 1.5.** Dados dos vectores  $\vec{u}, \vec{v}$  en  $\mathbb{R}^3$ , describir:

- a) El conjunto de puntos en el interior del paralelogramo definido por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .
- b) Los puntos del interior del triángulo de vértices el origen y los extremos de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .
- c) Los puntos en el interior del ángulo definido por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

**Ejercicio 1.6.** a) Probar que  $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$  si y sólo si existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\vec{x} = \lambda\vec{y}$ .

b) Probar que  $\|\vec{x} + \vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$  si y sólo si existe  $\lambda > 0$  tal que  $\vec{x} = \lambda\vec{y}$ .

**Ejercicio 1.7.** Hallar el área del triángulo de vértices  $A(0, 1, 0)$ ,  $B(-1, 1, 2)$  y  $C(2, 1, -1)$ .

**Ejercicio 1.8.** Se consideran los vectores  $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ ,  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ .

- a) Hallar el ángulo entre ellos.
- b) Calcular la proyección de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ .
- c) Si se definen los cosenos directores de un vector como los cosenos de los ángulos que el vector forma con los vectores coordenados  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , calcular los cosenos directores de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

**Ejercicio 1.9.** ¿Cuáles de las siguientes aplicaciones  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son distancias?

- a)  $d(x, y) = |x - y|^2$ .
- b)  $d(x, y) = x^3 - y^3$ .
- c)  $d(x, y) = |x^2 - y^3|$ .
- d)  $d(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$ .
- e)  $d(x, y) = |x^3 - y^3|$ .
- f)  $d(x, y) = |e^x - e^y|$ .

**Ejercicio 1.10.** Probar que las siguientes aplicaciones son normas en  $\mathbb{R}^n$ :

- a)  $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ .
- b)  $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$ .

Representar gráficamente sus respectivas bolas unitarias.

**Ejercicio 1.11.** Sea  $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación que verifica

- I)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ,
- II)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^m$ .

Probar que

- a)  $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in \mathbb{R}^m$ .
- b)  $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^m$ .

**Ejercicio 1.12.** En  $\mathbb{R}^3$  se define la función  $n(x, y, z) = |x| + 2|y| + 3|y - z|$ .

- a) Demostrar que  $n$  es una norma.
- b) Averiguar si dicha norma es equivalente a la norma euclídea.
- c) ¿Es completo el espacio  $(\mathbb{R}^3, n)$ ?
- d) Estudiar si el conjunto  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : n((x, y, z) - (1, -1, 0)) \leq 1\}$  es compacto en  $(\mathbb{R}^3, n)$ .

**Ejercicio 1.13.** Dibujar las regiones siguientes e indicar si son conjuntos abiertos o cerrados:

- a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ .
- b)  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2, |x| < 2\}$ .
- c)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}$ .
- d)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\}$ .
- e)  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y < 1\}$ .

**Ejercicio 1.14.** Se consideran los siguientes conjuntos:

- a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\}$ .
- b)  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x + 5\}$ .

c)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = x\}$ .

d)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, y \geq 2\}$ .

I) Determinar si son abiertos y conexos.

II) Calcular el interior, frontera y exterior de cada conjunto, así como su clausura y su conjunto derivado.

III) Determinar si son acotados y compactos.

**Ejercicio 1.15.** Sea  $M$  la unión de cilindros de base las circunferencias  $x^2 + y^2 = 1/n$ ,  $z = 0$  y altura  $1/n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Calcular su diámetro y decir si  $M$  es abierto, cerrado, compacto, acotado, conexo.

**Ejercicio 1.16.** Dado el conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ , calcular su interior, clausura y frontera. ¿Es  $A$  acotado? ¿Es  $A$  compacto? ¿Es  $A$  conexo?

**Ejercicio 1.17.** Dado el conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1, y \in \mathbb{Q}\}$ , calcular  $\bar{A}$ . ¿Es  $A$  acotado? ¿Es  $A$  compacto? ¿Es  $A$  conexo?

**Ejercicio 1.18.** Dado el conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y = mx, m \in \mathbb{Z}\}$ , probar que  $A$  no es acotado, no es cerrado pero sí es conexo.

**Ejercicio 1.19.** Dados los conjuntos  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1/n, n \in \mathbb{N}, y \in [0, 1]\}$  y  $B = A \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y = 0\}$ , probar que  $A$  no es conexo pero  $B$  sí lo es.

