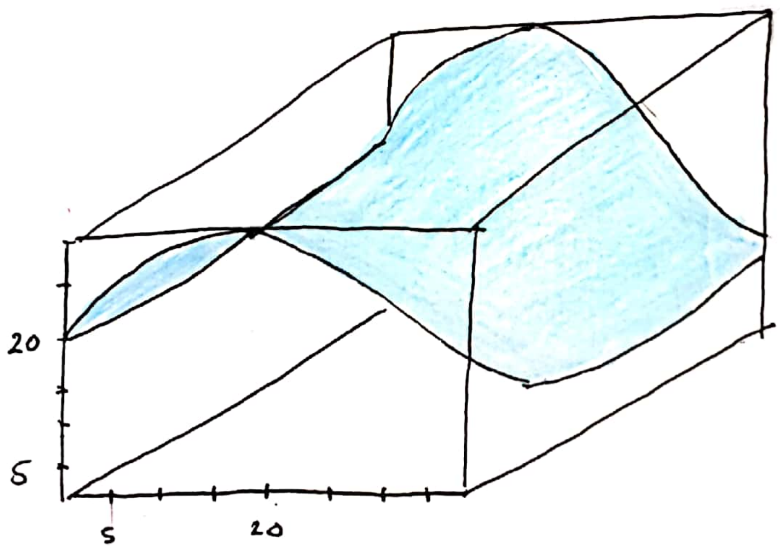
CÁLCULO



$f(x, y)$

Josu P. Z.

Capítulo 1

Visto en álgebra: el espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, \dots, n\}$

Es un grupo, tiene una ley interna (suma de vectores).

$a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^n \rightarrow a + b \in \mathbb{R}^n$

Y una ley de composición externa:

$\lambda \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^n : \lambda \cdot a = (\lambda \cdot a_1, \dots, \lambda \cdot a_n) \in \mathbb{R}^n$

Así, el grupo $\mathbb{R}^n$ junto a esta operación externa forma el siguiente espacio vectorial:

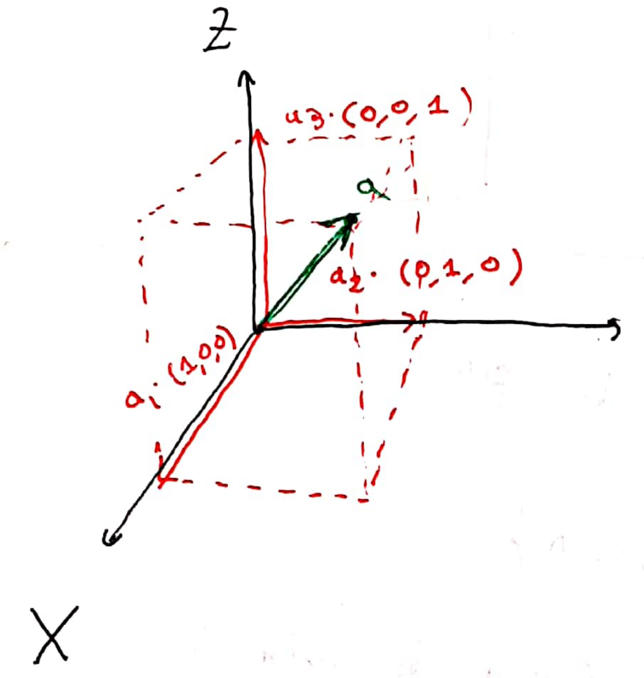
$(\mathbb{R}^n, +, \cdot_{\mathbb{R}})$

Ejemplo: $\mathbb{R}^3$

$a = (a_1, a_2, a_3) = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) =$

$= a_1 \cdot (1, 0, 0) + a_2 \cdot (0, 1, 0) + a_3 \cdot (0, 0, 1)$

(Utilizamos la base canónica).



Base canónica:

$$\begin{cases} e_1 = (1,0,0) \\ e_2 = (0,1,0) \\ e_3 = (0,0,1) \end{cases}$$

<u>Producto escalar</u> entre a y b:

$a, b \in \mathbb{R}^n$

$\langle a, b \rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + \dots + a_n \cdot b_n \in \mathbb{R}$

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a, b) & \longrightarrow & \langle a, b \rangle \end{array}$$

Distinguir de espacio generado por un conjunto de vectores:

$\langle A \rangle$ ó $\langle \{a, b\} \rangle$

<u>Norma</u> de un vector (generalización del valor absoluto).

valor absoluto $\longrightarrow$ $|a|$ (distancia al origen). $(a \in \mathbb{R})$

norma de un vector $\longrightarrow$ $\|a\|$ (distancia al origen). $(a \in \mathbb{R}^n)$

Distancia:

$a, b \in \mathbb{R}^n$

$$d(a,b) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + \dots + (a_n-b_n)^2}$$

Recordar: $\sqrt{a^2} \neq a$; $\sqrt{a^2} = |a|$

Nota:

$$d(a,b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$$

Propiedades (axiomáticas): (de la distancia)

(1) $d(a,b) \geq 0$

(2) $d(a,b) = 0 \iff a = b$

(3) $d(a,b) = d(b,a)$

(demos. en notas)

(4) $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ (des. triangular)

$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Definida la distancia, definimos la norma:

$a \in \mathbb{R}^n$

$$\|a\| = d(a, 0) = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

La norma hereda las propiedades de la distancia.

$\|a\| \geq 0$

$\|a\| = 0 \iff a = (0, \dots, 0) = \bar{0}$

$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

Hemos definido la norma según la distancia, pero se puede hacer en el otro sentido, de esta forma:

Paralelismo entre distancia y norma: $d(a,b) = \|a-b\|$
(Nota, si tomamos b el origen: $d(a,\bar{0}) = \|a\| = \sqrt{\langle a,a\rangle}$)

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$\forall a,b \in \mathbb{R}^n, \quad |\langle a,b\rangle| \leq \|a\|\cdot\|b\|$

dem.:
Sean $a,b \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\|a+\lambda b\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_i+\lambda b_i)^2 = \langle a+\lambda b, a+\lambda b\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + 2\lambda a_i b_i + \lambda^2 b_i^2) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\lambda\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 =$$

$$= \|a\|^2 + 2\lambda\langle a,b\rangle + \lambda^2\|b\|^2 \Rightarrow$$

$$0 \leq \|a+\lambda b\|^2 \Rightarrow \|a\|^2 + 2\lambda\langle a,b\rangle + \lambda^2\|b\|^2 \geq 0$$

Es una ec. de 2º grado con 1 o ninguna solución. Por tanto su discriminante es menor o igual que 0: (Ψ Ψ)

$$\Rightarrow b^2 - 4ac \leq 0 \Rightarrow \cancel{4}\cancel{\lambda^2}\langle a,b\rangle^2 - \cancel{4}\|a\|^2\cdot\cancel{\lambda^2}\cdot\|b\|^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (\underbrace{\langle a,b\rangle}_{\geq 0})^2 \leq (\underbrace{\|a\|}_{\geq 0})^2\cdot(\underbrace{\|b\|}_{\geq 0})^2 \Rightarrow \langle a,b\rangle \leq \|a\|\cdot\|b\|$$

(desigualdades de cuadrados equivalentes a las del valor absoluto, si los números son positivos, nos podemos olvidar del valor absoluto, $|x| = x$ si $x \geq 0$).

Por tanto:

$$\left| \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|} \right| \leq 1$$

Definición:

Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, definimos el ángulo entre a y b como α $(0 \leq \alpha \leq \pi)$ de manera que:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$$

Repaso:

$\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico con la distancia:

$$d(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$$

Definición:

Definimos un espacio métrico a un conjunto X con una operación interna d tal que:

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

cumple estas propiedades:

(1) $d(x, y) \geq 0, \ \forall x, y \in X$ (positiva)

(2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ $(d(x,x) = 0)$

(3) $d(x, y) = d(y, x), \ \forall x, y \in X$ (simétrica)

(4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \ \forall x, y, z \in X$ (triangular)

Al par (X, d) lo llamamos espacio métrico.

Repaso: $\mathbb{R}^n$ es un espacio normado, con norma:

$$\|a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} = d(a, 0)$$

Definición:

Decimos que un espacio vectorial X es un espacio normado cuando existe

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

que cumple que:

(1) $\|x\| \geq 0, \ \forall x \in X$ (positiva)

(2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ($\|x\|=0, x=0$)

(3) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in X$ (lineal)

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in X$

demos. propiedad (3) para el espacio normado de $\mathbb{R}^n$.

$$\|\alpha \cdot x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha^2 \cdot x_i^2} = \sqrt{\alpha^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2} =$$

$$= |\alpha| \cdot \|x\| \quad \square$$

Repaso:

En $\mathbb{R}^n$ tenemos producto escalar, definimos:

$$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

Definición:

Decimos que un espacio vectorial X es pre-Hilbert cuando tiene un producto escalar definido.

