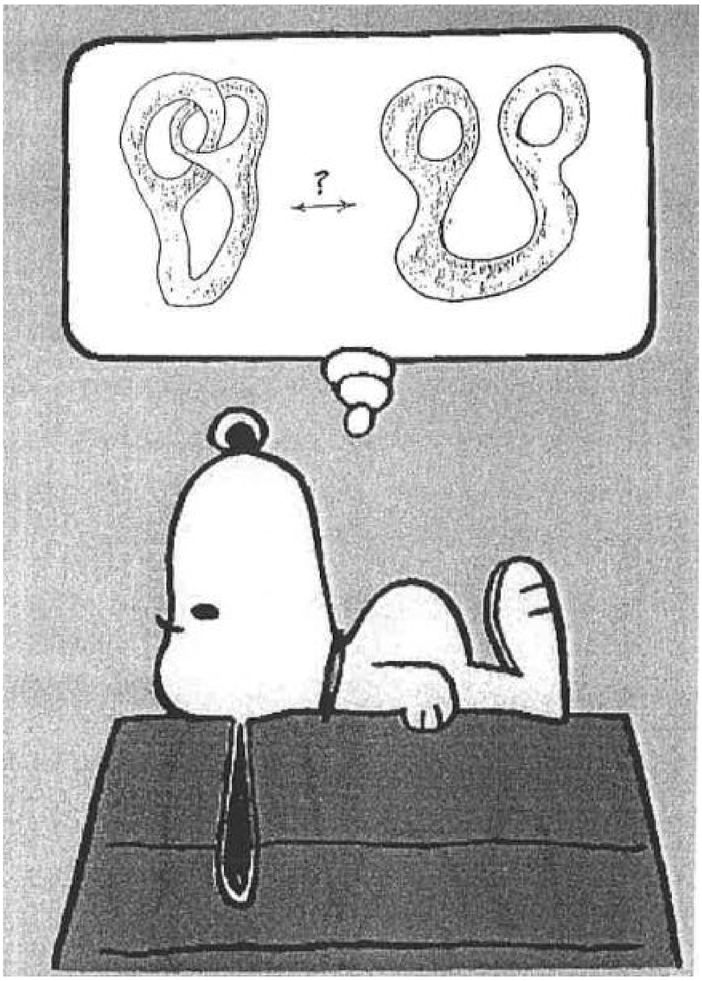
TOPOLOGÍA

Curso 2019/2020



Prof. Marta Macho Stadler

Facultad de Ciencia y Tecnología-Zientzia eta Teknologia Fakultatea

Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea

Marta Macho Stadler
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencia y Tecnología
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea
Barrio Sarriena s/n, 48940 Leioa
e-mail: `marta.macho@ehu.eus`
`http://www.ehu.es/~mtwmastm`
Tlf: 946015352 Fax: 946012516

Portada: *¿Son topológicamente equivalentes?*

Índice general

Introducción 5
0.1. ¿Qué es la topología? 5
0.2. Un poco de historia 6
0.3. Organización del documento 8

1. Repaso de algunas nociones básicas 1
1.1. Nociones de Lógica 1
1.1.1. Símbolos y conectores 1
1.1.2. Los objetos del razonamiento 3
1.1.3. Condiciones necesarias y suficientes 4
1.1.4. Los métodos de demostración 5
1.2. Teoría de conjuntos 7
1.3. Funciones y sus propiedades 9
1.4. Relaciones binarias 12
1.5. Propiedades de los números reales 13
1.6. Cardinalidad de conjuntos 14
1.7. Ejercicios 16

2. Espacios topológicos 23
2.1. Topología 23
2.2. Conjuntos abiertos y cerrados 24
2.3. Base de una topología 25
2.4. Entornos y bases de entornos 27
2.5. Distancias. Espacios métricos 30
2.6. Bolas abiertas y cerradas en espacios métricos 31
2.7. Problemas 33

3. Conjuntos en espacios topológicos **39**
3.1. Interior de un conjunto 39
3.2. Clausura de un conjunto 41
3.3. Puntos de acumulación y puntos aislados. Conjunto derivado 43
3.4. Frontera de un conjunto 44
3.5. Problemas 45

4. Continuidad **51**
4.1. Aplicaciones continuas 51
4.2. Homeomorfismos. Propiedades topológicas 52
4.3. Sucesiones en espacios métricos: convergencia y continuidad secuencial . 53
4.4. Problemas 56

5. Construcción de espacios topológicos **63**
5.1. Subespacios 63
5.2. Aplicaciones combinadas 65
5.3. Embebimientos 65
5.4. Topología producto. Proyecciones 65
5.5. Topología cociente. Identificaciones 66
5.6. Problemas 69

6. Compacidad **79**
6.1. Espacios y conjuntos compactos 79
6.2. Productos de espacios compactos 81
6.3. Compacidad secuencial 81
6.4. Compacidad en espacios de Hausdorff 81
6.5. Problemas 83

7. Conexión **87**
7.1. Espacios y subconjuntos conexos 87
7.2. Componentes conexas 90
7.3. Conexión por caminos 90
7.4. Componentes conexas por caminos 92
7.5. Problemas 92

Bibliografia **101**

Introducción

Un secreto es como un subconjunto invisible.

"Conjunto vacío"
Verónica Gerber Bicecci

0.1. ¿Qué es la topología?

... Además de aquella parte de la geometría que trata sobre cantidades y que se ha estudiado en todo tiempo con gran dedicación, el primero que mencionó la otra parte, hasta entonces desconocida, fue G. Leibniz, el cual la llamó geometría de la posición. Leibniz determinó que esta parte se tenía que ocupar de la sola posición y de las propiedades provenientes de la posición en todo lo cual no se ha de tener en cuenta las cantidades, ni su cálculo... Por ello, cuando recientemente se mencionó cierto problema que parecía realmente pertenecer a la geometría, pero estaba dispuesto de tal manera que ni precisaba la determinación de cantidades ni admitía solución mediante el cálculo de ellas, no dudé en referirlo a la geometría de la posición... **Leonhard Euler**

La topología se ocupa de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes, cuando son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas, de modo que no aparezcan nuevos puntos o se hagan coincidir puntos diferentes. Así, las transformaciones permitidas exigen que haya una correspondencia biunívoca entre los puntos de la figura original y los de la transformada, y que la deformación haga corresponder *puntos próximos* a *puntos próximos*. Esta última propiedad se llama *continuidad*, y lo que se requiere es que la transformación y su inversa sean ambas continuas: trabajamos con *homeomorfismos*.

En topología se trabaja con los mismos objetos que en geometría, pero de modo distinto: las distancias o los ángulos no son importantes, ni siquiera la alineación de los puntos.

En topología, un círculo es equivalente a una elipse; una bola no se distingue de un cubo: se dice que la bola y el cubo son objetos *topológicamente equivalentes*, porque se pasa de una al otro mediante una transformación continua y reversible.

0.2. Un poco de historia

En 1679, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) publicó su *Characteristica Geometrica*, en el que –en términos actuales– intentaba estudiar las propiedades topológicas más que las puramente métricas de los objetos. Insistía en que, aparte de la representación por coordenadas de las figuras, "*se necesita de otro análisis, puramente geométrico o lineal, que también defina la posición (situs), como el álgebra define la magnitud*".

El desarrollo del análisis matemático en el siglo XVII reveló la exigencia de formalizar los conceptos de cercanía, de vecindad o de continuidad, y la geometría no era capaz de cumplir esta misión. De hecho, fueron la cimentación del cálculo infinitesimal y la necesidad de formalizar la noción de variedad en geometría los que condujeron al surgimiento y desarrollo de la topología a finales del siglo XIX y principios del XX.

Los matemáticos en el siglo XVIII mostraron poco interés por la topología con la excepción de Leonhard Euler (1707-1783) quien, en 1736, publicó un artículo que contenía la solución al *problema de los puentes de Königsberg*, titulado *"Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis"*. El título muestra que Euler era consciente de que estaba trabajando con una clase diferente de matemáticas, en la que la geometría ya no era tan "importante". Suele fecharse el origen de la topología precisamente con este artículo en el que Euler abordó el problema de una manera novedosa para la época.

En 1750, Euler escribió una carta a Christian Goldbach (1690-1764) en la que introducía la *fórmula de Euler* para un poliedro con v vértices, l lados y c caras: $v - l + c = 2$. Esta fórmula, de asombrosa simplicidad, parece que fue "olvidada"por eruditos como Arquímedes (287 a. C.- 212 a. C.) o René Descartes (1596-1650), a pesar de que ambos escribieron extensamente sobre poliedros. La razón probablemente se deba en que, antes de Euler, parecía imposible pensar en propiedades geométricas sin que la medida estuviera involucrada. Euler publicó los detalles de la validez de esta fórmula en 1752, a través de una demostración basada en la disección de sólidos en *rodajas tetraédricas*. El matemático pasó por alto algunos detalles en su prueba; por ejemplo, suponía que los sólidos eran convexos, es decir, no atacaba el problema en toda su generalidad.

En 1813, Simon Antoine Jean Lhuilier (1750-1840) publicó *"Mémoire sur la polyèdrométrie"*, donde indicaba que la fórmula de Euler era falsa para sólidos con asas: si un sólido tiene g asas –un *asa* es un toro *adjuntado* al espacio–, LHuilier probaba que la fórmula se transformaba en $v - l + c = 2 - 2g$. Éste es el primer resultado conocido sobre *invariantes topológicos*, es decir, sobre una propiedad matemática que no se altera cuando se sustituye un poliedro por otro topológicamente equivalente.

August Ferdinand Möbius (1790-1868) publicó una descripción de la banda que lleva su nombre en 1865 y aludió a su "falta de orientabilidad".

Johann Benedict Listing (1802-1882) fue la primera persona en usar la palabra *topología*: sus ideas se debían principalmente a su maestro, Carl Friedrich Gauss (1777-1855). En 1847, Listing escribió *"Vorstudien zur Topologie"* y en 1861 publicó otro artículo en el que describía la banda de Möbius –cuatro años antes que Möbius– y estudiaba la noción de *conexión* en el caso de superficies. Listing no fue el primero en hablar de componentes conexas; Bernhard Riemann (1822-1866) estudió este concepto en 1851 y, de nuevo, en 1857 cuando introdujo las *superficies de Riemann*.

Camille Jordan (1838-1922) publicó en 1882 su *"Cours d'Analyse"*; contenía pruebas rigurosas de resultados topológicos intuitivamente obvios sobre curvas en el plano. Introducía además otro método para estudiar la conexión de las superficies.

Listing examinó la conexión en el espacio euclídeo de dimensión tres y Enrico Bett (1823-1892) extendió estas ideas a dimensiones arbitrarias.

En 1890 Ernest de Jonquières (1820-1901) generalizó la fórmula para poliedros de Euler a poliedros no necesariamente convexos.

La idea de conexión fue descrita con rigor por Henri Poincaré (1854-1925) en una serie de artículos titulados *"Analysis situs"* y publicados en 1895. Introdujo el concepto de *homología* y dio una definición precisa de los *números de Betti* asociados a un espacio. En relación con la conexión, Poincaré definió las nociones de *grupo fundamental* de una variedad y de *homotopía*.

Un segundo camino en el que se desarrolló la topología fue a través de la generalización de ideas de *convergencia*. Este proceso se inició en 1817 cuando Bernard Bolzano (1781-1848) asoció la convergencia con un subconjunto acotado infinito de números reales en vez de pensar solo en convergencia de sucesiones de números.

Georg Cantor (1845-1918) introdujo en 1872 el concepto de conjunto *derivado* –o familia de puntos límite– de un conjunto. Definió los subconjuntos *cerrados* de la recta real como aquellos conteniendo a su conjunto derivado e introdujo la idea de conjunto *abierto*, un concepto clave en la topología de conjuntos. También introdujo la noción de *entorno de un punto*.

En 1906, Maurice Fréchet (1878-1973) llamó a un espacio *compacto* si cada subconjunto infinito acotado de él contenía un punto de acumulación. Extendió la noción de convergencia de un espacio euclídeo, definiendo los *espacios métricos*. Y probó que los conceptos de conjuntos abiertos y cerrados de Cantor se extendían naturalmente a espacios métricos.

En 1909, Frigyes Riesz (1880-1956) propuso un nuevo acercamiento axiomático a la topología, basado en una definición conjuntista de puntos límite que no necesitaba recurrir al concepto de distancia. En 1914, Felix Hausdorff (1868-1942) definió los entornos a través de cuatro axiomas, de nuevo sin consideraciones métricas. Este trabajo de Riesz y

Hausdorff es el que dio lugar a la definición de espacio topológico abstracto.

Hay una tercera vía en la que los conceptos topológicos entraron en las matemáticas: a través del análisis funcional, un área que surgió debido a que los métodos del análisis clásico eran inadecuados para abordar algunos problemas de la física.

Jacques Hadamard (1865-1963) introdujo la palabra *funcional* en 1903, cuando estudiaba funciones de la forma $F(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f(x)g_n(x)dx$. Fréchet continuó el desarrollo de esta teoría, definiendo la derivada de un funcional en 1904.

En 1907, Erhard Schmidt (1876-1959) examinó la noción de convergencia en espacios de funciones; la distancia se definía a través un producto interior. Stefan Banach (1892-1945) dio paso más en 1932, cuando pasó de los espacios con producto interior a los espacios normados.

Poincaré desarrolló muchos de sus métodos topológicos cuando estudiaba ecuaciones diferenciales ordinarias derivadas de problemas astronómicos. Esta colección de métodos se transformó en una completa teoría topológica en 1912, con los estudios de Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966).

En *¿Qué es la topología?* (Sigma 20, 63-77, 2002) se amplía este apartado con algunos ejemplos de espacios topológicos (`www.ehu.es/~mtwmastm/sigma20.pdf`).

0.3. Organización del documento

Este documento está organizado en siete capítulos, el primero de repaso de nociones sobre teoría de conjuntos y el resto corresponden al temario del programa de la asignatura *Topología* del curso 2019/2020.

Cada uno de los temas consta de definiciones, propiedades con algunas de las demostraciones más complicadas y una extensa colección de ejemplos. Al final de cada capítulo aparece una relación de problemas, algunos de ellos elementales, otros ya más elaborados, otros son una mera excusa para introducir algún ejemplo de espacio importante. En todos ellos se deben aplicar las propiedades estudiadas en la parte teórica; algunos de ellos servirán como trabajo escrito a entregar y otros como ejercicios para desarrollar en los seminarios. Los más complicados irán marcados con un *, y en general corresponden a ejercicios que probablemente no haremos en clase, pero que están disponibles por si alguien quiere trabajar con ellos.

La bibliografía es extensa y en ella se han marcado algunos libros (con un *) que son especialmente recomendables.

Leioa, septiembre 2019

Repaso de algunas nociones básicas

El teorema de los infinitos monos
de Borel-Cantelli
enuncia esta posibilidad:
si un infinito número de monos mecanografiaran
por un intervalo infinito de tiempo
podrían escribir cualquier texto posible.
Todo lo que incluye este poema.
Todas las palabras que alguna vez me has dicho.

"Infinitos monos"
José Manuel Gallardo

1.1. Nociones de Lógica

La Lógica es una herramienta básica en Matemáticas; damos aquí un breve repaso de algunos conceptos fundamentales.

1.1.1. Símbolos y conectores

En matemáticas, es fundamental la utilización de símbolos y conectores que sirven para modificar o combinar sentencias.

Definición 1.1. Los siguientes símbolos se llaman *cuantificadores*:

1) el *cuantificador universal*: $\forall$ (para todo);

2) el *cuantificador existencial*: $\exists$ (existe).

Definición 1.2. También es esencial el uso de los llamados *conectores*:

1) la *negación*: no;

2) la *conjunción*: $\wedge$ (y);

3) la *disyunción*: $\vee$ (o);

4) la *implicación*: $\Longrightarrow$ (si ..., entonces);

5) la *doble implicación*: $\Longleftrightarrow$ (si y sólo si, es equivalente a).

El manejo es sencillo, pero es preciso tener cuidado al utilizarlos. Por ejemplo, si $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ son propiedades relativas a los elementos de un conjunto X (definición 1.11), para expresar que x cumple $\mathfrak{P}$, se escribirá $\mathfrak{P}(x)$. Y entonces:

Proposición 1.1. *El enunciado $\mathfrak{P}(x) \vee \mathfrak{Q}(x)$, significa una de las tres posibilidades (mutuamente excluyentes) siguientes:*

(i) $\mathfrak{P}(x)$ y $\mathfrak{Q}(x)$; *(ii) $\mathfrak{P}(x)$ y no-$\mathfrak{Q}(x)$;* *(iii) no-$\mathfrak{P}(x)$ y $\mathfrak{Q}(x)$.*

Proposición 1.2. *Un enunciado se niega de la siguiente manera:*

1) no-$(\forall x \in X, \mathfrak{P}(x))$ es lo mismo que decir que $(\exists x \in X :$ no-$\mathfrak{P}(x))$;

2) no-$(\exists x \in X : \mathfrak{P}(x))$ equivale a $(\forall x \in X,$ no-$\mathfrak{P}(x))$;

3) no-$(\forall x \in X, \mathfrak{P}(x) \wedge \mathfrak{Q}(x))$ es lo mismo que $(\exists x \in X :$ no-$\mathfrak{P}(x) \vee$ no-$\mathfrak{Q}(x))$;

4) no-$(\exists x \in X : \mathfrak{P}(x) \Longrightarrow \mathfrak{Q}(x))$ es equivalente a $(\forall x \in X, \mathfrak{P}(x) \not\Longrightarrow \mathfrak{Q}(x))$.

Proposición 1.3. *Cuando aparecen varios cuantificadores en un enunciado, es indiferente el orden en el que se escriben, siempre que los cuantificadores involucrados sean del mismo tipo. Si $\mathfrak{P}(x, y)$ es una propiedad relativa a los elementos x e y, entonces:*

1) $(\forall x, \forall y, \mathfrak{P}(x, y))$ es lo mismo que decir que $(\forall y, \forall x, \mathfrak{P}(x, y))$;

2) $(\exists x, \exists y : \mathfrak{P}(x, y))$ es equivalente a $(\exists y, \exists x : \mathfrak{P}(x, y))$.

Contraejemplo 1.1. Hay que tener cuidado cuando se ven involucrados cuantificadores de distinto tipo. Por ejemplo, el enunciado $(\forall x, \exists y : \mathfrak{P}(x, y))$ no equivale a la expresión $(\exists y : \forall x, \mathfrak{P}(x, y))$. En efecto, si $X = \mathbb{N}$ y $\mathfrak{P}(x, y)$ es la propiedad "$x \leq y$", la primera expresión se lee como que todo número natural posee otro mayor (que es cierta) y la segunda significa que existe un número natural mayor que todos los demás (que es falsa).

Proposición 1.4. *El cuantificador existencial y el conector disyunción se pueden intercambiar en la escritura de un enunciado, así como el cuantificador universal y el conector conjunción:*

1) $(\forall x, \mathfrak{P}(x))$ y $(\forall y, \mathfrak{Q}(y))$ es lo mismo que $(\forall x, y, \mathfrak{P}(x) \wedge \mathfrak{Q}(y))$;

2) $(\exists x : \mathfrak{P}(x))$ *o* $(\exists y : \mathfrak{Q}(y))$ *es equivalente a* $(\exists x, y : \mathfrak{P}(x) \vee \mathfrak{Q}(y))$.

Contraejemplo 1.2. En general, no se pueden intercambiar cuantificadores y conectores en la escritura de un enunciado:

1) la expresión $(\forall x, \mathfrak{P}(x) \vee \mathfrak{Q}(x))$ no equivale a $(\forall x, \mathfrak{P}(x)) \vee (\forall x : \mathfrak{Q}(x))$. En efecto, si $X = \mathbb{N}$, $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ son las propiedades de "ser par" y "ser impar" respectivamente, entonces la primera expresión se lee como que un número natural es par o impar (que es verdadera) y la segunda dice que todo número natural es par o todo número natural es impar (que es falsa);

2) la expresión $(\exists x : \mathfrak{P}(x)) \wedge (\exists x : \mathfrak{Q}(x))$ no equivale a $(\exists x : \mathfrak{P}(x) \wedge \mathfrak{Q}(x))$. En efecto, tomando de nuevo el ejemplo de 1), la primera expresión se lee como que existe un número natural par y existe un número natural impar (que es cierta), y la segunda significa que existe un número natural a la vez par e impar (que es falsa).

1.1.2. Los objetos del razonamiento

Definir una teoría matemática es establecer las *reglas del juego* sobre los objetos manipulados, los denominados *axiomas*.

Definición 1.3. Un *axioma* es todo enunciado que:

1) sirve de fundamento para la construcción de una teoría;

2) se admite como cierto y no es por lo tanto objeto de discusión.

Cuando un único axioma no basta para definir una teoría, se pide además:

3) que los diferentes axiomas usados no se contradigan y sean independientes los unos de los otros.

Ejemplos 1.1. Algunos ejemplos de axiomas son los siguientes:

1) *axioma de Euclides*, que es la base de la Geometría Euclídea: dos rectas paralelas del plano euclídeo no se cortan;

2) *axioma de elección*: dado un conjunto X, existe una *función* (definición 1.18) *de elección*, $f : \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\} \longrightarrow X$ (definición 1.14), que asigna a todo conjunto A no vacío, un punto distinguido $f(A) = a \in A$;

3) *lema de Zorn*: sea un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ (definición 1.31), tal que todo conjunto bien ordenado (definición 1.33) admite una cota superior (definición 1.34); entonces $(X, \leq)$ posee un elemento maximal (definición 1.32);

4) *axioma de Zermelo*: todo conjunto puede ser bien ordenado.

Observación 1.1. 2), 3) y 4) son formulaciones equivalentes del mismo axioma.

Definición 1.4. Una *definición* es un enunciado que sirve para explicar o introducir una nueva noción.

Una vez conocidos los axiomas y algunas definiciones, *el juego* puede comenzar, puesto que las reglas ya se conocen.

Definición 1.5. Un *teorema* es un enunciado que se deduce:

1) directamente de los axiomas o

2) de los axiomas y los teoremas precedentes, y

con las reglas de deducción que se llaman *demostraciones*, que aseguran su validez.

Definición 1.6. A veces, se da únicamente el nombre de teorema a los verdaderamente importantes, a los que han pasado a la historia con un nombre, o a los que precisan una demostración muy larga, dejando el nombre de *proposición* al resto.

Definición 1.7. Un *lema* es una proposición preliminar a la demostración de un teorema.

Definición 1.8. Un *corolario* es una proposición que se deduce inmediatamente de un teorema, por una demostración si no inmediata, cuando menos corta y fácil.

1.1.3. Condiciones necesarias y suficientes

Definición 1.9. (La implicación) Sean X un conjunto y $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ dos propiedades matemáticas definiendo los conjuntos $A = \{x \in X : \mathfrak{P}(x)\}$ y $B = \{x \in X : \mathfrak{Q}(x)\}$ respectivamente. Si $A \subset B$ (definición 1.12), todo elemento verificando $\mathfrak{P}$, cumple también $\mathfrak{Q}$. En este caso, se dice que $\mathfrak{P}$ *implica* $\mathfrak{Q}$, y se escribe $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$. Se dice también que $\mathfrak{P}$ es una *condición suficiente* de $\mathfrak{Q}$ (para obtener $\mathfrak{Q}$ basta con conocer $\mathfrak{P}$) o que $\mathfrak{Q}$ es una *condición necesaria* de $\mathfrak{P}$.

Definición 1.10. (La equivalencia) En las condiciones de la definición 1.9, si $A = B$ (definición 1.12), todo elemento verificando $\mathfrak{P}$ cumple también $\mathfrak{Q}$ y viceversa. En este caso, se dice que $\mathfrak{P}$ *es equivalente* a $\mathfrak{Q}$, y se escribe $\mathfrak{P} \Longleftrightarrow \mathfrak{Q}$. Como $A = B$ es idéntico a $A \subset B$ y $B \subset A$, la equivalencia $\mathfrak{P} \Longleftrightarrow \mathfrak{Q}$ significa las dos implicaciones $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$ y $\mathfrak{Q} \Longrightarrow \mathfrak{P}$. Es decir, las dos propiedades equivalentes $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ caracterizan el mismo conjunto. Observar que en tal caso $\mathfrak{P}$ es una *condición necesaria y suficiente* de $\mathfrak{Q}$.

1.1.4. Los métodos de demostración

Hay muchos métodos de demostración, de los cuales citamos los más importantes a continuación, usando la notación de la definición 1.9:

(i) Método de la hipótesis auxiliar: *para probar que* $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$*, se supone* $\mathfrak{P}$ *cierta.*

Esta forma de razonamiento, la más directa, es también la más conocida. De manera práctica consiste en demostrar el teorema $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$, donde $\mathfrak{P}$ es la *hipótesis* y $\mathfrak{Q}$ la *conclusión o tesis*, suponiendo que se verifica $\mathfrak{P}$ (la hipótesis es cierta) y ayudándose de los axiomas y de los otros teoremas de la teoría demostrados anteriormente.

(ii) Disjunción de los casos: *para probar que* $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$*, se descompone* $\mathfrak{P}$ *en la forma* $\mathfrak{P}_1 \vee \cdots \vee \mathfrak{P}_n$*, y se prueba que para cada* $i \in \{1, \dots, n\}$*, es* $\mathfrak{P}_i \Longrightarrow \mathcal{Q}$*.*

Es decir, se descompone el conjunto A de los elementos que cumplen $\mathfrak{P}$ en una unión disjunta (definición 1.13) de subconjuntos $A_1, \cdots, A_n$. Entonces, se prueba que para cada $1 \leq i \leq n$ es $A_i \subset B$; y como $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, se tendrá $A \subset B$.

Ejemplo 1.1. *Probar que si* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $n(n+1)$ *es par.*
Demostración: Distinguimos dos posibilidades: si n es par, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $n = 2k$, y entonces $n(n+1) = 2k(2k+1)$. Si n es impar, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $n = 2k+1$, y entonces $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1)$, que es claramente par. ∎

(iii) Método de contraposición: *para probar que* $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$*, se demuestra el contrarecíproco no-*$\mathfrak{Q} \Longrightarrow$ *no-*$\mathfrak{P}$*.*

Es un primer método de prueba indirecta. Descansa sobre el hecho de que la inclusión $A \subset B$ es equivalente a decir que los conjuntos complementarios (definición 1.13) verifican la inclusión $B^c \subset A^c$.

Ejemplo 1.2. *Probar que si* $n \in \mathbb{N}$ *es tal que* n^2 *es par, entonces* n *es par.*
Demostración: Si $n \in \mathbb{N}$ es impar, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $n = 2k+1$, y entonces $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$, que es impar. ∎

(iv) Demostración por reducción al absurdo: *para probar un enunciado* $\mathfrak{P}$*, se supone su negación no-*$\mathfrak{P}$*, y se busca una contradicción en la teoría en la que se trabaja.*

Como evidentemente se admite que esta teoría no admite contradicciones, la suposición no-$\mathfrak{P}$ será falsa, lo cual es equivalente a decir que $\mathfrak{P}$ es cierta. ¿A qué contradicción se debe llegar? A contradecir un axioma, un teorema anteriormente probado o la propia suposición no-$\mathfrak{P}$.

De modo similar, para probar que $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$ razonando por reducción al absurdo, se admite lo contrario, es decir, que no-($\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$), o lo que es equivalente, $\mathfrak{P}$ y no-$\mathfrak{Q}$. Y se busca entonces encontrar una contradicción.

(v) El contraejemplo: para probar que un propiedad matemática $\mathfrak{P}$ es cierta para un conjunto X, hay que probar que todos los elementos de X la verifican. Pero, se sabe que la negación de $(\forall x \in X, \mathfrak{P}(x))$ es $(\exists x \in X, \text{no-}\mathfrak{P}(x))$. Así, para probar que esta fórmula es falsa, basta con encontrar un elemento de X que no verifique $\mathfrak{P}$: esto es lo que se llama *dar un contraejemplo*.

Ejemplo 1.3. *Si $x \in \mathbb{R}$, ¿es cierto que si $x \leq x^2$, entonces es $x \geq 1$?*
Demostración: La respuesta es falsa, tomando $x = -2$. ∎

(vi) La demostración por recurrencia: este tipo de demostración está ligada a la definición del conjunto de los enteros naturales. Es una técnica útil para probar que una propiedad $\mathfrak{P}(n)$ es cierta para todos los enteros naturales n, o para los que son iguales o superiores a un cierto n_0. Sean n_0 un entero natural y $\mathfrak{P}(n)$ una propiedad matemática que depende de un entero n. Para probar que $\mathfrak{P}(n)$ se verifica para cada $n \geq n_0$, basta con probar que:

1) $\mathfrak{P}(n_0)$ es cierta,

2) demostrar, bajo la hipótesis de que $\mathfrak{P}(n)$ se verifica para $n \in \{n_0, n_0 + 1, \dots, k\}$, que $\mathfrak{P}(k + 1)$ es cierta.

La etapa 1) es una simple verificación y la 2) es, de hecho, el objeto de una demostración.

Ejemplo 1.4. *Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.*
Demostración: Para $n = 1$, es cierto que $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Si la propiedad se verifica para $n \in \{1, \dots, k\}$, entonces: $1+2+\cdots+k+(k+1)=(1+2+\cdots+k)+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+2)(k+1)}{2}$. ∎

Observación 1.2. Hay una forma débil de la demostración por recurrencia: para probar que $\mathfrak{P}(n)$ se verifica para cada $n \geq n_0$, basta con probar que:

1) $\mathfrak{P}(n_0)$ es cierta,

2) demostrar, bajo la hipótesis de que $\mathfrak{P}(k)$ se verifica para $k > n_0$, que $\mathfrak{P}(k + 1)$ es cierta.

En este caso, para probar que $\mathfrak{P}(k + 1)$ se verifica, nos apoyamos sólo sobre la hipótesis de que $\mathfrak{P}(k)$ es cierta.

1.2. Teoría de conjuntos

Definición 1.11. Un *conjunto* es una colección de objetos, llamados *elementos* o *puntos*. Si x es un elemento de X, se denota por $x \in X$. Análogamente, $x \notin X$ denota la "no pertenencia" de x a X. El *conjunto vacío* $\emptyset$ es el conjunto sin elementos.

Son conjuntos importantes en matemáticas $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\cdots$.

Se puede definir un conjunto:

1) por *extensión*, nombrando todos sus elementos: por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares es $\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$;

2) a través de una *propiedad* $\mathfrak{P}$ válida en un universo $\mathfrak{U}$, que servirá para caracterizarlo $\{x \in \mathfrak{U} : \mathfrak{P}(x)\}$. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares se puede expresar por $\{x \in \mathbb{N} : x$ es múltiplo de $2\}$.

Definición 1.12. Dados $A, B \subset X$, se dice que A *está contenido* en B, $A \subset B$, si para cada $x \in A$, es $x \in B$. Y A es *igual* a B, $A = B$, si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Definición 1.13. Si $A, B \subset X$, se definen:

1) la *intersección* de A y B, por $A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$. Claramente, $A \cap B \subset A, B$. A y B se dicen *disjuntos* si $A \cap B = \emptyset$;

2) la *unión* de A y B, por $A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$. Es decir $x \in A \cup B$, si se verifica una (y sólo una) de las condiciones siguientes:

   (i) $x \in A$ y $x \in B$, (ii) $x \in A$ y $x \notin B$, (iii) $x \notin A$ y $x \in B$.

   Claramente, $A, B \subset A \cup B$;

3) el *complementario* de A en X, por $X - A = \{x \in X : x \notin A\}$. Si no hay duda de respecto a que conjunto se está tomando el complementario, se denota A^c;

4) la *diferencia* de A y B, por $A - B = A \cap B^c = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Proposición 1.5. *Las anteriores operaciones verifican las siguientes propiedades:*

1) leyes idempotentes: $A \cap A = A = A \cup A$;

2) leyes asociativas: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *y* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

3) leyes conmutativas: $A \cup B = B \cup A$ *y* $A \cap B = B \cap A$;

4) leyes distributivas: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *y* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

5) identidades: $A \cap X = A = A \cup \emptyset$, $A \cup X = X$ *y* $A \cap \emptyset = \emptyset$;

6) propiedades del complementario: $A \cup A^c = X$, $A \cap A^c = \emptyset$, $(A^c)^c = A$ *y* $X^c = \emptyset$;

7) leyes de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *y* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Definición 1.14. Se llama *partes de* X o *conjunto potencia de* X al conjunto de todos los subconjuntos de X, y se denota por $\mathcal{P}(X)$ o 2^X. Es decir, $A \subset X$ si y sólo si $A \in \mathcal{P}(X)$.

Definición 1.15. $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$ es el *producto cartesiano* de A por B. Sus elementos son *pares ordenados*.

Claramente, $A \times B \neq B \times A$. Y $A \times B = \emptyset$, si y sólo si $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$. Dos pares ordenados $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$, son iguales $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ si y sólo si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$. Luego, $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ si y sólo si $a_1 \neq a_2$ o $b_1 \neq b_2$.

En general, dada una familia finita de conjuntos $\{A_1, \cdots, A_n\}$, se define su producto cartesiano por $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \cdots, a_n) : a_i \in A_i, i \in \{1, \cdots, n\}\}$. Si $A_i = A$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, el producto cartesiano se denota por A^n.

