Cálculo diferencial e integral 2/Seminario 5

Nombre:

P1) *Si* $z = \ln(e^x + e^y)$*, mostrar que* $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$ *y que* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$

P2) *Si* $z = \dfrac{y}{f(x^2 - y^2)}$*, mostrar que* $\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$ *cualquiera que sea la función derivable* f*.*

P3) *Se considera la función* $f(x, y) = \varphi(x \cdot \varphi(y))$*, donde* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función que cumple* $\varphi(1) = 1$*,* $\varphi'(1) = \alpha$*,* $\varphi''(1) = \beta$*. Calcular* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1)$ *y* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1)$*.*

P4) *Dada la función* $f(x, y) = e^{ax+by} g(x, y)$*, donde* $g_x(x, y) = g_y(x, y) = 1$*, hallar los valores de las constantes* a *y* b *tales que* $f_x(x, y) = f_y(x, y)$*,* $1 + f_{xx}(x, y) = a + f_{xy}(x, y)$*.*

P5) *Sea* $f(x, y) = xye^{x/y}$*. Hallar el valor de la constante* n *tal que satisfaga*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = e^{x/y}\left(n - \frac{x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\right).$$

P6) *Sean* $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dos funciones homogéneas de grado* r *y* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función homogénea de grado* s*. ¿Es homogénea la función* $z = F(f(x, y), g(x, y))$*? ¿Cuál es su grado?*

P7) *a) Si* $F \in C^{(2)}(\mathbb{R})$*, demostrar que la función* $z = F[x + g(y)]$ *verifica la relación*

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

b) Si $\phi \in C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$*, comprobar que*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial u}{\partial y} + \beta z \frac{\partial u}{\partial z} = nu, \text{ donde } u = x^n \phi(y/x^\alpha, z/x^\beta).$$

P8) *Si* $w = F(xy, \sqrt{x^2 + z^2})$*, hallar* $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}$*.*

P9) *Comprobar que la suma de los cuadrados de las intersecciones con los ejes coordenados de cualquier plano tangente a la superficie* $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ *es constante.*

P10) *Expresar el polinomio* $p(x, y) = x^3 + y^2 + xy^2$ *en potencias de* $x - 1$ *e* $y - 2$*.*