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

que cumple:

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0, \ \forall x \in X$ (definido positivo)

(2) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ($\ker(g) = \{\vec{0}\}$)

(3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle ; \ \forall x, y \in X, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(4) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \ \forall x, y, z \in X$

} lineal en cada componente

(5) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle ; \ \forall x, y \in X$ (simétrica)

(multilineal)

demos. (3) y (4) para $\mathbb{R}^n$:

(3)

$$\langle \alpha x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i \cdot y_i = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = \alpha \langle x, y \rangle \quad \square$$

(4)

$$\langle x+y, z \rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \cdot z_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i z_i + y_i z_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i z_i) + \sum_{i=1}^{n} (y_i z_i) = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \square$$

Proposición:

Todo espacio con producto escalar es normado. Podemos definir:

$$\forall x \in X, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

(1), (2) y (3) parecen triviales. probemos la (4) (para la norma).

<u>demos. (4):</u>

A probar: $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \underset{\substack{\| \ (5\ \text{orden}) \\ \langle x,y\rangle}}{\langle y,x\rangle} + \langle y,y\rangle = \underset{\substack{\| \\ \|x\|^2}}{\langle x,x\rangle} + 2\langle x,y\rangle + \underset{\substack{\| \\ \|y\|^2}}{\langle y,y\rangle} \overset{\substack{\text{Desigualdad} \\ \text{de Cauchy} \\ \uparrow}}{\le}$$

$$\le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\underbrace{\|x+y\|}_{\ge 0}| \le |\underbrace{(\underset{\ge 0}{\|x\|} + \underset{\ge 0}{\|y\|})}_{\ge 0}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \quad \square$$

<u>Proposición:</u>

Todo espacio normado es métrico, pues podemos definir:

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

<u>demos. (3):</u>

¿Es simétrica?

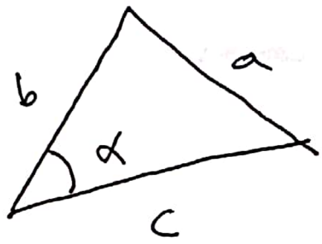
$$d(y,x) = \|y-x\| = \|-(x-y)\| = \cancel{|-1|}^{\,1} \cdot \|x-y\| = \|x-y\| =$$

$$= d(x,y) \quad \square$$

¿Se puede hacer al revés? En vez de pre-Hilbert → normado → → métrico, ¿se puede métrico → normado → pre-Hilbert? Ver las notas, pero en principio ~~no~~ sé.

$$\begin{cases} \|x\| = d(x,0) \\ \langle x,y\rangle = \|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos(\theta) \end{cases} \xrightarrow{\text{no nos va a valer}}$$ es una forma especial, un poco difícil medir distancias con ángulos.

Teorema de los cosenos:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

Si pensamos como vectores:

$$\bar{a} = \bar{b} - \bar{c} \longrightarrow \|a\|^2 = \|b-c\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|a\|^2 = \|b\|^2 + \|c\|^2 - 2\|b\|\cdot\|c\|\cdot\cos(\alpha) \qquad (1)$$

(Esto dice el teorema).

Operemos:

$$\langle b-c, b-c\rangle = \|b-c\|^2$$

$$= \langle b,b\rangle + \langle b,-c\rangle + \langle -c,b\rangle, \langle -c,-c\rangle =$$

$$= \|b\|^2 - \langle b,c\rangle - \langle b,c\rangle + \|c\|^2 \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ (Igualamos (1) y (2))

$$\cancel{\|b\|^2} + \cancel{\|c\|^2} - 2\|b\|\cdot\|c\|\cdot\cos(\alpha) = \cancel{\|b\|^2} - 2\langle b,c\rangle + \cancel{\|c\|^2}$$

$$\Rightarrow \langle b,c\rangle = \|b\|\cdot\|c\|\cdot\cos(\alpha)$$

Ponemos el coseno para que cumpla el teorema del coseno.

Se puede definir el prod. escalor como:

$$< x, y > = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\alpha)$$

Definición:

En $\mathbb{R}^3$ se puede definir el producto vectorial como:

$$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) =$$

$$= (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2, x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Regla memotécnica: "el determinante"

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades:

$$\|V \times W\| = \|V\| \cdot \|W\| \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$$

$\operatorname{car}(\mathbb{R}) \neq 2$

$V \times W = -(W \times V)$ (alternada $\Leftrightarrow$ antisimétrica) $\Rightarrow V \times V = 0$

$\alpha = 0 \longrightarrow < V, W > = \|V\| \cdot \|W\|$; $\|V \times W\| = 0$

$\alpha = 90 \longrightarrow < V, W > = 0$; $\|V \times W\| = \|V\| \cdot \|W\|$

Definición:

Dos vectores son ortogonales cuando: $< V, W > = 0$

Nosotros trabajamos con bases ortonormales, con la canónica de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, \dots, 0) \\ e_2 = (0, 1, \dots, 0) \\ \vdots \\ e_i = (\underset{1}{0}, \dots, \underset{i-1}{0}, \underset{i}{1}, \underset{i+1}{0}, \dots, \underset{n}{0}) \\ \vdots \\ e_n = (0, 0, \dots, 1) \end{cases}$$

(Todo 0s menos 1 en la i-ésima posición).

1.2 Curvas y superficies en $\mathbb{R}^3$

Una ecuación en tres variables $F(x,y,z)=0$ representa geométricamente una superficie en el espacio euclídeo de $\mathbb{R}^3$.

SUPERFICIE: $F(x,y,z)=0$

PLANO: $Ax + By + Cz + D = 0$

Corte ejes $(-D/A, 0, 0)$, $(0, -D/B, 0)$, $(0, 0, -C/B)$

(Si A, B, C es 0, es paralelo al eje x, y ó z).

Formas de escribirla: (deducción fórmula, con prod escalar entre la normal y el vector que une dos puntos del plano).

$$\langle (x-x_0, y-y_0, z-z_0), (A,B,C) \rangle = 0$$

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz - \underbrace{(Ax_0 + By_0 + Cz_0)}_{D} = 0$$

CUÁDRICA: (Se diferencian por los signos).

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

CÓNICAS: (Se diferencian por los signos).

$$Ax^2 + By^2 + \underbrace{(Cxy)}_{\text{está girada}} + Dx + Ey + F = 0$$

Elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dependiendo sobre qué ejes rotemos:

Balón rugby:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \xrightarrow[\text{(de revolución)}]{\text{Giro eje } Y} \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

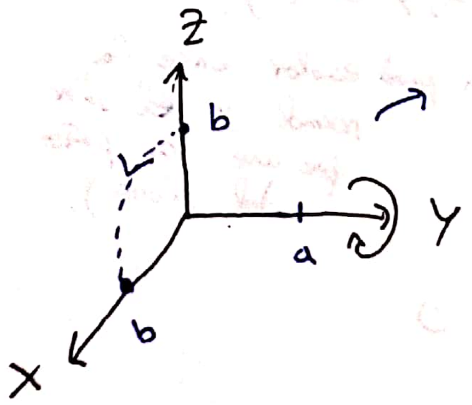
Ovni:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \xrightarrow[\text{(de revolución)}]{\text{Giro eje } z} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Degenerado:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\cancel{y}^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

No se genera con ningún volumen de revolución.



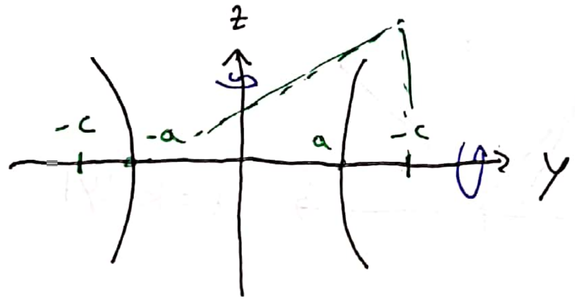
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$$

Corta los ejes en esos puntos, de ahí los volúmenes de revolución y sus fórmulas.

(Razón que nos vale para siguientes)

HIPÉRBOLA:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$



HIPERBOLOIDE: (DOS HOJAS)

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \xrightarrow[\text{(de revolución)}]{\text{Giror eje } y} -\frac{x^2}{b^2} + \underbrace{\frac{y^2}{a^2}}_{\text{los antenas se abren hacia } y} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

HIPERBOLOIDE: (1 HOJA)

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \xrightarrow[\text{(de revolución)}]{\text{Giror eje } z} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \underbrace{\frac{z^2}{b^2}}_{\text{se abre en el eje } z} = 1$$

¿Qué pasa si lo cortamos por el eje de revolución?

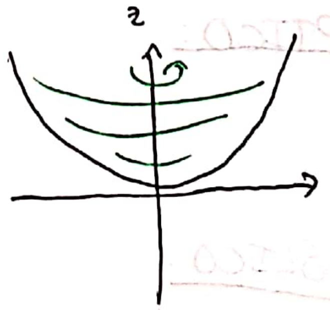
$z = 0, x \in \mathbb{R} \longrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = r^2 \rightarrow$ Elipse (1 HOJA)

¿Eje x?
Elipse o nada, etc.