Proposición 1.6. *El producto cartesiano verifica las siguientes propiedades:*

1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$; *2)* $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

3) si $C \neq \emptyset$ *y* $A \times C = B \times C$, *entonces* $A = B$;

4) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$; *5)* $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$;

6) $(A \times B)^c = (A^c \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c)$;

7) si $B \subset C$, *entonces* $A \times B \subset A \times C$; *8)* $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times D) \cap (C \times B)$;

9) si A, B, C *y* D *son conjuntos no vacíos, entonces* $A \times B \subset C \times D$ *si y sólo si* $A \subset C$ *y* $B \subset D$.

Definición 1.16. Sea $I \neq \emptyset$ un *conjunto de índices*. Se considera una familia de conjuntos $\{A_i : i \in I\}$, y se dice que esta familia está *indicada* por I. Los conjuntos A_i no tienen porque ser diferentes.

Definición 1.17. Dada una familia indicada $\{A_i : i \in I\}$, con $A_i \subset X$, se define:

1) la *intersección generalizada* $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X : \forall i \in I, x \in A_i\}$, y

2) la *unión generalizada* $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X : \exists i \in I$ tal que $x \in A_i\}$.

Si el conjunto de índices I es finito, estas definiciones coinciden con las dadas en la definición 1.13. Se cumplen también en este caso las propiedades distributivas, las leyes de De Morgan $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$ y $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$, etc.

1.3. Funciones y sus propiedades

Definición 1.18. Dados dos conjuntos X e Y, una *aplicación* o *función* $f\colon X \longrightarrow Y$, es una correspondencia que asocia a cada $x \in X$, un elemento y sólo uno de Y, que se denota por $f(x)$.

Ejemplos 1.2. Algunos ejemplos de aplicaciones son:

1) la *aplicación identidad*, $1_X\colon X \longrightarrow X$, definida por $1_X(x) = x$;

2) la *aplicación inclusión*: si $A \subset X$, $i_A\colon A \longrightarrow X$, se define por $i_A(x) = x$;

3) la *aplicación constante*, $c_{y_0}\colon X \longrightarrow Y$, definida por $c_{y_0}(x) = y_0$, donde y_0 es un punto fijo de Y;

4) la *i-ésima proyección coordenada*, $p_i\colon A_1 \times \cdots \times A_n \longrightarrow A_i$, definida por la igualdad $p_i((a_1, \cdots, a_n)) = a_i$;

5) la *inyección diagonal*, $d\colon X \longrightarrow X^n$, definida por $d(x) = (x, \cdots, x)$;

6) la *función característica de un conjunto*: si $A \subset X$, $\chi_A\colon X \longrightarrow \{0, 1\}$, definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin A \\ 1 & \text{si} \quad x \in A \end{cases}$$

7) dada $f\colon X \longrightarrow Y$ y $A \subset X$, la *restricción* de f a A, $f|_A\colon A \longrightarrow Y$, está definida por $f|_A(a) = f(a)$;

8) si $g\colon A \longrightarrow Y$ y $A \subset X$, entonces $f\colon X \longrightarrow Y$ es una *extensión* de g a X, si $f|_A = g$; una aplicación puede tener varias extensiones;

9) si $f\colon A \longrightarrow Y$ y $g\colon B \longrightarrow Y$ son dos aplicaciones, donde $A \cup B = X$ y $f(x) = g(x)$, para cada $x \in A \cap B$, se puede definir la *combinada* de f y g, como la aplicación $h\colon X \longrightarrow Y$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \\ g(x) & \text{si} \quad x \in B \end{cases}$$

Definición 1.19. Dada una aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$, X se llama el *dominio* de f e Y es su *codominio*. El *grafo* de f es el conjunto $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$, que en muchas ocasiones se identifica con f.

Definición 1.20. Dos aplicaciones $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Z \longrightarrow W$ son *iguales*, cuando coinciden sus dominios ($X = Z$), sus codominios ($Y = W$) y $f(x) = g(x)$, para cada $x \in X$. Por ejemplo, si $f\colon X \longrightarrow Y$ es una aplicación y $A \subset X$, f y $f|_A$ no son iguales.

Definición 1.21. Dada $f\colon X \longrightarrow Y$, $f(A) = \{y \in Y : \exists a \in A$ tal que $f(a) = y\}$ es la *imagen directa* de A. $f(X)$ se llama *rango* de la aplicación.

Definición 1.22. Si $B \subset Y$, $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ es su *imagen recíproca*.

Proposición 1.7. *Dada $f\colon X \longrightarrow Y$, se verifica:*

1) $f(\emptyset) = \emptyset$, $f(X) \subset Y$ y si $A \neq \emptyset$, entonces $f(A) \neq \emptyset$;

2) si $A_1, A_2 \subset X$, y $A_1 \subset A_2$, entonces $f(A_1) \subset f(A_2)$;

3) Si $A_i \subset X$ para $i \in I$, $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ y $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$;

4) si $A_1, A_2 \subset X$, $f(A_1) - f(A_2) \subset f(A_1 - A_2)$ y en particular $f(X) - f(A_2) \subset f(X - A_2)$. Entre $Y - f(A_2)$ y $f(X - A_2)$ no hay en general ninguna relación;

5) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, y puede existir $\emptyset \neq B \subset Y$, tal que $f^{-1}(B) = \emptyset$;

6) $f^{-1}(Y) = X$; *7) si $B_1, B_2 \subset Y$ y $B_1 \subset B_2$, entonces $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;*

8) si $B_i \subset Y$ para $i \in I$, $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ y $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;

9) Si $B_1, B_2 \subset Y$, $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$, y en particular, $f^{-1}(Y - B_2) = X - f^{-1}(B_2)$;

10) si $A \subset X$, $A \subset f^{-1}(f(A))$; *11) si $B \subset Y$, $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B \subset B$;*

12) si $A \subset X$ y $B \subset Y$, $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

Definición 1.23. Dadas $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow Z$, se define la *composición* de g y f, por $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$, donde $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para cada $x \in X$.

Proposición 1.8. *Sean $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ y $h\colon Z \longrightarrow W$ aplicaciones, entonces:*

1) la composición de funciones es asociativa: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

2) $f \circ 1_X = f$ *y* $1_Y \circ f = f$*;* *3) si* $C \subset Z$*, es* $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$*;*

4) si $f\colon X \longrightarrow Y$ *y* $g\colon Y \longrightarrow X$*, en general,* $f \circ g \neq g \circ f$*.*

Definición 1.24. Se dice que $f\colon X \longrightarrow Y$ es *sobreyectiva*, si $f(X) = Y$, es decir, para cada $y \in Y$, existe $x \in X$, tal que $f(x) = y$. Y es *inyectiva*, si dados $x_1 \neq x_2$ en X, es $f(x_1) \neq f(x_2)$ (o equivalentemente, si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$).

Proposición 1.9. *Sea* $f\colon X \longrightarrow Y$*, entonces:*

1) $B = f(f^{-1}(B))$ *para cada* $B \subset Y$*, si y sólo si* f *es sobreyectiva;*

2) $Y - f(A) \subset f(X - A)$ *para cada* $A \subset X$ *si y sólo si* f *es sobreyectiva;*

3) si $g, h\colon Y \longrightarrow Z$ *y* f *es sobreyectiva, entonces* $g \circ f = h \circ f$ *implica que* $h = g$*;*

4) si $g\colon Y \longrightarrow X$ *y* $f \circ g = 1_Y$*, entonces* f *es sobreyectiva;*

5) $A = f^{-1}(f(A))$ *para cada* $A \subset X$*, si y sólo si* f *es inyectiva;*

6) $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ *para cada familia indicada de conjuntos* $\{A_i \subset X\}_{i \in I}$ *si y sólo si* f *es inyectiva;*

7) si f *es sobreyectiva, entonces para cada* $A \subset X$ *es* $Y - f(A) = f(X - A)$ *si y sólo si* f *es inyectiva;*

8) si $g, h\colon Z \longrightarrow X$ *y* f *es inyectiva, entonces* $f \circ g = f \circ h$ *implica que* $h = g$*;*

9) si $g\colon Y \longrightarrow X$ *y* $g \circ f = 1_X$*, entonces* f *es inyectiva.*

Definición 1.25. $f\colon X \longrightarrow Y$ es *biyectiva* si es sobreyectiva e inyectiva a la vez. En tal caso, la correspondencia definida por $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$, donde $f^{-1}(y) = x$ si y sólo si $f(x) = y$, es una función.

Proposición 1.10. *Sea* $f\colon X \longrightarrow Y$*, entonces:*

1) si f *es biyectiva, entonces* f^{-1} *también lo es;*

2) si f *es biyectiva, entonces* $f^{-1} \circ f = 1_X$*,* $f \circ f^{-1} = 1_Y$ *y* $(f^{-1})^{-1} = f$*;*

3) si $g\colon Y \longrightarrow X$ *y* $g \circ f = 1_X$ *y* $f \circ g = 1_Y$*, entonces* f *es biyectiva y* $g = f^{-1}$*;*

4) si $f\colon X \longrightarrow Y$ *y* $g\colon Y \longrightarrow Z$ *son biyectivas, entonces* $g \circ f$ *lo es y además* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$*.*

1.4. Relaciones binarias

Definición 1.26. Dado un conjunto X, una *relación binaria* es $\mathfrak{R} \subset X \times X$. $\mathfrak{R}$ se llama:

1) *reflexiva*, si para cada $x \in X$, es $(x, x) \in \mathfrak{R}$;

2) *simétrica*, si dado $(x, y) \in \mathfrak{R}$, entonces $(y, x) \in \mathfrak{R}$;

3) *antisimétrica*, si $(x, y) \in \mathfrak{R}$ e $(y, x) \in \mathfrak{R}$ implica que $x = y$;

4) *transitiva*, si dados $(x, y), (y, z) \in \mathfrak{R}$, entonces $(x, z) \in \mathfrak{R}$.

Definición 1.27. Una relación de *equivalencia* es una relación binaria reflexiva, simétrica y transitiva. Se suele denotar por $x\mathfrak{R}y$ en vez de $(x, y) \in \mathfrak{R}$.

Definición 1.28. Dada $\mathfrak{R}$ una relación de equivalencia, se llama *clase de x* al conjunto $[x] = \{y \in X : x\mathfrak{R}y\}$. El *conjunto cociente* $X/\mathfrak{R}$, es el conjunto de todas las clases de equivalencia.

Proposición 1.11. *Algunas propiedades son:*

1) $x \in [x]$ (x se llama representante de su clase), luego $[x] \neq \emptyset$;

2) $x\mathfrak{R}y$ si y sólo si $[x] = [y]$; *3) $[x] \neq [y]$ si y sólo si $[x] \cap [y] = \emptyset$.*

Definición 1.29. Una *partición* de X es una familia $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ de subconjuntos no vacíos de X, tales que:

(i) $X = \bigcup_{i \in I} P_i$, y (ii) si $P_i \neq P_j$, entonces $P_i \cap P_j = \emptyset$.

Lema 1.12. *Es equivalente dar una partición de X que una relación de equivalencia sobre él.*

Definición 1.30. Existe una aplicación canónica, $p\colon X \longrightarrow X/\mathfrak{R}$, que asigna a cada elemento x su clase de equivalencia $p(x) = [x]$. Se llama *aplicación cociente* y es sobreyectiva. Una vez dada la aplicación cociente, cada clase de equivalencia en X es precisamente $p^{-1}(p(x))$.

Definición 1.31. Una relación $\leq$ sobre X es un *orden parcial* si es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. Se dice también que X está *parcialmente ordenado*. El orden se llama *total*, si dos elementos cualesquiera de X son comparables por esta relación.

Definición 1.32. Si X está parcialmente ordenado por $\leq$, entonces:

(i) $a \in X$ se llama *elemento máximo* de X, si para cada $x \in X$, es $x \leq a$;

(ii) $a \in X$ es un *elemento maximal* de X, si $a \nleq x$ para cada $x \neq a$;

(iii) $a \in X$ se llama *elemento mínimo* de X, si para cada $x \in X$, es $x \geq a$;

(iv) $a \in X$ es un *elemento minimal* de X, si $x \nleq a$ para cada $x \neq a$.

Ejemplo 1.5. Si $X = \{a, b, c\}$ con el orden parcial $a \leq b$ y $a \leq c$, entonces b es un elemento maximal de X, pero no un máximo.

Definición 1.33. Un conjunto parcialmente ordenado en el cual todo $A \subset X$ no vacío posee un elemento mínimo, se llama conjunto *bien ordenado*. Por ejemplo, $(\mathbb{Z}, \leq)$ no está bien ordenado.

1.5. Propiedades de los números reales

$(\mathbb{R}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, donde $\leq$ denota el orden usual en $\mathbb{R}$.

Definición 1.34. Si $A \subset \mathbb{R}$, se tiene:

1) si $u \in \mathbb{R}$ es tal que $a \leq u$ para cada $a \in A$, se dice que u es una *cota superior* de A;

2) la menor de las cotas superiores de A (es decir, u es cota superior de A y para cada z cota superior de A es $z \geq u$) es el *supremo* de A, y se denota $\sup(A)$;

3) si $l \in \mathbb{R}$ es tal que $a \geq l$ para cada $a \in A$, se dice que l es una *cota inferior* de A;

4) la mayor de las cotas inferiores de A (es decir, l es cota inferior de A y para cada z cota inferior de A es $z \leq l$) es el *ínfimo* de A, y se denota $\inf(A)$.

Teorema 1.13. ***(Axioma de la cota superior)*** *Si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente (es decir, existe $M \in \mathbb{R}$, tal que $M \geq a$, para cada $a \in A$), existe el supremo de A. Y en tal caso, $s = \sup(A)$ si y sólo si:*

(i) para cada $a \in A$, es $a \leq s$, y

(ii) para todo $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $a_\varepsilon > s - \varepsilon$.

Del axioma anterior, se deduce que:

Corolario 1.14. *Si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado inferiormente (es decir, existe $m \in \mathbb{R}$, tal que $m \leq a$, para cada $a \in A$), existe el ínfimo de A. Y entonces, $i = \inf(A)$ si y sólo si:*

(i) para cada $a \in A$, es $a \geq i$, y

(ii) para todo $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $a_\varepsilon < i + \varepsilon$.

Teorema 1.15. *$\mathbb{R}$ es arquimediano, es decir, el conjunto $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.*

Demostración: Si lo estuviera, existiría $r_0 \in \mathbb{R}$, tal que $n \leq r_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero $n_0 = [r_0] + 1 \in \mathbb{N}$, y $n_0 \not\leq r_0$. ∎

Del teorema 1.15 se deducen inmediatamente:

Corolario 1.16. ***(Propiedad arquimediana)*** *Para todo $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $0 < \frac{1}{n} < x$.*

Corolario 1.17. ***(Densidad de los racionales)*** *Dados dos números reales $x < y$, existe $r \in \mathbb{Q}$, tal que $x < r < y$.*

Demostración: Por la propiedad arquimediana (corolario 1.16), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < y - x$. El conjunto $\mathbb{M} = \{m \in \mathbb{N} : x < \frac{m}{n_0}\}$ es no vacío y está bien ordenado, es decir, existe $m_0 \in \mathbb{M}$ tal que $x < \frac{m_0}{n_0}$ y $x \geq \frac{m_0 - 1}{n_0}$. Es inmediato probar que además $\frac{m_0}{n_0} < y$. ∎

Corolario 1.18. ***(Propiedad de los intervalos de encaje)*** *Dada $\{[a_n, b_n] : n \in \mathbb{N}\}$, una familia de intervalos cerrados y encajados (es decir, si $n \leq m$, es $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$), entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.*

Demostración: Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, es $a_n < b_m$, luego para todo $m \in \mathbb{N}$, b_m es cota superior del conjunto $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Si $p = \sup(A)$, es claro que $p \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. ∎

1.6. Cardinalidad de conjuntos

Definición 1.35. Dos conjuntos se llaman *equipotentes*, si existe una correspondencia biyectiva entre ellos.

Definición 1.36. X se dice *finito* si existe $n \in \mathbb{N}$, tal que X es equipotente a $\{1, \cdots, n\}$. X es *infinito*, si no es finito, lo cual equivale a decir que es equipotente a un subconjunto propio de sí mismo. X es *numerable* si es equipotente a $\mathbb{N}$ y es *contable* si es finito o numerable.

Observación 1.3. Dos conjuntos finitos son equipotentes si y sólo si poseen el mismo número de elementos. No sucede lo mismo si X es infinito: $\mathbb{N}$ es equipotente al conjunto $\mathbb{P}$ de los números pares, y sin embargo $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$.

Lema 1.19. *La relación de equipotencia es una relación de equivalencia.*

Definición 1.37. A cada clase de equipotencia se le puede asignar un *número cardinal*, que es un objeto matemático ω tal que existe un conjunto X con $Card(X) = \omega$.

Definición 1.38. Un conjunto A es *de potencia menor o igual* que B, si existe una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ inyectiva, con lo cual $Card(A) \leq Card(B)$ (equivalentemente, si existe una aplicación $f\colon B \longrightarrow A$ sobreyectiva).

Definición 1.39. Dados dos números cardinales ω_1 y ω_2, se dice que $\omega_1 \leq \omega_2$, si existen conjuntos X e Y con $Card(X) = \omega_1$ y $Card(Y) = \omega_2$ y tales que la potencia de X es menor o igual a la potencia de Y. Se trata de una relación de orden. Si $\omega_1 \leq \omega_2$ y $\omega_1 \neq \omega_2$, se dice que ω_1 es estrictamente menor que ω_2.

Proposición 1.20. *Se verifican las siguientes propiedades:*

1) si X es contable y $A \subset X$, entonces A es contable;

2) si X no es contable y $X \subset Y$, entonces Y no es contable;

3) si X es infinito, existe $A \subset X$, numerable y propio.

Teorema 1.21. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *es numerable.*

Demostración: Se define la siguiente relación binaria: dados $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(m_1, n_1) \prec (m_2, n_2)$ si:

1) $m_1 + n_1 < m_2 + n_2$, o 2) $m_1 + n_1 = m_2 + n_2$ y $m_1 < m_2$.

$\preceq$ es un orden total, gracias al cual se pueden escribir los elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en una lista. La aplicación $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(m, n) = \frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2)+m$, asigna a cada elemento $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ el lugar que ocupa en esta lista, y es por lo tanto una biyección. ∎

Corolario 1.22. *Del teorema 1.21 se deduce:*

1) el producto cartesiano de una familia finita de conjuntos contables, es contable;

2) la unión de una familia contable de conjuntos contables es contable;

3) $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables.

Demostración: Para probar 3), basta con usar 2). $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$. Además, $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ se puede escribir como la unión numerable $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, donde $A_n = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\}$, que es equipotente a $\mathbb{Z}$. ∎

Contraejemplo 1.3. $\mathbb{R}$ no es numerable.

Demostración: Basta con demostrar que $[0,1]$ no es numerable. Si lo fuera, se escribiría $[0,1] = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Se construye una sucesión de intervalos encajados del modo siguiente: x_1 no puede pertenecer a los tres intervalos $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Sea $I_1 = [a_1, b_1]$ uno de estos tres intervalos, tal que $x_1 \notin I_1$. Se divide I_1 en tres intervalos de amplitud $\frac{1}{9}$: $\left[a_1, a_1 + \frac{1}{3}\right]$, $\left[a_1 + \frac{1}{3}, a_1 + \frac{2}{3}\right]$ y $\left[a_1 + \frac{1}{3}, b_1\right]$. De nuevo, existe uno de ellos $I_2 \subset I_1$, tal que $x_2 \notin I_2$. Se continúa de manera inductiva, obteniendo una sucesión de intervalos encajados $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, cada I_n de longitud $\frac{1}{3^n}$ y tal que $x_n \notin I_n$. Por la propiedad de los intervalos de encaje (corolario 1.18), existe $p \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset [0,1]$, lo que es imposible. ∎

El $Card(\emptyset) = 0$, es el cardinal mínimo. Sin embargo no existe un cardinal máximo:

Teorema 1.23. ***(de Cantor)*** *Para cada conjunto* X*,* $Card(X) < Card(\mathcal{P}(X))$*.*

Demostración: Si $X = \emptyset$, $Card(\mathcal{P}(X)) = 1$, pues $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$. Si $X \neq \emptyset$, es obvio que $Card(X) \leq Card(\mathcal{P}(X))$, porque la aplicación $h\colon X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ definida por $h(x) = \{x\}$ es inyectiva. Supongamos que $Card(X) = Card(\mathcal{P}(X))$, es decir, existe una aplicación $f\colon X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ biyectiva. Sea $A = \{x \in X : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$. Como f es sobreyectiva, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = A$. Si $x_0 \in A$, esto significaría que $x_0 \notin f(x_0) = A$, lo cual es imposible. Luego, es $x_0 \notin A$, lo cual significa que $x_0 \in f(x_0) = A$, imposible de nuevo. ∎

En particular, $Card(\mathbb{N}) = \aleph_0 < Card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0}$ (notación que proviene de la propiedad descrita en el ejercicio 9 del apartado 1.7). Puede probarse que $2^{\aleph_0} = Card(\mathbb{R}) = c$, que se llama el *cardinal del continuo*. De aquí se concluye que $\aleph_0 < c$.

Desde principios de siglo, se ha intentado en vano establecer si existe un número cardinal $\aleph_1$, entre $\aleph_0$ y c. Georg Cantor (1845-1918) hace la siguiente conjetura:

Teorema 1.24. ***(Hipótesis del continuo)*** $c = \aleph_1$*, es decir, no existe ningún conjunto* A*, tal que* $\aleph_0 < Card(A) < c$*.*

Paul Joseph Cohen (1934-2007) establece en 1963 que la hipótesis del continuo es indecidible: añadiendo como axioma su veracidad o su falsedad, los fundamentos de la Matemática siguen siendo coherentes.

1.7. Ejercicios

1.- Con ayuda del lenguaje simbólico, decidir si son correctas las siguientes deducciones:

a) Los gusanos reptan. Todo lo que repta se mancha. Luego, los gusanos están sucios.

b) Si aumenta la temperatura o cae un meteorito, los osos polares morirán de hambre. Se sabe que los osos polares van a sobrevivir, por lo tanto, caerá pronto un meteorito.

c) Ninguna pelota de tenis es de cristal. Ningún objeto de cristal es indestructible. Luego, ninguna pelota de tenis es indestructible.

d) Si se abandona la utilización de gasolina o se incrementa el uso de energía solar, la contaminación disminuirá. Si se abandona el uso de gasolina, el país entrará en crisis. La utilización de la energía solar no aumentará, a no ser que no haya crisis. Por lo tanto, la contaminación no va a disminuir.

e) Los profesores son sádicos. Algunos sádicos usan látigo. Por lo tanto, algunos profesores usan látigo.

f) Los caramelos son dulces. Ningún alimento dulce contiene sal. Luego, los caramelos no contienen sal.

g) Los pájaros silban. Algunos habitantes de Euskadi son pájaros. Luego, algunas criaturas de Euskadi silban.

h) Si no trabajo duro, me dormiré. Si estoy preocupado, no dormiré. Por lo tanto, si estoy preocupado, trabajaré duro.

i) Las nubes son esponjosas. Algunos objetos esponjosos son rosas. Luego, algunas nubes son rosas.

j) Los osos polares tocan el violín. Los violinistas no vuelan. Por lo tanto, los osos polares no vuelan.

k) Las tortugas ven CSI-Las Vegas. Algunas criaturas de Gálapagos son tortugas. Por lo tanto, algunos habitantes de Galápagos ven CSI-Las Vegas.

l) Las polillas salen de noche. Algunos caminantes nocturnos son vampiros. Por lo tanto, las polillas son vampíros.

m) Si Thor se enfada, hay tormentas. Está comenzando una tormenta. Por lo tanto, Thor está enfadado.

n) Si en Marte hubiera grandes cantidades de agua, podría haber vida. No hay grandes extensiones de agua en Marte. Por lo tanto, no hay vida en Marte.

ñ) Los buenos políticos son honestos. Juan es honesto. Juan sería un buen político.

o) Algunas personas no beben café. Los matemáticos son humanos. Por lo tanto, algunos matemáticos no beben café.

p) Ningún elefante sabe tricotar. Yo no sé tricotar. Luego, soy un elefante.

q) Algunos poetas son nerviosos. Hay gente nerviosa que se come las uñas. Luego, algunos poetas se comen las uñas.

r) Si hago estos ejercicios, aprenderé lógica. Ya he terminado de hacerlos... ¡Sé lógica!

2.- Negar los siguientes enunciados:

a) Los políticos son gordos y feos. b) Hay un matemático que sabe sumar.

c) Algunas personas de Sevilla tienen paraguas.

d) El Athletic de Bilbao ganará la Liga de fútbol.

e) Nadie en Euskadi habla swahili.

f) Al menos dos faraones egipcios eran ciegos.

g) Como mucho, la mitad de los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, son pares.

h) A veces, llueve en El Sahara. i) Siempre hace frío en Groenlandia.

j) Ni Alejandro Magno, ni Julio César eran pelirrojos.

k) $x \in A$ o $x \in B$. l) $x \in A$ y $x \in B$.

m) $x \in A$, pero $x \notin B$. n) $A \subset B$.

ñ) para cada $i \in I$, es $x \in A_i$. o) existe $i \in I$, tal que $x \in A_i$.

3.- Sea X el conjunto de los estudiantes de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la UPV/EHU, H el conjunto de los hombres, M el de la mujeres, C el de los estudiantes que van en coche a la Universidad, A el de los estudiantes que van en autobús a la Universidad, E el de los estudiantes de Matemáticas y F el de los estudiantes de Físicas. Describir los siguientes conjuntos: $X - H$, $X - M$, $X - C$, $X - A$, $X - E$, $X - F$, $H \cap C$, $H \cap A$, $H \cap E$, $H \cap F$, $M \cap C$, $M \cap A$, $M \cap E$, $M \cap F$, $C \cap A$, $C \cap E$, $C \cap F$, $A \cap E$, $A \cap F$, $E \cap F$, $M \cup H$, $H - M$, $H - C$, $H - A$, $H - E$, $H - F$, $H - M$, $M - H$, $M - C$, $M - A$, $M - E$, $M - F$, $C - A$, $C - E$, $C - F$, $A - C$, $A - M$, $A - H$, $A - E$, $A - F$, $E - H$, $E - M$, $E - C$, $E - A$ y $E - F$.

4.- Cuatro compañeros han faltado a la clase de Matemáticas en el Instituto. Delante del Jefe de Estudios y en presencia de su profesor, se defienden del modo siguiente:

Pedro: “No he faltado.”

Elena: “Lo admito, he faltado, pero estaba con Juan.”

Juan: "Yo también he faltado; pero no estaba con Elena, sino con Pedro."
María: "Yo estaba en clase, pero no he visto a Pedro."
El profesor: "Estaba concentrado en mis cosas, pero he visto a Pedro en clase."

¿Puedes ayudar al Jefe de Estudios, sabiendo que sólo tres de estas sentencias son ciertas?

5.- Traducir las siguientes frases del lenguaje natural en un lenguaje simbólico utilizando una o varias propiedades $\mathfrak{P}$. Negar cada enunciado y traducirlo al lenguaje natural:

a) No hay amor feliz. b) Una puerta está abierta o cerrada.

c) Ser o no ser. d) Las verdades son fáciles de decir.

e) Prefiero la poesía a la novela histórica.

6.- Probar la siguiente propiedad: Si $x \in \mathbb{R}$ y para cada $\varepsilon > 0$, es $|x| < \varepsilon$, entonces $x = 0$.

7.- Dado el conjunto $A = \{a, b\}$, ¿son válidas las siguientes expresiones?
(i) $a \in A$; (ii) $\{a\} \in A$; (iii) $\emptyset \in A$; (iv) $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$; (v) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.

8.- Sean A, B y C tres conjuntos finitos, de cardinales a, b y c, respectivamente. Sea $p = Card(A \cap B)$, $q = Card(B \cap C)$, $r = Card(A \cap C)$ y $s = Card(A \cap B \cap C)$. Calcular el cardinal de $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ y $A \cup B \cup C$.

9.- Se pide:

a) calcular $\mathcal{P}(X)$, si $X = \{1, 2\}$, $X = \{\emptyset\}$ y $X = \{1, 2, 3, 4\}$;

b) probar que si $Card(X) = n$, entonces $Card(\mathcal{P}(X)) = 2^n$;

c) probar que si $A \subset B$, entonces $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$. ¿Es cierto el recíproco?

10.- Si $A, B \subset X$, probar que son equivalentes las siguientes expresiones:

(i) $A \subset B$; (ii) $A \cap B = A$; (iii) $A \cup B = B$;

(iv) $B^c \subset A^c$; (v) $A \cap B^c = \emptyset$; (vi) $B \cup A^c = X$.

11.- Probar las propiedades siguientes para conjuntos, dando un contraejemplo en el caso de inclusión estricta:

a) $A \cup \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cup B_i)$; b) $A \cap \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cap B_i)$;

c) $A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$; d) $\bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j)$;

e) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)$; f) $\bigcap_{(i,j)\in I^2} (A_i \cup B_j) \subset \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B_i)$;

g) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B_i)$; h) $\bigcup_{i\in I} (A_i \cap B_i) \subset \bigcup_{(i,j)\in I^2} (A_i \cap B_j)$;

i) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)$;

j) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)$;

k) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} (A_i \times B_i)$;

l) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) - \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J} (A_i - B_j)$;

m) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) - \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J} (A_i - B_j)$.

12.- Para cada uno de los siguientes conjuntos de índices I y cada familia dada de conjuntos indicados por I, hallar los conjuntos pedidos:

a) si $I = \mathbb{R}^2$ y para cada $p \in I$, $S_p = \{p\}$, hallar $\bigcup_{p\in I} S_p$;

b) si $I = (0, \infty)$ y para cada $x \in I$, $C_x = [0, x]$, hallar $\bigcup_{x\in I} C_x$ y $\bigcap_{x\in I} C_x$;

c) si $I = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y para cada $r \in I$, B_r es el círculo de radio r y centro $(0, 0)$, hallar $\bigcup_{r\in I} B_r$ y $\bigcap_{r\in I} B_r$;

d) si $I = (0, 1)$ y para cada $r \in I$, N_r es el interior del círculo de radio r y centro $(0, 0)$, hallar $\bigcup_{r\in I} N_r$ y $\bigcap_{r\in I} N_r$;

e) si $I = [1,2]$ y para cada $x \in I$, $A_x = [\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}]$, hallar $\bigcup\limits_{x\in I} A_x$ y $\bigcap\limits_{x\in I} A_x$;

f) si $I = \mathbb{N}$ y para cada $n \in I$, $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, hallar $\bigcup\limits_{n\in I} A_n$ y $\bigcap\limits_{n\in I} A_n$;

g) si $I = \mathbb{N}$ y para cada $n \in I$, $B_n = (\frac{1}{n}, 1]$, hallar $\bigcup\limits_{n\in I} B_n$ y $\bigcap\limits_{n\in I} B_n$;

h) si $I = \mathbb{N}$ y para cada $n \in I$, $C_n = (-n, n)$, hallar $\bigcup\limits_{n\in I} C_n$ y $\bigcap\limits_{n\in I} C_n$.

13.- Dados $A, B \subset X$, probar:

a) $\chi_{A\cap B} = \chi_A{\cdot}\chi_B$; b) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$;

c) $\chi_{A-B} = \chi_A - \chi_{A\cap B}$; d) $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

14.- Sean $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow Z$ dos aplicaciones. Probar:

a) si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es, pero el recíproco no es cierto;

b) si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g también lo es, pero el recíproco no es cierto;

c) si $g \circ f$ es sobreyectiva y g es inyectiva, entonces f es sobreyectiva;

d) si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es, pero el recíproco no es cierto;

e) si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f también lo es, pero el recíproco no es cierto;

f) si $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva, entonces g es inyectiva.

15.- Sea $f\colon X \longrightarrow Y$; probar:

a) si existe $g\colon Y \longrightarrow X$, tal que $g \circ f = 1_X$, entonces f es inyectiva;

b) si existe $h\colon Y \longrightarrow X$, tal que $f \circ h = 1_Y$, entonces f es sobreyectiva;

c) f es biyectiva si y sólo si existen $g, h\colon Y \longrightarrow X$, tales que $g \circ f = 1_X$, $f \circ h = 1_Y$ y en tal caso $h = f^{-1} = g$.

16.- Sean dos conjuntos X_1, X_2 y para cada $i \in \{1,2\}$, $A_i \subset X_i$. Sea $p_i\colon X_1 \times X_2 \longrightarrow X_i$ la i-ésima proyección coordenada. Probar las siguientes propiedades:

a) $A_1 \times X_2 = p_1^{-1}(A_1)$, $X_1 \times A_2 = p_2^{-1}(A_2)$ y $A_1 \times A_2 = p_1^{-1}(A_1) \cap p_2^{-1}(A_2)$;

b) si $A \subset X_1 \times X_2$, entonces $A \subset p_1(A) \times p_2(A)$;

c) $p_i\,(A_1 \times A_2) = A_i$ ($i \in \{1, 2\}$).

17.- Sean $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) estudiar las funciones $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$, si tienen sentido;

b) estudiar el carácter sobreyectivo e inyectivo de f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$;

c) calcular $f(-5, 5]$, $g(-5, 5]$, $f^{-1}(-5, 5]$ y $g^{-1}(-5, 5]$.

18.- Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior para las funciones: $f\colon \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ y $g\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ dadas por: $f(x, y) = x^2 + y$ y $g(x) = (x, -2x)$.

