Problemas T6

$\boxed{1}$

Identificar las siguientes cuádricas en $\mathbb{R}^2$:

i) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 8 = 0$

Suponemos un espacio afín no euclídeo: ($\longrightarrow$ Mal operado en este contexto)

$$Q(x,y) = x^2 + 4xy + 4y^2 = (x, y)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & \cancel{1}\ 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

Diagonalizamos la matriz:

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \cancel{1}\ 4\end{matrix}}_{A}\ \middle|\ \underbrace{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}}_{I_2}\right) \xrightarrow[\text{(En A)}]{F_2' = F_2 - 2F_1} \left(\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & \cancel{-3}\ 0\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right) \xrightarrow[\text{(A ambos)}]{C_2' = C_2 - 2C_1} \left(\underbrace{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}}_{D}\ \middle|\ \underbrace{\begin{matrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{matrix}}_{P}\right)$$

$$\cancel{\xrightarrow[\text{(En A)}]{F_1' = F_1 - F_2} \left(\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{matrix}\right) \xrightarrow[\text{(En ambos)}]{C_1' = C_1 - C_2} \left(\begin{matrix}1 & 0\\ 3 & -3\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{matrix}\right)}$$

Así:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} \Rightarrow Q(x', y') = (x')^2 + 9\cancel{(y')^2}\ 0$$

$$L(x', y') = -6x - 12y = -6\,(x' - 2y') - 12\,(y') =$$
$$= -6x'$$

$$\Rightarrow \text{La cuádrica es: } (x')^2 + 9\cancel{(y')^2}\ 0 - 6(x') + 8 = 0$$

Completamos cuadrados:

$$(x')^2 + 9\cancel{(y')^2} - 6(x') + 8 = 0$$

- $(x')^2 - 6(x') = (x')^2 - 2 \cdot 3(x') = ((x') - 3)^2 - 9$

$$\Rightarrow (x'-3)^2 + 9\cancel{(y')^2} - 1 = 0$$

Ahora:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \Rightarrow (x'')^2 + 9\cancel{(x'')^2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(x'')^2}{1} + \cancel{\frac{(y'')^2}{(1/3)^2}} = 1 \longrightarrow \text{Es una } \cancel{\text{elipse}} \text{ dos rectas paralelas}}$$

Con cambio de variable:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x'' - 2y'' + 3 \\ y = \quad + y'' \end{cases}}$$

✓

Suponemos ahora un espacio afín euclídeo:

$$f(x,y) = Q(x,y) + L(x,y) + c =$$
$$= x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 8 = 0$$

Primero normalizamos la parte cuadrática $Q(x,y)$. Definimos la forma bilineal fb asociada a $Q(x,y)$ mediante la matriz A. Definimos el endomorfismo autoadjunto h en base a A:

$$M_{\beta c}(h) = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Como βc es ortonormal para el producto escalar estándar y A es simétrica $\Rightarrow \exists$ una base formada por vectores propios que diagonaliza A. La buscamos:

- $$P_h(x) = |x I_n - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -2 & x-4 \end{vmatrix} =$$
  $$= x^2 - 5x + 4 - 4 = x(x-5) \rightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 5$$

- $V(\lambda_1) = \{v \in \mathbb{R}^2 : A \cdot v = \bar{0}\} \Rightarrow$
  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ \cancel{2x + 4y = 0} \end{cases} \text{(proporcionales, } \cdot 2) \quad \Rightarrow x = -2y$$
  Tomamos $V_1 = (-2, 1)$

- $V(\lambda_2) = \{v \in \mathbb{R}^2 : A \cdot V = 5 \cdot v\} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ 5y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 5x \\ 2x + 4y = 5y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{-4x + 2y = 0} \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2x$$

(proporcionales, $\cdot(-2)$)