(Caso de 2 hojas $\rightarrow$ corte por eje de revolución: hipérbola)

PARÁBOLA:

$$z = a \cdot y^2$$

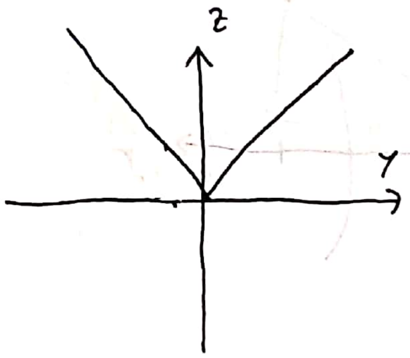


PARABOLOIDE:

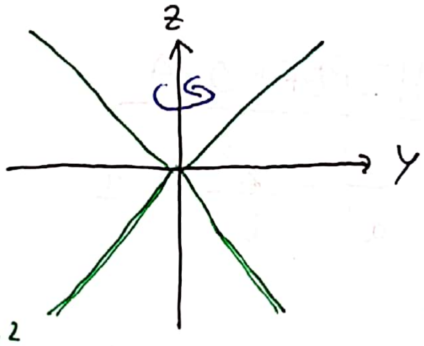
$$z = ay^2 + ax^2$$

PARABOLOIDE ELÍPTICO:

$$z = ay^2 + bx^2$$



$z = k \cdot |y| \quad \rightarrow$



$z^2 = k^2 \cdot y^2$

$\hookrightarrow z^2 = ay^2 + bx^2$

De revolución:

CONO:

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

PARABOLOIDE HIPERBÓLICO:

$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \longrightarrow$ No se genera como superficie de revolución

¿Qué pasa con los del tipo $Ax^2 + By^2 = C$?
Son constantes si variamos z, para cada plano paralelo al OZ hay una cónica.

CILINDRO ELÍPTICO:

$Ax^2 + By^2 = C$ (En $\mathbb{R}^2$ sería elipse, ¡pero estamos en $\mathbb{R}^3$!)

CILINDRO PARABÓLICO:

$x^2 = py$ (En $\mathbb{R}^2$ sería parábola, ¡pero estamos en $\mathbb{R}^3$!)

CILINDRO HIPERBÓLICO:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (En $\mathbb{R}^2$ sería hipérbola, ¡pero estamos en $\mathbb{R}^3$!)

Ejemplos:

- $x^2 + 2y^2 = 1$ $\longrightarrow$ cilindro elíptico sobre eje z.
- $x^2 + 2y^2 = z$ $\longrightarrow$ paraboloide elíptico (eje z)
- $x^2 - 2y^2 = z$ $\longrightarrow$ paraboloide hiperbólico, eje z.
- $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$ $\rightarrow$ hiperboloide de dos hojas de revolución sobre el eje Y.
- $2x^2 - 2x - z^2 - y = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2\cdot(x^2 - x + 1/4) - z^2 - y - 2\cdot 1/4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\,(x - 1/2)^2 - z^2 - y = 1/2$ $\rightarrow$ paraboloide hiperbólico, sobre el eje z y trasladado del origen.

Vamos a definir un conjunto de distancias, partiendo por la euclídea:

Distancia Euclídea: $d(a,b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|^2}$

Una distancia genérica:

$$a, b \in \mathbb{R}^n : \ d_p(a,b) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|^p} \ , \ p \geq 1$$

$$d_\infty(a,b) = \max\{|a_i - b_i| : i = 1, \ldots, n\}$$

Definimos la norma asociada:

$$\|a\|_p = d_p(a,0) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p}$$

y

$$\|a\|_\infty = \max\{|a_i| \; i=1,\dots,n\}$$

<u>Proposición:</u>

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ y $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ son espacios normados $(\forall p \geq 1)$

<u>demos:</u> $(\|\cdot\|_p)$

(1) $\longrightarrow$ Trivial $(\forall i, |a_i| \geq 0 \Rightarrow |a_i|^p \geq 0, \dots \Rightarrow d_p(a,0) \geq 0)$

(2) $\longrightarrow$ $\forall i, |a_i| \geq 0$; suma de números positivos es 0 $\Rightarrow$ los números son 0 $\Rightarrow$ $a = (0,\dots,0)$

(3) $\longrightarrow$

$$\|\lambda a\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |\lambda \cdot a_i|^p} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |\lambda|^p \cdot |a_i|^p} =$$

$$= |\lambda| \cdot \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p} = |\lambda| \cdot \|a\|_p \quad \square$$

(4) Necesitamos lemas.

<u>Lema 1:</u>

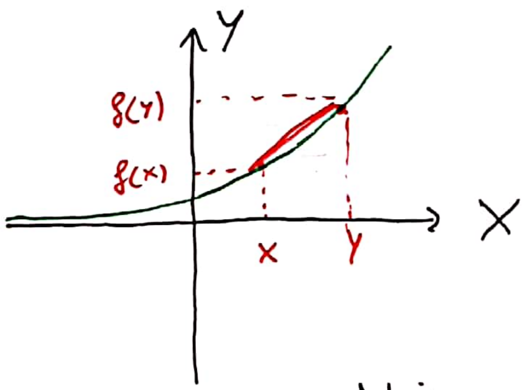
Si $a, b \in \mathbb{R}$, $p, q > 1$ tales que $1/p + 1/q = 1$. Entonces:

$$|a| \cdot |b| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

(demostración del curso pasado). ↲

demos.:

La función $f(x) = e^x$ es convexa ($\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) > 0$; equivalente a (1)).



Dado un punto de un segmento, cualquier punto es combinación lineal de sus extremos:

$$x = (1-t)\cdot a + t\cdot b, \quad t \in [0,1]$$
$$= a + t\cdot(b-a)$$

(x son todos los puntos del segmento)

a —— x —— b

Entonces: $\underbrace{f((1-t)\cdot x + t\cdot y)}_{\text{función}} \overset{\text{por debajo}}{\leq} \underbrace{(1-t)\cdot f(x) + t\cdot f(y)}_{\text{segmento}} \Rightarrow$ (una de las defs de convexa).

$$\Rightarrow e^{(1-t)\cdot x} \cdot e^{t\cdot y} \leq (1-t)\cdot e^x + t\cdot e^y \quad (2)$$

Llamamos: (para reescribir (2) con lo que nos interesa, $|a|$ y $|b|$).

$|a| = e^{(1-t)\cdot x}$, $|b| = e^{t\cdot y}$ y $(1-t) = 1/p$, $t = 1/q$. Así:

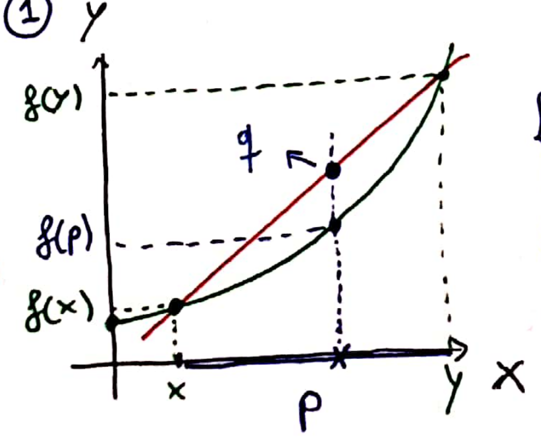
$$\Rightarrow (1-t)\cdot x = \ln(|a|) \Rightarrow x = p\cdot \ln|a| = \ln(|a|^p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x = |a|^p$$

(Análogo para b) $\Rightarrow$ (2) $\rightarrow |a|\cdot|b| \leq \dfrac{|a|^p}{p} + \dfrac{|b|^q}{q}$ □

---

①



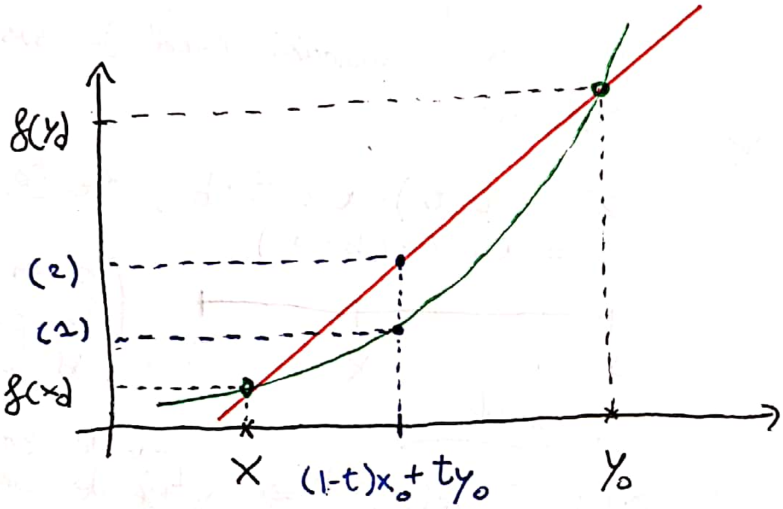
$$\begin{cases} p = x + t(y-x), \; t \in [0,1) \\ f(p) = f((1-t)x + t\cdot y). \end{cases}$$

$f(x) = e^x$ es convexa. Por definición de convexa $\Rightarrow f((1-t)x + t\cdot y) \leq (1-t)f(x) + t\cdot f(y)$

Altura del segmento mayor que el de la función.

demos.: (más ordenada)

Por definición, una función convexa es aquella que cumple que para cualquiera de dos puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$, la recta que los une pasa por encima de la función:



Observar:
$(1-t)x_0 + ty_0 =$
$= x_0 + t(y_0 - x_0)$ con
$t \in [0,1] \Rightarrow$
$x_0 + t(y_0 - x) \in [x_0, y_0]$