19.- Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Se pide:

a) estudiar si f es inyectiva o sobreyectiva;

b) calcular $f((1, 3))$, $f([-2, 2])$, $f^{-1}((0, 1))$, $f^{-1}([-4, 4])$;

c) si $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación $g(x) = |x|$, determinar $f \circ g$ y calcular $(f \circ g)^{-1}((-2, 5])$.

20.- Probar que la aplicación $f\colon \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, definida por: $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ es biyectiva y calcular f^{-1}.

21.- Calcular $f(A_i)$ y $f^{-1}(B_i)$ ($i \in \{1, 2\}$), para $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, donde:

a) $f(x) = x^2$, $A_1 = (0, 2)$, $B_1 = (0, 4)$ y $B_2 = (-1, 0)$;

b) $f(x) = x^4$, $A_1 = (0, 2)$, $A_2 = \emptyset$, $B_1 = (0, 16]$ y $B_2 = (-1, 0]$;

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ (para $x > 0$), $A_1 = \mathbb{N}$, $B_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$ y $B_2 = \mathbb{N}$;

d) $f(x) = x^3 - 3x$, $A_1 = [0, \infty)$, $B_1 = (0, 2)$ y $B_2 = \{2\}$.

22.- Dados $x, y \in \mathbb{R}$, utilizando el carácter arquimediano de $\mathbb{R}$, probar:

a) si $x > 0$ e $y > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $nx > y$;

b) si $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $0 < \frac{1}{n} < x$;

c) si $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $n - 1 \leq x < n$.

Espacios topológicos

Comprendí que no la veía más, no por estar lejos, sino porque yo, sin saber cómo, me había dejado embotellar y estaba flotando simultáneamente por los adentros y las afueras de la Botella de Klein, botella que no tiene ni afueras ni adentros. Absurdo, absurdo, absurdo.

"La botella de Klein. Topología de la novela"
Enrique Anderson Imbert

2.1. Topología

La noción de topología generaliza algunas de las propiedades que poseen los intervalos abiertos en la recta real que, de hecho, son independientes de otras presentes en $\mathbb{R}$ como la suma, el orden o la distancia.

Definición 2.1. Una *topología* sobre un conjunto X es una familia $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ verificando:

(i) $\emptyset, X \in \tau$,

(ii) si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$,

(iii) si $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \tau$.

Los elementos de τ se llaman *abiertos* y el par (X, τ) es un *espacio topológico*.

Ejemplos 2.1. Algunos ejemplos fundamentales de espacios topológicos son:

1) Sobre X, $\tau_{ind} = \{\emptyset, X\}$ es la topología *indiscreta*.

2) Sobre X, $\tau_{dis} = \mathcal{P}(X)$ es la topología *discreta*.

3) Si X es infinito, $\tau_{cof} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : X - A$ es finito$\}$ es la topología *cofinita*.

4) Si X es infinito no contable, $\tau_{coc} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : X - A \text{ es contable}\}$ es la topología *cocontable*.

5) Si $X = \{a, b\}$, $\tau_{sier} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ es la topología *de Sierpinski*.

6) Si X y $A \subset X$, $\tau_A = \{\emptyset\} \cup \{B \subset X : A \subset B\}$ es la topología A*-inclusión* (observar que $\tau_{\emptyset} = \tau_{dis}$ y $\tau_X = \tau_{ind}$).

7) Si X y $A \subset X$, $\tau^A = \{X\} \cup \{B \subset X : A \cap B = \emptyset\}$ es la topología A*-exclusión* (observar que $\tau^{\emptyset} = \tau_{dis}$ y $\tau^X = \tau_{ind}$).

8) $\tau_{kol} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ es la topología de *Kolmogorov* sobre $\mathbb{R}$, y el par $(\mathbb{R}, \tau_{kol})$ es la *recta de Kolmogorov*.

9) Los *espacios métricos* son espacios topológicos (ver el apartado 2.5), por ejemplo la recta real $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

10) $\tau_{sca} = \{U \subset \mathbb{R} : U = A \cup B, A \in \tau_u, B \subset \mathbb{I}\}$ es la topología *"scattered"(esparcida)* sobre $\mathbb{R}$, y el par $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$ es la *recta "scattered"*.

Observación 2.1. Sobre un mismo conjunto se pueden definir distintas topologías, como se ha visto en los ejemplos 2.1.

Definición 2.2. Dadas τ_1 y τ_2 dos topologías sobre X, se dice que τ_1 es *menos fina* que τ_2 (o que τ_2 es *más fina* que τ_1) si $\tau_1 \subset \tau_2$. Si $\tau_1 \subset \tau_2$ o $\tau_2 \subset \tau_1$, se dice que las topologías son *comparables*.

Ejemplos 2.2. Algunos ejemplos de topologías comparables son:

1) Para cada X y toda topología τ sobre él, es $\tau_{ind} \subset \tau \subset \tau_{dis}$.

2) Sobre $\mathbb{R}$, es $\tau_{cof} \subset \tau_u$ y $\tau_{cof} \subset \tau_{coc}$; pero τ_{coc} y τ_u no son comparables.

3) Sobre $\mathbb{R}$, $\tau_{kol} \subset \tau_u \subset \tau_{sca}$.

2.2. Conjuntos abiertos y cerrados

Definición 2.3. En (X, τ), un conjunto $A \subset X$ se dice *cerrado*, si su complementario $X - A \in \tau$. Denotamos por $\mathcal{C}$ a la familia de cerrados en (X, τ).

El concepto de conjunto cerrado es así *dual* –no contrario– de la noción de conjunto abierto, y una topología puede especificarse a través de la familia de sus conjuntos cerrados $\mathcal{C}$, tomando complementarios. Y se prueba fácilmente:

Proposición 2.1. *En (X, τ), la familia de cerrados $\mathcal{C}$ verifica:*

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{C}$,

(ii) si $F, G \in \mathcal{C}$, *entonces* $F \cup G \in \mathcal{C}$,

(iii) si $\{F_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{C}$, *entonces* $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \in \mathcal{C}$.

Ejemplos 2.3. Retomando los ejemplos 2.1, tenemos:

1) En (X, τ_{ind}), es $\mathcal{C}_{ind} = \{\emptyset, X\}$. 2) En (X, τ_{dis}), es $\mathcal{C}_{dis} = \mathcal{P}(X)$.

3) Si X es infinito, $\mathcal{C}_{cof} = \{X\} \cup \{A \subset X : A$ es finito$\}$.

4) Si X es infinito no contable, $\mathcal{C}_{coc} = \{X\} \cup \{A \subset X : A$ es contable$\}$.

5) Si $X = \{a, b\}$, $\mathcal{C}_{sier} = \{\emptyset, X, \{b\}\}$.

6) Si X y $A \subset X$, $\mathcal{C}_A = \tau^A$. 7) Si X y $A \subset X$, $\mathcal{C}^A = \tau_A$.

8) $\mathcal{C}_{kol} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.

9) $\mathcal{C}_{sca} = \{U \subset \mathbb{R} : B = F \cap H, F \in \mathcal{C}_{us}, \mathbb{Q} \subset H\}$.

Observación 2.2. La propiedad de ser abierto o cerrado es independiente la una de la otra. Un conjunto puede ser simultáneamente abierto y cerrado, abierto y no cerrado, cerrado y no abierto o ninguna de las dos propiedades.

2.3. Base de una topología

Hay topologías que poseen demasiados abiertos y a veces es difícil especificarlos todos. Por ello, se introduce el siguiente concepto:

Definición 2.4. En (X, τ), una familia $\beta \subset \tau$ es una *base* de τ si para todo $U \in \tau$ y para cada $x \in U$, existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset U$. Los elementos de β se llaman *abiertos básicos*.

Lema 2.2. *Si β es base de τ, todo abierto puede escribirse como unión de básicos.*

Demostración: Para $U \in \tau$ y $x \in U$, existe $B_x \in \beta$, tal que $x \in B_x \subset U$. Claramente, es $U = \bigcup\limits_{x\in U} B_x$. ∎

Teorema 2.3. *Si X es un conjunto, $\beta \subset \mathcal{P}(X)$ es base de alguna topología τ_β sobre X, si y sólo si:*

(i) $X = \bigcup_{B\in\beta} B$, *y*

(ii) para cada $B_1, B_2 \in \beta$ y cada $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Y, en tal caso, $\tau_\beta = \{U \subset X :$ *existe* $\{B_i\}_{i\in I} \subset \beta : U = \bigcup_{i\in I} B_i\}$.

Ejemplos 2.4. Algunos ejemplos de bases de topología son:

1) Una topología es base de sí misma.

2) Sobre X, $\beta_{ind} = \{X\}$ es base de la topología indiscreta.

3) Sobre X, $\beta_{dis} = \{\{x\} : x \in X\}$ es base de la topología discreta. Además, por ejemplo, $\beta = \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$ es base de la topología discreta sobre $\mathbb{R}$.

4) Si $A \subset X$, $\beta_A = \{A \cup \{x\} : x \in X\}$ es base de la topología A-inclusión τ_A.

5) Si $A \subset X$, $\beta^A = \{\{x\} : x \in X - A\} \cup \{X\}$ es base de la topología A-exclusión τ^A.

6) $\beta_1 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$, $\beta_2 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\}$ y $\beta_3 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{I}\}$ son bases de la topología usual sobre $\mathbb{R}$.

7) $\beta_{sor} = \{[a,b) : a < b, a,b \in \mathbb{R}\}$ es base para *una* topología sobre $\mathbb{R}$, llamada *topología de Sorgenfrey*. El par $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$ se llama *recta de Sorgenfrey*. Observar que $[a,b) \in \mathcal{C}_{sor}$, ya que $\mathbb{R} - [a,b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty) = \left(\bigcup_{c<a} [c,a)\right) \cup \left(\bigcup_{d>b} [b,d)\right)$, es decir, es unión de abiertos básicos.

Como se ha visto en los ejemplos 2.4, diferentes bases pueden generar la misma topología. Esto sugiere la siguiente definición:

Definición 2.5. Dadas β_1 y β_2 dos bases para las topologías τ_1 y τ_2 sobre X, se dice que β_1 es *más fina* que β_2 si $\tau_2 \subset \tau_1$. Y son bases *equivalentes* si $\tau_2 = \tau_1$.

Observación 2.3. Si β_1 y β_2 son bases equivalentes, no tienen porque coincidir. Por ejemplo, $\beta_1 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\}$ y $\beta_2 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{I}\}$ son bases de la topología usual sobre $\mathbb{R}$, pero no son iguales.

Se pueden comparar topologías conociendo sólo sus bases. Intuitivamente, cuanto más pequeños sean los elementos de la base, más finas serán las topologías inducidas:

Teorema 2.4. *Sean β_1 y β_2 bases para las topologías τ_1 y τ_2 sobre X, respectivamente. Entonces, $\tau_2 \subset \tau_1$ si y sólo si para cada $B_2 \in \beta_2$ y cada $x \in B_2$, existe $B_1 \in \beta_1$, tal que $x \in B_1 \subset B_2$.*

Corolario 2.5. *Sean β_1 y β_2 bases para las topologías τ_1 y τ_2 sobre X, respectivamente. Entonces, $\tau_2 = \tau_1$ si y sólo si:*

(i) para cada $B_2 \in \beta_2$ y cada $x_2 \in B_2$, existe $B_1 \in \beta_1$, tal que $x_2 \in B_1 \subset B_2$, y

(ii) para cada $B_1 \in \beta_1$ y cada $x_1 \in B_1$, existe $B_2 \in \beta_2$, tal que $x_1 \in B_2 \subset B_1$.

Ejemplos 2.5. Aplicando este criterio, se comprueba que:

(i) $\tau_u \subset \tau_{sor}$ ya que para cada $(a, b) \in \beta_u$ y cada $x \in (a, b)$, existe $[x, b) \in \beta_{sor}$ tal que $x \in [x, b) \subset (a, b)$; y

(ii) $\tau_{sor} \not\subset \tau_u$, pues para $a \in [a, b) \in \beta_{sor}$, no existe $B \in \beta_u$ tal que $a \in B \subset [a, b)$.

2.4. Entornos y bases de entornos

Los entornos constituyen la manera más natural de describir las topologías. Esta herramienta indica que sucede *cerca* de cada punto x, es decir, se da una descripción *local* alrededor de x.

Definición 2.6. $N \subset X$ es un *entorno* del punto x en (X, τ) si existe un abierto $U \in \tau$, verificando $x \in U \subset N$. En esta definición, puede cambiarse el abierto por un abierto básico. La familia $\mathcal{N}_x$ de todos los entornos de x se llama *sistema de entornos* de x.

Teorema 2.6. *En (X, τ), el sistema de entornos de x verifica las siguientes propiedades:*

(N1) para cada $N \in \mathcal{N}_x$, es $x \in N$;

(N2) si $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_x$, entonces $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}_x$;

(N3) si $N \in \mathcal{N}_x$ y $N \subset M$, entonces $M \in \mathcal{N}_x$;

(N4) para cada $N \in \mathcal{N}_x$, existe $M \in \mathcal{N}_x$, tal que $N \in \mathcal{N}_y$ para cada $y \in M$; y además

(N5) $U \in \tau$ si y sólo si $U \in \mathcal{N}_x$ para cada $x \in U$.

Existe un recíproco de este teorema, en el siguiente sentido:

Teorema 2.7. *Sea X un conjunto. Si a cada $x \in X$ se le asigna una familia no vacía de subconjuntos $\mathcal{M}_x$ verificando las propiedades (N1) a (N4) del teorema 2.6, y se usa (N5) para definir el concepto de "conjunto abierto", se obtiene una topología τ sobre X, para la que $\mathcal{M}_x = \mathcal{N}_x$ en cada punto.*

Demostración: Sólo vamos a comprobar la igualdad $\mathcal{M}_x = \mathcal{N}_x$; el resto de la prueba es sencillo. Si $N \in \mathcal{N}_x$, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset N$. Pero $U \in \mathcal{M}_x$, luego $N \in \mathcal{M}_x$ por (N3). Con esto, queda demostrado que $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{M}_x$. Recíprocamente, para $M \in \mathcal{M}_x$ se define $U = \{y \in M : M \in \mathcal{M}_y\}$, que es no vacío, pues $x \in U \subset M$. Si demostramos que $U \in \tau$, será entonces $M \in \mathcal{N}_x$. Sea $y \in U$, es decir, $M \in \mathcal{M}_y$. Por (N4), existe $U_y \in \mathcal{M}_y$ tal que para cada $z \in U_y$ es $M \in \mathcal{M}_z$. Por lo tanto, $U_y \subset U$ y de (N3) se deduce que $U \in \mathcal{M}_y$. Como esto sucede para cada $y \in U$, se concluye que $U \in \tau$. ∎

Ejemplos 2.6. Para los ejemplos 2.3 tenemos:

1) En (X, τ_{ind}), para todo $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{ind} = \{X\}$.

2) En (X, τ_{dis}), para cada $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{dis} = \{N \subset X : x \in N\}$.

3) En (X, τ_{cof}), para todo $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{cof} = \{U \in \tau_{cof} : x \in U\}$.

4) En (X, τ_{coc}), para cada $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{coc} = \{U \in \tau_{coc} : x \in U\}$.

5) En $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$, $\mathcal{N}_a^{sier} = \{X, \{a\}\}$ y $\mathcal{N}_b^{sier} = \{X\}$.

6) En (X, τ_A), para todo $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{\tau_A} = \{N \subset X : \{x\} \cup A \subset N\}$.

7) En (X, τ^A), si $x \in A$ es $\mathcal{N}_x^{\tau^A} = \{X\}$ y si $x \notin A$ es $\mathcal{N}_x = \{N \subset X : x \in N\}$.

8) En $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$, es $\mathcal{N}_x^{sca} = \mathcal{N}_x^u$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $\mathcal{N}_x^{sca} = \{N \subset \mathbb{R} : x \in N\}$ si $x \in \mathbb{I}$.

No son necesarios todos los superconjuntos de los entornos de un punto para obtener una buena descripción del sistema de entornos. Bastará con una familia más pequeña:

Definición 2.7. En (X, τ), una *base de entornos o base local* de x es una familia $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x$ tal que, para cada $N \in \mathcal{N}_x$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ de modo que $B \subset N$. En cuanto se ha elegido una base de entornos de un punto (no hay una manera única de hacerlo), sus elementos se llaman *entornos básicos*. La familia $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ se llama *sistema fundamental de entornos*.

Ejemplos 2.7. Para los ejemplos 2.3 y 2.4 tenemos los siguientes sistemas fundamentales de entornos destacados:

1) En (X, τ_{ind}), para todo $x \in X$, se elige $\mathcal{B}_x^{ind} = \{X\}$.

2) En (X, τ_{dis}), para cada $x \in X$, se escoge $\mathcal{B}_x^{dis} = \{\{x\}\}$.

3) En $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$, se toma $\mathcal{B}_a^{sier} = \{\{a\}\}$ y $\mathcal{B}_b^{sier} = \{X\}$.

4) En (X, τ_A), para todo $x \in X$, se elige $\mathcal{B}_x^{\tau_A} = \{\{x\} \cup A\}$.

5) En (X, τ^A), $\mathcal{B}_x^{\tau^A} = \{X\}$ si $x \in A$ y $\mathcal{B}_x^{\tau^A} = \{\{x\}\}$ si $x \notin A$.

6) En $(\mathbb{R}, \tau_u)$, se elige $\mathcal{B}_x^u = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$.

7) En $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$, se toma $\mathcal{B}_x^{sor} = \{[x, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$.

8) En $(\mathbb{R}, \tau_{kol})$, se elige $\mathcal{B}_x^{kol} = \{(x-\varepsilon, \infty) : \varepsilon > 0\}$.

9) En $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$, se toma $\mathcal{B}_x^{sca} = \mathcal{B}_x^u$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $\mathcal{B}_x^{sca} = \{\{x\}\}$ si $x \in \mathbb{I}$.

10) $\mathcal{N}_x$ es una base local en x en (X, τ).

11) τ_{cof} y τ_{coc} no tienen bases de entornos destacadas.

Como consecuencia del teorema 2.6 se demuestra:

Teorema 2.8. *Sea $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ un sistema fundamental de entornos en (X, τ). Se verifica:*

(B1) para cada $B \in \mathcal{B}_x$, es $x \in B$;

(B2) si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, existe $B_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$;

(B3) para cada $B \in \mathcal{B}_x$, existe $B_0 \in \mathcal{B}_x$, tal que para cada $y \in B_0$, existe $B_y \in \mathcal{B}_y$ tal que $B_y \subset B$; y además

(B4) $U \in \tau$ si y sólo si para cada $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}_x$, tal que $B \subset U$.

Existe un recíproco de este teorema, en el siguiente sentido:

Teorema 2.9. *Sea X un conjunto. Si a cada $x \in X$ se le asigna una familia no vacía $\mathcal{D}_x$ de subconjuntos de X verificando (B1) a (B3) del teorema 2.8, y se usa (B4) para definir el concepto de "conjunto abierto", se obtiene una topología τ sobre X, para la que $\{\mathcal{D}_x\}_{x \in X}$ es un sistema fundamental de entornos en x.*

Dos formas naturales de construir bases locales son las siguientes:

Proposición 2.10. *En (X, τ), la familia de los entornos abiertos de un punto, $\mathcal{B}_x = \mathcal{N}_x \cap \tau$, es una base local en x.*

Proposición 2.11. *Sea (X, τ) y $\beta \subset \tau$. Entonces, β es base de τ si y sólo si, para cada $x \in X$, la familia $\mathcal{B}_x = \{B \in \beta : x \in B\}$ es una base local en x.*

Es posible comparar dos topologías estudiando sus entornos o sus entornos básicos:

Proposición 2.12. ***(Criterio de Hausdorff)*** *Sean τ_1 y τ_2 topologías sobre X y $\{\mathcal{B}_x^1\}_{x \in X}$, $\{\mathcal{B}_x^2\}_{x \in X}$ sistemas fundamentales de entornos asociados. Entonces, $\tau_1 \subset \tau_2$ si y sólo si para cada $x \in X$ y cada $B_1 \in \mathcal{B}_x^1$, existe $B_2 \in \mathcal{B}_x^2$ tal que $B_2 \subset B_1$. En las mismas condiciones, $\tau_1 \subset \tau_2$ si y sólo si para cada $x \in X$ es $\mathcal{N}_x^1 \subset \mathcal{N}_x^2$.*

2.5. Distancias. Espacios métricos

En el plano o el espacio euclídeos sabemos perfectamente lo que es la distancia entre dos puntos. Si X un conjunto, ¿cómo definir la distancia entre dos de sus elementos cuya naturaleza específica desconocemos? Para abstraer el concepto de *distancia*, hay que captar lo esencial de dicha noción, lo que da lugar a la siguiente definición:

Definición 2.8. Una *métrica* o *distancia* sobre un conjunto $X \neq \emptyset$ es una función definida sobre su producto cartesiano, $d \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, verificando:

(i) *positividad*: para cada $x, y \in X$, es $d(x, y) \geq 0$;

(ii) *propiedad idéntica*: dados $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;

(iii) *simetría*: para cada $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;

(iv) *desigualdad triangular*: para cada $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

La expresión $d(x, y)$ se lee *distancia de x a y*, y el par (X, d) se denomina *espacio métrico*.

Observación 2.4. En la definición 2.8, si se debilita la condición (ii) reemplazándola por

(ii)* para cada $x \in X$, $d(x, x) = 0$,

estamos contemplando la posibilidad de que existan $x \neq y$ en X con $d(x, y) = 0$. Entonces d recibe el nombre de *pseudométrica*.

Sobre un mismo conjunto pueden definirse distintas métricas, que dan lugar a diferentes espacios métricos.

Ejemplos 2.8. Los primeros ejemplos de espacios métricos son:

1) (X, d_{dis}) donde d_{dis} es la *métrica discreta* sobre X:

$$d_{\text{dis}}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y \end{cases}$$

2) El par $(\mathbb{R}, d_u)$, donde $d_u(x, y) = |x - y|$, se llama la *recta real* y d_u es la *distancia usual* o *euclídea*.

3) Sean (X_1, d_1), ..., (X_n, d_n) una familia de espacios métricos. Sean $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ y $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$. Podemos definir tres distancias sobre X:

a) $d_{\text{máx}} \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_{\text{máx}}(x, y) = \text{máx}\{d_i(x_i, y_i) : 1 \leq i \leq n\}$;

b) $d_{\mathrm{sum}}: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_{\mathrm{sum}}(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$;

c) $d_{\mathrm{u}}: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_{\mathrm{u}}(x,y) = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)}$, es la *distancia euclídea*.

La única propiedad de métrica que no es inmediata de comprobar es la desigualdad triangular para d_{u}. En este caso recibe el nombre de *desigualdad de Minkowski* (ver ejercicio **29** en el apartado 2.7).

2.6. Bolas abiertas y cerradas en espacios métricos

Definición 2.9. Sea un espacio métrico (X,d) y $r > 0$. Se llama:

1) *bola abierta* de centro x y radio r, al conjunto $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$;

2) *bola cerrada* de centro x y radio r, al conjunto $\overline{B}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$;

3) *esfera* de centro x y radio r, al conjunto $S(x,r) = \{y \in X : d(x,y) = r\}$.

Ejemplos 2.9. Damos algunos ejemplos de bolas en algunos espacios métricos:

(i) En (X, d_{dis}), $B(x,1) = \{x\}$, $B(x,2) = X$, $\overline{B}(x,1) = X$, $\overline{B}(x,\frac{1}{2}) = \{x\}$, $S(x,1) = X - \{x\}$ y $S(x,2) = \emptyset$.

(ii) En $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, $B(x,r) = (x-r, x+r)$, $\overline{B}(x,r) = [x-r, x+r]$ y $S(x,r) = \{x-r, x+r\}$.

(iii) En $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{máx}})$, la bola $B(x,r) = (x_1 - r, x_1 + r) \times \cdots \times (x_n - r, x_n + r)$ es el cubo de dimensión n, centrado en x y arista $2r$.

(iv) En $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{sum}})$, la bola $B(x,r)$ es el cubo de dimensión n centrado en x, de arista $2r$ y girado 45 grados.

(v) en $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{u}})$, $B(x,r)$ es la bola abierta de dimensión n, centrada en x y de radio r.

Proposición 2.13. *En un espacio métrico (X,d) se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) Para cada $x \in X$ y $r > 0$, es $B(x,r) \neq \emptyset \neq \overline{B}(x,r)$; pero $S(x,r)$ puede ser vacía.

(ii) Si $0 < r < s$, es $B(x,r) \subset B(x,s)$, $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B}(x,s)$, $\overline{B}(x,r) \subset B(x,s)$ y $S(x,r) \cap S(x,s) = \emptyset$.

(iii) $B(x,r) \cup S(x,r) = \overline{B}(x,r)$ y $B(x,r) \cap S(x,r) = \emptyset$.

(iv) Si $r_1, \ldots, r_n > 0$, $B(x,r_1) \cap \cdots \cap B(x,r_n) = B(x,r)$ y $\overline{B}(x,r_1) \cap \cdots \cap \overline{B}(x,r_n) = \overline{B}(x,r)$, donde $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$.

Observación 2.5. La intersección arbitraria de bolas no tiene porque serlo. Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B\left(0, \frac{1}{n}\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$, que no es una bola.

Una de las propiedades más importantes de los espacios métricos es la siguiente (ver ejercicio **4** en el apartado 2.7):

Teorema 2.14. ***(Propiedad de Hausdorff)*** *En un espacio métrico (X, d), dos puntos distintos se pueden* separar por bolas abiertas disjuntas.

Demostración: Si $x \neq y$, entonces $d(x, y) = r > 0$. Las bolas $B(x, \frac{r}{2})$ y $B(y, \frac{r}{2})$ son disjuntas. ∎

Teorema 2.15. *En (X, d), la familia de las bolas abiertas $\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$ es base para una topología sobre X, τ_d, que se dice inducida por la métrica d.*

Demostración: Hay que comprobar las condiciones del teorema 2.3:

(i) $X = \bigcup_{x\in X} B(x, 1)$, y

(ii) dadas $B(x_1, r_1)$ y $B(x_2, r_2)$ con $x_1, x_2 \in X$ y $r_1, r_2 > 0$, si $x \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$, es $B(x, r) \subset B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$, donde $r = \mathrm{mín}\{r_1 - d(x, x_1), r_2 - d(x, x_2)\}$. ∎

Definición 2.10. Con las notaciones del teorema 2.15, un espacio topológico (X, τ) es *metrizable* si existe una métrica d sobre X tal que $\tau = \tau_d$.

Observación 2.6. (i) Distintas métricas en X pueden generar la misma topología. En este caso, se dice que las métricas son *topológicamente equivalentes*.

(ii) Usando el teorema 2.14, se deduce que (X, τ_{ind}) no es metrizable.

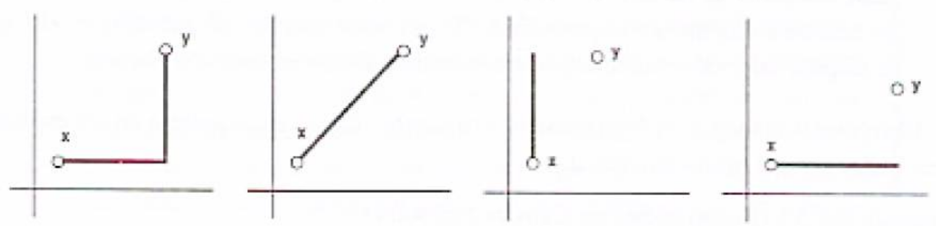
(iii) Si $(X, \|.\|)$ es un espacio vectorial normado, queda definida una métrica $d_{\|.\|}$ sobre X por $d_{\|.\|}(x, y) = \|x - y\|$ para $x, y \in X$.

Ejemplos 2.10. Sobre $\mathbb{R}^n$ pueden definirse tres métricas inducidas por la usual sobre la recta (ver los ejemplos 2.8). Si $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

a) la *distancia del máximo* (también llamada *distancia del ajedrez* en el caso $n = 2$ porque puede interpretarse como el mínimo número de movimientos que debe realizar la pieza del rey en un tablero de ajedrez para ir de una casilla a otra), $d_{\mathrm{máx}} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_{\mathrm{máx}}(x, y) = \mathrm{máx}\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}$;

b) la *distancia de la suma* (también llamada *distancia del taxi* o de *Manhattan* en el caso $n = 2$ porque puede entenderse como la longitud del recorrido de un taxi en una ciudad cuadriculada, es decir, en la que las calles se cortan en ángulo recto –estilo Manhattan– y realizando un solo giro de volante), $d_{\text{sum}} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_{\text{sum}}(x, y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;

c) la *distancia euclídea* $d_{\text{u}} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_{\text{u}}(x, y) = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$. El par $(\mathbb{R}^n, d_{\text{u}})$ se llama *espacio euclídeo de dimensión* n.



$d_{\text{sum}}(x, y)$, $d_{\text{u}}(x, y)$, y dos ejemplos de $d_{\text{máx}}(x, y)$

2.7. Problemas

1.- Sea X un conjunto. Una familia $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ es una *subbase* para alguna topología sobre X, si la familia de las intersecciones finitas de elementos de σ es una base para una topología sobre X. Se pide probar:

(i) Si $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ verifica que $X = \displaystyle\bigcup_{S \in \sigma} S$, entonces es subbase para alguna topología sobre X.

(ii) $\sigma = \{(-\infty, a), (b, \infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es una subbase para τ_u sobre $\mathbb{R}$.

(iii) $\sigma = \{(-\infty, a], [b, \infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es una subbase para τ_{dis} sobre $\mathbb{R}$.

2.- Sea $\{\tau_i\}_{i \in I}$ una familia de topologías sobre X. Se pide probar:

(i) $\displaystyle\bigcup_{i \in I} \tau_i$ es subbase para una topología, $\sup(\tau_i)$, la menor que es más fina que cada τ_i.

(ii) $\displaystyle\bigcap_{i \in I} \tau_i$ es una topología sobre X, $\text{ínf}(\tau_i)$, la mayor que es menos fina que cada τ_i.

(iii) Si $X = \{a, b, c\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ y $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$, encontrar $\sup\{\tau_1, \tau_2\}$ e $\inf\{\tau_1, \tau_2\}$.

3.- Una *base de cerrados* $\mathcal{F}$ en (X, τ) es una familia de cerrados, tal que todo cerrado en (X, τ) se puede escribir como la intersección de elementos de $\mathcal{F}$. Se pide probar:

(i) $\mathcal{F}$ es base de cerrados en (X, τ) si y sólo si $\beta = \{X - C : C \in \mathcal{F}\}$ es base de τ.

(ii) $\mathcal{F}$ es base de cerrados para algún espacio topológico si y sólo si:

(a) si $C_1, C_2 \in \mathcal{F}$, $C_1 \cup C_2$ se escribe como intersección de elementos de $\mathcal{F}$, y

(b) $\bigcap\limits_{C \in \mathcal{F}} C = \emptyset$.

4.- Un espacio topológico (X, τ) se llama:

(i) de *Fréchet* o T_1, si para cada $x \neq y$, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$;

(ii) de *Hausdorff* o T_2, si para cada $x \neq y$, existen U y V abiertos disjuntos, tales que $x \in U$ e $y \in V$; se suele decir que U y V *separan* x e y.

Se pide demostrar:

(i) Si (X, τ) es T_2, entonces es T_1. El recíproco no es cierto.

(ii) τ_{dis}, τ_{sca}, τ_{sor} y las topologías metrizables son T_2 (luego T_1). τ_{cof} y τ_{coc} son T_1, pero no T_2. τ_{ind}, τ_{sier}, τ_{kol}, τ_A y τ^A (para $A \neq X, \emptyset$) no son T_1 (luego no son T_2).

(iii) (X, τ) es T_1 si y sólo si para cada $x \in X$, es $\{x\} \in \mathcal{C}$.

5.- Sea (X, τ) un espacio topológico, donde X es un conjunto infinito. Para cada subconjunto A infinito de X, se sabe que $A \in \tau$. Probar que $\tau = \tau_{dis}$.

6.- Dar un ejemplo de espacio topológico no discreto, en el que $\tau = \mathcal{C}$.

7.- Describir todas las posibles topologías sobre un conjunto con dos o tres puntos.

8.- Sea X un conjunto infinito y $\tau_\infty = \{U \subset X : X - U \text{ es infinito}\} \cup \{X\}$. ¿Es τ_∞ una topología sobre X?

* **9.-** Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado. Para $\alpha, \beta \in X$, se consideran los conjuntos: $V_\alpha = \{x \in X : x < \alpha\}$, $B_\alpha = \{x \in X : x > \alpha\}$ y $M_{\alpha,\beta} = B_\alpha \cap V_\beta$. Se pide:

(i) Probar que la familia $\beta = \{V_\alpha, B_\alpha, M_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in X\}$ es una base para una topología τ_{ord} en X, llamada *topología del orden*. ¿Es (X, τ_{ord}) T_1? ¿Y T_2?

(ii) Probar que el conjunto $\{x \in X : \alpha \leq x \leq \beta\}$ es cerrado, para cada $\alpha, \beta \in X$.

(iii) Si se toma $\mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{N}$) con el orden usual, ¿cuál es la topología del orden asociada sobre $\mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{N}$)?

(iv) En $[0,1] \times [0,1]$ se considera el *orden lexicográfico*: $(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$ si y sólo si ($a_1 < b_1$ o $a_1 = b_1$ y $a_2 < b_2$). Describir los entornos de los puntos $(x, 0)$ (cuidado con $(0,0)$) y $(x, 1)$ (cuidado con $(0,0)$), si $x \in [0,1]$. Hacer lo mismo para los puntos (x, y), con $x, y \in (0,1)$. Probar que la topología del orden asociado no es comparable con la topología euclídea de $[0,1] \times [0,1]$.

