Espacio cociente

1.– Se considera el subespacio de $\mathbb{R}^3$, $W = \langle(1,-1,0),(0,-1,1)\rangle$. ¿Cuáles de los siguientes elementos de $\mathbb{R}^3/W$ son distintos?

$$\overline{(1,0,0)},\ \overline{(0,1,0)},\ \overline{(0,0,1)},\ \overline{(1,1,1)},\ \overline{(1,-1,1)}, \overline{(2,1,0)}.$$

2.– Calcular el espacio vectorial cociente del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ respecto al subespacio W, siendo:

a) $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1 + x_2 = x_3 - x_4 = 0\}$.

b) $W = \langle(1,1,1,1),(1,2,3,4),(1,2,5,6)\rangle$.

c) $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1 + x_2 = x_1 - x_2 = x_3 + x_4 = x_3 - x_4\}$.

d) $W = \langle(1,2,3,4),(2,2,2,6),(0,2,4,4)\rangle$.

3.– Dados los subespacios vectoriales $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$ definidos por

$$W_1 = \{(x_1 + 5x_2, x_2 + 3x_3, -x_4, x_4) \mid x_1,x_2,x_3,x_4 \in \mathbb{R}\} \quad \text{y}$$
$$W_2 = \langle(0,0,1,0),(6,4,0,0)\rangle .$$

Calcular una base y la dimensión de cada uno de los siguientes espacios cociente:

$$\mathbb{R}^4/(W_1 \cap W_2), \quad \mathbb{R}^4/(W_1 + W_2) \quad \mathbb{R}^4/W_1, \quad (W_1 + W_2)/(W_1 \cap W_2).$$

4.– Sean V un espacio vectorial, W_1, W_2 dos subespacios vectoriales de V y

$$\varphi\colon V \longrightarrow V/W_1 \times V/W_2 \qquad \text{definida por} \quad \varphi(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} + W_1, \mathbf{v} + W_2)$$

1. Comprobar que φ es lineal. Hallar $\ker\varphi$
2. Demostrar que φ es un isomorfismo si y solo si $V = W_1 \oplus W_2$.

5.– Sea $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0,\ x - y + z - t = 0\}$. Analizar si los siguientes conjuntos son o no son bases de $\mathbb{R}^4/W$:

i) $\{\overline{(1,0,0,0)}, \overline{(0,1,0,0)}\}$.

ii) $\{\overline{(1,0,0,0)}, \overline{(0,0,1,0)}\}$.

iii) $\{\overline{(1,1,1,1)}, \overline{(1,1,-1,1)}, \overline{(1,1,1,-1)}\}$.

6.– Dar una base de $\mathbb{R}^4/W$ en cada uno de los siguientes casos

a) $W = \langle(1,1,1,1), (1,-1,1,1)\rangle$.

b) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, y+z+t=0,\; y+2z+3t=0\}$.

c) $W = \langle(1,1,1,1), (0,1,0,1), (1,-1,1,-1)\rangle$.

d) $W = \{(x+y, x-y, y, x) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$.

Calcular, en cada caso, las coordenadas de $[(1,0,1,0)]$ en las bases elegidas.

7.– Sea $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x+y = z+t = 0\}$. Calcular una base del espacio cociente $\mathbb{R}^4/W$ y encontrar las coordenadas de los vectores $\overline{(2,-2,0,0)}$ y $\overline{(3,4,0,0)}$ en dicha base.

8.– Sea V un espacio vectorial, W un subespacio de V y $\mathbf{v} \in V$. Demostrar que si $\mathbf{v} \notin W$, existe una base de V/W en la que las coordenadas de $\overline{\mathbf{v}}$ en dicha base son $(1,0,\ldots,0)$

9.– Sea W el subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{K})$ definido por

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{K}) \,|\, a_1+b_1=0, a_2+b_2=0, c_1+c_2=0 \right\}.$$

Encontrar una base de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{K})/W$ y las coordenadas del vector $\overline{A}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, respecto a dicha base.

10.– Sea el subespacio de $\mathbb{R}^4$, $W = \langle(1,1,1,0), (0,1,1,1)\rangle$ ¿Cuáles de las siguientes aplicaciones $\varphi\colon \mathbb{R}^4/W \longrightarrow \mathbb{R}^4/W$, definidas por:

i) $\overline{(x,y,z,t)} \longmapsto \overline{(t,x,y,z)}$,

ii) $\overline{(x,y,z,t)} \longmapsto \overline{(x+t, 3x-y, 3x-z, x-2t)}$,

iii) $\overline{(x,y,z,t)} \longmapsto \overline{(x^2, y^2, z^2, t^2)}$,

están bien definidas?

11.– Comprobar si para los siguientes casos se satisfacen las condiciones para que $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ induzca un endomorfismo $\overline{f}$ de $\mathbb{R}^4/W$:

a) $f(x,y,z,t) = (x+y, y+z, z+t, t+x)$ y $W = \langle (1,1,1,1) \rangle$,

b) $f(x,y,z,t) = (x+y+z, y+z+t, z+t+x, t+x+y)$ y $W = \langle (1,0,1,0), (0,1,0,1) \rangle$,

c) $f(x,y,z,t) = (x-y, y-z, z-t, t-x)$ y $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0\}$.

En caso afirmativo, hallar una base de V tal que la matriz asociada f sea de la forma $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.