$(1) \rightarrow f((1-t)x_0 + ty_0)$

$(2) \rightarrow g((1-t)x_0 + ty_0)$ con: $g(x) - f(x_0) = \dfrac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0}(x - x_0)$

$$\Rightarrow g((1-t)x_0 + ty_0) = f(x_0) + \frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0}(\cancel{x_0} + t(y_0 - x_0) - \cancel{x_0}) =$$

$$= f(x_0) + [f(y_0) - f(x_0)]\frac{t\cancel{(y_0 - x_0)}}{\cancel{(y_0 - x_0)}} = f(x_0) + tf(y_0) - tf(x_0) =$$

$$= (1-t)f(x_0) + tf(y_0)$$

(La igualdad se da en los extremos, pero no hemos demostrado que no se de en otra parte etc. por eso el $\leq$ de ahora). $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Convexa: $f((1-t)x_0 + ty_0) \leq (1-t)f(x_0) + tf(y_0)$ (1)

(Se puede probar que f es convexa en $I \Leftrightarrow f'' > 0$ en I). | ⊛ $\Rightarrow p, q > 1$ |

Como $f(x) = e^x$ es convexa, cumple (1) $\Rightarrow$

$$e^{(1-t)x_0} \cdot e^{ty_0} \leq (1-t)e^{x_0} + t \cdot e^{y_0} \rightarrow e^{x_0}, e^{y_0} \in \mathbb{R}^+$$

Tomamos: $e^{x_0} = |a|^p$; $(1-t) = \frac{1}{p}$; $e^{y_0} = |b|^q$; $t = \frac{1}{q}$ $\left(t \in [0,1] \Rightarrow \Rightarrow (1-t) = \frac{1}{p} < 1 \Rightarrow t = \frac{1}{q} < 1 \longrightarrow ⊛\right)$

(Podemos tomar esos cambios sin problemas). $\Rightarrow (a, b \in \mathbb{R}, \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 - t + t = 1)$

$$\Rightarrow |a|^{\cancel{p} \cdot \frac{1}{\cancel{p}}} \cdot |b|^{q \cdot \frac{1}{q}} \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q} \Rightarrow |a| \cdot |b| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q} \quad \square$$

Proposición: Desigualdad de Hölder.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $p, q > 1$ con $1/p + 1/q = 1$, entonces:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot |y_i|}_{|<x,y>|} \leq \underbrace{\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}}_{\|x\|_p} \cdot \underbrace{\sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q}}_{\|y\|_q} \rightarrow \text{Desigualdad de Cauchy generalizada.}$$

Dem.:

Llamamos $A^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$, $B^q = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q$. Si $A = 0$ $\Rightarrow x_i = 0 \ \forall i$, $\Rightarrow x = 0$ y la desigualdad es trivial (se da la igualdad $0 = 0$). $B = 0$ es análogo.

Por tanto, suponemos que $A \neq 0$ y $B \neq 0$. Así:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{A} \cdot \frac{|y_i|}{B} \leq 1$$

Llamamos $u_i = \frac{x_i}{A}$ y $v_i = \frac{y_i}{B}$. Por tanto, hay demostrar que:

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i| \cdot |v_i| \leq 1$$

Sabiendo que:

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|^p}{A^p} = \frac{1}{A^p} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}_{A^p} = \frac{\cancel{A^p}}{\cancel{A^p}} = 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |v_i|^q = 1$$

Aplicamos el lema anterior:

$\forall i$ se cumple que:

$$|u_i| \cdot |v_i| \leq \frac{|u_i|^p}{p} + \frac{|v_i|^q}{q} \xrightarrow{\text{Los sumamos } \forall i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i| \cdot |v_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|u_i|^p}{p} + \frac{|v_i|^q}{q} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{|u_i|^p}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{|v_i|^q}{q} =$$

por hipótesis

$$= \frac{1}{p} \cdot \cancel{\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p}^{1} + \frac{1}{q} \cdot \cancel{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^q}^{1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Por tanto se cumple todo y $\square$

<u>Nota:</u>

Esta desigualdad es válida si $p = 1$, $q = \infty$ (ejercicio).

A probar:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot |y_i| \leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_\infty = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right) \cdot \max\{|y_i|, i = 1, \dots, n\}$$

Ahora podemos demostrar la propiedad (4), la desigualdad triangular o de Minkowski.

<u>Desigualdad triangular:</u> (con misma nota $p = \infty$)

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad p > 1$$

(Siguiente cara)

demos.:

A probar:

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p}$$

De momento olvidamos las raíces:

(des. triang para $|x_i+y_i| \leq |x_i|+|y_i|$)

(1) $$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)\cdot|x_i+y_i|^{p-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}|x_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}|y_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1} \leq$$

Separamos

Aplicar Holder a cada sumando

(tomando $p'=p$ y $q'=q$), (la de antes) (con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)

$$\leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}\cdot\sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)\cdot q}} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p}\cdot\sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)\cdot q}} =$$

$$= \left[\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}+\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p}\right]\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)\cdot q}\right)^{1/q} =$$

Ahora:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{q+p}{qp} = 1 \Rightarrow q+p = pq \Rightarrow p = pq-q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = q(p-1)$$

$$= \left[\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}+\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p}\right]\cdot\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/q}}_{\text{pasamos dividiendo a (1) (en la desigualdad)}}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\overset{1-1/q}{\overset{\shortparallel}{1/p}}} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p} \quad \square$$

$(1/p + 1/q = 1 \Rightarrow 1/p = 1 - 1/q)$

(Se puede generalizar para espacios con dimensión infinita).

1.3 Nociones de topología métrica

Definición:

Una bola abierta se define dado un $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$:

$$B(x,r) = B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r \}$$

Una bola cerrada se define dado un $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$:

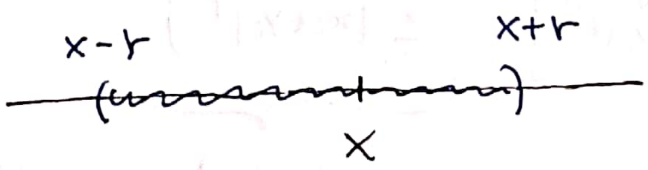
$$\overline{B}(x,r) = \overline{B_r}(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq r \}$$

Una esfera se define dado un $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$:

$$S(x,r) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| = r \}$$

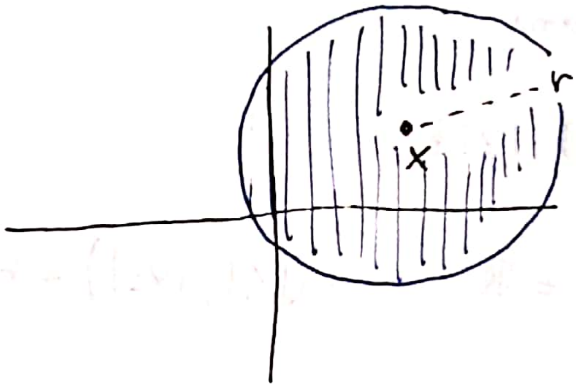
Ejemplos:

$n = 1$



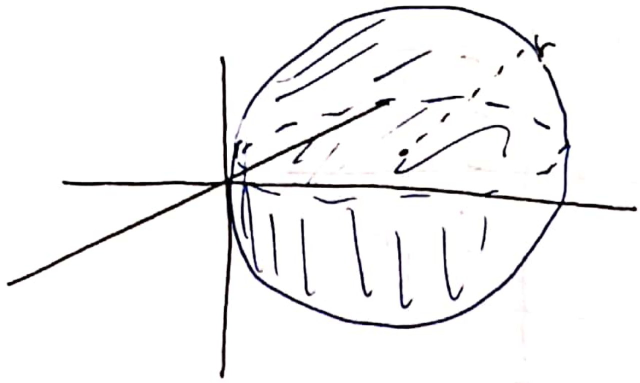
(Intervalo abierto)

$n = 2$



¿(círculo)? Sí,
Si $\|\cdot\|_p$ es $p=2$

$n = 3$



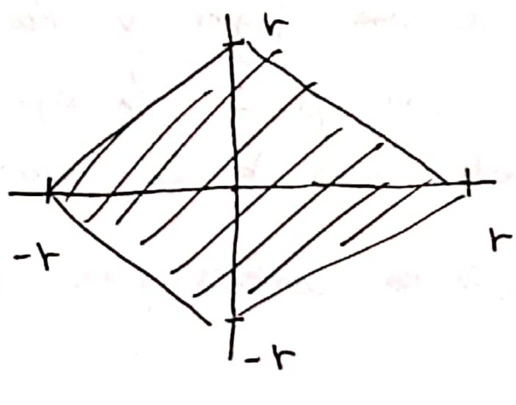
→ (interior de la esfera).