(v) En $\{1,2\} \times \mathbb{N}$ con el orden lexicográfico, ¿cuál es la topología del orden inducida?

10.- Probar que la familia $\beta^* = \{(a,b) : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$, es una base para τ_u sobre $\mathbb{R}$. Demostrar que la familia $\beta' = \{[a,b) : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ genera una topología τ' sobre $\mathbb{R}$ estrictamente más fina que τ_u y estrictamente menos fina que τ_{sor}.

11.- En $\mathbb{R}$, se considera $\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(r, \infty) : r \in \mathbb{Q}\}$. Probar que si $S \subset \mathbb{R}$ está acotado inferiormente, es $\bigcup_{s \in S} (s, \infty) = (\text{ínf}(S), \infty)$. Concluir que τ no es una topología sobre $\mathbb{R}$.

12.- Se considera $\tau_{fort} = \{U \subset \mathbb{R} : p \notin U \text{ ó } \mathbb{R} - U \text{ finito}\}$, donde $p \in \mathbb{R}$. Probar que se trata de una topología sobre $\mathbb{R}$, la topología de *Fort*. Estudiar si es T_1 o T_2.

13.- En $\mathbb{R}^2$ se define la familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos:

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{F \subset \mathbb{R}^2 : F \text{ consta de un número finito de puntos y de rectas}\}.$$

Se pide probar:

(i) $\mathcal{F}$ es una familia de cerrados para alguna topología $\tau_{\mathcal{F}}$.

(ii) La topología $\tau_{\mathcal{F}}$ es la menor en la que puntos y rectas son subconjuntos cerrados.

(iii) Comparar $\tau_{\mathcal{F}}$ con la topología usual y la cofinita.

(iv) ¿Existe alguna topología sobre $\mathbb{R}^2$ en la que las rectas sean cerradas y los puntos no?

(v) ¿Existe alguna topología sobre $\mathbb{R}^2$ en la que los puntos sean cerrados y las rectas no?

*** 14.-** Vamos a dar una prueba topológica (debida a Hillel Fürstenberg en 1955) de la infinitud de los números primos. Sobre $\mathbb{Z}$ se define la familia $\beta = \{S_{ab} : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}\}$, donde $S_{ab} = \{an + b : n \in \mathbb{Z}\}$. Se pide probar:

(i) $S_{ab} \cap S_{cd} = S_{rs}$, donde $r = \text{mcm}\{a, c\}$. Deducir que β es base de una topología τ sobre $\mathbb{Z}$.

(ii) Todo conjunto abierto es infinito.

(iii) Para cada $a, b \in \mathbb{Z}$, S_{ab} es un conjunto cerrado.

(iv) Para cada entero $m \in \mathbb{Z} - \{-1, 1\}$ existe un primo p tal que $m \in S_{p0}$. Deducir que existen infinitos números primos.

15.- Sobre $\mathbb{N}$ definimos $\tau = \{U \subset \mathbb{N} : \text{si } n \in U \text{ y } m \text{ divide a } n, \text{ entonces } m \in U\}$. Probar que τ es una topología sobre $\mathbb{N}$, que no es τ_{dis} ¿Es $(\mathbb{N}, \tau)$ T_2?

16.- Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el conjunto $O_n = \{n, n+1, \dots\}$. Probar que $\tau = \{\emptyset\} \cup \{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una topología sobre $\mathbb{N}$. ¿Qué abiertos contienen al 1? ¿Es $(\mathbb{N}, \tau)$ T_2?

* **17.-** Sean $X = \{f : [0,1] \longrightarrow [0,1]\}$ y $A_S = \{f \in X : f(x) = 0, \forall x \in S\}$ para $S \subset [0,1]$. Probar que la familia $\beta = \{A_S : S \subset [0,1]\}$ es una base para una topología τ sobre X. ¿Es (X, τ) T_2?

18.- Sea X la familia de todos los polinomios de coeficientes reales y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $B_n = \{p \in X : p \text{ es de grado } n\}$. Probar que la familia $\beta = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base para una topología τ sobre X. ¿Es (X, τ) T_2?

* **19.-** Para cada $A \subset \mathbb{N}$, definimos $N(n, A) = Card\,(A \cap \{1, 2, \dots, n\})$. Sea:

$$\tau_{ap} = \left\{ U \subset \mathbb{N} : 1 \notin U \text{ ó } \left(1 \in U \text{ y } \lim_{n \to \infty} \frac{N(n, U)}{n} = 1 \right) \right\}.$$

Probar que τ_{ap} es una topología sobre $\mathbb{N}$, la *topología de Appert*. ¿Es T_2?

* **20.-** Sea $\mathcal{P}$ la colección de los polinomios en n variables reales. Para cada $P \in \mathcal{P}$, sea $Z(P) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : P(x_1, \cdots, x_n) = 0\}$. Se pide:

(i) Probar que $\{Z(P) : P \in \mathcal{P}\}$ es una base de cerrados para una topología sobre $\mathbb{R}^n$, τ_{zar}, llamada *topología de Zariski*, que es T_1, pero no T_2.

(ii) Si $n = 1$, $\tau_{zar} = \tau_{cof}$. Pero, si $n > 1$, estas dos topologías son distintas.

21.- Describir los sistemas de entornos de cada punto en los espacios topológicos:

(i) $X = \{a, b, d, c\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$;

(ii) $X = \{a, b, d, c, e\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$.

22.- Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que $\mathcal{B}_x = \{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de entornos en x para la topología inducida por la métrica.

23.- Sobre $\mathbb{R}$, se considera:

(1) si $x \neq 0$, $\mathcal{B}_x = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$,

(2) $\mathcal{B}_0 = \{B_{\varepsilon,n} : \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}\}$, donde $B_{\varepsilon,n} = (-\infty, -n) \cup (-\varepsilon, \varepsilon) \cup (n, \infty)$.

Probar que $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ es un sistema fundamental de entornos, que define una topología τ_{lac} sobre $\mathbb{R}$. El par $(\mathbb{R}, \tau_{lac})$ se llama *recta enlazada*. Comparar τ_{lac} con la topología usual de $\mathbb{R}$ y estudiar si es T_1 o T_2.

24.- Determinar si en $(\mathbb{R}, \tau_u)$ los siguientes intervalos son entornos de 0: $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $(-1, 0]$, $[0, \frac{1}{2})$ y $(0, 1]$. Probar que los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{I}$ no pueden ser entornos de ningún punto.

25.- Para $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, el semiplano superior cerrado, se considera:

(1) $\mathcal{B}_{(x,y)} = \{B_{us}((x,y), \varepsilon) \subset \Gamma : \varepsilon > 0$ "pequeño"$\}$, para $(x,y) \in \Gamma$, $y \neq 0$,

(2) $\mathcal{B}_{(x,0)} = \{\{(x,0)\} \cup \{B_{us}((x,\varepsilon), \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$.

Probar que $\{\mathcal{B}_{(x,y)}\}_{(x,y)\in\Gamma}$ es un sistema fundamental de entornos, que define una topología τ_{moo} sobre Γ. El par (Γ, τ_{moo}) se llama *plano de Moore*. Comparar τ_{moo} con la topología euclídea sobre Γ y estudiar si es T_1 o T_2.

* **26.-** Se considera $\mathbb{R}^{[0,1]} = \{f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\}$, y:

(i) se define $U(f, F, \delta) = \{g \in \mathbb{R}^{[0,1]} : \forall x \in F, |f(x) - g(x)| < \delta\}$, para $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$, $F \subset [0,1]$ finito y $\delta > 0$. Probar que $\{U(f, F, \delta) : F \subset [0,1]$ finito$, \delta > 0\}$ forma una base de entornos en f para una topología, τ_{tyc}, sobre $\mathbb{R}^{[0,1]}$, que se denomina *topología de Tychonof*.

(ii) Para $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ y $\varepsilon > 0$, sea $V(f, \varepsilon) = \{g \in \mathbb{R}^{[0,1]} : \forall x \in [0,1], |g(x) - f(x)| < \varepsilon\}$. Verificar que $\{V(f, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ forma una base de entornos en f para una topología, τ_{ca} sobre $\mathbb{R}^{[0,1]}$, llamada *topología caja*.

(iii) Comparar τ_{tyc} y τ_{ca} y estudiar si son T_1 o T_2.

* **27.-** Sean $L_n = \{(x, \frac{1}{n}) : x \in [0,1)\}$ si $n > 0$, $L_0 = \{(x,0) : x \in (0,1)\}$ y $X = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$.
Se considera:

(1) si $n \in \mathbb{N}$ y $x \neq 0$, $\mathcal{B}_{(x,\frac{1}{n})} = \{(x, \frac{1}{n})\}$,

(2) $\mathcal{B}_{(0,\frac{1}{n})} = \{U \subset L_n : (0, \frac{1}{n}) \in U, L_n - U$ es finito$\}$,

(3) $\mathcal{B}_{(x,0)} = \{\{(x,0)\} \cup \{(x, \frac{1}{n}) : n > 0\}\}$.

Probar que $\{\mathcal{B}_{(x,y)}\}_{(x,y)\in X}$ es un sistema fundamental de entornos para una topología sobre X.

28.- Sea $X = [0,1] \cup \{2\}$. Se definen los subconjuntos de X siguientes:

(1) $x \in (0,1)$, $\mathcal{B}_x = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$,

(2) $\mathcal{B}_0 = \{[0,\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$, (3) $\mathcal{B}_1 = \{(1-\varepsilon, 1] : \varepsilon > 0\}$ y

(4) $\mathcal{B}_2 = \{(a,1) \cup \{2\} : a \in [0,1)\}$.

Probar que $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ es un sistema fundamental de entornos para una topología sobre X.

29.- Dadas dos familias de números reales $\{a_i\}_{i=1}^n$, $\{b_i\}_{i=1}^n$, se pide demostrar:

(i) la *desigualdad de Cauchy-Schwartz*:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2},$$

(ii) la *desigualdad de Minkowski*:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

(iii) comprobar la desigualdad triangular en el caso de la distancia euclídea (ver los ejemplos 2.10).

* **30.-** Un espacio (X,τ) se dice:

(i) *primero numerable* o C_I, si todo punto posee una base local contable;

(ii) *segundo numerable* o C_{II}, si existe una base contable β de τ.

Se pide probar:

(i) Si (X,τ) es C_I, para cada $x \in X$ existe una base local contable y decreciente.

(ii) Si (X,τ) es C_{II}, entonces es C_I.

(iii) Estudiar si son C_I o C_{II}: (X,τ_{ind}), (X,τ_{dis}), $(\mathbb{R},\tau_{cof})$, $(\mathbb{R},\tau_{coc})$, (X,τ_A), (X,τ^A), $(\mathbb{R},\tau_{sor})$, $(\mathbb{R},\tau_{kol})$, $(\mathbb{R},\tau_{sca})$, los espacios métricos, etc.

Conjuntos en espacios topológicos

Abajo, en la playa, perfilada en la arena, la espiral da una vuelta y otra más, se expande en curvas crecientes, se replica en remolinos, en infinitos anillos de inexplicable belleza. Poco más tarde, con la pleamar, el dibujo y su misterio se habrán borrado.

"El libro de los viajes equivocados"
Clara Obligado

3.1. Interior de un conjunto

En (X, τ), si $A \subset X$, A no tiene porque ser un conjunto abierto, pero siempre contiene conjuntos abiertos, por lo menos el conjunto $\emptyset$. Por ello, tiene sentido definir:

Definición 3.1. Dado (X, τ) y $A \subset X$, el *interior* de A es el conjunto

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup \{U \subset X : U \in \tau \text{ y } U \subset A\}.$$

Si $x \in \overset{\circ}{A}$, se dice que x es un *punto interior* de A.

Lema 3.1. *En (X, τ), si $A \subset X$, es $\overset{\circ}{A} \in \tau$. Además $\overset{\circ}{A}$ es el mayor conjunto abierto contenido en A.*

Ejemplos 3.1. Para los ejemplos ya estudiados, tenemos:

1) En (X, τ_{ind}), para todo $A \neq X$, es $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ y $\overset{\circ}{X} = X$.

2) En (X, τ_{dis}), para todo $A \subset X$, es $\overset{\circ}{A} = A$.

3) En $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$, $\overset{\circ}{\{b\}} = \emptyset$ y $\overset{\circ}{\{a\}} = \{a\}$.

4) En (X, τ_A), si $B \not\in \tau_A$, es $\overset{\circ}{B} = \emptyset$.

5) En (X,τ^A), si $B \notin \tau^A$, es $\overset{\circ}{B} = B - A$.

6) En (X,τ_{cof}), si $A \notin \tau_{cof}$, es $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.

7) En (X,τ_{coc}), si $A \notin \tau_{coc}$, es $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.

8) En $(\mathbb{R},\tau_{kol})$, si A está acotado superiormente, es $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.

9) En $(\mathbb{R},\tau_{sca})$, para $\overset{\circ}{A} = (A \cap \mathbb{I}) \cup (\overset{\circ}{A}{}^{u} \cap \mathbb{Q})$.

El operador interior preserva las inclusiones:

Lema 3.2. *En (X,τ), si $A \subset B$, entonces $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.*

Teorema 3.3. *En (X,τ), se verifican las siguientes propiedades:*

(I1) para todo $A \subset X$, es $\overset{\circ}{A} \subset A$;

(I2) para todo $A \subset X$, es $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$;

(I3) para todo $A, B \subset X$, es $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$;

(I4) $\overset{\circ}{X} = X$; y además

(I5) $U \in \tau$ si y sólo si $\overset{\circ}{U} = U$.

Existe un recíproco de este teorema, en el siguiente sentido:

Teorema 3.4. *Sea X un conjunto. Dada una aplicación $Int\colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, que verifica (I1) a (I4) del teorema 3.3, si se define el concepto de conjunto abierto usando (I5), queda definida una topología τ sobre X, para la cual Int es el operador interior.*

Demostración: Hay que probar que $\tau = \{U \subset X : Int(U) = U\}$ es una topología sobre X. Para demostrar la última parte, $Int(A) \in \tau$ por (I2) y como $Int(A) \subset A$ por (I1), se concluye que $Int(A) \subset \overset{\circ}{A}$ aplicando el lema 3.1. Por otro lado, si $U \in \tau$ y $U \subset A$, es $U = Int(U) \subset Int(A)$ por (I3), luego $\overset{\circ}{A} \subset Int(A)$. ∎

Se puede caracterizar el interior de un conjunto a través de un sistema fundamental de entornos:

Proposición 3.5. *Sea $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ un sistema fundamental de entornos en (X,τ), entonces es $x \in \overset{\circ}{A}$ si y sólo si existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset A$.*

El interior de cualquier entorno es un conjunto no vacío:

Lema 3.6. *En (X,τ), $N \in \mathcal{N}_x$ si y sólo si $\overset{\circ}{N} \in \mathcal{N}_x$. En particular, un entorno no puede tener interior vacío.*

3.2. Clausura de un conjunto

Un conjunto A en un espacio (X,τ) no tiene porque ser cerrado. Pero siempre existen cerrados que lo contienen: por lo menos, el total X. Por esta razón tiene sentido definir:

Definición 3.2. Sea (X,τ) y $A \subset X$. La *clausura* de A es el conjunto:

$$\overline{A} = \bigcap\{F \subset X : F \text{ cerrado y } A \subset F\}.$$

Si $x \in \overline{A}$, x se llama punto *clausura* o *adherente* de A.

Lema 3.7. *Sean (X,τ) y $A \subset X$. $\overline{A}$ es un conjunto cerrado. Además es el menor cerrado que contiene a A.*

Ejemplos 3.2. En los ejemplos ya estudiados, tenemos:

1) En (X,τ_{ind}), para todo $A \neq \emptyset$, es $\overline{A} = X$.

2) En (X,τ_{dis}), para todo $A \subset X$, es $\overline{A} = A$.

3) En $(X = \{a,b\},\tau_{sier})$, $\overline{\{b\}} = \{b\}$ y $\overline{\{a\}} = X$.

4) En (X,τ_A), si $B \notin \mathcal{C}_A$, es $\overline{B} = X$.

5) En (X,τ^A), si $B \notin \mathcal{C}^A$, es $\overline{B} = B \cup A$.

6) En (X,τ_{cof}), si A es infinito, es $\overline{A} = X$.

7) En (X,τ_{coc}), si A no es contable, es $\overline{A} = X$.

8) En $(\mathbb{R},\tau_{kol})$, si A no está acotado superiormente, es $\overline{A} = X$.

9) En $(\mathbb{R},\tau_{sca})$, para $\overline{A} = (A - \mathbb{Q}) \cup (\overline{A}^u \cap \mathbb{Q})$.

Como en el caso del interior, el operador clausura preserva las inclusiones:

Lema 3.8. *En (X,τ), si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

Teorema 3.9. *En (X,τ), se verifican las siguientes propiedades:*

(C1) para todo $A \subset X$, es $A \subset \overline{A}$;

(C2) para todo $A \subset X$, es $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

(C3) para todo $A, B \subset X$, es $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(C4) $\overline{\emptyset} = \emptyset$; y además

(C5) $F \in \mathcal{C}$ si y sólo si $\overline{F} = F$.

Existe un recíproco de este teorema, en el siguiente sentido:

Teorema 3.10. *Sea X un conjunto. Dada una aplicación $Cl\colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, que verifica (C1) a (C4) del teorema 3.9 (se denomina un operador clausura de Kuratowski), si se define el concepto de conjunto cerrado usando (C5), queda definida una topología τ sobre X, para la cual Cl es el operador clausura.*

Demostración: Hay que probar que $\mathcal{F} = \{A \subset X : Cl(A) = A\}$ es la familia de cerrados para una topología τ sobre X. Entonces, $U \in \tau$ si y sólo si $X - U \in \mathcal{F}$. Para demostrar la última parte, por (C2), es $Cl(A) = Cl(Cl(A))$, luego $Cl(A) \in \mathcal{F}$ y como $A \subset Cl(A)$, se deduce que $\overline{A} \subset Cl(A)$ por el lema 3.7. Y si $A \subset F \in \mathcal{C}$, es $Cl(A) \subset Cl(F) = F$, por (C3), luego $Cl(A) \subset \overline{A}$. ■

Se puede caracterizar la clausura de un conjunto a través de un sistema fundamental de entornos:

Proposición 3.11. *Sea $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ un sistema fundamental de entornos en (X,τ), entonces es $x \in \overline{A}$ si y sólo si para cada $B \in \mathcal{B}_x$ es $B \cap A \neq \emptyset$.*

Los conceptos de interior y clausura son duales (no opuestos), como las nociones de abierto y cerrado:

Proposición 3.12. *Sean (X,τ) y $A \subset X$. Se cumple que $X - \overset{\circ}{A} = \overline{X - A}$ y $X - \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{X - A}}$.*

3.3. Puntos de acumulación y puntos aislados. Conjunto derivado

Definición 3.3. Fijado un sistema fundamental de entornos $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ en (X,τ), $x \in X$ es un *punto de acumulación* de $A \subset X$, si para cada $B \in \mathcal{B}_x$, es $(B - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Al conjunto de los puntos de acumulación de A se le llama *conjunto derivado* de A y se denota por A'. Si $x \in A - A'$, se dice que x es un *punto aislado* de A.

Observación 3.1. La definición 3.3 no depende del sistema fundamental de entornos elegido.

Teorema 3.13. *En (X,τ), se verifican las siguientes propiedades:*

(i) si $A \subset B$, es $A' \subset B'$;

(ii) para todo $A, B \subset X$, es $(A \cup B)' = A' \cup B'$;

(iii) $\emptyset' = \emptyset$;

(iv) $\overline{A} = A \cup A'$;

(v) $F \in \mathcal{C}$ si y sólo si $F' \subset F$.

Observación 3.2. Por la propiedad (v) del teorema 3.13, un conjunto con derivado vacío es cerrado.

Ejemplos 3.3. Para los ejemplos vistos anteriormente, tenemos:

1) En (X,τ_{ind}), para todo $A \neq \emptyset$ con más de un punto, es $A' = X$ y para $x \in X$, es $\{x\}' = X - \{x\}$.

2) En (X,τ_{dis}), para todo $A \subset X$, es $A' = \emptyset$.

3) En $(X = \{a,b\},\tau_{sier})$, $\{b\}' = \emptyset$ y $\{a\}' = \{b\}$.

4) En (X,τ_A), si $B \notin \mathcal{C}_A$, es $B' = X - \{x\}$ cuando $A \cap B = \{x\}$ y $B' = X$ en otro caso. Y si $B \in \mathcal{C}_A$, entonces $B' = \emptyset$.

5) En (X,τ^A), si B tiene más de un punto, es $B' = A$ y si $B = \{x\}$, es $B' = A - \{x\}$.

6) En (X,τ_{cof}), si A es infinito, $A' = X$ y si A es finito, $A' = \emptyset$.

7) En (X,τ_{coc}), si A es no contable, $A' = X$ y si A es contable, $A' = \emptyset$.

8) En $(\mathbb{R},\tau_{sca})$, para $A \subset \mathbb{R}$ y con las notaciones obvias, es $A' = A'^{u} \cap \mathbb{Q}$.

3.4. Frontera de un conjunto

Definición 3.4. En (X,τ), la *frontera* de $A \subset X$ es el conjunto $fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X-A}$. Si $x \in fr(A)$ se dice que x es un *punto frontera* de A.

Lema 3.14. *En (X,τ), si $A \subset X$, $fr(A)$ es un conjunto cerrado.*

Teorema 3.15. *En (X,τ), si $A \subset X$, se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $fr(A) = fr(X-A)$.

(ii) $fr(\emptyset) = fr(X) = \emptyset$.

(iii) $\overline{A} = A \cup fr(A) = \overset{\circ}{A} \cup fr(A)$. *(iv)* $fr(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$ y $\overset{\circ}{A} = A - fr(A)$.

(v) $X = \overset{\circ}{A} \cup fr(A) \cup (X - \overline{A})$ *y esta unión es disjunta.*

(vi) A es abierto si y sólo si $fr(A) \cap A = \emptyset$.

(vii) A es cerrado si y sólo $fr(A) \subset A$.

Ejemplos 3.4. Para los ejemplos conocidos, se verifica:

1) En (X,τ_{ind}), para todo $A \subset X$ propio, es $fr(A) = X$.

2) En (X,τ_{dis}), para todo $A \subset X$, es $fr(A) = \emptyset$.

3) En $(X = \{a,b\},\tau_{sier})$, $fr(\{b\}) = \{b\}$ y $fr(\{a\}) = \{b\}$.

4) En (X,τ_A), si $B \subset X$ es propio, $fr(B) = B$ si $B \in \mathcal{C}_A$, $fr(B) = X - B$ si $B \in \tau_A$ y $fr(B) = X$ en caso contrario.

5) En (X,τ^A), si $B \subset X$ es propio, es $fr(B) = A$.

6) En (X,τ_{cof}), para X infinito, $fr(A) = X - A$ si $A \in \tau_{cof}$, $fr(A) = A$ si $A \in \mathcal{C}_{cof}$ y $fr(A) = X$ en caso contrario.

7) En (X,τ_{coc}), para X no contable, $fr(A) = X - A$ si $A \in \tau_{coc}$, $fr(A) = A$ si $A \in \mathcal{C}_{coc}$ y $fr(A) = X$ en caso contrario.

8) En $(\mathbb{R},\tau_{sca})$, para $A \subset \mathbb{R}$, es $fr(A) = (\overline{B}^u \cap \mathbb{Q}) - (\overset{\circ}{B}{}^u \cap \mathbb{Q})$.

3.5. Problemas

1.- Sea (X,τ) un espacio topológico, $A, B \subset X$ y $\{A_i \subset X\}_{i\in I}$. Probar:

(i) $x \in A'$ si y sólo si $x \in \overline{A - \{x\}}$.

(ii) Si $A \cup B = X$, entonces $\overline{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$. (iii) Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $\overline{A} \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$.

(iv) $A \in \tau$ si y sólo si $\big(\forall B \subset X,$ es $A \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset\big)$.

(v) $A \in \tau$ si y sólo si $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$, para cada $B \subset X$. Y entonces, $\overline{\overline{B} \cap A} = \overline{B \cap A}$.

(vi) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$, $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$, $\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - B}$ y $\overset{\circ}{A} - \overset{\circ}{B} \supset \overset{\circ}{\overbrace{A - B}}$.

(vii) $\bigcup\limits_{i\in I} \overset{\circ}{A_i} \subset \overset{\circ}{\overbrace{\bigcup\limits_{i\in I} A_i}}$, $\bigcap\limits_{i\in I} \overset{\circ}{A_i} \supset \overset{\circ}{\overbrace{\bigcap\limits_{i\in I} A_i}}$, $\bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i}$, $\bigcap\limits_{i\in I} \overline{A_i} \supset \overline{\bigcap\limits_{i\in I} A_i}$, $\bigcup\limits_{i\in I} A_i' \subset (\bigcup\limits_{i\in I} A_i)'$ y $\bigcap\limits_{i\in I} A_i' \supset (\bigcap\limits_{i\in I} A_i)'$.

(viii) ¿pueden dos conjuntos diferentes poseer el mismo conjunto derivado? ¿el mismo interior? ¿la misma clausura? ¿la misma frontera? ¿y los cuatro a la vez?

2.- Sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre el conjunto X, tales que $\tau_2 \subset \tau_1$. Con las notaciones obvias, probar que para cada $A \subset X$, se tiene $\overset{\circ}{A}{}^2 \subset \overset{\circ}{A}{}^1$ y $\overline{A}^1 \subset \overline{A}^2$. ¿Se pueden comparar sus operadores derivados?

3.- Sea (X,τ) un espacio topológico. Probar:

(i) $\overset{\circ}{A} = \{x \in X : A \in \mathcal{N}_x\}$.

(ii) Si X no posee puntos aislados y $A \in \tau$, entonces A no posee puntos aislados.

(iii) Si $x \in A$ es aislado en $\overline{A}$, entonces x es aislado en A. ¿Es cierto el recíproco?

(iv) Si (X,τ) es T_1 y $x \in A'$, entonces A corta a cada entorno de x en un número infinito de puntos y el conjunto A' es cerrado.

(v) $x \in \overline{\{y\}}$ si y sólo si $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{N}_y$. Luego, $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_y$, si y sólo si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$.

(vi) (X,τ) es T_2 si y sólo si para cada $x \in X$, $\{x\} = \bigcap\limits_{N \in \mathcal{N}_x} \overline{N}$.

4.- En (X, τ), un abierto A se llama *regular*, si $A = \mathring{\overline{A}}$ y un cerrado A se llama *regular* si $A = \overline{\mathring{A}}$. Probar:

(i) Si A es cerrado (respectivamente, abierto), entonces $\mathring{A}$ (respectivamente, $\overline{A}$) es un abierto regular (respectivamente, un cerrado regular).

(ii) A es abierto regular si y sólo si $X - A$ es cerrado regular.

(iii) Si A y B son abiertos regulares (respectivamente, cerrados regulares), es $A \subset B$ si y sólo si $\overline{A} \subset \overline{B}$ (respectivamente, $\mathring{A} \subset \mathring{B}$).

(iv) Si A y B son abiertos regulares (respectivamente, cerrados regulares), entonces $A \cap B$ (respectivamente, $A \cup B$) es abierto regular (respectivamente, cerrado regular). En general $A \cup B$ (respectivamente, $A \cap B$) no es abierto regular (respectivamente, cerrado regular).

(v) En $(\mathbb{R}, \tau_u)$, hay abiertos que no son regulares.

5.- Sea (X, τ) un espacio topológico y $A, B \subset X$. Se pide probar:

(i) $fr(A) = \emptyset$ si y sólo si A es abierto y cerrado a la vez.

(ii) $fr(\mathring{A}) \subset fr(A)$ y $fr(\overline{A}) \subset fr(A)$, es decir, el operador frontera no preserva las inclusiones.

(iii) si $fr(A) \cap fr(B) = \emptyset$, se verifica que $\overbrace{A \cup B}^{\circ} = \mathring{A} \cup \mathring{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $fr(A \cap B) = (\overline{A} \cap fr(B)) \cup (fr(A) \cap \overline{B})$.

(iv) En general, $fr(A \cup B) \subset fr(A) \cup fr(B)$. Si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, se da la igualdad.

6.- Construir una tabla (con seis entradas) en que se relacionen los conceptos de conjunto abierto, cerrado, interior, clausura, frontera y entorno.

7.- Un conjunto D es *denso* en (X, τ), si $\overline{D} = X$, es decir, si es *topológicamente grande*. Probar que D es denso si verifica cualquiera de las propiedades equivalentes siguientes:

(i) D corta a cualquier abierto no vacío.

(ii) Si $F \in \mathcal{C}$ y $D \subset F$, es $F = X$.

(iii) D corta a cualquier abierto básico no vacío.

(iv) D corta a cualquier entorno de cualquier punto.

(v) D corta a cualquier entorno básico de cualquier punto.

8.- Sea D un conjunto denso en (X, τ). Probar:

(i) Si $E \supset D$, entonces E es también denso.

(ii) Si $U \in \tau$, entonces $U \subset \overline{D \cap U}$.

(iii) Si U es denso y abierto, entonces $D \cap U$ es denso.

(iv) La intersección finita de abiertos densos es un abierto denso.

(v) Si $\tau' \subset \tau$, entonces D también es denso en (X, τ').

9.- Sean $G_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y + k\}$ y la topología $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{G_k : k \in \mathbb{R}\}$. Calcular el interior, el derivado y la clausura de $\{(0, 0)\}$ y $\{(-x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

*** 10.-** En $([0, 1] \times [0, 1], \tau_{ord})$, donde τ_{ord} está inducida por el orden lexicográfico (problema **9** del apartado 2.7), calcular el interior, la clausura y la frontera de $\{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\}$, $\{(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}) : n \in \mathbb{N}\}$, $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$, $\{(x, \frac{1}{2}) : 0 < x < 1\}$ y $\{(\frac{1}{2}, y) : 0 < y < 1\}$.

*** 11.-** Sea $(\mathbb{N}, \tau_{ap})$ la topología de Appert (problema **19** del apartado 2.7). Caracterizar sus operadores interior y clausura.

*** 12.-** En (X, τ), se dice que A es:

(a) un F_σ*-conjunto*, si es la unión de una familia contable de conjuntos cerrados y

(b) un G_δ*-conjunto* si es la intersección de una familia contable de conjuntos abiertos.

Se pide probar:

(i) Todo cerrado es un F_σ-conjunto y todo abierto es un G_δ-conjunto.

(ii) En $(\mathbb{R}, \tau_u)$, $[0, 1]$ es un F_σ-conjunto y un G_δ-conjunto.

(iii) En $(\mathbb{R}, \tau_u)$, $\mathbb{Q}$ es un F_σ-conjunto, pero no es un G_δ-conjunto.

(iv) Si A es un F_σ-conjunto, existe una familia contable de cerrados $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$, tal que $F_k \subset F_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y de forma que $A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

(v) Si A es un G_δ-conjunto, existe una familia contable de abiertos $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, tal que $U_k \supset U_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y de forma que $A = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n$.

(vi) La unión contable y la intersección finita de F_σ-conjuntos, es un F_σ-conjunto.

(vii) La unión finita y la intersección contable de G_δ-conjuntos, es un G_δ-conjunto.

(viii) El complementario de un F_σ-conjunto es un G_δ-conjunto y viceversa.

(ix) ¿Cuáles son los G_δ-conjuntos en $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$?

(x) En $(\mathbb{R}, \tau_{coc})$, todo F_σ-conjunto es cerrado y todo G_δ-conjunto es abierto.

(xi) En un espacio métrico (X, d), todo cerrado es un G_δ-conjunto y todo abierto es un F_σ-conjunto.

* **13.-** Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia de conjuntos $\{A_i : i \in I\}$ se llama *localmente finita*, si cada $x \in X$ posee un entorno que corta sólo a una cantidad finita de los elementos de la familia. Probar:

(i) Si $\{A_i : i \in I\}$ es localmente finita, también lo es la familia $\{\overline{A_i} : i \in I\}$.

(ii) Si $\{A_i : i \in I\}$ es localmente finita, entonces $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$.

(iii) La unión de una familia localmente finita de cerrados, es un conjunto cerrado.

(iv) Si la familia de conjuntos $\{A_i : i \in I\}$ verifica que $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \in \mathcal{C}$, probar que entonces es $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$.

* **14.-** Sea $(\mathbb{Z}, \tau)$ el espacio topológico del problema **14** del apartado 2.7. Calcular el interior, la clausura y el derivado del conjunto de los números primos, de $\mathbb{N}$ y del conjunto de los números pares.

15.- Sea $(\mathbb{N}, \tau)$ el espacio topológico del problema **16** en el apartado 2.7. Calcular el interior, el derivado y la clausura de los conjuntos $\{n, n+1, \dots, n+p\}$ y $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$. Caracterizar los operadores clausura e interior.

* **16.-** Sea (X, τ) el espacio topológico del problema **17** del apartado 2.7. Calcular el interior, el derivado y la clausura de $\{f \in X : f(0) = 0\}$ y $\{f \in X : f(0) = 1\}$. Caracterizar el operador clausura en este espacio.