**Ejercicio 1.20.** Sea  $M = A \cup B$ , donde  $A = \left\{ \left( \frac{n+1}{n}, \frac{2n-1}{n} \right) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N} \right\}$  y  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1\}$ . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

a)  $\bar{M} = M'$ .

b)  $\bar{M} = M$ .

c)  $\text{int } M = B$ .

d)  $\text{fr } M = A \cup B$ .

e)  $\text{int } M = A \cup B$ .

f)  $M' = A \cap B$ .

g)  $\text{adh}(\text{int } M) = \text{adh } B$ .

**Ejercicio 1.21.** Sea  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, x + y + z = 0\}$ . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

- a)  $D$  es abierto.
- b)  $D$  es cerrado.
- c)  $\text{fr } D$  es una circunferencia.
- d)  $D \subset \text{fr } D$ .
- e)  $\text{fr } D \subset D$ .

**Ejercicio 1.22.** Sean  $A, B \subset \mathbb{R}^2$ , con  $A \subset B$ . ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas?

- a) Si  $A$  es acotado, entonces  $\text{adh } A$  es compacto.
- b) Si  $B$  es compacto, entonces  $A$  es compacto.
- c) Si  $B$  es acotado, entonces  $\text{adh } A$  es compacto.
- d) Si  $B$  es compacto, entonces  $A$  es acotado.
- e)  $\text{fr } A \subset \text{fr } B$ .

**Ejercicio 1.23.** Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ , tal que  $\lim a_n = (0, 0)$  y sea  $A = \{a_n\} \cup \{(0, 0)\}$ . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

- a)  $\text{int } A = \emptyset$ .
- b)  $A' = \{(0, 0)\}$ .
- c) Todos los puntos de  $A$ , excepto  $\{(0, 0)\}$ , son aislados.
- d)  $A$  es cerrado.
- e)  $A$  es acotado.
- f)  $A$  es compacto.

**Ejercicio 1.24.** Sea  $A = \left\{ \left( \frac{n}{m}, \frac{1}{m} \right) \in \mathbb{R}^2 : n, m \in \mathbb{N} \right\}$ . Calcular  $A'$ .

**Ejercicio 1.25.** Dado  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = \sin 1/x\}$ , calcular  $\overline{A}$ .

**Ejercicio 1.26.** Sea  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ . Calcular  $\text{fr } A$ .

**Ejercicio 1.27.** Sea  $A = \{(i/n, 1/n) : n \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n\}$ . Calcular  $A'$ .

**Ejercicio 1.28.** Sea  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, y) : \frac{n-1}{n} \leq x \leq \frac{n+1}{n}, y = 1/n\}$ . Calcular  $\overline{A}$ .

**Ejercicio 1.29.** Sea  $A = \bigcap_{r>1} \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 < r\}$ . Averiguar si  $A$  es abierto o cerrado y calcular  $\overline{A}$ ,  $A'$  y  $\text{fr } A$ .

**Ejercicio 1.30.** Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es abierto y  $B \subset \mathbb{R}^n$  es cerrado, probar que  $A \setminus B$  es abierto y  $B \setminus A$  es cerrado.

**Ejercicio 1.31.** Probar que toda bola abierta es un conjunto abierto y que toda bola cerrada es un conjunto cerrado.

**Ejercicio 1.32.** Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  dos puntos distintos. Probar que existen  $V(\vec{x}), V(\vec{y})$  entornos de  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ , respectivamente, tales que  $V(\vec{x}) \cap V(\vec{y}) = \emptyset$ .

**Ejercicio 1.33.** Probar que  $A$  es cerrado si y sólo si  $A' \subset A$ .

**Ejercicio 1.34.** Sea  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathbb{R}^n$  con la siguiente propiedad:

$$\text{Existe } \alpha \in (0, 1) \text{ tal que } \|\vec{x}_{k+2} - \vec{x}_{k+1}\| \leq \alpha \|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\|, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Probar que  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es convergente.

**Ejercicio 1.35.** Sean  $C \subset \mathbb{R}^2$  y  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C$ . ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas?

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tiene alguna subsucesión convergente.
- Si  $C$  es cerrado y  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, entonces  $\lim a_n \in C$ .
- Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, todas sus subsucesiones convergen.
- Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tiene una subsucesión convergente, entonces  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente.
- Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada, entonces  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
- Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada, entonces tiene alguna subsucesión convergente.
- Si  $C$  está acotado y  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, entonces  $\lim a_n \in C$ .
- Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, entonces está acotada.