En $\mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$$

$$\begin{cases} x = (0,0) \\ r > 0 \\ B(x,r) = \{ y \in \mathbb{R}^2 : \|x-y\| < r \} \end{cases}$$

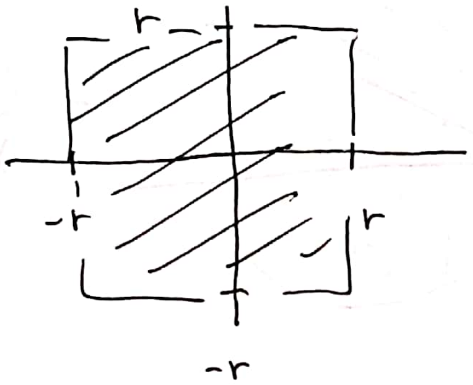
La bola → $|0 - y_1| + |0 - y_2| < r \Rightarrow |y_1| + |y_2| < r \Rightarrow$



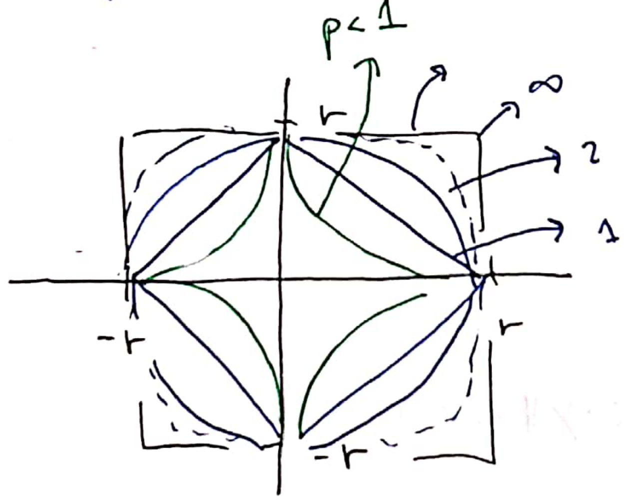
¿Si tomaramos otra norma?

$$\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$$

$$B(0,r) = \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 : \max(|y_1|,|y_2|) < r\}$$



Si los solapamos (¡ejercicio de cálculo del año pasado!):



(Observar: ¡las bolas tienen picos (algunos)!)

(No es bola porque es circular).

$$\left(\|(x,y)\|_p = \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p} \right)$$

Si tomamos dos puntos de una figura y los uniéramos con una línea recta, para $p > 1$ el segmento que que une los puntos queda dentro de la figura, para $p < 1$ queda fuera (es no convexa para $p < 1$).

Propiedad:

$$B(x,r) = x + r \cdot B(0,1)$$

Definición:

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, decimos que x es un punto interior de A cuando cumple que:

$$\exists r > 0 : B(x,r) \subset A$$

El conjunto formado por los puntos interiores (todos) se llama interior de A. Es decir:

$$\text{int}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ es punto interior de } A\}$$

$$\text{int}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists r > 0 \mid B(x,r) \subset A\}$$

Proposición:

$\text{int}(A) \subset A$ $\quad (x \in \text{int}(A) \Rightarrow \exists r > 0 \mid B_r(x) \subset A \Rightarrow x \in B_r(x) \subset A \Rightarrow x \in A)$

Definición:

Si $\text{int}(A) = A$, entonces decimos que A es abierto.

Ejemplos:

$B(x,r)$ es abierto, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $r>0$ $\left(B(x,r) = \text{int}(B(x,r))\right)$

Propiedades:

1)
Si $\{A_i\}_{i\in I}$ de abiertos, entonces: $\bigcup_{i\in I}(A_i)$ es abierto.

2)
Si $\{A_1, \dots, A_k\}$ son abiertos, entonces: $A_1 \cap \dots \cap A_k$ es abierto.

3)
$\emptyset$ es abierto (por red. abs. porque no hay puntos en el vacío; $A=\emptyset$; $\text{int}(A) = \emptyset \Rightarrow \text{int}(A) = A \Rightarrow$ es abierto).

4)
$\mathbb{R}^n$ es abierto. $(\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall r>0, B(x,r) \subset \mathbb{R}^n)$.

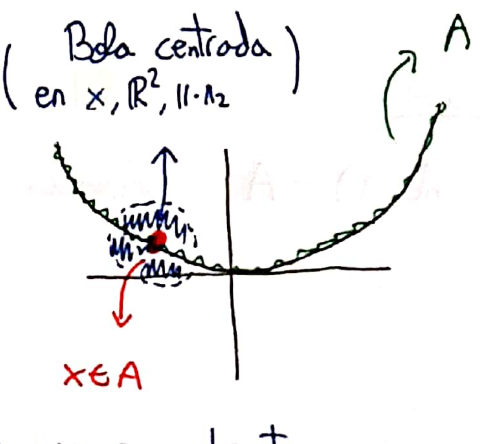
Observar que con estas 4 propiedades podemos formar una topología (métrica) en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo:

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} (\|\cdot\|_2)$

$(0,0)$

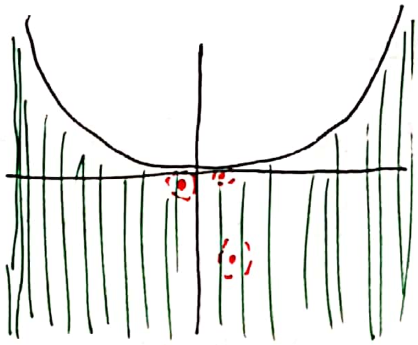
Puntos de la bola $\notin A \Rightarrow$



$\Rightarrow \text{int}(A) = \emptyset \neq A \Rightarrow$ no es abierto.

Ejemplo:

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}$



Como no hay $x \in A$ en la parábola, pues ha de ser menor

$\Rightarrow \forall x \in A \ \ \exists r : B_r(x) \subset A \Rightarrow A = \text{int}(A) \Rightarrow A$ es abierto.

Ejemplo:

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2\}$

En los extremos $\nexists r : B_r(x) \subset A$ (cuando $y = x^2$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow A \neq \text{int}(A) \Rightarrow A$ no es abierto.

En $\mathbb{R}$, los conjuntos abiertos no suelen tomar extremos. Los conjuntos abietos son intervalos abiertos porque no tienen el problema del extremo.

Definición:

x es un punto exterior de A cuando:

$$\exists B_r(x) \subset A^c \ \ (\Longleftrightarrow x \in \text{int}(A^c)) (\Leftrightarrow \forall r>0, B_r(x) \cap A = \emptyset)$$

Decimos que x es un punto frontera de A cuando:

$$\forall r > 0, \ \begin{cases} B(x,r) \cap A \neq \emptyset \\ B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$$

Proposición:

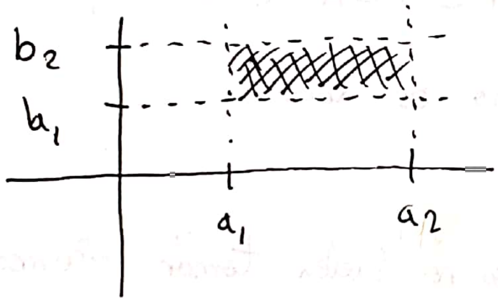
Un $x \in \mathbb{R}^n$ es o interior, o exterior, o frontera, solo una de las tres opciones. Así: (Dado $x \in \mathbb{R}^n$, $x \in int(A)$ ó excluyente, ...).

$$\mathbb{R}^n = int(A) \cup ext(A) \cup fr(A) \quad \text{(unión disjunta)} \; (\forall A \subset \mathbb{R}^n).$$

Generalización de los intervalos abiertos: $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Siempre son abiertos los conjuntos del tipo:

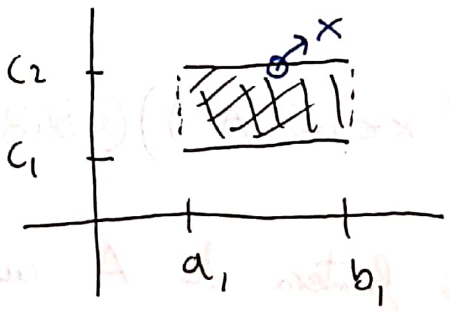
$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$$

$R^2 \rightarrow$



Ejemplo:

$$[a_1, b_1] \times (c_1 \times c_2)$$



Sabemos que no es abierto porque los x marcados no pertecen a interior A $\Rightarrow A \neq int(A) \Rightarrow$ A no es abierto (pero no tiene porqué ser cerrado).

Definición:

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, se dice que $x \in \mathbb{R}^n$ es un **punto de adherencia de A** cuando cumple que:

$$\forall r>0, \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset$$

Se llama **clausura** de A al conjunto de todos estos puntos.

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ de adherencia de } A\}$$

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r>0, \ B(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$$

Si $a \in \bar{A}$, es trivial $B(a,r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow A \subset \bar{A}$

La igualdad no ha de darse siempre ejemplo:

$A = (a,b)$, $a \in \overline{(a,b)} \wedge a \notin (a,b)$

Decimos que **A es cerrado** cuando se da que:

$$A = \bar{A}$$

Ejemplos:

$\emptyset$ es cerrado.

$\mathbb{R}^n$ es cerrado.

Los intervalos cerrados de $\mathbb{R}$ son conjuntos cerrados.

Las bolas cerradas en $\mathbb{R}^n$ son conjuntos cerrados.

Proposición:

Si A es cerrado, entonces A^c es abierto.

demos.:

A probar que $int(A^c) = A^c$.

$int(A^c) \subset A^c$ es evidente.

Dado $x \in A^c$, hay que ver que $\exists r>0 : B(x,r) \subset A^c \Rightarrow x \in int(A^c)$.

Si $x \in A^c \Rightarrow x \notin A \overset{(1)}{\Rightarrow} x \notin \bar{A} \Rightarrow \exists r>0 : B(x,r) \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow B(x,r) \subset A^c$ $\square$

(1) (Como A es cerrado, $A = \bar{A}$)

Propiedades: (Por complementarios se deducen).