* **17.-** Sea (X, τ) el espacio topológico del problema **27** en el apartado 2.7. Calcular el interior, el derivado y la clausura de los conjuntos $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$, $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n > 1\}$ y $\{(x, 1) : 0 \leq x < \frac{1}{2}\} \cup \{(\frac{1}{2}, 0)\}$.

* **18.-** Sea el espacio métrico $([0, 1], d_u)$. Se divide $[0, 1]$ en tres intervalos de la misma amplitud, se elimina el intervalo abierto central (que se llamará intervalo abierto de tipo 1)

$\delta = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y se conservan los intervalos cerrados (que se llamarán de tipo 1) $\Delta_0 = [0, \frac{1}{3}]$ y $\Delta_1 = [\frac{2}{3}, 1]$. Se divide cada intervalo cerrado de tipo 1 en tres intervalos de la misma amplitud. Se eliminan de nuevo los intervalos abiertos centrales (intervalos abiertos de tipo 2), $\delta_0 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $\delta_1 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ respectivamente, y se conservan los intervalos cerrados (de tipo 2) resultantes $\Delta_{00} = [0, \frac{1}{9}]$, $\Delta_{01} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $\Delta_{10} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ y $\Delta_{11} = [\frac{8}{9}, 1]$. Se continúa de este modo el proceso, obteniendo para cada $n \in \mathbb{N}$, 2^n intervalos cerrados $\Delta_{i_1 \cdots i_n}$ de tipo n donde i_j es 0 ó 1. Cada intervalo cerrado de tipo n se divide en tres partes de la misma amplitud, conservando dos intervalos cerrados $\Delta_{i_1 \cdots i_n 0}$ y $\Delta_{i_1 \cdots i_n 1}$ (llamados intervalos cerrados de tipo $n+1$) y eliminando cada intervalo abierto $\delta_{i_1 \cdots i_n}$ de tipo $n+1$ que queda entre ellos.
Sea C_n la unión de los intervalos cerrados de tipo n y $C = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} C_n$. C se llama *conjunto perfecto de Cantor, discontinuo de Cantor* o *conjunto ternario de Cantor*. Se pide probar:

(i) C es cerrado y no vacío en $([0, 1], d_u)$.

(ii) La suma de las longitudes de todos los intervalos abiertos eliminados en el proceso es 1: en este sentido (el de la *medida*), el conjunto de Cantor es pequeño.

(iii) Todo punto de C posee una representación ternaria única $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ donde $a_n = 0, 2$.

Se concluye que C es un conjunto no contable: en este sentido (el del *cardinal*), el conjunto de Cantor es grande.

(iv) C no posee puntos aislados en $[0, 1]$ y $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

* **19.-** Un espacio (X, τ) se dice *separable* si existe $D \subset X$ denso y contable. Probar:

(i) Si (X, τ) es C_{II}, entonces es separable.

(ii) No existen relaciones entre los conceptos de C_I y la separabilidad.

(iii) Estudiar la separabilidad en los ejemplos del problema **30** del apartado 2.7.

Continuidad

Las matemáticas lo mataron y a la vez lo salvaron de la melancolía. Ejercitar la mente era lo que le mantenía de una sola pieza. Era un uso tan exclusivo que hasta se olvidaba de su propio cuerpo. A la vez un combustible y un veneno. No podía vivir ni con ellas ni sin ellas.

"La diosa de las pequeñas victorias"
Yannick Grannec

4.1. Aplicaciones continuas

Definición 4.1. Una función entre espacios topológicos $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ es *continua* en a, si para todo entorno $M \in \mathcal{N}^Y_{f(a)}$, existe $N \in \mathcal{N}^X_a$, tal que $f(N) \subset M$. Esta definición sigue siendo válida si se reemplazan los entornos por entornos básicos. Una función es *continua en A* si lo es en cada punto de A.

Proposición 4.1. *Sea $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ una función. Son equivalentes:*

(i) f es continua en X;

(ii) para cada $x \in X$ y cada entorno $M \in \mathcal{N}^Y_{f(x)}$, es $f^{-1}(M) \in \mathcal{N}^X_x$;

(iii) para cada $x \in X$ y cada $M \in \mathcal{B}^Y_{f(x)}$ (fijada una base local), es $f^{-1}(M) \in \mathcal{N}^X_x$;

(iv) para cada $U \in \tau_Y$, es $f^{-1}(U) \in \tau_X$;

(v) para cada $U \in \beta_Y$ (una vez elegida una base), es $f^{-1}(U) \in \tau_X$;

(vi) para cada $F \in \mathcal{C}_Y$, es $f^{-1}(F) \in \mathcal{C}_X$;

(vii) para cada $A \subset X$, es $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;

(viii) para cada $B \subset Y$, es $f^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)}$;

(ix) para cada $B \subset Y$, es $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}$.

Ejemplos 4.1. Algunos ejemplos de funciones continuas son:

1) Para cada espacio (Y, τ_Y) y toda función f, $f\colon (X, \tau_{dis}) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua.

2) Para cada espacio (X, τ_X) y toda función f, $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_{ind})$ es continua.

3) Toda aplicación constante $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua.

4) Sean $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua y las topologías $\tau_X \subset \tau'_X$ y $\tau'_Y \subset \tau_Y$. También es continua la aplicación $f\colon (X, \tau'_X) \longrightarrow (Y, \tau'_Y)$.

Proposición 4.2. *Sean $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ y $g\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$. Se verifica:*

(i) Si f es continua en $a \in X$ y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.

(ii) Si f es continua en X y g es continua en Y, entonces $g \circ f$ es continua en X.

Proposición 4.3. ***(Criterio de Hausdorff de comparación de topologías)*** *Dos topologías sobre X verifican que $\tau_2 \subset \tau_1$ si y sólo si la aplicación identidad $1_X\colon (X, \tau_1) \longrightarrow (X, \tau_2)$ es continua.*

4.2. Homeomorfismos. Propiedades topológicas

Definición 4.2. Una aplicación $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es un *homeomorfismo*, si f es biyectiva, continua y f^{-1} es continua. Se dice que (X, τ_X) es *homeomorfo* a (Y, τ_Y).

Lema 4.4. *Si $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ y $g\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$ son homeomorfismos:*

(i) $f^{-1}\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau_X)$ es un homeomorfismo.

(ii) $g \circ f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$ es un homeomorfismo.

Corolario 4.5. *La relación "ser homeomorfos" es una relación de equivalencia sobre la familia de los espacios topológicos.*

Proposición 4.6. *Si $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una función biyectiva, son equivalentes:*

(i) f es un homeomorfismo;

(ii) $U \in \tau_X$ si y sólo si $f(U) \in \tau_Y$;

(iii) $F \in \mathcal{C}_X$ si y sólo si $f(F) \in \mathcal{C}_Y$;

(iv) para cada $A \subset X$, es $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$;

(v) para cada $A \subset X$, es $f(\overset{\circ}{A}) = \overbrace{f(A)}^{\circ}$;

(vi) $V \in \tau_Y$ si y sólo si $f^{-1}(V) \in \tau_X$;

(vii) $G \in \mathcal{C}_Y$ si y sólo si $f^{-1}(G) \in \mathcal{C}_X$;

(viii) para cada $B \subset Y$, es $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$;

(ix) para cada $B \subset Y$, es $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) = \overbrace{f^{-1}(B)}^{\circ}$.

Definición 4.3. Una propiedad relativa a espacios topológicos se llama *topológica*, si se conserva bajo homeomorfismos.

Proposición 4.7. *De las propiedades que hemos visto hasta este momento, son topológicas T_1, T_2, C_I, C_{II}, la separabilidad y la metrizabilidad.*

Contraejemplo 4.1. Por ejemplo, la acotación –cuando tenga sentido hablar de este concepto, lo tiene en espacios métricos– es un ejemplo de propiedad no topológica: en $(\mathbb{R}, \tau_u)$, el intervalo $(0,1)$ y $\mathbb{R}$ son homeomorfos, el primer conjunto es acotado y el segundo no.

Observación 4.1. Desde el punto de vista de la topología, dos espacios homeomorfos son indistinguibles. La importancia de esta propiedad radica en que, cuando se trabaje con propiedades topológicas, es posible reemplazar espacios *complicados* por otros homeomorfos a ellos, pero más sencillos de manejar.

4.3. Sucesiones en espacios métricos: convergencia y continuidad secuencial

Definición 4.4. Una *sucesión* en $X \neq \emptyset$ es una aplicación $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$. Habitualmente, en vez de utilizar la notación funcional, se utiliza la notación con subíndices $f(n) = x_n$, y se habla de la sucesión f o $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. El punto x_n se llama *término* de la sucesión y $f(\mathbb{N}) = Rg\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ es el *rango* de la sucesión.

Observación 4.2. Destacamos a continuación algunas propiedades relativas a sucesiones:

(i) La función f definiendo una sucesión no tiene porque ser inyectiva, y por lo tanto, en una sucesión pueden existir términos iguales.

(ii) No hay que confundir el rango con la propia sucesión: si $X = \mathbb{R}$, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la *sucesión oscilante*, cuyo rango es finito $\{-1, 1\}$.

(iii) Si f es constante, es decir, existe $x \in X$ tal que $f(n) = x$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se habla de la *sucesión constante igual a* x y en este caso $f(\mathbb{N}) = \{x\}$.

(iv) Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ es $x_n = x$, se habla de la *sucesión semiconstante igual a* x (que es constante si $n_0 = 1$). El rango de una sucesión semiconstante es finito, aunque el recíproco no es cierto (por ejemplo, las sucesiones oscilantes).

Definición 4.5. Una *subsucesión* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión definida por $y_n = x_{\varphi(n)}$, donde $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente. Es decir, se eligen elementos distintos de la sucesión original, sin alterar el orden.

Lema 4.8. *Si* $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *es una función estrictamente creciente, es* $\varphi(n) \geq n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Lema 4.9. *Toda sucesión es una subsucesión de sí misma.*

Demostración: Basta con tomar como $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la función identidad. ∎

Lema 4.10. *Una subsucesión de una subsucesión de* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sigue siendo una subsucesión de* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostración: La composición de funciones estrictamente crecientes es una función estrictamente creciente. ∎

Definición 4.6. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d). Se dice que $x \in X$ es *límite* de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_\varepsilon$ es $d(x, x_n) < \varepsilon$. Se dice también que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* a x y se denota por $\{x_n\} \to x$.

Observación 4.3. De manera equivalente: $\{x_n\} \to x$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_\varepsilon$ es $x_n \in B(x, \varepsilon)$. Esta escritura permite generalizar la definición de convergencia a espacios topológicos: $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* a x en (X, τ), si para cada $N \in \mathcal{N}_x$, existe $n_N \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \geq n_N$, es $x_n \in N$ (pueden reemplazarse los entornos por entornos básicos). Pero, en espacios topológicos, las sucesiones no tienen buenas propiedades (ver problemas **35** y **36** del apartado 4.4).

Lema 4.11. *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* (X, d)*, tal que* $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$*. Entonces,* $\{x_n\}$ *converge a* x.

Teorema 4.12. *En* (X, d)*, una sucesión convergente lo hace de manera única.*

Demostración: Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a dos puntos distintos, $x \neq y$. Sea $d(x, y) = r > 0$. Por la propiedad de Hausdorff (teorema 2.14), es $B(x, \frac{r}{2}) \cap B(y, \frac{r}{2}) = \emptyset$, lo cual contradice la hipótesis de convergencia. ∎

Observación 4.4. Algunos ejemplos de sucesiones convergentes son:

(i) En cualquier espacio métrico, una sucesión semiconstante converge hacia la constante que se repite.

(ii) Si (X, d) es un espacio métrico discreto y τ_d es la topología discreta, las únicas sucesiones que convergen son las semiconstantes.

(iii) Las sucesiones oscilantes no convergen en ningún espacio métrico: en efecto sea la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $x_n = x$ para n par y $x_n = y \neq x$ para n impar. Si $\{x_n\} \to z$, para $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$ debería ser $x_n \in B(z, \varepsilon)$ para n suficientemente grande. Pero esto significaría que $x, y \in B(z, \varepsilon)$, lo que es imposible.

Teorema 4.13. *En (X, d), si $\{x_n\} \to x$, cualquier subsucesión $\{x_{\varphi(n)}\} \to x$.*

Demostración: Basta con utilizar el lema 4.8. ∎

Observación 4.5. El recíproco no es cierto: en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, la sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge, pero la subsucesión de los términos pares $\{(-1)^{2n}\} \to 1$.

Observación 4.6. Algunas observaciones referentes a la convergencia de sucesiones son:

(i) Si en (X, d) el rango de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es finito, existe una subsucesión constante $\{x_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, luego convergente.

(ii) Aunque $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sólo posea subsucesiones convergentes a un único punto, no se deduce que sea convergente: en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, la sucesión $\{1, 2, 1, 3, \dots, 1, n, \dots\}$ sólo posee subsucesiones convergentes a 1, pero ella no converge.

(iii) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee dos subsucesiones convergentes a puntos distintos, entonces no converge.

(iv) Cualquier reordenación de una sucesión convergente converge al mismo punto.

Teorema 4.14. *En (X, d), es $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $\{x_n\} \to x$.*

Demostración: Sea $x \in \overline{A}$. Como $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Hemos construido una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ que converge a x por el lema 4.11. La otra implicación es inmediata. ∎

Definición 4.7. Una función $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es *secuencialmente continua*, si dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a un punto $a \in X$, entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a) \in Y$.

Teorema 4.15. *La aplicación* $f\colon (X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ *es continua si y sólo si es secuencialmente continua.*

Demostración: Si f es continua en x, para cada $\varepsilon>0$, existe $\delta=\delta(x,\varepsilon)>0$ tal que $f\left(B_X(x,\delta)\right)\subset B_Y(f(x),\varepsilon)$. Si $\{x_n\}\to x$, para δ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para $n\geq n_0$ es $x_n\in B_X(x,\delta)$. Así, $f(x_n)\in B_Y(f(x),\varepsilon)$ para $n\geq n_0$, y queda probado que $\{f(x_n)\}\to f(x)$. Recíprocamente, supongamos que f no es continua en x. Existe $\varepsilon>0$ tal que para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $x_n\in B_X(x,\frac{1}{n})-\{x\}$ de modo que $f(x_n)\not\in B_Y(f(x),\varepsilon)$. Hemos construido de este modo una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x (ver lema 4.11), pero tal que $\{f(x_n)\}$ no converge a $f(x)$. ∎

4.4. Problemas

* **1.-** Dado un espacio topológico (X,τ), se introducen los conjuntos siguientes:

$$C(X)=\{f\colon (X,\tau)\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_{us}), f \text{ continua}\} \text{ y } C^*(X)=\{f\in C(X) : f \text{ es acotada}\}.$$

Para $f,g\colon X\longrightarrow\mathbb{R}$ y $x\in X$, se definen las funciones con dominio X y codominio $\mathbb{R}$ siguientes:

(a) la *suma*: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$,

(b) el *producto*: $(f.g)(x)=f(x).g(x)$,

(c) el *producto por un escalar* $a\in\mathbb{R}$: $(a.f)(x)=a.f(x)$,

(d) el *cociente*: si $f(x)\neq 0$ para cada $x\in X$, $\frac{1}{f}(x)=\frac{1}{f(x)}$,

(e) el *valor absoluto*: $|f|(x)=|f(x)|$, y

(f) las funciones *máximo y mínimo*: $m(x)=\text{mín}\{f(x),g(x)\}$ y $M(x)=\text{máx}\{f(x),g(x)\}$.

Se pide probar las siguientes propiedades:

(i) Las anteriores operaciones son internas en $C(X)$ y $C^*(X)$.

(ii) $C(X)$ y $C^*(X)$ son álgebras sobre $\mathbb{R}$.

(iii) $C^*(X)$ es un espacio vectorial normado, con las operaciones suma y producto escalar y la norma $\|f\|=\sup\{|f(x)| : x\in X\}$.

(iv) $C(X)$ y $C^*(X)$ son retículos con el orden parcial: $f\leq g$ si y sólo si $f(x)\leq g(x)$, para cada $x\in X$.

(v) Dados los espacios (X, τ_X) e (Y, τ_Y), toda aplicación continua $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ induce un homomorfismo entre las álgebras asociadas $F_f\colon C(Y) \longrightarrow C(X)$ (respectivamente, $F_f^*\colon C^*(Y) \longrightarrow C^*(X)$).

(vi) Si (X, τ_X) e (Y, τ_Y) son homeomorfos, ¿qué relación existe entre $C(X)$ y $C(Y)$? ¿Y entre $C^*(X)$ y $C^*(Y)$?

2.- En un espacio topológico (X, τ), probar:

(i) $\tau = \tau_{dis}$ si y sólo si para todo (Y, τ_Y) y toda $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, f es continua.

(ii) $\tau = \tau_{ind}$ si y sólo si para todo (Y, τ_Y) y toda $f\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau)$, f es continua.

3.- Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación continua y sobreyectiva. Se dice que $U \subset X$ es un conjunto *saturado* si existe $V \subset Y$ tal que $U = f^{-1}(V)$. Probar que todo abierto de (Y, τ_Y) es la imagen por f de un abierto saturado de (X, τ_X). Probar la propiedad análoga para cerrados.

4.- Si χ_A es la función característica de A, probar:

(i) $\chi_A\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ es continua en x si y sólo si $x \notin fr(A)$.

(ii) $\chi_A\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ es continua en X si y sólo si A es abierto y cerrado en (X, τ).

*** 5.-** Caracterizar las funciones continuas $f\colon (\mathbb{R}, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{coc})$.

6.- Dados los conjuntos $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{a, b\}$ y las topologías sobre ellos $\tau_X = \{\emptyset, X, \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$ y $\tau_Y = \{\emptyset, Y, \{a\}\}$, se pide:

(i) ¿Cuántas funciones hay $f\colon X \longrightarrow Y$? ¿Cuántas son inyectivas? ¿Y sobreyectivas?

(ii) encontrar todas las funciones continuas $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$.

7.- Dado $x \in \mathbb{R}$, se llama *parte entera de* x, $[x]$, al mayor entero que es menor o igual que x. Estudiar la continuidad de la función $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{sor}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$, si $f(x) = [x]$.

8.- Sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre X y (Y, τ_Y) un espacio topológico. Probar:

(i) Si $\tau = \inf\{\tau_1, \tau_2\}$, entonces la aplicación $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua si y sólo si $f\colon (X, \tau_i) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua, para $i = 1, 2$.

(ii) Si $\tau = \sup\{\tau_1, \tau_2\}$, entonces la aplicación $f\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau)$ es continua si y sólo si $f\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau_i)$ es continua, para $i = 1, 2$.

*** 9.-** Sea $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ continua. Probar que para cada F_σ-conjunto (respectivamente, G_δ-conjunto) $B \subset Y$, el conjunto $f^{-1}(B)$ es un F_σ-conjunto (respectivamente, G_δ-conjunto). Para las definiciones, ver el problema **12** del apartado 3.5.

*** 10.-** Encontrar una sucesión de funciones continuas $\{f_n\colon (\mathbb{R},\tau_{us}) \longrightarrow ([0,1],\tau_{us})\}_{n\in\mathbb{N}}$, cuyo supremo no sea una función continua.

11.- Sea $(\mathbb{N},\tau)$ el espacio topológico del problema **15** en el apartado 2.7. Probar que $f\colon (\mathbb{N},\tau) \longrightarrow (\mathbb{N},\tau)$ es continua si sólo si (si m divide a n, entonces $f(m)$ divide a $f(n)$).

*** 12.-** Una aplicación $f\colon (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_u)$ es *semicontinua inferiormente* (respectivamente, *semicontinua superiormente*), si para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe $V \in \mathcal{N}_x$ tal que para cada $y \in V$ es $f(y) > f(x) - \varepsilon$ (respectivamente, $f(y) < f(x) + \varepsilon$). Probar:

(i) $f\colon (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_u)$ es continua si y sólo si es semicontinua inferior y superiormente.

(ii) Sean las topologías sobre $\mathbb{R}$, τ_{kol} y $\tau_{scs} = \{\emptyset,\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\}$. Entonces, $f\colon (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_u)$ es semicontinua inferiormente (respectivamente, semicontinua superiormente) si y sólo si $f\colon (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_{kol})$ (respectivamente, $f\colon (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_{scs})$) es continua.

(iii) Sea $\{f_i\colon (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_u)\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones semicontinuas inferiormente (respectivamente, semicontinuas superiormente). Se supone que $I \neq \emptyset$ y que para cada $x \in X$ el conjunto $\{f_i(x) : i \in I\}$ está acotado superiormente (respectivamente, acotado inferiormente) en $\mathbb{R}$. Entonces, la aplicación $f\colon (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_u)$ definida por $f(x) = \sup\limits_{i\in I} f_i(x)$ (respectivamente, $f(x) = \inf\limits_{i\in I} f_i(x)$) es semicontinua inferiormente (respectivamente, semicontinua superiormente).

(iv) Si $A \subset X$, χ_A es semicontinua inferiormente (respectivamente, semicontinua superiormente) si y sólo si $A \in \tau$ (respectivamente, $A \in \mathcal{C}$).

13.- Una función $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es *abierta* si para cada $U \in \tau_X$, es $f(U) \in \tau_Y$. Y es *cerrada*, si para cada $F \in \mathcal{C}_X$, es $f(F) \in \mathcal{C}_Y$. Probar:

(i) No hay ninguna relación entre las nociones de función continua, abierta y cerrada.

(ii) Si $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es cerrada, dado $B \subset Y$ y $U \in \tau_X$ tal que $f^{-1}(B) \subset U$, existe $V \in \tau_Y$, tal que $B \subset V$ y $f^{-1}(V) \subset U$.

(iii) Si $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es abierta, dado $B \subset Y$ y $F \in \mathcal{C}_X$ tal que $f^{-1}(B) \subset F$, existe $G \in \mathcal{C}_Y$, tal que $B \subset G$ y $f^{-1}(G) \subset F$.

14.- Sean $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ y $g\colon (Y,\tau_Y)\longrightarrow(Z,\tau_Z)$. Probar:

(i) Si f y g son abiertas (respectivamente, cerradas), entonces $g\circ f$ es abierta (respectivamente, cerrada).

(ii) Si $g\circ f$ es abierta (respectivamente, cerrada) y f es continua y sobreyectiva, entonces g es abierta (respectivamente, cerrada).

(iii) Si $g\circ f$ es abierta (respectivamente, cerrada) y g es continua e inyectiva, entonces f es abierta (respectivamente, cerrada).

15.- Sea $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ continua y abierta. Probar:

(i) Si $\mathcal{B}_x$ una base local en el punto x, $f(\mathcal{B}_x)$ es base local en $f(x)$.

(ii) Si además f es sobreyectiva y β es base de τ_X, entonces $f(\beta)$ es base de τ_Y.

16.- Sea $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ una función. Probar:

(i) f es abierta si y sólo si para cada $A\subset X$, es $f(\overset{\circ}{A})\subset\overset{\circ}{\overbrace{f(A)}}$.

(ii) f es cerrada si y sólo si para cada $A\subset X$, es $f(\overline{A})\supset\overline{f(A)}$.

(iii) Si f es biyectiva, es un homeomorfismo si y sólo si es continua y abierta.

(iv) Si f es biyectiva, es un homeomorfismo si y sólo si es continua y cerrada.

*** 17.-** Sea $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ una aplicación sobreyectiva y cerrada. Probar que para cada $U\in\tau_X$, se verifica que $fr(f(\overline{U}))\subset f(\overline{U})\cap f(X-U)$.

18.- Sea $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ una aplicación. Probar que son equivalentes:

(i) f es cerrada;

(ii) si $U\in\tau_X$, entonces $\{y\in Y : f^{-1}(y)\subset U\}\in\tau_Y$;

(iii) si $F\in\mathcal{C}_X$, entonces $\{y\in Y : f^{-1}(y)\cap F\neq\emptyset\}\in\mathcal{C}_Y$.

19.- Probar que (X,τ_{dis}) e (Y,τ_{dis}) son homeomorfos si y sólo si X e Y poseen el mismo cardinal.

20.- Dar un ejemplo de dos espacios topológicos (X,τ_X) e (Y,τ_Y) no homeomorfos, pero tales que exista una aplicación entre ellos, continua y biyectiva.

21.- Si $n\in\mathbb{Z}$, se define sobre $\mathbb{R}$ la topología τ_n, dada por la base $\beta_n=\beta_u\cup\{\{n\}\}$. Probar que $\tau_1\neq\tau_2$, pero que $(\mathbb{R},\tau_1)$ y $(\mathbb{R},\tau_2)$ son espacios homeomorfos.

22.- Probar las siguientes propiedades:

(i) Toda aplicación sobreyectiva $f\colon (\mathbb{R},\tau_{cof})\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_u)$ es cerrada.

(ii) $(\mathbb{R},\tau_u)$ y $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ no son homeomorfos.

(iii) Toda aplicación $f\colon (\mathbb{R},\tau_u)\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_u)$ biyectiva y continua, es abierta.

(iv) Toda aplicación sobreyectiva $f\colon (X,\tau_{cof})\longrightarrow(Y,\tau_{cof})$ es abierta y cerrada.

23.- Sea $X\neq\emptyset$ y $p,q\in X$. Sea $A=\{p\}$ y τ^A la topología A-exclusión. Estudiar la continuidad de la función $f\colon ([0,1],\tau_u)\longrightarrow(X,\tau^A)$ dada por $f(x)=p$ si $x=0$ y $f(x)=q$ si $x\neq 0$.

*** 24.-** Probar que la bola cerrada $(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\},\tau_u)$ y el cuadrado $(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\leq 1, |y|\leq 1\},\tau_u)$ son homeomorfos.

*** 25.-** En este ejercicio se trata de definir la *proyección estereográfica*.

(i) La circunferencia unidad en el plano euclídeo es $\mathbb{S}^1=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1^2+x_2^2=1\}$. Dado $(a_1,a_2)\in\mathbb{S}^1-\{(0,1)\}$, se considera la recta que pasa por (a_1,a_2) y $(0,1)$. Esta recta corta al eje de abscisas en el punto $\left(\frac{a_1}{1-a_2},0\right)$. Se define la aplicación $h\colon (\mathbb{S}^1-\{(0,1)\},\tau_u)\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_u)$ por $h(a_1,a_2)=\frac{a_1}{1-a_2}$. Probar que h es un homeomorfismo: es la *proyección estereográfica*.

(ii) Análogamente, para $n\geq 1$, la esfera unidad en el espacio euclídeo de dimensión $n+1$ se define por $\mathbb{S}^n=\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} : x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2=1\}$. Probar que la aplicación $h\colon (\mathbb{S}^n-\{(0,\dots,0,1)\},\tau_u)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\tau_u)$, dada por $h(a_1,\dots,a_{n+1})=\left(\frac{a_1}{1-a_{n+1}},\dots,\frac{a_n}{1-a_{n+1}}\right)$, es un homeomorfismo: es la *proyección estereográfica*.

*** 26.-** Probar que el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n,\tau_u)$ es homeomorfo al subespacio $(\mathbb{E}^n,\tau_u)$, donde $\mathbb{E}^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1^2+\cdots+x_n^2<1\}$.

*** 27.-** Probar que el n-símplice unidad (Δ^n,τ_u), donde:

$$\Delta^n=\{(x_1,\cdots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} : x_i\geq 0,\ \forall i\in\{1,\cdots,n+1\},\ x_1+\cdots+x_{n+1}=1\},$$

es homeomorfo al cubo n-dimensional $([0,1]^n,\tau_u)$.

28.- Probar las siguientes propiedades:

(i) En $(\mathbb{R},\tau_u)$, todos los intervalos abiertos son homeomorfos.

(ii) No son homeomorfos $((0,1),\tau_u)$ y $([0,1],\tau_u)$ (hay que usar técnicas de conexión o compacidad).

(iii) $((0,1), \tau_{dis})$ y $([0,1], \tau_{dis})$ son homeomorfos.

(iv) $(\mathbb{N}, \tau_u)$ y $(\mathbb{Q}, \tau_u)$ no son homeomorfos.

(v) $(\mathbb{S}^1, \tau_u)$ no es homeomorfa a $((0,1), \tau_u)$ (hay que usar técnicas de conexión o compacidad).

*** 29.-** Probar que los espacios euclídeos siguientes son dos a dos homeomorfos:

(i) el cilindro vertical $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$,

(ii) el plano privado del origen $Z = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$,

(iii) la corona circular $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$,

(iv) la esfera privada de los polos norte y sur, $U = \mathbb{S}^2 - \{N, S\}$, donde $N = (0,0,1)$ y $S = (0,0,-1)$,

(v) el cono privado de su vértice $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$.

*** 30.-** Probar que el primer cuadrante del plano $(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}, \tau_u)$ y el semiplano $(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}, \tau_u)$ son homeomorfos.

31.- Probar que las siguientes son propiedades topológicas:

(i) X es equipotente a $\mathbb{N}$.

(ii) La topología sobre X tiene el cardinal de $\mathbb{N}$.

(iii) Existe $A \subset X$, equipotente a $\mathbb{N}$ y denso.

(iv) X es metrizable.

No son propiedades topológicas:

(i) La topología sobre X está generada por una métrica d fija.

(ii) X es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

32.- Sean dos aplicaciones $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ y $g\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau_X)$ continuas, tales que $f \circ g = 1_Y$ y $g \circ f = 1_X$. Probar que f y g son homeomorfismos.

33.- Sean $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ un homeomorfismo y $g\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$. Probar que g es continua si y sólo si $g \circ f$ lo es.

*** 34.-** Sean (X,τ) y $\mathcal{H}_{(X,\tau)} = \{h\colon (X,\tau) \longrightarrow (X,\tau) : h \text{ homeomorfismo}\}$. Probar:

(i) Con la composición de funciones como operación, $\mathcal{H}_{(X,\tau)}$ es un grupo.

(ii) Si $X = [0,1]$ y $A = (0,1) \subset X$, sea $\varphi\colon \mathcal{H}_{(X,\tau)} \longrightarrow \mathcal{H}_{(A,\tau_A)}$ definida por $\varphi(h) = h|_A$. Entonces, φ es un isomorfismo de grupos, aunque los espacios involucrados (X,τ) y (A,τ_A) no son homeomorfos.

*** 35.-** En (X,τ) se verifica:

(i) Si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ que converge a x, entonces $x \in \overline{A}$.

(ii) Si $A \in \mathcal{C}$, entonces para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ que converge a x, es $x \in A$.

(iii) Si $A \in \tau$, para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $x \in A$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \geq n_0$, es $x_n \in A$.

(iv) Si (X,τ) es T_2, los límites de sucesiones son únicos.

Además si (X,τ) es C_I (problema 30 del apartado 2.7, todas las implicaciones anteriores son equivalencias.

*** 36.-** Sea $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ una función. Probar:

(i) Si f es continua es secuencialmente continua.

(ii) Si (X,τ_X) es C_I, ambos conceptos de continuidad son equivalentes.

37.- Sean $f,g\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ dos funciones. Probar:

(i) Si f y g son continuas e (Y,τ_Y) es T_2, entonces $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{C}_X$.

(ii) Probar el *principio de prolongación de las identidades*: si f y g son continuas, (Y,τ_Y) es T_2, D es denso en X y $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.

38.- Sean (X,d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $a \in X$. Si τ_d denota la topología inducida por la métrica d, probar que las aplicaciones $f,g\colon (X,\tau_d) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_u)$ definidas por $f(x) = d(x,a)$ y $g(x) = d(x,A)$ son continuas.

Construcción de espacios topológicos

No haga como Kronecker, no deje pasar el infinito, sea en el amor, en el pensamiento o en la vida.

"Villa des hommes"
Denis Guedj

5.1. Subespacios

Definición 5.1. Dado un espacio topológico (X, τ), si $A \subset X$ se define una topología sobre A asociada a τ, $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$, y se llama *topología relativa*. Se dice también que (A, τ_A) es un *subespacio* de (X, τ).

Observación 5.1. Aunque hemos denotado de la misma manera la topología A-inclusión, por el contexto se entenderá siempre a cual de las dos nos referimos.

Proposición 5.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces:*

(i) Si $V \subset A$, es $V \in \tau_A$ si y sólo si existe $U \in \tau$ tal que $V = U \cap A$.

(ii) Si $F \subset A$, es $F \in \mathcal{C}_A$ si y sólo si existe $G \in \mathcal{C}$ tal que $F = G \cap A$.

(iii) Si β es base de τ, entonces $\beta_A = \{B \cap A : B \in \beta\}$ es base de τ_A.

(iv) Si $a \in A$, $\mathcal{N}_a^A = \{M \cap A : M \in \mathcal{N}_a\}$ es la familia de entornos de a en (A, τ_A).

(v) Si $a \in A$ y $\mathcal{B}_a$ es una base local de a en (X, τ), la familia $\mathcal{B}_a^A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}_a\}$ es una base local de a en (A, τ_A).

(vi) Si $B \subset A$, con las notaciones obvias es $\overline{B}^A = \overline{B} \cap A$ y $B'^{A} = B' \cap A$.

(vii) Si $B \subset A$, con las notaciones obvias es $fr_A(B) \subset fr(B) \cap A$ y $\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{B}{}^{A}$.

Proposición 5.2. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $B \subset A \subset X$. Se puede pensar en B como un subespacio de (X, τ), obteniendo la topología relativa τ_B sobre B, o como un subespacio de (A, τ_A), obteniendo la topología relativa $(\tau_A)_B$ sobre B. Se cumple que $\tau_B = (\tau_A)_B$.*

Ejemplos 5.1. Para los espacios topológicos introducidos en el primer capítulo tenemos:

(1) En (X, τ_{ind}), para todo $A \subset X$, $\tau_A = \tau_{ind}$.