Tomamos $v_2 = (1, 2)$

Así, la base $\{v_1, v_2\} = \{(-2, 1), (1, 2)\}$ diagonaliza la matriz, vamos a asegurar que es ortonormal para el producto escalar estándar:

$$v_1 \cdot v_1 = (-2, 1) \cdot (-2, 1) = 4 + 1 = 5$$

$$v_1 \cdot v_2 = (-2, 1) \cdot (1, 2) = -2 + 2 = 0$$

$$v_2 \cdot v_2 = (1, 2) \cdot (1, 2) = 1 + 4 = 5$$

Tomamos:

$$w_1 = \frac{v_1}{\sqrt{5}} \quad (w_1 \cdot w_1 = 1)$$

$$w_2 = \frac{v_2}{\sqrt{5}} \quad (w_2 \cdot w_2 = 1)$$

Así, la base $\{w_2, w_1\}$ es ortonormal para el prod. escalar y diagonaliza la matriz:

$M_{\tilde{\beta}}(h) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $\tilde{\beta} = \{w_2, w_1\}$ y la matriz de paso es:

$$\underset{(1)}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

<u>Nota:</u> (pensando si $P_{\beta \to \tilde{\beta}}$ o $P_{\tilde{\beta} \to \beta}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Observamos que pasa de base $\tilde{\beta} \to$ a β; por eso (1), es $\underline{\underline{P_{\tilde{\beta} \to \beta}}}$

Por tanto:

$$Q(x', y') = 5(x')^2$$

Y la parte lineal se convierte en:

$$L(x', y') = -6x - 12y = -6\left(\frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2y'}{\sqrt{5}}\right) - 12\left(\frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= -6\sqrt{5}(x')$$

$$\Rightarrow C(x', y') = 5(x')^2 - 6\sqrt{5}(x') + 8 = 0$$

Completamos el cuadrado:

$$5\left[(x')^2 - \frac{6(x')}{\sqrt{5}}\right] = 5\left[\left(x' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{9}{5}\right] =$$

$$= 5\left(x' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 9$$

$$\Rightarrow C(x', y') = 5\left(x' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = 0$$

Tomamos:

$$x' = x'' + \frac{3}{\sqrt{5}} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{C(x', y') = 5(x'')^2 = 1, \text{ que representa dos rectas paralelas.}}$

El cambio correspondiente es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \right] =$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 6/5 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{P \text{ ortogonal}} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

(Es traslación y P ortogonal $\Rightarrow$ isometría ✓)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \dfrac{x''}{\sqrt{5}} - \dfrac{2y''}{\sqrt{5}} + 3/5 \\ y = \dfrac{2x''}{\sqrt{5}} + \dfrac{y''}{\sqrt{5}} + 6/5 \end{cases}}$$

vii) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2z^2 + 2\sqrt{2}\,x - 2\sqrt{2}\,y + 8z - 8 = 0$

$(+x^2 + y^2 - z^2 \cancel{+x} \cancel{+y} + \cancel{z} =$ cte? $\rightarrow$ parece hiperboloide de 1 hoja, ¿no como? si $c>0$, si $c<0$ hiperboloide de 2 hojas y si $c=0$, un punto).

(Espacio afín no euclídeo).

$C(x) = Q(x) + L(x) + c = 0$

Definimos una f. bi. sim. t.q. $f((x,y,z),(x,y,z)) = Q(x)$. La diagonalizamos:

Comprobación.

$$M_{\beta c}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad ((x,y,z)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x,y,z)\begin{pmatrix} 3x+y \\ x+3y \\ -2z \end{pmatrix} =$$
$$= (3x^2 + xy + xy + 3y^2 - 2z^2 \ ✓)$$

Método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2' = F_2 - \frac{1}{3}F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_2' = C_2 - 1/3 C_1]{}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 8/3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad D = {}^tP \cdot M_{\beta c}(f) \cdot P$$

with D the left block and P the right block.