(i) Si $(A_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$ son cerrados: $\bigcap_{i\in I} A_i$ es cerrado

(ii) $\{A_1, \dots, A_k\}$ son cerrados: $A_1 \cup \dots \cup A_k$ es cerrado

(iii) $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son cerrados.

Definición:

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, decimos que $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de A cuando: (cuando en toda hay más puntos en A a parte de x).

$$\forall r > 0 : (B(x,r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

Al conjunto de puntos de acumulación de A se le llama conjunto derivado de A.

$$A' = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ es punto de acumulación de } A\}$$

$$A' = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0 : (B(x,r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}$$

Ejemplo:

$A = [3,4) \cup \{5\}$

$\text{int}(A) = (3,4)$

$\bar{A} = [3,4] \cup \{5\}$

$A' = [3,4]$

¡Los límites se calculan sobre puntos de acumulación! Ej. en A no tendría sentido hacer lím cuando $x \to 5$ pues no hay nada alrededor del 5. Pero sí tendría sentido cerca del 3, pues si nos acercamos por la derecha hay muchos puntos que pertenecen a A, pese a que $3 \notin A$.

Propiedad:

A cerrado $\iff A' \subset A$

Teorema: (Bolzano - Weierstrass).
Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto infinito y acotado, entonces $A' \neq \emptyset$.

dem.: (para $\mathbb{R}$).
Suponemos $A \subset \mathbb{R}$ infinito y acotado. En $\mathbb{R}$, A acotado $\Rightarrow$ tiene $\sup(A)$ e $\inf(A)$, es decir, $\exists a \in \mathbb{R}: A \subset [-a, a]$
$\Rightarrow$ $(a > |\max(\inf, \sup)|)$.

Alguno de estos conjuntos, $[-a, 0]$, $[0, a]$ tiene infinitos elementos de A. Lo llamamos $[a_1, b_1]$, con $b_1 - a_1 = a$.
(Porque A tiene infinitos elementos). Repetimos:

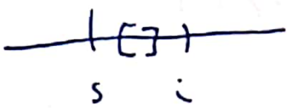
$[a_2, b_2]$, con $b_2 - a_2 = a/2$, infinitos elementos de a.

$\vdots$

$[a_n, b_n]$, $b_n - a_n = \dfrac{a}{2^{n-1}}$, " " " ".

$[a_n, b_n]$ está acotado por el a original $\Rightarrow$ tiene supremo. $\Rightarrow \sup(a_n) \underset{(1)}{=} \inf(a_n) = X$. (1) Sí, porque:

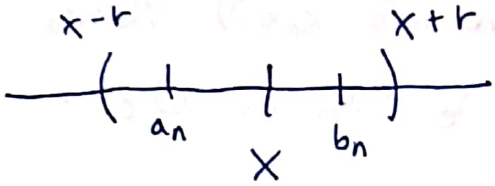
$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_{n-1} \ldots$;



si fueran distintos $\exists n : a_n > s$, $b_n < i$ que es # porque eran inf. y sup. (Por construcción) $\Rightarrow \inf(a_n) = \sup(a_n) = X$
(Sucesiones de a_n y b_n).

Falta ver que $x \in A'$.

Sea $r > 0$. La bola $B(x,r)$ tiene infinitos elementos de A porque:



Tiene que existir a_n y b_n, pues si no esos serían inf. y sup., pero hemos visto que no podía darse.

Así, tiene infinitos elementos (pues los tienen los $[a_n, b_n]$).

Es decir:

$$\exists n \in \mathbb{N} : [a_n, b_n] \subset B(x,r) \Rightarrow (B(x,r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow x \in A' \quad \square$$

(La idea es la misma para $\mathbb{R}^n$, ver los apuntes).

Teorema: (encaje de Cantor)

Sea $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos cerrados y no vacíos de $\mathbb{R}^n$ tales que $Q_{k+1} \subset Q_k$ $(k \in \mathbb{N})$ y Q_1 está acotado. Entonces $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ es cerrado y no vacío.

(Imaginad $Q_n = (-1/n, 1/n)$ excepto que no son cerrados.

$\{0\} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q_n$.

Mejor:

$Q_n = (0, 1/n] \rightarrow \bigcap_{k \in \mathbb{N}} Q_n = \emptyset$ (pues $0 \notin Q_n \; \forall n \in \mathbb{N}$).)

Ejemplos: $\longrightarrow$

<u>demos.:</u>

Que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} Q_k$ es cerrado ya está visto (propiedades de los conjuntos cerrados).

- Si algún Q_k es finito $\Rightarrow$ para cierto $k_0 \in \mathbb{N}$, $\forall k \geq k_0$, $Q_{k+1} = Q_{k_0}$ y la intersección de todos es Q_{k_0}. Vale

- Si todos los Q_k son infinitos. Llamamos $A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} Q_k$.

Construimos: $Q = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$ donde:

$x_1 \in Q_1, x_2 \in Q_2, \dots, x_k \in Q_k, \dots, x_j \not\in Q_i \ \forall i \neq j$

(Como son infinitos podemos hacerlo) ($Q_1 \supset Q_2 \Rightarrow \exists x_1 \mid x_1 \in Q_1$ y $x_2 \in Q_2$ y así sucesivamente).

$\left\{ \begin{array}{l} Q \text{ es infinito por construcción.} \\ Q \text{ está acotado porque } Q \subset Q_1 \text{ que está acotado por hipótesis.} \end{array} \right.$

Por el teorema anterior, $Q' \neq \emptyset. \Rightarrow \exists x \in Q' \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall r > 0: B(x,r) \cap Q \neq \emptyset$ y por (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in Q'_k, \forall k \overset{(2)}{\Rightarrow} x \in A' \Rightarrow A' \neq \emptyset$ y como $A' \subset A \Rightarrow$

$\Rightarrow A \neq \emptyset$ $\square$

(A es cerrado y $A = \overline{A} \Rightarrow A' \subset A$).

(1) Dado k_0, excepto los primeros k_0 elementos de Q, $\Rightarrow \forall i \geq k_0$, $x_i \in Q$ es $x_i \in Q_k$, por tanto, $B(x,r) \cap Q \neq \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow B(x,r)$ tiene infinitos elementos $x_i \Rightarrow B(x,r) \cap Q_k \neq \emptyset$, $B(x,r)$ tiene inf. elemens. de Q_k

(2) Como son todos cerrados, $Q_k = \overline{Q_k} \rightarrow Q_k' \subset Q_k$ y $x \in Q_k' \Rightarrow x \in Q_k \ \forall k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow x \in A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} Q_k$

Teorema de Bolzano (general)

$A \subset \mathbb{R}^n$ es infinito y acotado $\Rightarrow A' \neq \emptyset$

demos.:

Si A es acotado, $\exists a > 0 : B(0, a) \supset A \Rightarrow$

$\Rightarrow A \subset J = \{(x_1, \dots, x_k) : -a \leq x_k \leq a,\ k = 1, \dots, n\}$.

Reescribimos J como: $J = I_1^{(1)} \times \dots \times I_n^{(1)}$, con

$I_k^{(1)} = \{x_k \in \mathbb{R} : -a \leq x_k \leq a\}$ $(k = 1, \dots, n)$.

Dividimos cada $I_k^{(1)}$ en dos intervalos:

$I_{k,1}^{(1)} = \{x_k \in \mathbb{R} : -a \leq x_k \leq 0\}$; $I_{k,2}^{(1)} = \{x_k \in \mathbb{R} : 0 \leq x_k \leq a\}$

Consideramos todos los posibles productos cartesianos de la forma:

$I_{1,\lambda_1}^{(1)} \times I_{2,\lambda_2}^{(1)} \times \dots \times I_{n,\lambda_n}^{(1)}$; $\lambda_i = 0$ ó 1

$(2 \cdot 2 \cdot 2 \dots \cdot 2 = 2^n$ posibles prods. cartesianos$)$.

Como su unión es J que es infinito, alguno de ellos J_2 ha de serlo también:

$$J_2 = I_1^{(2)} \times \dots \times I_n^{(2)}$$

Sabiendo que la longitud de cada intervalo es a en vez de $2a$ (lo hemos reducido a la mitad).

Repitiendo el proceso de dividir cada $I_k^{(2)}$ en dos partes del mismo tamaño y construyendo un $J_3 \subsetneq A$ que sea infinito y así sucesivamente, obtenemos la siguiente sucesión de intervalos:

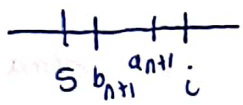
$\{J_m\}_{m\in\mathbb{N}}$: $J_m = I_1^{(m)} \times \dots \times I_n^{(m)}$ con $I_k^{(m)} \subset I_k^{(1)}$ y

de manera que: $I_k^{(m)} = [a_k^{(m)}, b_k^{(m)}] \Rightarrow$

$$\Rightarrow b_k^{(m)} - a_k^{(m)} = \frac{a}{2^{m-2}}, \quad k = 1, \dots, m$$

Así, las sucesiones $\{a_k^{(m)}\}$ creciente $(a_k^{(m+1)} \geq a_k^{(m)})$ y $\{b_k^{(m)}\}$ decrecientes $(b_k^{(m+1)} \leq b_k^{(m)})$ han de tener el mismo ínfimo y supremo (sino llegamos a contradicción por red. al absurdo, pues tendríamos J_{m+1} con $I_k^{(m+1)}$ que es el intervalo dividido en dos (una de las dos partes) y entonces o $a_k^{(m)}$ no sería supremo o no lo sería $b_k^{(m)}$ y eso era nuestra hipótesis $\Rightarrow$ # (absurdo) es el #)

$\Rightarrow$ si tienen que $\sup(a_k^{(m)}) = \inf\{b_k^{(m)}\}$ (pág. 32



$$\Rightarrow \sup\{a_k^{(m)}\} = \inf\{b_k^{(m)}\} = z_k.$$

Veamos que $z = (z_1, \dots, z_n)$ es un punto de acumulación.