(2) En (X, τ_{dis}), para todo $A \subset X$, $\tau_A = \tau_{dis}$.

(3) En (X, τ_A), si $B \cap A \neq \emptyset$, es $\tau_B = \tau_{A \cap B}$ y si $B \cap A = \emptyset$, es $\tau_B = \tau_{dis}$.

(4) En (X, τ^A), si $B \cap A \neq \emptyset$, es $\tau_B = \tau^{A \cap B}$ y si $B \cap A = \emptyset$, es $\tau_B = \tau_{dis}$.

(5) En (X, τ_{cof}), si A es infinito, es $\tau_A = \tau_{cof}$ y si A es finito, es $\tau_A = \tau_{dis}$.

(6) En (X, τ_{coc}), si A es no contable, es $\tau_A = \tau_{coc}$ y si A es contable, es $\tau_A = \tau_{dis}$.

Lema 5.3. *La función inclusión $i_A \colon (A, \tau_A) \longrightarrow (X, \tau_X)$ es continua.*

La continuidad no depende del rango de la función:

Corolario 5.4. *$f \colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (A, \tau_A)$ es continua si y sólo si $i_A \circ f \colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau_X)$ lo es.*

Definición 5.2. Una propiedad $\mathcal{P}$ se dice *hereditaria*, si cuando (X, τ) verifica $\mathcal{P}$, la cumple cualquier subespacio (A, τ_A). $\mathcal{P}$ se llama *débilmente hereditaria* si la heredan sólo los subespacios en los que $A \in \mathcal{C}$. Y se llama *casi hereditaria* si pasa únicamente a los subespacios en los que $A \in \tau$.

Proposición 5.5. *Las propiedades T_1, T_2, C_I, C_{II} y la metrizabilidad son hereditarias. La separabilidad es casi hereditaria.*

Definición 5.3. La *restricción de una aplicación* $f \colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ a $A \subset X$, es la función $f \circ i_A = f|_A \colon (A, \tau_A) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$.

Proposición 5.6. *Si $f \colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua, para cada $A \subset X$ la restricción $f \circ i_A = f|_A \colon (A, \tau_A) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua.*

Proposición 5.7. *Sea $f \colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua y $A \subset X$, $B \subset Y$ tales que $f(A) \subset B$. La aplicación inducida por $f|_A$, $g \colon (A, \tau_A) \longrightarrow (B, \tau_B)$, es continua.*

5.2. Aplicaciones combinadas

Definición 5.4. Sean X un conjunto, $\{A_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento X (es decir, $X = \bigcup_{i\in I} A_i$) y $\{f_i \colon A_i \longrightarrow Y\}_{i\in I}$ es una familia de funciones tales que $f_i|_{A_i\cap A_j} = f_j|_{A_i\cap A_j}$. Para $i, j \in I$, se define la *función combinada* de las anteriores, como la función $f \colon X \longrightarrow Y$ definida por $f(x) = f_i(x)$ si $x \in A_i$.

Proposición 5.8. *Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos. Con las notaciones anteriores:*

(i) Si para cada $i \in I$, es $A_i \in \tau_X$ y la función $f_i \colon (A_i, \tau_{A_i}) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua, entonces la combinada $f \colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ también lo es.

(ii) Si para cada $i \in I$ es $A_i \in \mathcal{C}_X$, la función $f_i \colon (A_i, \tau_{A_i}) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua e I es un conjunto finito, entonces la combinada es continua.

Observación 5.2. En el apartado (ii), I debe ser necesariamente finito. En efecto, si $I = \mathbb{R}$, $1_{\mathbb{R}} \colon (\mathbb{R}, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{dis})$ no es continua. Sin embargo $1_{\mathbb{R}}|_{\{x\}} \colon (\{x\}, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{dis})$ es continua, para cada $x \in \mathbb{R}$.

5.3. Embebimientos

Definición 5.5. Un *embebimiento* es una aplicación continua $f \colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, tal que sobre su imagen $g \colon (X, \tau_X) \longrightarrow (f(X), \tau_{f(X)})$ es un homeomorfismo.

Observación 5.3. Mediante un embebimiento, el espacio (X, τ_X) "se piensa" como un subespacio de (Y, τ_Y).

5.4. Topología producto. Proyecciones

Proposición 5.9. *Dados (X, τ_X) e (Y, τ_Y), la familia $\beta_{Tyc} = \{U \times V : U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$ es base para una topología sobre el producto $X \times Y$. Se denota por $\tau_X \times \tau_Y$ o τ_{Tyc} y se denomina topología producto o de Tychonov.*

Ejemplos 5.2. Algunos ejemplos de productos son los siguientes:

(i) Si $\tau_X = \tau_Y = \tau_{dis}$, entonces $\tau_{Tyc} = \tau_{dis}$.

(ii) Si $\tau_X = \tau_Y = \tau_{ind}$, entonces $\tau_{Tyc} = \tau_{ind}$.

(iii) Si $X = Y = \mathbb{R}$ y $\tau_X = \tau_Y = \tau_u$, entonces $\tau_{Tyc} = \tau_u$.

Proposición 5.10. *Las proyecciones coordenadas*

$$p_X\colon (X\times Y,\tau_{Tyc})\longrightarrow (X,\tau_X) \quad y \quad p_Y\colon (X\times Y,\tau_{Tyc})\longrightarrow (Y,\tau_Y)$$

definidas por $p_X(x,y)=x$ *y* $p_Y(x,y)=y$*, son continuas, abiertas y sobreyectivas.*

Observación 5.4. Las proyecciones no son cerradas en general: si $X=Y=\mathbb{R}$ y $\tau_X=\tau_Y=\tau_u$, el conjunto $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy=1\}$ es cerrado en $(\mathbb{R}^2,\tau_{Tyc})$. Pero $p_1(A)=\mathbb{R}-\{0\}$ no es cerrado en $(\mathbb{R},\tau_u)$.

Proposición 5.11. *Una aplicación* $f\colon (Z,\tau_Z)\longrightarrow (X\times Y,\tau_{Tyc})$ *es continua si y sólo si* $p_X\circ f$ *y* $p_Y\circ f$ *lo son.*

Proposición 5.12. *Sea el espacio producto* $(X\times Y,\tau_{Tyc})$*,* $A\subset X$ *y* $B\subset Y$*. Con las notaciones obvias:*

$$\overline{A}^X\times\overline{B}^Y=\overline{A\times B}^{X\times Y} \quad y \quad \overset{\circ}{A}{}^X\times\overset{\circ}{B}{}^Y=\overbrace{A\times B}^{\circ}{}^{X\times Y}.$$

Definición 5.6. Una propiedad $\mathcal{P}$ se llama *productiva*, cuando si (X,τ_X) e (Y,τ_Y) cumplen $\mathcal{P}$, entonces su producto $(X\times Y,\tau_{Tyc})$ también la verifica.

Proposición 5.13. *Las propiedades* T_1*,* T_2*,* C_I*,* C_{II}*, la separabilidad y la metrizabilidad son productivas. De hecho, para todas ellas,* (X,τ_X) *e* (Y,τ_Y) *son* $\mathcal{P}$ *si y sólo si* $(X\times Y,\tau_{Tyc})$ *lo es.*

Proposición 5.14. *Sea el espacio producto* $(X\times Y,\tau_{Tyc})$*,* $A\subset X$ *y* $B\subset Y$*. Se cumple que* $\tau_{Tyc}|_{A\times B}=\tau_A\times\tau_B$*.*

5.5. Topología cociente. Identificaciones

Muchos modelos geométricos sencillos como el cono, el cilindro o la pirámide se construyen habitualmente *pegando* partes de una pieza plana de papel de acuerdo con ciertas reglas. Esta operación es un ejemplo muy simple de la noción de objeto cociente. En el caso de los espacios topológicos, se puede dar la noción de espacio topológico cociente asociado a cualquier relación de equivalencia.

Definición 5.7. Una *identificación* es una aplicación $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow (Y,\tau_Y)$ sobreyectiva, tal que ($V\in\tau_Y$ si y sólo si $f^{-1}(V)\in\tau_X$).

Lema 5.15. $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow (Y,\tau_Y)$ *es una identificación si y sólo si es sobreyectiva y (*$F\in\mathcal{C}_Y$ *si y sólo si* $f^{-1}(F)\in\mathcal{C}_X$*).*

Proposición 5.16. *Sea $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ continua y sobreyectiva. Si f es abierta (respectivamente, cerrada) es una identificación.*

Observación 5.5. El recíproco no es cierto. Sea $\chi_{[0,\frac{1}{2})}\colon ([0,1],\tau_{us})\longrightarrow(\{0,1\},\tau)$, donde $\tau=\{\emptyset,\{0,1\},\{1\}\}$. Con esta topología, $\chi_{[0,\frac{1}{2})}$ es una identificación, pero no es ni abierta ni cerrada.

Proposición 5.17. *Una identificación inyectiva es un homeomorfismo.*

Proposición 5.18. *La composición de identificaciones es una identificación.*

Una de las propiedades fundamentales de las identificaciones es la siguiente:

Proposición 5.19. *Si $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ es una identificación y $g\colon (Y,\tau_Y)\longrightarrow(Z,\tau_Z)$ es una aplicación, entonces g es continua si y sólo si $g\circ f$ lo es.*

Demostración: Si $g\circ f$ es continua y $V\in\tau_Z$, es $g^{-1}(V)\in\tau_Y$, ya que $g^{-1}(V)\in\tau_Y$ si y sólo si $f^{-1}(g^{-1}(V))\in\tau_X$. Y $f^{-1}(g^{-1}(V))=(g\circ f)^{-1}(V)$. ∎

Teorema 5.20. *(De transitividad) Dadas una identificación $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ y una aplicación sobreyectiva $g\colon (Y,\tau_Y)\longrightarrow(Z,\tau_Z)$, g es identificación si y sólo si $g\circ f$ lo es.*

Estamos en condiciones de definir la topología cociente.

Definición 5.8. Sea $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow Y$ una aplicación sobreyectiva. Se define la *topología cociente* sobre Y por $\tau_f=\{V\subset Y : f^{-1}(V)\in\tau_X\}$.

Proposición 5.21. *Con las notaciones anteriores, τ_f es la mayor topología sobre Y para la que f continua. Además, $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_f)$ es una identificación.*

Definición 5.9. Sea X un conjunto. Una *partición* de X es una familia $\mathcal{P}=\{P_i : i\in I\}$ de conjuntos no vacíos, dos a dos disjuntos, cuya unión es X.

Sea la aplicación canónica (o cociente) $q\colon (X,\tau)\longrightarrow\mathcal{P}$, que asocia a $x\in X$ el único elemento de $\mathcal{P}$ que lo contiene: $q(x)=P_{i_x}$. q es sobreyectiva y se puede dotar a $\mathcal{P}$ de la topología cociente asociada a q. Se dice que $\mathcal{P}$ es un *cociente* de (X,τ).

Es claro que toda partición define una relación de equivalencia sobre X,

$x\simeq y$ si y sólo si x e y pertenecen al mismo elemento de la partición.

Y recíprocamente toda relación de equivalencia $\simeq$ determina una partición $\mathcal{P}=X/\simeq$, cuyos elementos son las clases de equivalencia. $X/\simeq$ es el *cociente* de X por la relación de equivalencia, y se suele denotar $\tau_\simeq$ a la topología cociente.

El rango de una identificación puede interpretarse como un espacio cociente:

Proposición 5.22. *Si* $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ *es una identificación, entonces* (Y,τ_Y) *es homeomorfo al cociente de* (X,τ_X) *por la relación de equivalencia* $x_1 \simeq x_2$ *si y sólo si* $f(x_1) = f(x_2)$.

Demostración: Si $q\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(X/\simeq,\tau_{\simeq})$ es la aplicación cociente, el homeomorfismo es $h\colon (Y,\tau_Y)\longrightarrow(X/\simeq,\tau_{\simeq})$ definido por $h(f(x)) = q(x)$. ∎

Definición 5.10. Una propiedad $\mathcal{P}$ se llama *divisible*, si cuando (X,τ) verifica $\mathcal{P}$, entonces cualquier cociente de (X,τ) la verifica.

Proposición 5.23. *La separabilidad es divisible.*

Observación 5.6. El resto de las propiedades topológicas que hemos visto hasta ahora no son divisibles, veremos contraejemplos en los problemas.

Ejemplos 5.3. Repasamos algunos ejemplos de espacios cociente.

(i) *Contracción de un conjunto a un punto*. Sea (X,τ), $A \subset X$ y $\simeq$ la relación de equivalencia $a \simeq b$ para $a,b \in A$. El espacio cociente $(X/\simeq,\tau_{\simeq})$ se denotar por $(X/A,\tau_A)$; se dice que *se ha realizado la contracción de A a un punto*.

(ii) *Adjunción de espacios*. Sean (X,τ_X) e (Y,τ_Y) espacios topológicos disjuntos. Sea $A \in \mathcal{C}_X$ y $f\colon (A,\tau_A)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ una aplicación continua. Sobre la suma disjunta $(X\cup Y,\tau_\Sigma)$ ($\tau_\Sigma = \{U \subset X\cup Y : U\cap X \in \tau_X, U\cap Y \in \tau_Y\}$) se define la relación de equivalencia $a \sim_f f(a)$, para cada $a \in A$. El espacio cociente se denota por $(X\cup_f Y,\tau_f)$ y se llama *espacio de adjunción* de (X,τ_X) y de (Y,τ_Y) por f, la *aplicación de adjunción*.

Algunos ejemplos de espacios de adjunción son:

- Si $A \subset X$ es cerrado y se adjunta a $Y = \{y_0\}$ por la aplicación $f(A) = y_0$, el espacio de adjunción asociado es homeomorfo al cociente $(X/A,\tau_A)$. Si $(X = [0,1],\tau_u)$ y $A = \{0,1\}$, el espacio de adjunción correspondiente es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1,\tau_u)$.
- Si (X,τ_X) e (Y,τ_Y) son espacios topológicos disjuntos, (X,τ_X) es T_1, $x \in X$ e $y \in Y$, se define el *wedge* de X e Y, $(X\vee Y,\tau_\sim)$, como el cociente de su suma disjunta, tras identificar los puntos base x e y.

(iii) Una *variedad topológica de dimensión* n, (M,τ), es un espacio topológico T_2 y C_{II}, tal que todo $x \in M$ posee un entorno abierto U que es homeomorfo al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Es decir, M es un espacio localmente euclídeo.

Algunos ejemplos de variedades son:

- $(\mathbb{R}^n,\tau_u)$ o cualquier abierto en él es una variedad de dimensión n.

- La esfera $(\mathbb{S}^n, \tau_u)$ es una variedad de dimensión n: basta con usar la proyección estereográfica (problema **25** en el apartado 4.4).
- El espacio proyectivo real $(\mathbb{RP}^n, \tau_\sim)$ es una variedad de dimensión n: puede verse como el cociente de $(\mathbb{S}^n, \tau_u)$ por la relación de equivalencia $x \sim -x$ que identifica puntos antipodales. Si se toman los abiertos $U_i^+ = \{x \in \mathbb{S}^n : x_i > 0\}$ y $U_i^- = \{x \in \mathbb{S}^n : x_i < 0\}$ y los homeomorfismos $\varphi_i \colon U_i^+ \longrightarrow B$ y $\varphi_i \colon U_i^- \longrightarrow B$, dados por $\varphi_i(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, donde $B = \{z \in \mathbb{R}^n : z_1^2 + \cdots + z_n^2 < 1\}$, entonces los conjuntos $U_i = \varphi_i(U_i^+)$ son abiertos, pues su imagen recíproca por la aplicación cociente es $U_i^+ \cup U_i^-$. Además, la proyección define un homeomorfismo entre U_i^+ y su imagen U_i.
- Como $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \tau_u \times \tau_u)$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}^{m+n}, \tau_u)$, el producto de dos abiertos es un abierto y el producto de homeomorfismos es un homeomorfismo, se deduce que el producto de una variedad m-dimensional (M, τ_M) y de una variedad n-dimensional (N, τ_N) es una variedad $(m+n)$-dimensional $(M \times N, \tau_M \times \tau_N)$. Así, $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \tau_u)$ es una variedad de dimensión 2.

(iv) Una *superficie* S es una variedad de dimensión 2. Son superficies importantes:

- En $([0,1]^2, \tau_u)$ se identifican $(x,0) \simeq (x,1)$ para cada $x \in [0,1]$ y $(0,y) \simeq (1,y)$ para cada $y \in [0,1]$. Al cociente $([0,1]^2/\simeq, \tau_\simeq)$ se le llama *toro* $(\mathbb{T}^2, \tau_u)$. La aplicación $f \colon ([0,1]^2, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \tau_u)$ definida por $f(s,t) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), \cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ pasa al anterior cociente. Así, $(\mathbb{T}^2, \tau_u)$ es homeomorfo al producto $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \tau_u)$.
- En $([0,1]^2, \tau_u)$ se identifica $(0,y) \simeq (1, 1-y)$, para cada $y \in [0,1]$. Al cociente $([0,1]^2/\simeq, \tau_\simeq)$ se le llama *banda de Möbius* $(\mathbb{M}, \tau_u)$. En realidad, la banda de Möbius es una *superficie con borde*, no una superficie.
- En $([-1,1]^2, \tau_u)$ se identifican $(x,0) \simeq (-x,1)$ para cada $x \in [-1,1]$ y $(0,y) \simeq (1,y)$ para cada $y \in [-1,1]$. Al cociente $([-1,1]^2/\simeq, \tau_\simeq)$ se le llama *botella de Klein* $(\mathbb{K}^2, \tau_u)$.

5.6. Problemas

1.- Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Probar:

(i) $A \in \tau$ si y sólo si $i_A \colon (A, \tau_A) \longrightarrow (X, \tau)$ es abierta.

(ii) $A \in \mathcal{C}$ si y sólo si $i_A \colon (A, \tau_A) \longrightarrow (X, \tau)$ es cerrada.

(iii) Todo $B \in \tau_A$ es tal que $B \in \tau$ si y sólo si $A \in \tau$.

(iv) Todo $B \in \mathcal{C}_A$ es tal que $B \in \mathcal{C}$ si y sólo si $A \in \mathcal{C}$.

2.- Una *extensión* de una aplicación continua $f\colon (A, \tau_A) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ de un subespacio $A \subset X$ al espacio total es una aplicación continua $g\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, cuya restricción a A es f. A es un *retracto* de X si existe una aplicación continua, una *retracción* $r\colon (X, \tau) \longrightarrow (A, \tau_A)$, que extiende a la identidad $1_A\colon (A, \tau_A) \longrightarrow (A, \tau_A)$, es decir, para cada $a \in A$, es $r(a) = a$. Probar:

(i) Una retracción es siempre sobreyectiva.

(ii) $[0, 1]$ es un retracto de $\mathbb{R}$ en $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

(iii) Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua y sobreyectiva. Si existe $s\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau_X)$ continua y tal que $f \circ s = 1_Y$ (s se llama una sección), entonces f es una identificación. Deducir que toda retracción es una identificación.

3.- Sean $X = Y$ y $\tau_X = \tau_Y = \tau$. Sea $d\colon (X, \tau) \longrightarrow (X \times X, \tau_{Tyc})$ definida por $p_X(d(x)) = x$. Probar que es un embebimiento: es el llamado *embebimiento diagonal*.

4.- Probar que $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua si y sólo si $G\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (X \times Y, \tau_{Tyc})$, definida por $G(x) = (x, f(x))$, es un embebimiento.

* **5.-** Sea X un conjunto y $\{\tau_i\}_{i=1}^n$ una familia de topologías sobre X. Probar que el espacio $(X, \sup\{\tau_i\}_{i=1}^n)$ es homeomorfo a la diagonal del producto $(\prod_{i=1}^n X_i, \tau_{Tyc})$.

* **6.-** Sea I un conjunto finito de índices. Probar:

(i) Los productos son *asociativos*, es decir, si $\{I_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una partición de I, entonces el producto $(\prod_{\lambda \in \Lambda} \prod_{i \in I_\lambda} X_i, \tau_{Tyc})$ es homeomorfo a $(\prod_{i \in I} X_i, \tau_{Tyc})$.

(ii) Los productos son *conmutativos*, es decir, si $\psi\colon I \longrightarrow I$ es una aplicación biyectiva, entonces $(\prod_{i \in I} X_i, \tau_{Tyc})$ es homeomorfo al producto $(\prod_{i \in I} X_{\psi(i)}, \tau_{Tyc})$.

7.- Sean el *plano de Sorgenfrey* $(\mathbb{R}^2, \tau_{sor} \times \tau_{sor})$ y $A = \{(x, -x); x \in \mathbb{R}\}$. Probar:

(i) (A, τ_A) es un espacio discreto. (ii) A es cerrado en $(\mathbb{R}^2, \tau_{sor} \times \tau_{sor})$.

(iii) Cada subconjunto $B \subset A$ es cerrado en $(\mathbb{R}^2, \tau_{sor} \times \tau_{sor})$.

8.- ¿ Es $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \tau_u)$ homeomorfo a $(\mathbb{N}, \tau_u)$?

9.- Probar que el producto de espacios cofinitos no es un espacio cofinito.

10.- Sean $p \in X$, $q \in Y$, $A = \{p\}$, $B = \{q\}$ y los espacios topológicos A-inclusión (X, τ_A) y B-inclusión (Y, τ_B). Sea $C = \{(p, q)\} \subset X \times Y$. Comparar las topologías $\tau_A \times \tau_B$ y la C-inclusión τ_C sobre $X \times Y$.

11.- Se consideran las topologías sobre $\mathbb{R}$

$$\tau_2 = \{U \subset \mathbb{R} : U^c \text{ finito ó } 2 \notin U\} \quad \text{ y } \quad \tau_3 = \{U \subset \mathbb{R} : U^c \text{ finito ó } 3 \notin U\}.$$

Describir los abiertos de la topología producto $\tau_2 \times \tau_3$ sobre $\mathbb{R}^2$ y comparar esta topología con $\tau_{(2,3)} = \{W \subset \mathbb{R}^2 : W^c \text{ finito ó } (2, 3) \notin W\}$.

12.- Probar que $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, \tau_u)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}, \tau_u)$ si $n \geq 1$.

*** 13.-** Comparar la topología $\tau_{dis} \times \tau_u$ con la del orden lexicográfico sobre $\mathbb{R}^2$.

14.- Describir el *plano de Kolmogorov* $(\mathbb{R}^2, \tau_{kol} \times \tau_{kol})$ y comparar su topología con la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Calcular en este espacio la clausura y el interior de los conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

*** 15.-** Sea $\mathbb{S}^1$ la circunferencia unidad de $\mathbb{R}^2$ y sean $r < R$ dos números reales positivos. Sea el conjunto $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$. Probar que la aplicación $f\colon (T, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \tau_u \times \tau_u)$ definida por

$$f(x, y, z) = \left(\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - R}{r}, \frac{z}{r} \right) \right)$$

es un homeomorfismo.

*** 16.-** Dados (X, τ_X), (Y, τ_Y) y (Z, τ_Z), probar que aunque $(X \times Y, \tau_X \times \tau_Y)$ sea homeomorfo a $(X \times Z, \tau_X \times \tau_Z)$, no es necesariamente (Y, τ_Y) homeomorfo a (Z, τ_Z).

17.- Probar las siguientes propiedades:

(i) (X, τ) es T_2 si y sólo si $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ es cerrada en $(X \times X, \tau_{Tyc})$.

(ii) Si $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua e (Y, τ_Y) es T_2, entonces el conjunto $A = \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $(X \times X, \tau_{Tyc})$.

(iii) Si $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es abierta y sobreyectiva y $A = \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $(X \times X, \tau_{Tyc})$, entonces (Y, τ_Y) es T_2.

(iv) Si $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una aplicación abierta, continua y sobreyectiva, entonces el conjunto $A = \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $(X \times X, \tau_{Tyc})$ si y sólo si (Y, τ_Y) es T_2.

*** 18.-** Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos, $\sim_X$ y $\sim_Y$ relaciones de equivalencia sobre X e Y respectivamente y $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación continua preservando las relaciones (es decir, si $a \sim_X b$ entonces $f(a) \sim_Y f(b)$). Probar:

(i) La aplicación $f_*\colon (X/\sim_X, \tau_{\sim_X}) \longrightarrow (Y/\sim_Y, \tau_{\sim_Y})$ definida por $f_*(p_X(x)) = p_Y(f(x))$ (p_X y p_Y son las aplicaciones cociente) es continua;

(ii) si f es identificación, entonces f_* también lo es.

*** 19.-** Sean $\sim_1$ y $\sim_2$ dos relaciones de equivalencia sobre (X, τ), tales que si $x \sim_1 y$, entonces $x \sim_2 y$. Probar que $(X/\sim_2, \tau_{\sim_2})$ es un cociente de $(X/\sim_1, \tau_{\sim_1})$.

20.- Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación continua. Probar:

(i) Si $g\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$ es continua y $g \circ f$ es una identificación, g también lo es.

(ii) Si existe $A \subset X$ tal que $f|_A\colon (A, \tau_A) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una identificación, f también lo es.

*** 21.-** Si $\sim$ es una relación de equivalencia sobre (X, τ), probar que son equivalentes:

(i) la aplicación cociente $p\colon (X, \tau) \longrightarrow (X/\sim, \tau_\sim)$ es cerrada (respectivamente, abierta);

(ii) para cada $A \in \mathcal{C}$ (respectivamente, $A \in \tau$), $p^{-1}(p(A) \in \mathcal{C}$ (respectivamente, $p^{-1}(p(A) \in \tau$).

*** 22.-** Sea (X, τ) un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia sobre X. Probar que son equivalentes:

(i) la aplicación cociente es abierta (también se dice que $\sim$ es abierta);

(ii) el interior de cada conjunto saturado (A es saturado si $A = p^{-1}(p(A))$ es saturado;

(iii) la clausura de cada conjunto saturado es saturado.

*** 23.-** Sea $r\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (A, \tau_A)$ una retracción. Probar que si $R(r)$ es la relación de equivalencia sobre X inducida por r, entonces el cociente $(X/R(r), \tau_{R(r)})$ es homeomorfo al subespacio (A, τ_A).

*** 24.-** Sea (X, τ) y $\sim$ una relación de equivalencia sobre X. Probar:

(i) El cociente es indiscreto si y sólo si los únicos abiertos saturados (ver problema **22**) son $\emptyset$ y X.

(ii) Si toda clase de equivalencia es densa en (X, τ), entonces el cociente es indiscreto. Aplicarlo al caso de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ con la relación $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$.

(iii) El cociente es discreto si y sólo si todo conjunto saturado es abierto en (X, τ).

(iv) El cociente es discreto si y sólo si toda clase de equivalencia es abierta en (X, τ).

*** 25.-** Sobre (X, τ), se define la relación $x \sim y$ si y sólo si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Probar:

(i) Todo cerrado en (X, τ) (respectivamente, todo abierto) es un conjunto saturado (ver problema **22**).

(ii) La aplicación cociente es abierta y cerrada.

*** 26.-** Sean (X, τ), $A \subset X$ y la relación de equivalencia definida por $a \sim b$ para $a, b \in A$. Sea $p\colon (X, \tau) \longrightarrow (X/\sim, \tau_\sim)$ la aplicación cociente y $a \in A$. Probar:

(i) Si τ es la topología A-inclusión, entonces $\tau_\sim$ es la topología $p(a)$-inclusión.

(ii) Si τ es la topología A-exclusión, entonces $\tau_\sim$ es la topología $p(a)$-exclusión.

*** 27.-** Sean (X, τ) y $(X \times [0,1], \tau \times \tau_u)$. Sobre $X \times [0,1]$ se considera la relación de equivalencia $(x,1) \sim (y,1)$, para cada $x, y \in X$. El cociente bajo esta relación se denota por $(C(X), \tau_\sim)$ y se llama *cono* de X. Probar que (X, τ) se identifica con el subespacio $(X \times \{0\}, \tau_\sim)$ de $(C(X), \tau_\sim)$.

Sea $(X \times [-1,1], \tau \times \tau_u)$. Sobre $X \times [-1,1]$, se considera la siguiente relación de equivalencia $(x,1) \simeq (y,1)$ y $(x,-1) \simeq (y,-1)$, para cada $x, y \in X$. El cociente se denota $(S(X), \tau_\simeq)$ y se llama *suspensión* de X. Probar:

(i) $(S(X), \tau_\simeq)$ es un cociente de $(C(X), \tau_\sim)$.

(ii) Toda aplicación continua entre dos espacios topológicos induce otra entre los conos (respectivamente, las suspensiones) correspondientes.

(iii) $(S(\mathbb{S}^n), \tau_\simeq)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^{n+1}, \tau_{us})$, para cada $n \geq 0$.

(iv) Para $n \in \mathbb{N}$, $(C(\mathbb{S}^n), \tau_\sim)$ es homeomorfo a la bola cerrada unidad de $(\mathbb{R}^{n+1}, \tau_u)$.

(v) $(C(X), \tau_\sim)$, se obtiene adjuntando $(X \times [0,1], \tau_X \times \tau_u)$ a $(\{y_0\}, \tau_{dis})$ por la aplicación $f(X \times \{1\}) = y_0$.

(vi) La suspensión de X, $(S(X), \tau_\simeq)$, se obtiene adjuntando $(X \times [-1,1], \tau_X \times \tau_u)$ al espacio $(Y = \{a, b\}, \tau_{dis})$ por la función $g(X \times \{1\}) = a$ y $g(X \times \{-1\}) = b$.

(vii) Si se adjunta $(X \times [0,1] \times Y, \tau_X \times \tau_u \times \tau_Y)$ a la unión disjunta $(X \cup Y, \tau_\Sigma)$ mediante la aplicación $f(x,0,y) = x$ y $f(x,1,y) = y$, se obtiene el *join* de X e Y, denotado por $(X * Y, \tau_*)$. Entonces, $(X * \{x_0\}, \tau_*)$ es homeomorfo a $(C(X), \tau_\sim)$ y $(X * \mathbb{S}^0, \tau_*)$ es homeomorfo a $(S(X), \tau_\simeq)$.

28.- Sea $(X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\}), \tau_\Sigma)$ la suma disjunta de dos copias de la recta real. Sea $\sim$ la relación de equivalencia definida por $(x, 0) \sim (x, 1)$ si $x \neq 0$. Se pide:

(i) Estudiar si el espacio cociente es T_1 o T_2.

(ii) Si p es la aplicación cociente, ¿es abierta?

29.- Sean $(X = ([-1, 1] \times \{1\}) \cup ([-1, 1] \times \{-1\}), \tau_{us})$ y la relación de equivalencia que identifica los puntos $(-1, 1) \sim (-1, -1)$ y $(1, 1) \sim (1, -1)$. Probar que el cociente $(X/\sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \tau_u)$.

30.- Sobre $([-1, 1], \tau_u)$, se identifican los puntos $x \sim -x$ si $x \neq 1, -1$. Probar que la aplicación cociente es abierta y que el espacio cociente inducido es T_1, pero no T_2.

31.- Sea $(\mathbb{R}, \tau)$, donde τ es la topología $\{0\}$-inclusión. Se identifican los puntos $x \sim -x$, para $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que el espacio cociente $(\mathbb{R}/\sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a $([0, \infty), \tau_0)$ (donde τ_0 es la topología $\{0\}$-inclusión) y estudiar si la aplicación cociente es abierta o cerrada.

32.- Sobre $(\mathbb{R}^2, \tau_u \times \tau_{dis})$ se define la relación de equivalencia $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. Se pide:

(i) El cociente $(\mathbb{R}^2/\sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a $([0, \infty), \tau_{us})$.

(ii) Estudiar si la aplicación cociente es abierta o cerrada.

(iii) Hacer el mismo ejercicio, tomando como espacio de partida $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$.

33.- Se considera en $(\mathbb{R}, \tau_u)$ la relación de equivalencia $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Z}$. Demostrar que el cociente $(\mathbb{R}/\sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \tau_u)$.

* **34.-** Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ el semiplano superior cerrado. Se considera:

(1) para cada punto $p = (x, y) \in \Gamma$ con $y > 0$, $\mathcal{B}_p = \{B(p, \varepsilon) \cap \Gamma : \varepsilon > 0\}$,

(2) para cada $p = (x, 0) \in \Gamma$, $\mathcal{B}_p = \{(B(p, \varepsilon) \cap \Gamma) \cup \{p\} : \varepsilon > 0\}$.

Probar:

(i) $\{\mathcal{B}_p\}_{p \in \Gamma}$ es un sistema fundamental de entornos para una topología τ sobre Γ. Compararla con τ_u y la de Moore τ_{moo} (problema **25** en el apartado 2.7).

(ii) Se define sobre Γ la relación de equivalencia: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1 = x_2$. Estudiar si la aplicación cociente $p \colon (\Gamma, \tau) \longrightarrow (\Gamma/\sim, \tau_\sim)$ es abierta o cerrada.

(iii) El cociente $(\Gamma/\sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a la recta real.

*** 35.-** Se consideran los subespacios euclídeos $([0,1]^n, \tau_u)$ y

$$(\widetilde{[0,1]^n} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in [0,1]^n : \exists j \in \{1, \cdots, n\} : x_j = 0 \text{ ó } 1\}, \tau_u).$$

Se define una relación de equivalencia sobre $[0,1]^n$ por: $x \sim y$ si $x, y \in \widetilde{[0,1]^n}$. Probar que el cociente $([0,1]^n/\sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^n, \tau_u)$.