$(\Rightarrow P_{\tilde{\beta}\,\beta c}$ pues $D = M_{\tilde{\beta}}(f))$

Comprobamos para asegurar y en efecto:

$$M_{\mathcal{B}c}(f)\cdot P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$tp\cdot(M_{\mathcal{B}c}(f)\cdot P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = D$$

Tomamos:

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_1\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de manera que: $Q(x',y',z') = 3(x')^2 + \frac{8}{3}(y')^2 - 2(z')^2$

Veamos como queda la parte lineal:

$$\begin{cases} x = x' - y'/3 \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \Rightarrow L((x',y',z')) = 2\sqrt{2}\,x - 2\sqrt{2}\,y + 8z =$$

$$= 2\sqrt{2}\,x' - \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2}\,y' - 2\sqrt{2}\,y' + 8z' = 2\sqrt{2}\,x' - \frac{4}{3}\sqrt{2}\,y' + 8z'$$

Completamos el cuadrado:

- $3\left[\left(x' + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\right] - \frac{2}{3} \longrightarrow x'' = x' + \sqrt{2}/3$, $x' = x'' - \sqrt{2}/3$

- $\frac{8}{3}\left[(y')^2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,y'\right] = \frac{8}{3}\left[\left(y' - \frac{1}{4}\sqrt{2}\right)^2\right] - 2/3 \rightarrow y' = y'' + 1/4$

- $-2\left[(z')^2 - 4z'\right] = -2\,(z'-2)^2 + 8 \longrightarrow z' = z'' + 2$

Con estos nuevos cambios:

$$C(x'',y'',z'') = 3(x'')^2 + \frac{8}{3}(y'')^2 - 2(z'')^2 \overbrace{- \frac{2}{3} - \frac{2}{3}}^{-4/3} \cancel{+8-8} = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/3 \\ 1/4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}\right) \Rightarrow \frac{9}{4}(x'')^2 + 2(y'')^2 - \frac{3}{2}(z'')^2 = 1$$

Y con el cambio:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} \Rightarrow C(x''', y''', z''') \Rightarrow$$

$$\boxed{C(x''', y''', z''') = (x''')^2 + (y''')^2 - (z''')^2 = 1}$$

$\Rightarrow$ Es un hiperboloide de una hoja.

Veamos cuál es el nuevo sistema de referencia:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/3 \\ 1/4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1+4\sqrt{2}}{12} \\ 1/4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1+4\sqrt{2}}{12} \\ 1/4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 & -\sqrt{2}/3 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}$$

$$\left(M_{\beta c}(\bar{x}) = M_{\beta c}(O_{\tilde{R}}) + P_{\tilde{\beta}, \beta c} \cdot M_{\tilde{\beta}}(\bar{x}) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{R} = \left(\left(-\frac{1+4\sqrt{2}}{12}, 1/4, 2\right) + \{(3/2, 0, 0), (-\sqrt{2}/3, \sqrt{2}, 0), (0, 0, \sqrt{3}/2)\} \right)}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 3/2 & -\sqrt{2}/3 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = (3/2, 0, 0)_{\beta c} = (1, 0, 0)_{\tilde{\beta}} \right)$$

Repetimos ahora en el espacio afín euclídeo.

(Espacio afín euclídeo)

... Buscamos una base ortonormal formada por vectores propios que diagonalice $M_{\mathcal{B}_c}(8)$.

$$P_x(h) = \det|xI_n - A| = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 0 \\ -1 & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & x+2 \end{vmatrix} = (x+2)\left[\underbrace{(x-3)^2-1}_{\text{Bastaba fatorizar esto de aquí.}}\right]$$

$$= (x+2)(x^2-6x+8) = x^3 - 6x^2 + 8x + 2x^2 - 12x + 16 =$$

$$= x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = (x+2)(x-4)(x-2)$$

$$V(-2) = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = -2v\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + y = -2x \\ x + 3y = -2y \\ \cancel{0 \quad 0 \quad -2z = -2z} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 5x + y = 0 \\ x + 5y = 0 \end{matrix} \Rightarrow 6(x+y) = 0 \Rightarrow x = -y$$

$$\Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow V(-2) = \{(0,0,1)\}$$

$$(e_3 \cdot e_3 = -2 \longrightarrow W_1 = (0,0,1/\sqrt{2}))$$

$$V(2) = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = 2v\} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{3x + y = 2x} \\ \cancel{x + 3y = 2y} \\ -2z = 2z \Rightarrow z = 0 \end{cases} \quad x + y = 0 \Rightarrow V(2) = \{\lambda(1,-1,0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$V_2 = (1,-1,0) \longrightarrow W_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$$

$$\cancel{\left((1,-1,0) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,-1,0)\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 6\right)}$$

$$\cancel{\Rightarrow W_2 = (1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 0)}$$

$$V(4) = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = 4v\} \Rightarrow \dots \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ -6z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 0,\ x = y \longrightarrow V_3 = (1,1,0) \Rightarrow W_3 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$$