Dada $B(z, r)$, tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a}{2^{m-2}} < \frac{r}{2}$. Entonces:

$$z_k - \frac{r}{2} < a_k^{(m)} < z_k < b_k^{(m)} < z_k + \frac{r}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_k^{(m)} = [a_k^{(m)}, b_k^{(m)}] \subset [z_k - r/2, z_k + r/2] \quad (\forall k = 1, \dots, n)$$

y $z_k \in I_k^{(m)} \Rightarrow z \in J_m \subset B(z, r)$

y como J_m es infinito, entonces también ha de serlo la bola que lo contiene y como $\forall m \in \mathbb{N}$, $J_m \subset A \Rightarrow \forall r > 0 : (B(z,r) - \{z\}) \cap A \neq \emptyset$ y z es un punto de acumulación $\Rightarrow A' \neq \emptyset$ $\square$

Definición:

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ llamamos recubrimiento de A a cualquier familia $\{A_i\}_{i \in I}$, $A_i \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\bigcup_{i \in I} A_i \supset A$. Se permiten repeticiones en la familia, $(A_i)_{i \in I}$ (como si fuera una sucesión.

(I puede no ser numerable, o sí, es un conjunto genérico de índices).

Dado un recubrimiento de A, un sub-recubrimiento es una familia $(A_i)_{i \in J}$, con $J \subset I$ tales que: $\bigcup_{i \in J} A_i \supset A$.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto cuando dado cualquier recubrimiento de A formado por conjuntos abiertos, existe un sub-recubrimiento finito:

Si $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ con A_i abierto $\forall i \in I$, entonces si

$\exists J \subset I$ finito : $A \subset \bigcup_{i \in J} A_i \Rightarrow A \subset (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$

decimos que A es compacto.

Ejemplo: $(0,1)\subset\mathbb{R}$ no es compacto.

demos.:

$(0,1)\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (1/n, 1)$ $\left(\forall x\in(0,1), \exists n_0 \mid x\in(1/n_0,1)\ (1/n_0<x)\right)$

Sin embargo, $\nexists n_0$ tal que $(0,1)\not\subset (1/n_0,1)\cup(1/(n_0-1),1)\cup\dots\cup(1/2,1)$

(red abs; $\exists x\in(0,1/n_0): x\in(0,1)$ pero $x\notin \bigcup_{i\in\{1,\dots,n_0\}} A_i$)

Propiedades:

Dado $A\subset\mathbb{R}^n$. Son equivalentes:

1) A es compacto.

2) A es cerrado y acotado.

3) Dado $B\subset A$, $\exists x\in B'\cap A$.

Nota: 1) $\Leftrightarrow$ 2) es muy útil.

(Demostración en las notas).

Nota: Un conjunto convexo es aquel en el que la unión de dos puntos pertenece al conjunto.

Definición:

Un conjunto $A\subset\mathbb{R}^n$ es no conexo cuando existen $X,Y\subset\mathbb{R}^n$ abiertos tales que: ($\mathrm{int}(X)=X$, $\mathrm{int}(Y)=Y$).

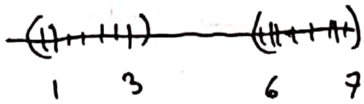
a) $A\cap X\neq\emptyset$; $A\cap Y\neq\emptyset$

b) $(A\cap X)\cap(A\cap Y)=\emptyset$

c) $(A\cap X)\cup(A\cap Y)=A$

(Tiene trozos de aquí y allá).

Ejemplo $\longrightarrow$ $A=(1,3)\cup(6,7)$



$A=X\cup Y$

diagrama Venn

Decimos que A es conexo cuando es no no conexo, es decir, cuando no cumple alguna o varias de a), b) y c).

1.4 Sucesiones en $\mathbb{R}^n$

Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación:

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad k \rightarrow x_k$$

. Se representa por $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ó $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$

Definición:
Decimos que una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es convergente y su límite es $x\in\mathbb{R}^n$ cuando:

$$\forall \varepsilon>0, \ \exists n_0\in\mathbb{N} : \forall k\geq n_0, \ x_k\in B(x,\varepsilon)$$

Definición:
Decimos que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es acotada cuando:

$$\exists M>0 : \forall k\in\mathbb{N}, \ x_k\in B(0,M)$$

Definición:
Una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy cuando:
(siguiente cara).

... es de Cauchy cuando:

$$\forall r > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \|x_k - x_j\| = d(x_k - x_j) < r \ , \ \forall k,j \geq n_0$$

(En $\mathbb{R}^n$ Cauchy $\Leftrightarrow$ convergencia, ¡pero no pasa en todos los conjuntos! En $\mathbb{R}^n$ todo va bien, pero en general no tiene porqué).

> **Nota:**
> acotado $\not\Rightarrow$ convergente,
> contraejemplo: $((-1)^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$

Propiedades:

1) $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente

$\Rightarrow$ es acotada y el límite es único.

demos.:

Convergente $\Rightarrow$ Dado $r=1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \|x_k - x\| < r, \ \forall k \geq n_0$.

Tomamos $\max\{d(x_i, x_j), \ i,j \in \{1, \dots, n_0 - 1\}\}$ (finito). La llamamos p. Entonces: $\forall i,j$: (observar, $p > r$ pues si fuera menor, $i \geq n_0$).

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x) + d(x, x_j) \leq 2p < 2p+2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ la sucesión $\|x_k - x\| \leq 2(p+1)$ y está acotada.

(pues: $r = 2(p+1) \Rightarrow \forall k; \ x, x_k \in B(x, 2(p+1)) \supset B(x, \varepsilon) \quad \forall \varepsilon: \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq n_0 \quad x_n \in B(x, \varepsilon) \rightarrow B(x, 2(p+1))$ acota la sucesión).

Veamos que es único: $x_k \rightarrow x$ y $x_k \rightarrow y$ $\Rightarrow$ (Por la equivalencia de la def.: $x_k \to y \Rightarrow$ $\Rightarrow \{d(x_k, y)\} \to 0$).

$\Rightarrow \ 0 \leq d(x, y) \leq d(x_k, x) + d(x_k, y) \leq 2\varepsilon$

$\forall k \geq \max(n_1, n_2)$ t.q.: $\forall n \geq n_1$, $d(x_k, x) < \varepsilon$ y $\forall n \geq n_2$, $d(x_k, x) < \varepsilon$

$\Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} \ \forall n \geq k, \ d(x, y) \leq \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \ 0 \leq d(x, y) \leq \varepsilon \ \Big| \ x = y \ \square$

Red. abs. Si $d(x, y) \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon = \frac{d(x,y)}{2}: \ 0 \leq \varepsilon < d(x, y)$. Absurdo por $\forall \Rightarrow d(x, y) = 0$ $\Uparrow$

2) Si $\{x_k\}$ es convergente, su límite es único. (Ya hemos probado)

3) Si $\{x_k\}$ converge a x y $\{y_k\} \to y$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow d(x_k, y_k) \longrightarrow d(x,y)$.

<u>demos.:</u>

$\forall r>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : d(x_k, x) < r, \forall k \geq n_0$

$\exists n_1 \in \mathbb{N} : d(y_k, y) < r, \forall k \geq n_1$

Por la des. triangular:

$d(x_k, y_k) \leq d(x_k, x) + d(x,y) + d(y, y_k) \Rightarrow$

$\Rightarrow d(x_k, y_k) - d(x,y) \leq d(x_k, x) + d(y, y_k)$ (1)

Llamamos $n_2 = \max\{n_0, n_1\} \Rightarrow$

$d(x_k, y_k) - d(x,y) < r$

Observar: Si restan $-10000 < 5$ nos vale, ¡no queremos eso, queremos valor absoluto $10000 \cancel{<} 5$.