36.- En el plano euclídeo, se considera la relación de equivalencia $(a, x) \sim (a, y)$, para cada $x, y \in \mathbb{R}$, si $a \neq 0$. Se pide describir el espacio cociente. Si p denota la aplicación cociente, estudiar la convergencia de las sucesiones $\{p(0, \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{p(\frac{1}{n}, 0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{p(n, \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$.

*** 37.-** Sobre $(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}, \tau_u)$ se define la relación de equivalencia $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si $y_1 = y_2 \neq 0$ ó $y_1 = y_2 = 0$ y $x_1 = x_2$. Probar que la aplicación cociente no es cerrada.

*** 38.-** Una n-*celda* es un espacio homeomorfo al disco cerrado $(\mathbb{D}^n, \tau_u)$. Si consideramos $fr(\mathbb{D}^n) = \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{D}^n$, (Y, τ_Y) un espacio topológico y $f \colon (\mathbb{S}^{n-1}, \tau_u) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación continua, se dice que $Y_f = \mathbb{D}^n \cup_f Y$ es el *espacio obtenido al adjuntar una* n-*celda a* Y *por* f. Probar:

(i) La botella de Klein $(\mathbb{K}^2, \tau_u)$ se obtiene adjuntando una 2-celda a $(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, \tau_\sim)$.

(ii) Si $(Y, \tau_Y) = (\mathbb{S}^1, \tau_u)$ y $f \colon (\mathbb{S}^1, \tau_u) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es $f(z) = z^2$, entonces, $\mathbb{D}^2 \cup_f Y$ es el plano proyectivo real $(\mathbb{RP}^2, \tau_\sim)$ (ver ejemplos 5.3 (iii)).

*** 39.-** Si $p \colon ([0,1]^2, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{M}, \tau_u)$ es la aplicación cociente, el subespacio de $\mathbb{M}$ definido por $p([0,1] \times \{0,1\})$ (la arista de la banda de Möbius) es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \tau_u)$. Probar que la botella de Klein es homeomorfa al espacio de adjunción de dos bandas de Möbius por la aplicación identidad que identifica sus aristas.

*** 40.-** Se puede probar (ver [BvR]) que la botella de Klein no puede embeberse en $\mathbb{R}^3$, pero si en $\mathbb{R}^4$: en efecto, se considera $f \colon ([-1,1]^2, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}^4, \tau_u)$ dada por

$$f(x, y) = \left((1 + |x|) \cos \pi y, (1 + |x|) \sin \pi y, \sin \pi x \cos \frac{\pi y}{2}, \sin \pi x \sin \frac{\pi y}{2}\right).$$

Entonces, f es continua y pasa al cociente descrito en los ejemplos 5.3 (iv).

*** 41.-** Una superficie es *orientable* si no contiene ningún subespacio homeomorfo a la banda de Möbius. En caso contrario se dice *no orientable*. Probar:

(i) El plano proyectivo real es homeomorfo al espacio de adjunción de una banda de Möbius y un disco cerrado por la aplicación identidad que identifica la arista de $\mathbb{M}$ y la frontera del disco.

(ii) La botella de Klein y el plano proyectivo real son no orientables.

(iii) La orientabilidad es una propiedad topológica.

(iv) Al contrario que las superficies no orientables, toda superficie orientable puede embeberse en $\mathbb{R}^3$.

(v) El plano proyectivo real puede embeberse en $\mathbb{R}^4$ (aunque no en $\mathbb{R}^3$): se considera la función $f\colon (\mathbb{R}^3, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}^4, \tau_{us})$ dada por $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, yz, xz)$. La imagen por f de dos puntos antipodales de $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ es el mismo punto de $\mathbb{R}^4$, por lo que esta función pasa al cociente definido en los ejemplos 5.3 (iv) e induce un embebimiento del $\mathbb{RP}^2$ en $\mathbb{R}^4$.

*** 42.-** El *toro generalizado* es un producto de esferas $(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n, \tau_{us})$. El n-cubo $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ tiene como frontera $fr([0, 1]^n) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n :$ existe i tal que $x_i = 0$ ó $1\}$. Así, $fr([0, 1]^m \times [0, 1]^n = [0, 1]^{m+n}) = (fr([0, 1]^m) \times [0, 1]^n) \cup ([0, 1]^m \times fr([0, 1]^n))$. Sean $z_m \in \mathbb{S}^m$ y $z_n \in \mathbb{S}^n$ puntos base. Existe una aplicación$f_k\colon ([0, 1]^k, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^k, \tau_{us})$, tal que $f_k(fr([0, 1]^k)) = z_k$, para $k \in \{m, n\}$. Es un *h*omeomorfismo relativo, es decir, tal que la restricción $f_k|_{[0,1]^k - fr([0,1]^k)}\colon ([0, 1]^k - fr([0, 1]^k), \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^k - z_k, \tau_{us})$ es un homeomorfismo. Tomando productos cartesianos en ambas dimensiones, se obtiene una función $f_m \times f_n\colon ([0, 1]^m \times [0, 1]^n, \tau_{Tyc}) \longrightarrow (\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n, \tau_{Tyc})$, que lleva $fr([0, 1]^{m+n})$ sobre $\mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n$. Concluir, que $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$ es homeomorfo al espacio obtenido adjuntando una $(m+n)$-celda a $\mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n$ vía la aplicación $f_m \times f_n\colon fr([0, 1]^{m+n}) \simeq \mathbb{S}^{m+n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n$.

*** 43.-** Sea el espacio $(\mathbb{R}^n, \tau_{zar})$ (ver problema **20** en el apartado 2.7). Sobre $\mathbb{R}^n$ se define la relación $(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n)$ si y sólo si $x_i = y_i$ para $1 \leq i \leq n - 1$. Probar que el espacio cociente $(\mathbb{R}^n / \sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}^{n-1}, \tau_{zar})$.

*** 44.-** *Separado de un espacio topológico*. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se define la siguiente relación binaria sobre X: $x \simeq y$ si para cada espacio topológico T_2 (Y, τ_Y) y toda aplicación continua $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, es $f(x) = f(y)$. Probar:

(i) $\simeq$ es una relación de equivalencia sobre X.

(ii) El espacio cociente $(X/ \simeq, \tau_\simeq)$ es T_2.

(iii) Para todo espacio T_2 (Y, τ_Y) y toda aplicación continua $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, existe una aplicación continua $f\colon (X/ \simeq, \tau_\simeq) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, de manera que $f = g \circ p$, donde $p\colon (X, \tau) \longrightarrow (X/ \simeq, \tau_\simeq)$ es la aplicación cociente.

*** 45.-** *El espacio proyectivo real de dimensión n.* En $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, \tau_u)$ se identifican dos puntos $(x_1, \ldots x_{n+1}) \simeq (y_1, \ldots y_{n+1})$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $x_i = \lambda y_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Al cociente $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/ \simeq, \tau_\simeq)$ se le llama *espacio proyectivo real de dimensión n* y se suele denotar $(\mathbb{RP}^n, \tau_u)$. Se pide probar:

(i) $(\mathbb{RP}^n, \tau_u)$ es homeomorfo al espacio cociente definidos en los ejemplos 5.3 (iii).

(ii) $(\mathbb{RP}^n, \tau_u)$ se obtiene al adjuntar al espacio proyectivo real de dimensión $n-1$, $(\mathbb{RP}^{n-1}, \tau_u)$, una n-celda a través de la aplicación canónica $p_{n-1}: \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$.

(iii) $\mathbb{RP}^0$ es un punto, $(\mathbb{RP}^1, \tau_u)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \tau_u)$ y $(\mathbb{RP}^n, \tau_u)$ es homeomorfo al espacio métrico cuyos puntos son rectas de $\mathbb{R}^{n+1}$ pasando por el origen, donde la métrica se define como el ángulo entre rectas (que toma valores en $[0, \frac{\pi}{2}]$).

(iv) Sea $\pi_n: (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{RP}^n, \tau_u)$ la aplicación cociente. Probar que es abierta, pero no cerrada.

(v) Probar que el conjunto $A = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) : \pi_n(x) = \pi_n(y)\}$ es cerrado en $((\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}), \tau_{Tyc})$ y deducir que $(\mathbb{RP}^n, \tau_u)$ es T_2.

*** 46.-** *El espacio proyectivo complejo de dimensión n.* En el espacio complejo $(\mathbb{C}^{n+1}, \tau_u)$, se considera el subespacio

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \{z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : \|z\|^2 = \|z_1\|^2 + \cdots + \|z_{n+1}\|^2 = 1\}.$$

Se define sobre $\mathbb{S}^{2n+1}$ la relación de equivalencia: $z \sim z'$ si y sólo si existe $c \in \mathbb{C}$ con $\|c\| = 1$ y $z' = cz$. El cociente bajo esta relación es el *espacio proyectivo complejo de dimensión n* y se suele denotar $(\mathbb{CP}^n, \tau_u)$. Probar:

(i) El espacio proyectivo complejo de dimensión n, $(\mathbb{CP}^n, \tau_u)$ se obtiene al adjuntar al espacio proyectivo complejo de dimensión $n-1$, $(\mathbb{CP}^{n-1}, \tau_u)$, una $2n$-celda a través de la aplicación canónica $q_{n-1}: \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$.

(ii) Sea $q_n: (\mathbb{S}^{2n+1}, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{CP}^n, \tau_u)$ la aplicación cociente. $\mathbb{S}^{2n+1}$ puede pensarse como un *producto torcido* de $\mathbb{CP}^n$ y $\mathbb{S}^1$: se dice que $\mathbb{S}^{2n+1}$ es un fibrado sobre $\mathbb{CP}^n$, de fibra $\mathbb{S}^1$.

(iii) $\mathbb{CP}^0$ es un punto y $(\mathbb{CP}^1, \tau_u)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^2, \tau_u)$. La *aplicación de Hopf* es la aplicación cociente $q_1: (\mathbb{S}^3, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{CP}^1, \tau_u)$, función de enorme importancia en topología y geometría.

(iv) $(\mathbb{CP}^n, \tau_u)$ es homeomorfo al espacio métrico cuyos puntos son líneas complejas de $\mathbb{C}^{n+1}$ pasando por el origen, donde la métrica se define como el ángulo entre rectas (que toma valores en $[0, \frac{\pi}{2}]$).

*** 47.-** Para cada homeomorfismo $h: (\mathbb{S}^{n-1}, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{S}^{n-1}, \tau_u)$ probar que el espacio de adjunción $(\mathbb{D}^n \cup_h \mathbb{D}^n, \tau_{\sim_h})$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^n, \tau_u)$.

*** 48.-** Probar las siguientes propiedades para superficies:

(i) $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \tau_u)$ es homeomorfo al espacio de adjunción de dos cilindros $(\mathbb{S}^1 \times [0,1], \tau_u)$ a través de la aplicación identidad de una copia de cada círculo frontera en una copia del otro.

(ii) $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2, \tau_u)$ es homeomorfo al espacio de adjunción de dos toros sólidos $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2, \tau_u)$ a través de la aplicación identidad entre los toros frontera $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \tau_u)$.

(iii) $(\mathbb{S}^3, \tau_u)$ es homeomorfo al espacio de adjunción de dos toros sólidos $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2, \tau_u)$ a través de la aplicación entre los toros frontera $h\colon (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \tau_u)$ definida por $h(x,y) = (y,x)$; esta aplicación intercambia los meridianos y paralelos de los toros frontera.

Compacidad

Las matemáticas no son una ciencia exacta. Uno más uno jamás sumará dos. La mayor parte de las veces el resultado es cero. Y, si hay suerte, uno. Las relaciones humanas operan según un estricto código binario.

"Constelazión. Ensayo teatral en dos trozos"
José Cruz

La compacidad es una propiedad que proporciona a los espacios topológicos que la satisfacen una estructura similar a la que poseen los conjuntos cerrados y acotados en espacios euclídeos.

6.1. Espacios y conjuntos compactos

Definición 6.1. Un *cubrimiento* de X es una familia de conjuntos $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$, tales que $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Un *subrecubrimiento* de $\mathcal{U}$ es una subfamilia $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ que aún cubre X.

Definición 6.2. Un espacio topológico (X, τ) es *compacto* si todo cubrimiento por abiertos de X posee un subrecubrimiento finito. Y $A \subset X$ es *compacto* si como subespacio (A, τ_A) lo es.

Lema 6.1. *La compacidad es una propiedad absoluta, en el sentido de que, para ver si $A \subset X$ es compacto en (X, τ), basta con estudiar los cubrimientos de A por abiertos de (X, τ).*

Demostración: Si A es compacto y $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ es una familia de abiertos en (X, τ) tal que $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, entonces $\mathcal{U}_A = \{U_i \cap A : i \in I\}$ es un cubrimiento de A por abiertos en (A, τ_A). Y recíprocamente, si $\mathcal{V} = \{V_i : i \in I\}$ es un cubrimiento de A por abiertos en (A, τ_A), para cada $i \in I$ existe $U_i \in \tau$ tal que $V_i = U_i \cap A$. Entonces $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ es una familia de abiertos en (X, τ) que cubre A. ∎

Observación 6.1. Si (X, τ) es un espacio topológico:

1) Cualquier conjunto finito es compacto.

2) En la definición de compacidad, pueden reemplazarse los abiertos por abiertos básicos e incluso por subbásicos (*teorema de la subbase de Alexander*).

3) Si A es compacto en (X, τ) y $\tau' \subset \tau$, entonces A es compacto en (X, τ').

4) La unión finita de compactos es compacta. No sucede lo mismo con la intersección (ver problema **13** en el apartado 6.5).

Ejemplos 6.1. Algunos ejemplos de espacios compactos son:

1) En (X, τ_{ind}), todo subconjunto es compacto.

2) En (X, τ_{dis}), los únicos compactos son los conjuntos finitos.

3) En (X, τ_A), B es compacto si y sólo si $B - A$ es finito.

4) En (X, τ^A), si $B \cap A \neq \emptyset$, entonces B es compacto. Y si $B \cap A = \emptyset$, B es compacto si y sólo si es finito.

5) En (X, τ_{cof}), todo subconjunto es compacto.

6) En (X, τ_{coc}), los únicos compactos son los conjuntos finitos.

7) En $(\mathbb{R}, \tau_{kol})$, A es compacto si y sólo si está acotado inferiormente e $\inf(A) \in A$.

8) En $(\mathbb{R}, \tau_u)$, A es compacto si y sólo si A es cerrado y acotado: $\mathbb{R}$ no es compacto pues $\mathcal{U} = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un cubrimiento sin subcubrimiento finito.

9) En $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$, A es compacto si y sólo si A es acotado, $A \in \mathcal{C}_{sca}$ y $A \cap \mathbb{I}$ es finito.

10) En $(\mathbb{R}, \tau_{lac})$ (problema 23 en el apartado 2.7), A es compacto si y sólo si ($0 \in A \in \mathcal{C}_{lac}$) o ($0 \notin A$ y A es compacto usual).

Proposición 6.2. *La compacidad es débilmente hereditaria.*

Demostración: Si (X, τ) es compacto y $A \in \mathcal{C}$, sea $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ un cubrimiento de A por abiertos de (X, τ). Entonces $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\} \cup \{X - A\}$ es un cubrimiento de X por abiertos en (X, τ). Como X es compacto, existe $J \subset I$, J finito tal que $X = \bigcup_{i \in J} U_j \cup (X - A)$. Entonces $A \subset \bigcup_{i \in J} U_j$. ∎

Contraejemplo 6.1. La compacidad no es hereditaria: $([0, 1], \tau_u)$ es un espacio compacto, pero $((0, 1), \tau_u)$ no lo es.

Proposición 6.3. *La imagen continua de un compacto es un conjunto compacto.*

Corolario 6.4. *La compacidad es una propiedad topológica.*

6.2. Productos de espacios compactos

Teorema 6.5. *Un producto de espacios es compacto si y sólo si cada espacio factor lo es.*

Demostración: Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos y $(X \times Y, \tau_{Tyc})$ su producto. Si $(X \times Y, \tau_{Tyc})$ es compacto, como las proyecciones son continuas y sobreyectivas, por la proposición 6.3 cada espacio factor es compacto.

Supongamos ahora que (X, τ_X) e (Y, τ_Y) son compactos. Sea $\mathcal{W} = \{U_i \times V_i : i \in I\}$ un cubrimiento de $X \times Y$ por abiertos básicos, es decir, $U_i \in \tau_X$ y $V_i \in \tau_Y$. Para cada $x \in X$, $\{x\} \times Y$ es compacto, luego existe $I_x \subset I$ finito tal que $\{x\} \times Y \subset \bigcup_{i \in I_x} U_i \times V_i$. Puede suponerse además que $x \in U_i$ para cada $i \in I_x$. Si $U_x^* = \bigcap_{i \in I_x} U_i$, es claramente $U_x^* \times Y \subset \bigcup_{i \in I_x} (U_i \times V_i)$. $\mathcal{U}^* = \{U_x^* : x \in X\}$ es un cubrimiento por abiertos de (X, τ_X), que es compacto, luego existe $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ tal que $X = U_{x_1}^* \cup \dots \cup U_{x_n}^*$. Sea $I^* = I_{x_1} \cup \dots \cup I_{x_n}$, subconjunto finito de I. Es fácil comprobar que $X \times Y \subset \bigcup_{i \in I^*} (U_i \times V_i)$. ∎

6.3. Compacidad secuencial

Definición 6.3. Un espacio topológico (X, τ) es *secuencialmente compacto* si toda sucesión en (X, τ) posee una subsucesión convergente.

Definición 6.4. Un espacio topológico (X, τ) posee la *propiedad de Bolzano-Weierstrass*, si todo subconjunto infinito en X posee un punto de acumulación.

En general, no hay relación entre las nociones de compacidad, de compacidad secuencial y la propiedad de Bolzano-Weierstrass. Aunque son equivalentes en algunos tipos de espacios:

Proposición 6.6. *Si (X, d) es un espacio métrico, la propiedad de Bolzano-Weierstrass, la compacidad secuencial y la compacidad son propiedades equivalentes.*

6.4. Compacidad en espacios de Hausdorff

En los espacios de Hausdorff, la compacidad posee algunas propiedades especiales.

Lema 6.7. *Sea (X, τ) un espacio T_2, $A \subset X$ compacto y $x \notin A$. Existen $U, V \in \tau$ disjuntos, tales que $x \in U$ y $A \subset V$.*

Demostración: Para cada $a \in A$, es $x \neq a$. Por la propiedad de Hausdorff, existen $U_a, V_a \in \tau$, disjuntos y tales que $x \in U_a$ y $a \in V_a$. $\mathcal{U} = \{V_a : a \in A\}$ es un cubrimiento de A por abiertos de X. Como A es compacto, existen $\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$, tales que $A \subset V_{a_1} \cup \dots \cup V_{a_n}$. Basta con tomar $U = U_{a_1} \cap \dots \cap U_{a_n}$ y $V = V_{a_1} \cup \dots \cup V_{a_n}$. ∎

Proposición 6.8. *En un espacio (X, τ) T_2, si $A \subset X$ es compacto, entonces $A \in \mathcal{C}$.*

Demostración: Si $x \notin A$, por el lema 6.7, existen $U, V \in \tau$ disjuntos, tales que $x \in U$ y $A \subset V$. Es $x \in U \subset X - V \subset X - A$, es decir, $X - A \in \tau$. ∎

Contraejemplo 6.2. La propiedad de Hausdorff es esencial: en (X, τ_{ind}), cualquier conjunto es compacto, pero no todo conjunto es cerrado.

Los conjuntos compactos en espacios T_2 pueden pensarse como una generalización de los puntos, en el siguiente sentido:

Proposición 6.9. *Si A y B son compactos disjuntos en (X, τ) T_2, existen abiertos disjuntos U y V, tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.*

Demostración: $A \subset X - B$, luego para cada $a \in A$, es $a \notin B$. Por el lema 6.7, existen $U_a, V_a \in \tau$ disjuntos, tales que $a \in U_a$ y $B \subset V_a$. Como A es compacto, existe $\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$, tal que $A \subset U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n}$. Basta con tomar $U = U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n}$ y $V = V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_n}$. ∎

Contraejemplo 6.3. De nuevo, la propiedad de Hausdorff es esencial: en $(\mathbb{R}, \tau_{ind})$, $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$ son compactos disjuntos y no hay abiertos que los separen.

Proposición 6.10. *Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua. Si (X, τ_X) es compacto e (Y, τ_Y) es de Hausdorff, entonces f es cerrada.*

Demostración: Sea $A \in \mathcal{C}_X$, por la proposición 6.2, A es compacto, luego $f(A)$ también lo es, por continuidad. Como (Y, τ_Y) es T_2, la proposición 6.8 garantiza que $f(A) \in \mathcal{C}_Y$. ∎

Corolario 6.11. *Si $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua y biyectiva, (X, τ_X) es compacto e (Y, τ_Y) es de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.*

Contraejemplo 6.4. La propiedad de Hausdorff es esencial: $f\colon ([0,1), \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{S}^1, \tau_u)$ dada por $f(t) = e^{2\pi i t}$ es continua y biyectiva, pero no es un homeomorfismo.

6.5. Problemas

1.- Una familia de subconjuntos de X, $\mathcal{F}$, tiene la *propiedad de intersección finita*, si la intersección de cualquier subcolección finita de elementos de $\mathcal{F}$ es no vacía. Probar que (X,τ) es compacto si y sólo si cualquier familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ con la propiedad de intersección finita, verifica que $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$.

2.- Si la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge a a en (X,τ), probar que $Rg\{x_n\} \cup \{a\}$ es un conjunto compacto.

3.- Caracterizar los compactos de $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$.

* **4.-** Se dice que (X,τ) es KC, si todo compacto en (X,τ) es cerrado. Probar:

(i) KC es un axioma de separación intermedio entre el de Hausdorff y el de Fréchet (ver problema **4**, apartado 2.7).

(ii) Si (X,τ) es KC, todo conjunto finito es cerrado.

(iii) Si (X,τ) es KC, la intersección arbitraria de conjuntos compactos es compacta.

(iv) Si (X,τ) es KC, las sucesiones poseen límites únicos.

5.- Sea (X,τ) un espacio topológico. Probar:

(i) La unión de finita de compactos en X es un conjunto compacto.

(ii) Si (X,τ) es T_2, la intersección arbitraria de compactos es un conjunto compacto.

(iii) Si (X,τ) es T_2 y A es compacto, entonces A' y $\overline{A}$ son compactos.

* **6.-** Sea (X,τ) un espacio compacto y T_2 y $f\colon (X,\tau) \longrightarrow (X,\tau)$ una aplicación continua. Demostrar que existe un cerrado no vacío $F \subset X$, tal que $f(F) = F$.

* **7.-** Sea (X,τ) un espacio compacto y $\mathcal{F}$ una familia de funciones $f\colon (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_u)$ continuas tales que:

(i) para $f,g \in \mathcal{F}$, es $f.g \in \mathcal{F}$, y

(ii) para cada $x \in X$, existen $f \in \mathcal{F}$ y $U_x \in \mathcal{N}_x$, tales que $f(z) = 0$ para $z \in U_x$.

Probar que la función idénticamente nula es un elemento de $\mathcal{F}$.

8.- Sea (X,τ_X) un espacio compacto, (Y,τ_Y) un espacio T_2 y la *proyección paralela al factor compacto* $p_Y\colon (X \times Y, \tau_{Tyc}) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$. Probar que p_Y es cerrada.

9.- Sean (X,τ_X) T_2 e (Y,τ_Y) compacto y T_2. Probar que $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ es continua si y sólo si su grafo $G_f = \{(x, f(x) : x \in X\}$ es cerrado en $(X\times Y,\tau_{Tyc})$.

10.- En $([0,1],\tau_u)$ se define la relación de equivalencia $\sim$ que identifica los puntos 0 y $\frac{1}{2}$. Sea $p\colon ([0,1],\tau_u)\longrightarrow([0,1]/\sim,\tau_\sim)$ la aplicación cociente. Probar:

(i) p es cerrada, pero no es abierta.

(ii) El espacio cociente $([0,1]/\sim,\tau_\sim)$ es compacto y T_2.

11.- Sea $((0,1),\tau)$, donde $\tau = \{(0,1),\emptyset\}\bigcup\{(0,1-\frac{1}{n}), n>1\}$. Estudiar la compacidad de los abiertos y los cerrados de $(0,1)$.

* **12.-** Sea $([0,1],\tau)$, donde τ es la topología definida por:

1) para cada $x\in(0,1)$, $\{x\}$ es abierto y cerrado,

2) los entornos básicos del punto 0 son los usuales, y

3) los entornos básicos del punto 1 son de la forma $[0,1]-F$, donde $F\subset[0,1)$ es finito o el rango de una sucesión que converge a 0 con la topología usual.

Probar que $([0,1],\tau)$ es T_2 y compacto.

13.- Sean $X=\{a,b\}$ y $(\mathbb{R}\times X,\tau_u\times\tau_{ind})$. Demostrar que los conjuntos

$$A=[0,1)\times\{a\}\cup[1,2]\times\{b\} \text{ y } B=[0,1]\times\{a\}\cup(1,2]\times\{b\}$$

son compactos, pero que $A\cap B$ no lo es.

14.- Caracterizar los conjuntos compactos en los espacios topológicos siguientes:

(i) $([-1,1],\tau)$, donde $\tau=\{U\subset X : 0\notin U \text{ ó } (-1,1)\subseteq U\}$.

(ii) La recta de Sorgenfrey, la cofinita, la connumerable, la de Kolmogorov, la enlazada o la esparcida.

(iii) El plano de Moore.

* **15.-** Sea $(X,\leq)$ un conjunto totalmente ordenado y τ_{ord} la topología del orden sobre X. Probar que (X,τ_{ord}) es compacto si y sólo si todo subconjunto no vacío posee supremo e ínfimo.

*** 16.-** Una aplicación $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ se llama *perfecta*, si es sobreyectiva, continua, cerrada y con la propiedad de que para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es compacto. Si f es perfecta, probar:

(i) Si (X,τ_X) es de Hausdorff, (Y,τ_Y) es de Hausdorff.

(ii) Si (Y,τ_Y) es compacto, (X,τ_X) es compacto.

(iii) Para cada K compacto en (Y,τ_Y), $f^{-1}(K)$ es compacto en (X,τ_X).

*** 17.-** Sea (X,τ_X) compacto y $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ una aplicación continua. Probar que el grafo de f, $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$, es compacto en $(X \times Y, \tau_{Tyc})$.

*** 18.-** Sea (X,τ) compacto y $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión decreciente de cerrados. Probar que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

19.- Probar que la intersección de cualquier familia de conjuntos cerrados y compactos en un espacio topológico (X,τ) es un conjunto cerrado y compacto.

20.- *Teorema de Kuratowski*.

Un espacio de Hausdorff (X,τ_X) es compacto si y sólo si para cada espacio topológico (Y,τ_Y), la proyección $p_Y\colon (X \times Y, \tau_{Tyc}) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es cerrada.

*** 21.-** *Teorema de Alexandroff*.

Sea (X,τ) un espacio compacto y de Hausdorff y $\sim$ una relación de equivalencia cerrada, es decir, la aplicación cociente $p\colon (X,\tau) \longrightarrow (X/\sim, \tau_\sim)$ es cerrada. Probar:

(i) Existe un único (salvo homeomorfismos) espacio de Hausdorff (Y,τ_Y), y una función $f\colon (X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ continua y sobreyectiva, tal que $\sim = \sim_f$ (donde $x \sim_f y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$). Además, (Y,τ_Y) es compacto.

(ii) Recíprocamente, para cada función continua $f\colon (X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ de un espacio compacto y de Hausdorff (X,τ) sobre un espacio de Hausdorff (Y,τ_Y), la relación de equivalencia $\sim_f$ es cerrada.

*** 22.-** Sea el espacio proyectivo real de dimensión n (ver problema **45**, apartado 5.6), $(\mathbb{RP}^n, \tau_u)$. Probar:

(i) La aplicación cociente $\pi_n\colon (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{RP}^n, \tau_u)$ es abierta, pero no cerrada.

(ii) El conjunto $\Gamma = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) : x \simeq y\}$ es cerrado. Deducir que $(\mathbb{RP}^n, \tau_u)$ es de Hausdorff.

(iii) Sea $\sim$ la relación de equivalencia sobre $\mathbb{S}^n$ obtenida por restricción de $\simeq$. Entonces el espacio cociente $(\mathbb{S}^n/\sim, \tau_\sim)$ es compacto.

(iv) La restricción de π_n a $\mathbb{S}^n$, ψ_n, es una aplicación continua y define un homeomorfismo de $(\mathbb{S}^n/\sim, \tau_\sim)$ sobre $(\mathbb{RP}^n, \tau_u)$. Deducir que el espacio proyectivo real de dimensión n es compacto.

(v) Si $g\colon (\mathbb{S}^1, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \tau_u)$ está definida por $g(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, entonces $g(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$ y g define un homeomorfismo de $(\mathbb{S}^1/S_\sim, \tau_\sim)$ sobre $(\mathbb{S}^1, \tau_u)$. Deducir que el espacio proyectivo real de dimensión 1 es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \tau_u)$.

Conexión

Una vez establecidas dirección, peripecias, atmósfera y particularidades, el cuento puede cobrar vida. Cada elemento, cada variación, influirá en todas las demás, si el narrador escucha a su propia historia percibirá que el cuento solo se va organizando, va adquiriendo coherencia interna, va reaccionando a cada modificación en el ambiente, a cada perturbación.

“La narración fractal. Arte y ciencia de la oralidad”
Héctor Urién

7.1. Espacios y subconjuntos conexos

La conexión es una extensión de la idea de que un intervalo de la recta real es *de una pieza*. El problema de decidir cuando un espacio topológico es *de una pieza* se resuelve determinando cuando puede *romperse* en dos abiertos disjuntos.

Definición 7.1. Un espacio topológico (X, τ) es *disconexo* si existen $U, V \in \tau$, no vacíos, disjuntos cuya unión es X. En caso contrario, (X, τ) se llama *conexo*. Y $A \subset X$ es conexo, cuando lo es como subespacio.

Lema 7.1. *Dado un espacio topológico (X, τ), son equivalentes:*

(i) (X, τ) es disconexo;

(ii) existen F y G cerrados disjuntos, no vacíos, cuya unión es X;

(iii) existe A un subconjunto propio ($\emptyset \neq A \neq X$) de X que es abierto y cerrado;

(iv) existe A un subconjunto propio de X de frontera vacía;

(v) existe una aplicación $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (\{0, 1\}, \tau_{dis})$ continua y sobreyectiva.

Lema 7.2. *Si (X, τ_1) es conexo y $\tau_2 \subset \tau_1$, entonces (X, τ_2) es también conexo.*

Lema 7.3. *La conexión es una propiedad absoluta, en el sentido de que si $B \subset A \subset X$, B es conexo en (X, τ) si y sólo si B es conexo en (A, τ_A).*

Proposición 7.4. *En (X, τ), si A es abierto y cerrado a la vez y C es conexo, es necesariamente $C \subset A$ o $C \subset X - A$.*

Ejemplos 7.1. En los espacios topológicos vistos hasta ahora, tenemos:

1) El vacío y los puntos son conexos en cualquier espacio topológico.

2) Cualquier espacio en el que no existan abiertos (o cerrados) disjuntos es conexo.

3) En (X, τ_{ind}), todo subconjunto es conexo.

4) En (X, τ_{dis}), los únicos conexos no vacíos son los puntos.

5) En (X, τ_A), si $B \cap A = \emptyset$, B es conexo si y sólo si se reduce a un punto, y en caso contrario es conexo.

6) En (X, τ^A), si $B \cap A = \emptyset$, B es conexo si y sólo si se reduce a un punto, y en caso contrario es conexo.

7) En (X, τ_{cof}), A es conexo si y sólo si es vacío, se reduce a un punto o es infinito.

8) En (X, τ_{coc}), A es conexo si y sólo si es vacío, se reduce a un punto o es no contable.

9) En $(\mathbb{R}, \tau_{kol})$, todo conjunto es conexo.;

10) En $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$, los únicos conexos son el vacío y los puntos.

11) En $(\mathbb{R}, \tau_u)$, los conexos son los intervalos.

Definición 7.2. Un espacio (X, τ) es *totalmente disconexo* si sus únicos conexos son el vacío y los puntos.

Ejemplos 7.2. Los espacios discretos, la recta racional y el conjunto de Cantor (ver problema **18** en el apartado 3.5), son ejemplos de espacios totalmente disconexos.

Teorema 7.5. *La imagen continua de un conjunto conexo es conexo.*

Corolario 7.6. *La conexión es una propiedad topológica.*

La conexión no es hereditaria (por ejemplo, los extremos del intervalo $[0, 1]$ en $(\mathbb{R}, \tau_u)$ no forman un conjunto conexo), aunque existen algunos resultados parciales en subespacios.

Respecto a uniones de conjuntos conexos, se verifican las siguientes propiedades:

Teorema 7.7. *Dada una familia $\{C_i : i \in I\}$ de conjuntos conexos en (X, τ), tales que existe $i_0 \in I$ con $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$ para cada $i \in I$, entonces su unión es un conjunto conexo.*

Corolario 7.8. *En (X, τ), se verifica:*

(i) Dada una familia $\{C_i : i \in I\}$ de conjuntos conexos tales que $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, su unión es un conjunto conexo.

(ii) Si para cada par de puntos $x, y \in X$ existe un conjunto conexo C_{xy} que los contiene, entonces X es conexo.