Nota:

Dada g forma bi. sim. con $M_{\beta_c}(g) = A$, definimos un homomorfismo autoadjunto h con $M_{\beta_c}(h) = A$. Diagonalizamos A para h respecto al prod. escalar estándar y de manera que P sea ortonormal (base formada por vectores propios ortonormales) para que $D = P^{-1}AP = {}^tPAP$ y así nos diagonalice también g.

$$\beta_1 = \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (0,0,1)\}$$

De manera que:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (casualidad $P = P^{-1} = {}^tP$)

$$D = (P^{-1} = {}^tP) \cdot A \quad P$$ (P ortogonal y simétrica).

(Observar: $\beta_1' = \{(1,1,0), (1,-1,0), (0,0,1)\}$ diagonaliza la matriz, ¡pero no nos da P ortonormal!).

Apuntes año pasado

(Nota:
$\exists \beta$ formada por vs propios ortonormal, si $M_{\beta}(h)$ es simétrica respecto de una base ortonormal para el · escalar (tomamos ·st porque lo va a cumplir))

En nuestro caso:

$$Q(x', y', z') = 4(x')^2 + 2(y')^2 - 2(z')^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l} x = x'/\sqrt{2} + y'/\sqrt{2} \\ y = x'/\sqrt{2} - y'/\sqrt{2} \\ z = z' \end{array} \right)$$

Trabajamos la parte lineal:

$$L(x',y',z') = 2\sqrt{2}\,x - 2\sqrt{2}\,y + 8z = \cancel{2x'} + 2y' - \cancel{2x'} + 2y' + 8z'$$

$$= 4y' + 8z'$$

Completamos el cuadrado.

- $2(y'^2 + 2y') = 2(y'+1)^2 - 2$
- $-2(z'^2 - 4z') = -2(z'-2)^2 + 8$

Tomamos:

$$\begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' - 1 \\ z' = z'' + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(x'',y'',z'') = (x'')^2 + 2(y'')^2 - 2(z'')^2 - 2 + 8 - \cancel{8}^{0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{C(x'',y'',z'') = \frac{1}{2}(x'')^2 + (y'')^2 - (z'')^2 = 1 \Rightarrow \text{Hiperboloide de una hoja.}}$$

El nuevo sistema de referencia viene dado por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{ortonormal}}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

es isometría ✓✓

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{R} = \left((0, 1/\sqrt{2}, 2), \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (0,0,1)\}\right)}$$

Vi) (Modificado)

$$\frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + x + 4y + 3z - 1 = 0$$

(Espacio afín no euclídeo) [Dos cuadrados 1 libre, parece paraboloide elíptico] → ¡No es lo que parece!

Normalizamos la parte cuadrática diagonalizando la forma bilineal simétrica asociada:

$$M_{\beta_c}(g) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A}\left|\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_n}\right.\right) \xrightarrow[F_2' = F_2 - F_1]{} \left(\begin{matrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right.\right) \xrightarrow{C_2' = C_2 - C_1}$$

$$\rightarrow \left(\underbrace{\begin{matrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{D}\left|\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{P}\right.\right) \Rightarrow \underbrace{D}_{\text{trabaja nuevos v}} = {}^t P \underbrace{A}_{\text{trabaja viejos v}} P \text{ , comprobamos:}$$

P pasa nuevos a viejos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - y' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

La ecuación resulta:

$$p(x', y', z') = \frac{1}{2}(x')^2 + x' - y' + 4y' + 3z' - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{(x'+1)^2 - 1/2}_{\text{a lápiz}} + 3y' + 3z' - 1 = 0$$

Tomamos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x'', y'', z'') = \frac{1}{2}(x'')^2 + 3(y'') + 3(z'') - \frac{3}{2} = 0$$

Para sacarla pensar en fila por columna.