No hemos acabado:

$d(x,y) \leq d(x, x_k) + d(x_k, y) \leq d(x, x_k) + d(x_k, y_k) + d(y_k, y)$

$\Rightarrow d(x,y) - d(x_k, y_k) \leq d(x, x_k) + d(y_k, y)$ (2)

Juntando (1) y (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow |d(x_k, y_k) - d(x,y)| \leq d(x, x_k) + d(y_k, y) \leq r + r = 2r$ $\square$

4) Dada $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, son equivalentes:

a) $\{x_k\} \longrightarrow x \in \mathbb{R}^n$

b) $\{x_k^{(i)}\} \longrightarrow x^{(i)}$, $\forall i = 1, \dots, n$ donde:

$$x_k = (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n)})$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$$

Nos simplifica todo, pues calcular el límite de un vector se convierte en calcular el límite de cada una de sus coordenadas (pasamos de trabajar de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$, donde ya sabemos cómo hacerlo). Demostrado esto, Cauchy $\Leftrightarrow$ convergente inmediato

<u>demos.:</u>

a) $\Rightarrow$ b)

Por hip. $\forall r > 0: \exists k_0 \in \mathbb{N}: \|x_k - x\| < r \quad \forall k \geq k_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_k^{(i)} - x^{(i)}|^p} < r \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_k^{(i)} - x^{(i)}|^p < r^p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall i, \ |x_k^{(i)} - x^{(i)}|^p < r^p \Rightarrow \forall i, \ |x_k^{(i)} - x^{(i)}| < r$$

$$\Rightarrow \forall r > 0: \exists k_0 \in \mathbb{N}: |x_k^{(i)} - x^{(i)}| < r \quad \forall k \geq k_0 \Rightarrow \{x_k^{(i)}\} \to x^{(i)} \ //$$

b) $\Rightarrow$ a)

$\forall r > 0: \exists k_0^{(i)} \in \mathbb{N}: |x_k^{(i)} - x^{(i)}| < r \quad \forall k \geq 0 \Rightarrow$ Tomamos $k_0 = \max\{k_0^{(i)}\}$

$$\Rightarrow |x_k^{(i)} - x^{(i)}|^p < r^p \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_k^{(i)} - x^{(i)}|^p < n \cdot r^p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_k^{(i)} - x^{(i)}|^p} < r \cdot \sqrt[p]{n} \Rightarrow \|x_k - x| < \underbrace{r \cdot \sqrt[p]{n}}_{= r'} \quad \forall k \geq k_0$$

$$\Rightarrow \forall r' > 0: \exists k_0 \in \mathbb{N}: \|x_k - x\| < r' \quad \forall k \geq k_0 \qquad \square$$

$$\{x_k\} \text{ es convergente } \overset{\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} \{x_k\} \text{ es de Cauchy}$$

$$\Updownarrow \mathbb{R}^n \qquad\qquad\qquad \Updownarrow \mathbb{R}^n$$

$$\{x_k^{(i)}\} \text{ es convergente } \overset{\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} \{x_k^{(i)}\} \text{ es de Cauchy}$$

(esquema para los demos.)

Por tanto:

$$\{x_k\} \text{ convergente } \overset{\mathbb{R}^n}{\Longleftrightarrow} \{x_k\} \text{ de Cauchy}$$

Proposición:

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$:

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset A \text{ t.q. } \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \to x$$

demos.:

$\Rightarrow$)

$x \in \overline{A} \Rightarrow \forall r>0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Para cada r buscamos un término de la sucesión en la bola:

$r = 1 \longrightarrow x_1 \in B(x,1) \cap A$

$r = 1/2 \longrightarrow x_2 \in B(x, 1/2) \cap A$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall r>0 : \exists k_0 \in \mathbb{N} : n \geq k_0, \ \|x_k - x\| \leq r$

(pues para x_k, $\|x_k - x\| < \frac{1}{k}$). Demostrado.

$\Leftarrow)$

Sea $r>0$. Por hipótesis:

$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_0,\ \|x_k - x\| < r \Rightarrow$

$\Rightarrow x_k \in B(x,r)$.

Por hipótesis, $\forall k\ x_k \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall r>0 : \exists x_k \in B(x,r)$ t.q. $B(x,r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \bar{A}$ $\square$

Proposición:

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$:

$x \in A' \iff \exists \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ (tal que $\forall k\ x_k \neq x$) tal que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \to x$

demos.:

Análoga a la anterior.

Notación:

$B(x,r) - \{x\} = B(x,r) \setminus \{x\} = B^*(x,r)$

(Bola reducida centrada en x y de radio r).

Corolario:

A es cerrado $(A = \bar{A}) \iff (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A,\ x_k \to x \Rightarrow x \in A$

demos.:

$\Rightarrow$)

Sea $\{x_k\}_{k\in N} \subset A$, $x_k \to x$. Por la proposición anterior,

$\Rightarrow x \in \bar{A}$ y por hipotesis $\bar{A} = A \Rightarrow x \in A$ //

$\Leftarrow$)

Hay que probar que $A = \bar{A}$. $A \subset \bar{A}$ siempre. Nos interesa $\bar{A} \supset A$.

(por hip.)

Sea $x \in \bar{A} \Rightarrow$ (por hip.) $\exists \{x_k\}_{k\in N} \subset A : x_k \to x \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A$ //

$\square$

Proposición:

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Son equivalentes estas dos propiedades.

1) A es compacto

2) $\forall \{x_k\}_{k\in N} \subset A$, $\exists$ una subsucesión convergente en A.

demos.:

1) $\Rightarrow$ 2)

Sea $\{x_k\}_{k\in N} \subset A$.

(i) Si es finita, $\exists q_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq q_0$, $x_n = x_{n+1} = x$ y esa subsucesión es convergente.

(ii) Si es infinita, en particular es $B \subset A$ infinito. Y como A es compacto $\Rightarrow \exists x \in B' \cap A$. (Siguiente cara).

$x \in B' \Rightarrow \forall r>0: \exists B^*(x,r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$

$x_1 \in B(x,1)$

$x_2 \in B(x, 1/2)$

$\vdots$

$x_k \in B(x, 1/k)$

$\vdots$

$\longrightarrow \{x_k\}$ subsucesión que converge a x. Además, ya hemos visto por hipótesis que $x \in A$. //

2) $\Rightarrow$ 1) (Método 1)

Sea $B \subset A$ infinito. $\exists \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B$, por hipótesis $\exists$ una subsucesión $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergente en A. Sea $x = \lim(x_{k_j})$.

Por hipótesis $\Rightarrow x \in A$.

Por def. límite, $\forall r>0, \exists j_0 : \|x_{k_{j_0}} - x\| < r \overset{(1)}{\Rightarrow} x_{k_{j_0}} \in B^*(x,r)$

$x_{k_{j_0}} \in B(x,r)$ con $B(x,r)$ infinito $\Rightarrow$ $x_{k_{j_0}} \in B^*(x,r)$

(con $B^*(x,r) \cap A \neq \emptyset$) $\Rightarrow x \in B'$. $\Rightarrow$

$\exists x \in B' \cap A \underset{(2)}{\Rightarrow} A$ es compacto $\square$

(2) Teorema ya probado.

(1)
Mejor: como A es infinito, tomamos una subsucesión $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset B$ y convergente en A, t.q. $\forall j: x_{k_j} \neq x$

$\Rightarrow$ proposición ya probada $\Rightarrow x \in B'$ y como era convergente en $A \Rightarrow x \in B' \cap A \Rightarrow A$ es compacto.

(Demostración $2 \Rightarrow 1$ mejor explicada $\longrightarrow$)

$2 \Rightarrow 1$) (Método 2)

• Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si es finito entonces es compacto:

Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento, es decir: $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow$

$\forall x_j \in A,\ x_j \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists\, i_j : x_j \in A_{i_j}$. Tomamos así:

$\underbrace{\{A_{i_j}\}_{\substack{i_j \in I \\ j \in \{1,\dots,n\}}}}_{|\{A_{i_j}\}| = |A| \text{ (finito)}} \subset \{A_i\}_{i \in I}$. Así: $A \subset \bigcup_{\substack{i_j \in I \\ j \in \{1,\dots,n\}}} A_{i_j}$

Pues por construcción, $\forall x_j \in A$ $j \in \{1,\dots,n\}$, $x_j \in A_{i_j}$ $\Rightarrow$

$\exists$ un subrecubrimiento finito que contiene a $A \Rightarrow A$

es compacto $(\underbrace{\text{finito} \Rightarrow \text{compacto}}_{\text{además tenemos esto}})$ □

• Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ infinito. Tomamos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ y por hipótesis tomamos la siguiente subsucesión convergente: $(x_{n_j})_{n_j \in \mathbb{N}}$ que converge a $x \in A$. Usando esto y una proposición ya probada $\Rightarrow A$ es cerrado $\Rightarrow A = \bar{A}$. Veamos que es acotado por red. abs. Si no lo fuera $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$, $\exists a_k \in A$ t.q. $a_k > k$. Tomamos $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Esta sucesión tiene que todas sus subsucesiones son no acotadas $\Rightarrow$ no son convergentes (convergente $\Rightarrow$ acotada; no acotada $\Rightarrow$ no conv. pero acotada $\not\Rightarrow$ conv). Eso es contradictorio con la hipótesis, pues siempre existe al menos una subsucesión convergente $\Rightarrow$

$\Rightarrow A$ es acotado. Como A es cerrado y acotado

$\Rightarrow A$ es compacto □

Resultados de sucesiones:

Caracterización de ciertos conjuntos:

1) $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ t.q. $x_k \longrightarrow x$

2) $A = \overline{A} \Longleftrightarrow (\forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ t.q. $x_k \to x \Rightarrow x \in A)$

3) $x \in A' \Longleftrightarrow \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ t.q. $x_k \to x$ y $x_k \neq x$.

4) A compacto $\Longleftrightarrow \forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$, $\exists (x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
t.q. $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow x \in A$ (convergente en A)