(iii) Dada una familia $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos conexos tales que $C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces su unión es un conjunto conexo.

La siguiente propiedad es de gran utilidad a la hora de estudiar la conexión de ciertos conjuntos:

Teorema 7.9. *Si C es conexo en (X, τ) y $B \subset X$ es tal que $C \subset B \subset \overline{C}$, entonces B es conexo. En particular, la clausura de cualquier conjunto conexo es un conjunto conexo.*

Ejemplo 7.1. Las anteriores propiedades permiten ver la conexión de algunos espacios:

1) $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$ es conexo: $\mathbb{R}^n$ es la unión de todas las rectas que pasan por el origen de coordenadas. Así, es unión de conexos (conjuntos homeomorfos a la recta real) que se cortan en un punto.

2) Una bola abierta en $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$ es un conjunto conexo, ya que es homeomorfa $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, su clausura –la bola cerrada correspondiente– también es un conjunto conexo (teorema 7.9). Más aún, cualquier conjunto comprendido entre la bola abierta y la cerrada es conexo.

Teorema 7.10. *El producto de espacios topológicos es conexo si y sólo si cada espacio factor lo es.*

Demostración: Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos y $(X \times Y, \tau_{Tyc})$ su producto. Si el producto es conexo, al ser las proyecciones coordenadas continuas y sobreyectivas, cada espacio factor lo es. Recíprocamente, sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) conexos y supongamos que existe $f\colon (X \times Y, \tau_{Tyc}) \longrightarrow (\{0, 1\}, \tau_{dis})$ continua y sobreyectiva. Existen $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X \times Y$ tales que $f(a_1, b_1) = 0$ y $f(a_2, b_2) = 1$. Si $f(a_2, b_1) = 0$, sea $i_{a_2}\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X \times Y, \tau_{Tyc})$ el embebimiento $i_{a_2}(y) = (a_2, y)$. Así $f \circ i_{a_2}$ es continua. Pero $f \circ i_{a_2}(b_1) = 0$ y $f \circ i_{a_2}(b_2) = 1$, lo que contradice la conexión de (Y, τ_Y). De manera similar, se prueba que tampoco puede ser $f(a_2, b_1) = 1$. Luego no puede existir una tal f, y por lo tanto $(X \times Y, \tau_{Tyc})$ es conexo. ∎

7.2. Componentes conexas

Vamos a describir las partes conexas *maximales* de un espacio topológico:

Definición 7.3. En (X,τ), dado $x \in X$, al mayor conexo $C(x)$ que contiene a x se le llama *componente conexa* del punto x. Es la unión de todos los conjuntos conexos que contienen a x.

Lema 7.11. *Las componentes conexas de (X,τ) constituyen una partición del espacio.*

Aplicando directamente el teorema 7.9, se deduce:

Teorema 7.12. *En (X,τ) las componentes conexas son conjuntos cerrados.*

Proposición 7.13. *Sea (X,τ) un espacio topológico.*

(i) (X,τ) es conexo si y sólo si posee una única componente conexa (el espacio total).

(ii) (X,τ) es totalmente disconexo si y sólo si sus componentes conexas son los puntos.

Proposición 7.14. *Sea (X,τ) un espacio topológico y C una componente conexa. Si A es conexo, entonces es $A \subset C$ o $A \subset X - C$.*

7.3. Conexión por caminos

La conexión es una propiedad difícil de manejar, al tratarse de una propiedad en sentido negativo: un espacio topológico es conexo si se puede 'romper' en dos abiertos disjuntos. La conexión por caminos posee la ventaja de ser una propiedad *algebraica* y en sentido positivo.

Definición 7.4. Dado un espacio topológico (X,τ), un *camino* en X es una aplicación continua $\sigma\colon ([0,1],\tau_u) \longrightarrow (X,\tau)$. Si $\sigma(0) = a$ y $\sigma(1) = b$, se dice que σ es un camino de a a b.

Definición 7.5. (X,τ) es *conexo por caminos* si para todo par de puntos $a,b \in X$ existe un camino que los une.

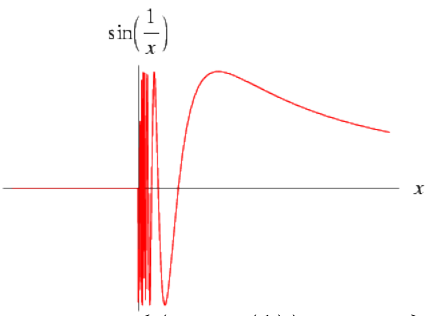
Proposición 7.15. *Si (X,τ) es conexo por caminos, es conexo.*

Demostración: Supongamos que (X,τ) no es conexo. Existen U y V abiertos disjuntos y no vacíos cuya unión es X. Sea $x \in U$ e $y \in V$ y $\sigma\colon ([0,1],\tau_u) \longrightarrow (X,\tau)$ un camino uniendo x e y. Entonces, $\sigma^{-1}(U)$ y $\sigma^{-1}(V)$ son abiertos en $([0,1],\tau_u)$, no vacíos y disjuntos cuya unión es $[0,1]$, lo cual es un absurdo. ∎

El recíproco no es cierto:

Ejemplo 7.2. La *curva seno topológico* es el subespacio del plano euclídeo

$$A = ((-\infty, 0] \times \{0\}) \cup \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) : x > 0 \right\}.$$



A es conexo, pero no es conexo por caminos.

Demostración: En efecto, si llamamos $B = (-\infty, 0] \times \{0\}$ y $C = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x > 0\right\}$, es claro que ambos conjuntos son conexos por caminos, luego conexos. Por el teorema 7.9, $\overline{C} = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x > 0\right\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ es conexo. Por lo tanto, el conjunto $D = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x > 0\right\} \cup \{(0, 0)\}$ es conexo, ya que $C \subset D \subset \overline{C}$. Y $A = B \cup D$ es conexo como unión de conexos que se cortan. Pero A no es conexo por caminos porque no existe ningún camino uniendo el punto $(0, 0)$ con cualquier punto de C. ∎

Definición 7.6. (X, τ) es *localmente conexo por caminos*, si cada punto de X posee una base local formada por conjuntos conexos por caminos.

A pesar del ejemplo 7.2, existe un recíproco parcial de la proposición 7.15

Proposición 7.16. *Si (X, τ) es conexo y localmente conexo por caminos, entonces es conexo por caminos.*

Ejemplos 7.3. Algunos ejemplos de espacios conexos por caminos son:

1) Los espacios indiscretos son conexos por caminos.

2) En la recta real, los conjuntos conexos y los conexos por caminos coinciden.

3) Para $A \subset \mathbb{R}^n$, se verifica:

- si A es conexo y abierto, es conexo por caminos;
- si A es convexo, es conexo por caminos;
- si A es contable y $n > 1$, $\mathbb{R}^n - A$ es conexo por caminos.

Teorema 7.17. *La imagen continua de un espacio conexo por caminos, es conexa por caminos.*

Corolario 7.18. *La conexión por caminos es una propiedad topológica.*

Teorema 7.19. *El producto de espacios es conexos por caminos si y sólo si cada espacio factor lo es.*

7.4. Componentes conexas por caminos

Sobre (X, τ) se define la relación de equivalencia $x \sim y$ si y sólo si existe un camino en X que une x e y.

Definición 7.7. Las clases de la anterior relación de equivalencia son las *componentes conexas por caminos* de X. La componente conexa por caminos de un punto x, $c(x)$, es el mayor conjunto conexo por caminos de X que lo contiene.

Proposición 7.20. *En (X, τ), para cada $x \in X$, $c(x) \subset C(x)$.*

7.5. Problemas

1.- Estudiar la conexión en la recta real.

2.- Probar que si A es un conjunto convexo en $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$, entonces es conexo. El recíproco no es cierto.

3.- Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios conexos y $A \subset X$, $B \subset Y$ subconjuntos propios. Probar que $X \times Y - (A \times B)$ es conexo en $(X \times Y, \tau_{Tyc})$.

4.- Sea C conexo en (X, τ) y $A \subset X$. Probar que si $C \cap A \neq \emptyset \neq C \cap (X - A)$, entonces $C \cap fr(A) \neq \emptyset$.

5.- En (X, τ), probar:

(i) El interior, la frontera, la intersección y la unión de conjuntos conexos no tiene porque ser un conjunto conexo.

(ii) Si $A, B \in \tau$ (respectivamente, $A, B \in \mathcal{C}$), $A \cap B$ y $A \cup B$ son conexos, entonces A y B son conexos.

6.- Dado (X, τ) conexo, si $\tau' \subset \tau \subset \tau''$, estudiar la conexión de (X, τ') y (X, τ'').

7.- Sea $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua y (X, τ_X) conexo. Probar que el grafo de f, $G_f = \{(x, f(x) : x \in X\}$, es conexo en $(X \times Y, \tau_{Tyc})$.

8.- Sea $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua. Con las notaciones obvias, probar:

(i) Para cada $x \in X$, $f(C(x)) \subset C(f(x))$.

(ii) Si f es un homeomorfismo, f induce una correspondencia biyectiva entre el conjunto de las componentes conexas de (X, τ_X) y el de las de (Y, τ_Y), siendo homeomorfas las componentes conexas correspondientes.

(iii) Si B una componente conexa en (Y, τ_Y), entonces $f^{-1}(B)$ es una unión de componentes conexas. En particular, si $f^{-1}(B)$ es conexo, será una componente conexa.

9.- Probar que conjunto abierto, cerrado y conexo en un espacio topológico es una componente conexa.

10.- Si (X, τ) es conexo y existe $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ continua y no constante, entonces X es no contable.

11.- Si (X, τ) es conexo y de Fréchet con más de un punto, entonces X es infinito.

* **12.-** Sea (X, τ) un espacio topológico, $\simeq$ una relación de equivalencia sobre X y la aplicación cociente $p\colon (X, \tau) \longrightarrow (X/\simeq, \tau_{\simeq})$. Probar:

(i) Si $(X/\simeq, \tau_{\simeq})$ es conexo y todo conjunto abierto y cerrado a la vez en X es saturado, entonces (X, τ) es conexo.

(ii) Si toda clase de equivalencia es conexa en (X, τ), entonces B es una componente conexa en $(X/\simeq, \tau_{\simeq})$, si y sólo si $p^{-1}(B)$ es una componente conexa en (X, τ).

(iii) Si $(X/\simeq, \tau_{\simeq})$ es conexo y toda clase de equivalencia es conexa en (X, τ), entonces (X, τ) es conexo.

(iv) Si $\simeq_0$ es la relación de equivalencia sobre X cuyas clases son las componentes conexas, entonces $(X/\simeq_0, \tau_{\simeq_0})$ es totalmente disconexo.

* **13.-** Si (X, τ) es conexo y $k \in \mathbb{N}$, x se llama un *punto de corte de orden* k, si $X - \{x\}$ posee exactamente k componentes conexas. Se pide:

(i) Probar que el número de puntos de un orden fijado es un invariante topológico.

(ii) En la recta real, ¿qué tipos de puntos de corte poseen los intervalos $[0, 1]$, $(0, 1]$ y $(0, 1)$?

(iii) Si $n > 1$, $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$ posee un punto de corte de orden 1. Deducir que $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$ y $(\mathbb{R}, \tau_u)$ no son homeomorfos.

* **14.-** Probar:

(i) Si (X, τ) es totalmente disconexo, entonces $\tau_{cof} \subset \tau$.

(ii) La disconexión total es una propiedad hereditaria y productiva.

(iii) La imagen continua de un espacio totalmente disconexo no es necesariamente totalmente disconexa.

(iv) Un espacio (X, τ) compacto y de Hausdorff es totalmente disconexo si y sólo si dados dos puntos $x \neq y \in X$, existe un subconjunto A abierto y cerrado a la vez, tal que $x \in A$ e $y \notin A$.

*** 15.-** Sea (X, τ) un espacio topológico. Una *cadena simple* conectando los puntos a y b es una familia finita $\{U_1, \cdots, U_n\} \subset \tau$, tal que:

(a) $a \in U_1$ y $a \notin U_i$ para $i > 1$,

(b) $b \in U_n$ y $b \notin U_i$ para $i < n$,

(c) $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$.

Probar que si (X, τ) es conexo y $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ es un cubrimiento por abiertos de X, entonces para cada $a, b \in X$, existe una cadena simple formada por elementos de $\mathcal{U}$ que los conecta.

*** 16.-** Se dice que un espacio (X, τ) es *0-dimensional*, si existe una base β de τ, formada por conjuntos abiertos y cerrados a la vez. Se pide:

(i) Estudiar si son 0-dimensionales los siguientes espacios: (X, τ_{ind}), (X, τ_{dis}), $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$, $(\mathbb{R}, \tau_u)$, $(\mathbb{Q}, \tau_u)$, $(\mathbb{I}, \tau_u)$ y el conjunto de Cantor.

(ii) Probar que la 0-dimensionalidad es hereditaria y productiva.

(iii) La imagen continua de un espacio 0-dimensional no es necesariamente 0-dimensional.

(iv) Un espacio 0-dimensional es o indiscreto o disconexo.

(v) Un espacio 0-dimensional y de Fréchet es totalmente disconexo.

(vi) El recíproco de (v) no es cierto, para probarlo vamos a estudiar el *ejemplo de Knaster y Kuratowski*. Sean $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor, $A \subset \mathcal{C}$ el conjunto de los puntos finales de los intervalos abiertos que se eliminan en la construcción del conjunto de Cantor (ver el problema **18**, apartado 3.5) y $B = \mathcal{C} - A$. Sea $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$ y para cada $x \in \mathcal{C}$, sea L_x el segmento de línea recta que une p y $(x, 0)$. Sea

$$L_x^* = \begin{cases} \{(y_1, y_2) \in L_x : y_2 \in \mathbb{Q}\} & \text{si} \quad x \in A \\ \{(y_1, y_2) \in L_x : y_2 \in \mathbb{I}\} & \text{si} \quad x \in B \end{cases}$$

Se considera el conjunto $\mathcal{K} = \bigcup_{x \in \mathcal{C}} L_x^*$. Probar que $(\mathcal{K}, \tau_u)$ es conexo. Sin embargo, $(\mathcal{K} - \{p\}, \tau_u)$ es totalmente disconexo y no es 0-dimensional;

(vii) Un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff es 0-dimensional si y sólo si es totalmente disconexo.

17.- Probar las siguientes propiedades:

(i) Si $Y = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ y $f\colon (\mathbb{R}, \tau_u) \longrightarrow (Y, \tau_u)$ es continua y sobreyectiva, entonces $f^{-1}((0,0))$ debe contener al menos tres puntos.

(ii) Si $f\colon (\mathbb{S}^1, \tau_u) \longrightarrow ([0,1], \tau_u)$ es continua y sobreyectiva, entonces si $c \in (0,1)$, el conjunto $f^{-1}(c)$ debe contener más de un punto.

18.- Probar que no son homeomorfos los siguientes pares de espacios:

(i) $([0,1], \tau_u)$ y $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

(ii) $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$ para $n > 1$.

(iii) $([0,\infty), \tau_u)$ y $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

(iv) $([0,1], \tau_u)$ y $(\mathbb{S}^1, \tau_u)$.

(v) $(\mathbb{S}^1, \tau_u)$ y $(\mathbb{S}^n, \tau_u)$ para $n > 1$.

19.- Probar que $f\colon (\mathbb{R}, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{Q}, \tau_u)$ es continua si y sólo si es constante.

*** 20.-** En el espacio topológico (X, τ) se define la relación binaria $x \sim y$, si no existe ninguna descomposición de X en dos abiertos disjuntos, uno de los cuales contiene a x y el otro a y. Probar:

(i) $\sim$ es una relación de equivalencia sobre X: las clases de equivalencia $Q(x)$ se llaman *casi-componentes*.

(ii) Cada casi-componente es la intersección de todos los conjuntos abiertos y cerrados que contienen a un punto dado.

(iii) Para cada $x \in X$ es $C(x) \subset Q(x)$. Toda casi-componente es una unión de componentes.

(iv) Una casi-componente abierta es una componente conexa.

(v) Si (X, τ) es compacto y de Hausdorff, entonces para cada $x \in X$, es $C(x) = Q(x)$.

(vi) Se consideran los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$: $L_1 = \mathbb{R} \times \{1\}$, $L_2 = \mathbb{R} \times \{-1\}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, el rectángulo $R_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq n, |y| \leq \dfrac{n}{n+1}\right\}$. Sea $Y = L_1 \cup L_2 \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n\right)$. Probar que, en (Y, τ_u), la componente de $(0,1)$ es L_1 y su casi-componente es $L_1 \cup L_2$.

21.- En un espacio topológico compacto en el que las componentes conexas son abiertas, probar que sólo hay un número finito de componentes conexas.

* **22.-** Sea (X, d) un espacio métrico conexo de diámetro $\delta(X) = \sup\{d(a, b) : a, b \in X\}$ infinito. Probar que toda esfera es no vacía.

* **23.-** Probar que $(\mathbb{R}^{n+1} - \mathbb{S}^n, \tau_u)$ no es conexo.

24.- Probar que cualquier subconjunto abierto de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es una unión, a lo sumo numerable, de intervalos abiertos y disjuntos.

25.- Sea (X, τ) un espacio de Fréchet. Probar que cualquier conjunto conexo no trivial es *denso en sí mismo*, es decir, no contiene puntos aislados.

* **26.-** En este problema se trata de estudiar alguna de las aplicaciones de la conexión.

(i) *Teorema del valor intermedio*. Si $f\colon ([a, b], \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ es una aplicación continua, f toma todos los valores entre dos cualesquiera de su imagen.

(ii) *Teorema del punto fijo*. Si $f\colon ([0, 1], \tau_u) \longrightarrow ([0, 1], \tau_u)$ es una aplicación continua, entonces existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

(iii) Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios homeomorfos. Probar que cualquier función continua $h\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (X, \tau_X)$ posee un punto fijo si y sólo si toda $k\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua posee un punto fijo. Deducir que si $f\colon ([a, b], \tau_u) \longrightarrow ([a, b], \tau_u)$ es una aplicación continua, entonces posee un punto fijo.

(iv) *Teorema del punto fijo de Brouwer*. Toda $f\colon ([0, 1]^n, \tau_u) \longrightarrow ([0, 1]^n, \tau_u)$ aplicación continua posee un punto fijo.

(v) *Teorema de Borsuk-Ulam*. Si $f\colon (\mathbb{S}^1, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ es continua, existen un par de puntos antipodales $z, -z \in \mathbb{S}^1$ tales que $f(z) = f(-z)$.

* **27.-** Sea (X, τ) un espacio de Hausdorff y $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos compactos no vacíos, conexos y encajados. Probar que la intersección de estos conjuntos es un conjunto no vacío, compacto y conexo.

* **28.-** Se dice que $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ es *localmente constante* si para cada $x \in X$ existe $U_x \in \tau$, tal que $x \in U_x$, y la restricción de f a U_x es constante. Si (X, τ) es conexo, probar que toda aplicación continua y localmente constante es constante.

* **29.-** Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios conexos, $A \subset X$ no vacío y $f\colon (A, \tau_A) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función continua. Probar que el espacio de adjunción $(X \cup_f Y, \tau)$ (ver los ejemplos 5.3) es conexo.

30.- Probar que no existe ninguna función continua $f\colon (\mathbb{R}, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$, tal que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $f(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

* **31.-** Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado provisto de la topología del orden. Probar:

(i) (X, τ_{ord}) es conexo si y sólo si todo conjunto $A \subset X$ no vacío y acotado superiormente admite una cota superior, y para cada $x, y \in X$, $x < y$, el intervalo $(x, y) = \{z \in X : x < z < y\}$ es no vacío.

(ii) Si (X, τ_{ord}) es conexo, un conjunto $A \subset X$ es un intervalo si y sólo si para $x, y \in X$, con $x < y$, es $(x, y) \subset A$.

(iii) Los conexos de (X, τ_{ord}) son los intervalos de X.

* **32.-** Se consideran en el plano dos circunferencias concéntricas:

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{y} \quad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}.$$

Sea $X = C_1 \cup C_2$. Se denota por $p\colon C_1 \longrightarrow C_2$ la *proyección radial*, es decir, la proyección de C_1 sobre C_2 a través del punto $(0, 0)$. Sobre X se define una topología τ, tomando como subbase la familia $\sigma = \{\{z\} : z \in C_2\} \cup \{U_k(z) : k \in \mathbb{N}, z \in C_1\}$, donde $U_k(z) = V_k(z) \cup p(V_k(z) - \{z\})$, siendo $V_k(z)$ el arco de C_1 de centro el punto z y longitud $\frac{1}{k}$. El espacio (X, τ) se llama *circunferencia doble de Alexandroff* o *espacio de las circunferencias concéntricas*. Probar:

(i) C_2 es un subespacio discreto con el mismo cardinal que $\mathbb{R}$, abierto y denso en (X, τ).

(ii) C_1 es compacto en (X, τ).

(iii) (X, τ) es de Hausdorff, compacto y C_I.

(iv) (X, τ) no es C_{II} y no es separable.

(v) (X, τ) es no metrizable, a pesar de ser la unión (no disjunta) de dos de sus subespacios metrizables.

(vi) Las componentes conexas de (X, τ) son C_1 y cada uno de los puntos de C_2.

* **33.-** Sobre $([0, 1], \tau_u)$, se considera la relación de equivalencia $x \sim y$ si y sólo si $x, y \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$. Probar:

(i) La aplicación cociente $p\colon ([0, 1], \tau_u) \longrightarrow ([0, 1]/\sim, \tau_\sim)$ es cerrada y no abierta.

(ii) Si $J = \{1\} \times [0,1]$ y $(X = \mathbb{S}^1 \cup J, \tau_u)$, la aplicación $f\colon ([0,1], \tau_u) \longrightarrow (X, \tau_u)$ dada por $f(t) = \begin{cases} (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t)) & \text{si} \quad t \leq \frac{1}{2} \\ (1, 2t-1) & \text{si} \quad t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ es continua y cerrada.

(iii) $f\colon ([0,1], \tau_u) \longrightarrow (X, \tau_u)$ induce un homeomorfismo entre los espacios $([0,1]/\sim, \tau_\sim)$ y (X, τ_u);

(iv) Deducir que $([0,1]/\sim, \tau_\sim)$ es de Hausdorff, compacto y conexo.

*** 34.-** *Topología de los círculos tangentes.*

Sobre $([0,1], \tau_u)$, se considera la relación de equivalencia $x \sim_0 y$ si y sólo si $x, y \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Si $\mathbb{S}^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+2)^2 + y^2 = 1\}$, demostrar que $([0,1]/\sim_0, \tau_{\sim_0})$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^*, \tau_u)$. Por lo tanto es de Hausdorff, compacto y conexo.

Sobre $\mathbb{R}$ se considera la topología $\tau^* \subset \tau_u$, definida al considerar los entornos usuales en los puntos $x \neq 0$ y como entornos del 0:

$$\mathcal{N}_0 = \{N \in \mathcal{N}_0^{us} : \exists \varepsilon > 0, \delta < 0 : (-\infty, \delta) \cup (\varepsilon, \infty) \subset N\}.$$

Probar:

(i) $(\mathbb{R}, \tau^*)$ es compacto y de Hausdorff.

(ii) Dados $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 = 1\}$ y $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$, se define una aplicación $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow S \cup T$ geométricamente, del modo siguiente:

(a) se identifica $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$,

(b) se levanta el intervalo $(-\infty, -2]$ en la semirrecta vertical $L = \{-2\} \times [0, \infty)$ por rotación de centro el punto $(-2, 0)$,

(c) cada punto de L se transforma, por una inversión de polo $(0,0)$ en un punto del semicírculo S^+ (es decir, un punto de L se transforma en la intersección de S con la recta pasando por dicho punto y el origen de coordenadas),

(d) cada punto de $[-2, 0]$ se proyecta sobre el semicírculo S^-,

(e) cada punto de $[0, 2]$ se proyecta sobre el semicírculo T^-,

(f) la semirecta $[2, \infty)$ se transforma en la recta vertical $L^* = \{2\} \times [0, \infty)$ por rotación de centro $(2, 0)$, y

(g) los puntos de L^* se transforman por una inversión de polo $(0,0)$ en los puntos del semicírculo T^+.

Escribir la aplicación así definida y probar que es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $T \cup S$.

(iii) f es un homeomorfismo entre los espacios $(\mathbb{R}, \tau^*)$ y $(S \cup T, \tau_u)$.

(iv) $([0,1]/R_0, \tau_{R_0})$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau^*)$.

(v) Si $a \neq 0$, el subespacio $(\mathbb{R} - \{a\}, \tau^*)$ es conexo.

(vi) La sucesión $\{(-1)^n n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en $(\mathbb{R}, \tau^*)$.

(vii) La aplicación $g\colon (\mathbb{R}, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau^*)$, definida por $g(0) = 0$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, es continua.

35.- Probar los siguientes espacios son conexos por caminos: los espacios indiscretos, las n-variedades conexas, el cono y la suspensión (ver problema **27**, apartado 5.6) de un espacio topológico.

36.- En (X, τ), probar que la unión de cualquier familia de conjuntos conexos por caminos con un punto en común, es un conjunto conexo por caminos.

37.- Probar que un espacio totalmente disconexo y localmente conexo, es discreto.

38.- Si (X, τ) es localmente conexo, probar que todo abierto es unión disjunta de abiertos conexos. En particular:

(i) En $(\mathbb{R}, \tau_u)$, todo abierto es unión disjunta de una familia contable de intervalos abiertos.

(ii) En $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$, si A es abierto, entonces es conexo si y sólo si A es conexo por caminos.

*** 39.-** Si $\leq$ es el orden lexicográfico sobre $[0,1] \times [0,1]$ y τ_{ord} es la topología del orden asociada, probar que $([0,1] \times [0,1], \tau_{ord})$ es un espacio conexo y localmente conexo, pero no es conexo por caminos.

40.- Sea (X, τ) un espacio topológico en el que las clausuras de dos puntos cualesquiera se cortan. Probar que (X, τ) es conexo por caminos.

41.- Probar que, al contrario de lo que sucede con la conexión, la clausura de un conjunto conexo por caminos no es en general conexa por caminos.

*** 42.-** Se considera el *espacio escoba* (E, τ_u), donde E es el subespacio de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión de los segmentos cerrados que unen el origen de coordenadas con los puntos $\{(1, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$, junto con el segmento $\{0\} \times (\frac{1}{2}, 1]$. El *espacio escoba cerrado* $(\widehat{E}, \tau_u)$ tiene como espacio base $\widehat{E} = E \cup (\{0\} \times (0, 1])$. Probar:

(i) (E, τ_u) y $(\widehat{E}, \tau_u)$ son conexos.

(ii) Ni (E, τ_u) ni $(\widehat{E}, \tau_u)$ son localmente conexos.

(iii) $(\widehat{E}, \tau_u)$ es conexo por caminos, pero (E, τ_u) no lo es.

*** 43.-** Sea (A, τ_u) el subespacio de $\mathbb{R}^2$, donde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, y \geq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, y < 0\}.$$

Probar que (A, τ_u) es conexo, no es localmente conexo y no es conexo por caminos.

Bibliografía

[AF] C. Adams and R. Franzosa; *Introduction to Topology Pure and Applied*, Prentice Hall, 2008.

[Ad] I. Adamson; *A General Topology Workbook*, Birkhäuser, 1995.

[AP] A.V. Arkhangels'kii and V. I. Ponomarev; *Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises*, Reidel, 1983.

[Ar] M.A. Armstrong; *Topología Básica*, Reverté, 1987.

[ADQ] $*$ R. Ayala, E. Dominguez y A. Quintero; *Elementos de Topología General*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1997.

[Bak] C.W. Baker; *Introduction to Topology*, Krieger, 1997.

[Bau] J.D. Baum; *Elements of point-set Topology*, Dover, 1991.

[Be] C. Berge; *Topological Spaces*, Dover, 1997.

[BBIF] Y.U. Borisovich, N. Bliznyakov, Y. A. Izrailevich and T. Fomenko; *Introduction to Topology*, Mir, 1985.

[Bo] C.R. Borges; *Elementary Topology and Applications*, World Scientific, 2000.

[Bu] D. Bushaw; *Elements of General Topology*, John Wiley, 1996.

[BvR] G. Buskes and A. Van der Rooij; *Topological Spaces; from distance to neighborhood*, Springer, 1997.

[BP] E. Burroni et J. Perron; *La Géométrie de caoutchouc*, Ellipses, 2000.

[Ca] G.L. Cain; *Introduction to General Topology*, Addison Wesley, 1993.

[CV] C.O. Christenson y W.L. Voxman; *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, 1998.

[Cr] F.H. Croom; *Principles of Topology*, Cengage Learning Asia, 2002.

[Cu] H. Cullen; *Introduction to General Topology*, Heath and Co., 1968.

[Cz] A. Czaszar; *General Topology*, A. Hilger, 1978.

[ChH] J. Chailloux y J. Henry; *Problemas (con soluciones detalladas) de Topología*, Toray-Masson, 1976.

[Cho] G. Choquet; *Topología*, Toray-Masson, 1971.

[Da] S.W. Davis; *Topology*, McGraw Hill, 2005.

[Di] J. Dixmier; *General Topology*, Springer, 1984.

[Du] J. Dugundji; *Topology*, Allyn and Bacon, 1968.

[E] R. Engelking; *General Topology*, Heldermann, 1989.

[Fa] A. Faisant; *TP et TD de Topologie Générale*, Hermann, 1987.

[FM] $*$ G. Fleitas Morales y J. Margalef Roig; *Problemas de Topología General*, Alhambra, 1980.

[Fl] $*$ G. Flory; *Ejercicios de Topología y Análisis*, Reverté, 1978.

[Ga] S.A. Gaal; *Point Set Topology*, Dover, 2009.

[GG] T.W. Gamelin and R.E. Greene; *Introduction to Topology*, Saunders, 1983.

[Ge] M.C. Gemignani; *Elementary Topology*, Dover, 1990.

[HF] D. Hinrichsen y J.L. Fernandez; *Topología General*, Urmo, 1977.

[HY] J.G. Hocking and G.S. Young; *Topology*, Dover, 1961.

[Hu] S.T. Hu; *Elements of General Topology*, Holden-Day, 1965.

[Jaf] P. Jaffard; *Traité de Topologie Générale*, PUF, 1997.

[Jan] K. Jänich; *Topology*, Springer, 1984.

[Ke] J.L. Kelley; *General Topology*, Springer, 1955.

[Kr] S.G. Krantz; *Essentials of Topology with Applications*, CRC Press, 2010.

[Ku] K. Kuratowski; *Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie*, Enseignement Mathématique, 1966.

[Le] H. Lehning; *Topologie (avec exercices)*, Masson, 1985.

[Li] S. Lipschutz; *Topología General*, McGraw Hill, 1967.

[Lo1] ∗ R. López Camino; *Ejercicios de topología general*, Nativola, 2009.

[Lo2] ∗ R. López Camino; *Topología*, Univ. Granada, 2014.

[Man] M.J. Mansfield; *Introducción a la Topología*, Alhambra, 1974.

[MOP] J. Margalef, E. Outerelo y J.L. Pinilla; *Topología*, Alhambra, 1975.

[Mas] X. Masa; *Topoloxia Xeral: introducción aos espacios euclidianos, métricos e topolóxicos*, Univ. Santiago de Compostela, 1999.

[MMNS] F. Mascaró, J. Monterde, J.J. Nuño y R. Sivera; *Introducció a la Topologia*, Univ. Valencia, 1997.

[Me] B. Mendelson; *Introduction to Topology*, Dover, 1990.

[Mi] ∗ E.G. Milewski; *The topology problem solver*, REA, 1994.

[Mun1] J.R. Munkres; *Topology: a first course*, Prentice-Hall, 1975.

[Mun2] ∗ J.R. Munkres; *Topología*, Prentice-Hall, 2001.

[Mur] M.G. Murdeshwar; *General Topology*, Wiley Eastern Limited, 1986.

[N] J. Nagata; *Modern General Topology*, North Holland, 1985.

[O] P.V. O'Neil; *Fundamental Concepts of Topology*, Gordon and Breach, 1972.

[Pa] C.W. Patty; *Foundations of Topology*, PWS-Kent, 1993.

[Pe] W.J. Pervin; *Foundations of General Topology*, Academic Press, 1964.

[Pr] V.V. Prasolov; *Intuitive Topology*, Math. World, 1995.

[Ro] D. Roseman; *Elementary Topology*, Prentice-Hall, 1999.

[Rub] G.N. Rubiano; *Topología General*, Univ. Nacional de Colombia, 2002.

[Run] V. Runde; *A taste of Topology*, Springer, 2005.

[Sh] P.L. Shick; *Topology Point Set and Geometric*, Wiley, 2007.

[Si] W. Sierpinski; *General Topology*, Dover, 2000.

[SS] J.A. Steen and J.A. Seebach; *Counterexamples in Topology*, Dover, 1995.

[Su] W.A. Sutherland; *Introduction to Metric and Topological Spaces*, Oxford Sci. Pub., 1993.

[T] W.J. Thron; *Topological Structures*, Holt, Rinehart and Winston, 1966.

[VINK] O.Ya. Viro, O.A. Ivanov, N.Yu. Netsvetaev, V.M. Kharlamov; *Elementary Topology: Problem Textbook*, AMS, 2008.

[WD] G. Whyburn and E. Duda; *Dynamic Topology*, Springer, 1979.

[Wi] $*$ S. Willard; *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.