¿Qué fila al multiplicar da el cambio que queremos?

$y'' = a x'' + b y'' + z'' \cdot c$

$\rightarrow (a, b, c)$ 2ª fila

Tomamos:

$$\begin{cases} x''' = x'' \\ y''' = 3y'' + 3z'' \\ z''' = z'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = x''' \\ y'' = \frac{1}{3}y''' - z''' \\ z'' = z''' \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}$$

Así:

$$P(x''', y''', z''') = \frac{1}{2}(x''')^2 + (y''') - \frac{3}{2} = 0$$

Tomamos:

$$\begin{cases} x^{IV} = x''' \\ y^{IV} = +\frac{3}{2} - y''' = -(y''' - 3/2) \\ z^{IV} = z''' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''' = x^{IV} \\ y''' = \frac{3}{2} - y^{IV} \\ z''' = z^{IV} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{por el motivo de antes}} \begin{pmatrix} x^{IV} \\ y^{IV} \\ z^{IV} \end{pmatrix}$$

Así:

$$P(x^{IV}, y^{IV}, z^{IV}) = \frac{1}{2}(x^{IV})^2 - (y^{IV}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(x^{IV})^2 = (y^{IV})$$

Tomamos:

$$\begin{pmatrix} x^{IV} \\ y^{IV} \\ z^{IV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{V} \\ y^{V} \\ z^{V} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{P(x^{IV}, y^{IV}, z^{IV}) = (x^{V})^2 = (y^{V})}$$

Es un $\boxed{\text{cilindro parabólico}}$.

El sistema de referencia viene dado por:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x^{iv} \\ y^{iv} \\ z^{iv} \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1 \\ 0 & -1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{v} \\ y^{v} \\ z^{v} \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1/3 & 1 \\ 0 & -1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{v} \\ y^{v} \\ z^{v} \end{pmatrix}} \qquad \left(M_{\beta_c}(x) = M_{\beta_c}(O_{\tilde{R}}) + P_{\tilde{\beta}}^{\beta_c} \cdot M_{\tilde{\beta}}(x)\right)$$

$$\boxed{\begin{cases} x = -3/2 + 2x^{v} + 1/3\, y^{v} + 0 \\ y = 1/2 + 0 - 1/3\, y^{v} - z^{v} \\ z = 0 + 0 + 0 + z^{v} \end{cases}}$$

Y el nuevo sistema es:

$$\boxed{\tilde{R} = \left((-3/2, 1/2, 0), \{(2,0,0), (1/3, -1/3, 0), (1,-1,1)\} \right)}$$

- Punto por la fórmula.
- Los vectores porque sabiendo que $P_{\tilde{\beta}}^{\beta_c}$, $V_1 = (1,0,0)_{\tilde{\beta}}$ es $P \cdot V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_1 = (2,0,0)_{\tilde{\beta}}$ y análogo para los V_i $(i = 2,3)$ del resto de la base.

(Espacio afín euclídeo)

Tenemos la forma bi. sim. $M_{\beta_c}(g) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Definimos un endomorfismo autoadjunto h tal que $M_{\beta_c}(h) = M_{\beta_c}(g)$. Observamos que $M_{\beta_c}(h)$ es simétrica respecto a una base ortonormal para el producto escalar estándar en $\mathbb{R}^3$. Por tanto, sabemos que existe una base ortonormal para dicho producto en $\mathbb{R}^3$ que diagonaliza la matriz. La buscamos:

$$P_x(h) = \begin{vmatrix} x-1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & x-1/2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (-\cancel{1})^{\cancel{3+3}\,1} \cdot x \cdot \left(x^2 - x + 1/4 - 1/4\right) =$$

$$= x^2 \cdot (x-1)$$

Buscamos los vectores propios.

$V(1) = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = v\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = x \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = y \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x-y) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow V(1) = \{(x, x, z) \in \mathbb{R}^3\} = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$

Tomamos $\underline{v_1 = (1,1,0)}$. Buscamos $v_2 \in V(1) \cap \langle v_1 \rangle^\perp \Rightarrow$

$\Rightarrow (1,1,0) \cdot (x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y$

$\Rightarrow \underline{(0,0,1) = v_2}$ $\quad (x = -y$ y $x = y \Rightarrow x = y = 0,\ z = 1$

$V(0) = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = 0\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x/2 + y/2 = 0 \\ x/2 + y/2 = 0 \\ 0 \quad 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{(1,-1,0) = v_3}$

Normalizamos los vectores para que tengan norma 1 sobre el producto escalar:

$$W_1 = V_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad W_2 = V_2 \cdot \frac{1}{1} \qquad W_3 = V_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\text{Por construcción: } \begin{array}{l} w_1 \cdot w_1 = 1 \\ w_1 \cdot w_2 = 0 \\ w_1 \cdot w_3 = 0 \\ w_2 \cdot w_2 = 1 \\ w_2 \cdot w_3 = 0 \\ w_3 \cdot w_3 = 1 \end{array}\right)$$

Así, $\tilde{\beta} = \{w_1, w_2, w_3\} = \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0,0,1), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)\}$

Es una base ortonormal para el prod. escalar estándar, De manera que si:

$$P_{\tilde{\beta}}^{\,bc} = P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Mismo valor propio)

Entonces:

$$D = P^{-1}AP = {}^{t}PAP \quad \text{with} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0)$$

Así tomamos el cambio:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ z = y' \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Y la ecuación es:

$$\underbrace{(x')^2}_{Q(x')\text{ diagonalizada}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' + \frac{4}{\sqrt{2}}x' - \frac{4}{\sqrt{2}}z' + 3y'}_{\text{Nueva parte lineal } L(x',y',z')} \underbrace{- 1}_{\text{cte}} = 0$$

Completamos los posibles cuadrados y tomamos el cambio de variable correspondiente:

$$(x')^2 + \frac{5}{\sqrt{2}}x' = \left(x' + \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{25}{8} \Rightarrow$$

Ec.
$$\Rightarrow \left(x' + \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 3y' - \frac{3}{\sqrt{2}}z' - \frac{33}{8} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x' = -\frac{5}{2\sqrt{2}} x'' \\ y' = y'' \\ z' = z'' \end{cases}$$

Ec.
$$\Rightarrow (x'')^2 + 3y'' - \frac{3}{\sqrt{2}}z'' - \frac{33}{8} = 0$$

Ahora vamos a simplificar la parte lineal pero con una matriz P ortogonal, para ello vamos a tener que hacer ciertos cálculos sabiendo que P ortogonal $(P^{-1} = {}^tP) \Rightarrow$ sus columnas (las de P, no las de P^{-1} o ${}^tP$) forman una base ortonormal para el producto escalar estándar.

$$\begin{cases} x''' = x'' \\ y''' = \alpha\left(3y'' - \frac{3}{\sqrt{2}}z''\right) \\ z''' = ax'' + by'' + cz'' \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

Nosotros queremos variables viejas en función de las nuevas, a esa le hemos llamado P.

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}$$ operamos (siguiente cara).

$$P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3\alpha & -\frac{3\alpha}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 3\alpha & b \\ 0 & -\frac{3\alpha}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix}$$

w_i es la i-ésima columna de P. Como $\{w_i\}_{i\in I}$ forman una base para el prod. escalar estándar: (eso es hipótesis).

$$w_1 \cdot w_1 = 1+0+0 = 1$$

$$w_1 \cdot w_2 = 0+0+0 = 0$$

tiene que ser por hipótesis

$$w_1 \cdot w_3 = a+0+0 = a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$w_2 \cdot w_2 = 9\alpha^2 + \frac{9\alpha^2}{2} \overset{hip}{=} 1 \Rightarrow \frac{27\alpha^2}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{27}}$$

Tomamos $\alpha = +\sqrt{\frac{2}{27}}$

$$w_2 \cdot w_3 = 0 \Rightarrow 3\alpha b - \frac{3\alpha}{\sqrt{2}} c = 0 \Rightarrow 3\alpha\left(b - \frac{c}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\overset{\alpha \neq 0}{\Rightarrow} b = \frac{c}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}\cdot b = c \quad (\Rightarrow 2b^2 = c^2)$$

$$w_3 \cdot w_3 = 1 \Rightarrow \cancel{a^2}^{0} + b^2 + \cancel{c^2}^{2b^2} = 1 \Rightarrow 3b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Tomamos $b = +\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow c = \sqrt{2/3}$

Así obtenemos P ortogonal tal que:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{27}} & \sqrt{2/3} \end{pmatrix}$$

La ecuación que resulta es:

$$(x''')^2 + (y''')\cdot\frac{1}{\alpha} - \frac{33}{8} = 0 \Rightarrow$$

Dividimos para que el siguiente cambio tenga ortonormal P.

$$\Rightarrow (x''')^2 \cdot \alpha + (y''') - \frac{33\alpha}{8} = 0$$

Tomemos este último cambio:

$$\begin{cases} x''' = x^{IV} \\ y''' = -y^{IV} + \frac{33\alpha}{8} \\ z''' = z^{IV} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{33}{8}\cdot\sqrt{\frac{2}{27}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{IV} \\ y^{IV} \\ z^{IV} \end{pmatrix}$$

Así, la ecuación final:

$$(x^{IV})^2\cdot\alpha - (y^{IV}) = 0 \Rightarrow \boxed{(x^{IV})^2\cdot\sqrt{\frac{2}{27}} = (y^{IV})}$$

$\boxed{\text{(Cilindro parabólico)}}$

Calculemos el nuevo sistema de referencia:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} \frac{-5}{2\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} -5/4 \\ -5/4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -3/\sqrt{27} & \sqrt{2/3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} -5/4 \\ -5/4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -3/\sqrt{48} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{48} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{33}{8}\sqrt{\frac{2}{27}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{IV} \\ y^{IV} \\ z^{IV} \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} -5/4 \\ -5/4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11\sqrt{2}/32 \\ 11\sqrt{2}/32 \\ 11/12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{48} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -3/\sqrt{48} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{IV} \\ y^{IV} \\ z^{IV} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= \begin{pmatrix} -\frac{40+11\sqrt{2}}{32} \\ \frac{-40+11\sqrt{2}}{32} \\ 11/12 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{48} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -3/\sqrt{48} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}_{\text{ortogonal}}\begin{pmatrix} x^{IV} \\ y^{IV} \\ z^{IV} \end{pmatrix}}$$

$$\left(M_{\beta_C}(x,y,z) = M_{\beta_C}(O\tilde{R}) + P_{\tilde{\beta}\to\beta_C} \cdot M_{\tilde{\beta}}(x,y,z) \right)$$

$$\boxed{\begin{cases} x = -\dfrac{40+11\sqrt{2}}{32} + \dfrac{x^{IV}}{\sqrt{2}} + \dfrac{3y^{IV}}{\sqrt{48}} + \dfrac{z^{IV}}{\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{-40+11\sqrt{2}}{32} + \dfrac{x^{IV}}{\sqrt{2}} - \dfrac{3y^{IV}}{\sqrt{48}} - \dfrac{z^{IV}}{\sqrt{3}} \\ z = \dfrac{11}{12} + 0 - \dfrac{3\sqrt{2}\,y^{IV}}{\sqrt{27}} + \dfrac{z^{IV}}{\sqrt{3}} \end{cases}}$$

→ (Sistema de cambio de coordenadas)

Con el nuevo sistema:

$$\boxed{\tilde{R} = \left(\left(-\frac{40+11\sqrt{2}}{32}, \frac{-40+11\sqrt{2}}{32}, \frac{11}{12}\right), \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), \left(\frac{3}{\sqrt{48}}, -\frac{3}{\sqrt{48}}, -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}}\right), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\right)}$$