Seminario 2 (17/10/2019)

Josu Pérez Zorraonandia

C1

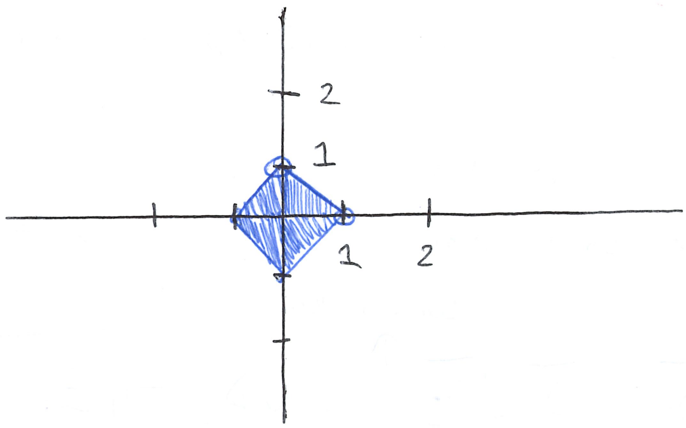
$$\begin{cases} f(x,y) = \sqrt{1-|x|-|y|} \\ D_1 = D(f) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x,y) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2y^2}}\right) \\ D_2 = D(f) \end{cases}$$

Hallamos los dominios. Para f: $(|x|+|y| \leq 1)$

$1-|x|-|y| \geq 0$

- 1er cuadrante: $x \geq 0,\ y \geq 0$
  $1-x-y \geq 0 \Rightarrow y \leq 1-x$
- 2do cuadrante: $x \leq 0,\ y \geq 0$
  $1+x-y \geq 0 \Rightarrow y \leq 1+x$
- 3er cuadrante: $x \leq 0,\ y \leq 0$
  $1+x+y \geq 0 \Rightarrow y \geq -1-x$
- 4º cuadrante: $x \geq 0,\ y \leq 0$
  $1-x+y \geq 0 \Rightarrow y \geq -1+x$



De donde deducimos:

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $(x,y) \in \overline{B}((0,0),1)$ (con la norma $\|\cdot\|_1$)$\}$

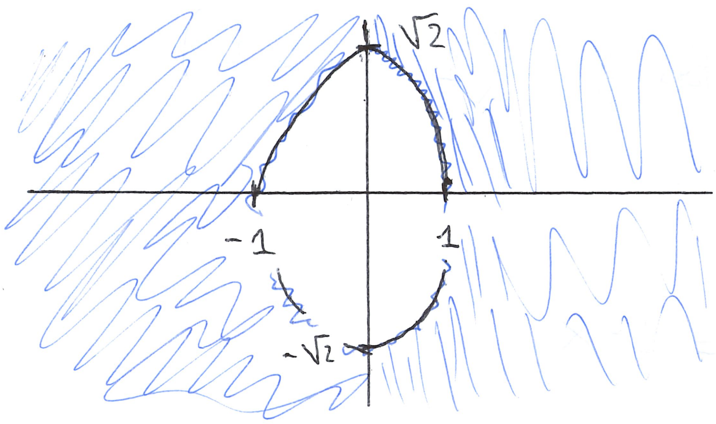
Para g:

$x^2 + 2y^2 \neq 0 \Rightarrow (x,y) \neq (0,0)$

$x^2 + 2y^2 \geq 0$ se da $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$-1 \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+2y^2}} \leq 1 \Rightarrow \left|\sqrt{x^2+2y^2}\right| \geq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \geq 1$$



$D(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $\left|\sqrt{x^2+2y^2}\right| \geq 1\}$
(Está o fuera o en el borde de la elipse).

a) ¿$D_1 \cup D_2$ es cerrado?

Sabemos que D_1 es cerrado y D_2 es cerrado $\Rightarrow \overline{D_1} = D_1$ y $\overline{D_2} = D_2$

$\overline{D_1} \cup \overline{D_2} = D_1 \cup D_2$

(Si $x \in \overline{D_1} \cup \overline{D_2} \Rightarrow x \in \overline{D_i}$ ej. y $\forall r>0$, $B(x,r) \cap D_i \neq \emptyset \Rightarrow (B(x,r) \cap D_1) \cup (B(x,r) \cap D_2) \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in \overline{D_1 \cup D_2}$

Analogamente, $x \in \overline{D_1 \cup D_2} \Rightarrow \forall r>0$ $B(x,r) \cap (D_1 \cup D_2) \neq \emptyset \Rightarrow (B(x,r) \cap D_1) \cup (B(x,r) \cap D_2) \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ Al menos una de los dos es no vacía $\Rightarrow B(x,r) \cap D_i \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{D_i} \Rightarrow$

$x \in \overline{D_i} \cup \overline{D_j}$).

Entonces: $\overline{D_1 \cup D_2} = \overline{D_1} \cup \overline{D_2} \overset{\text{son cerrados}}{=} D_1 \cup D_2 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Es cerrado}}$

b) ¿ $D_1 \cap D_2$ es compacto ?

Observamos que $D_1 \cap D_2 = \{(-1,0), (1,0)\}$. A su vez:

$\overline{D_1 \cap D_2} \supset D_1 \cap D_2$

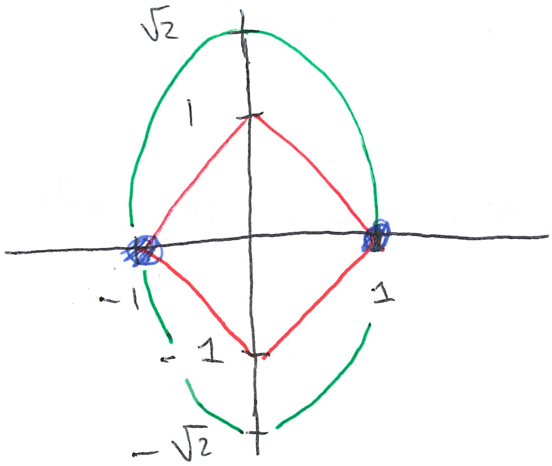
Si $(x,y) \notin D_1 \cap D_2$, tomamos $r = \min\{d((x,y),(-1,0)), d((x,y),(1,0))\}$

y $B((x,y), r) \cap (D_1 \cap D_2) = \emptyset \Rightarrow D_1 \cap D_2 \supset \overline{D_1 \cap D_2}$

$\Rightarrow \overline{D_1 \cap D_2} = D_1 \cap D_2$ y es cerrado.

Además, $D_1 \cap D_2 \subset B((0,0), 2) \Rightarrow$ está acotado.

Es cerrado y acotado $\Rightarrow$ $\boxed{D_1 \cap D_2 \text{ es compacto.}}$



c) ¿ $D_1 \cup D_2$ es compacto ?

Sabemos que $D_1 \cup D_2$ es cerrado pero no acotado, pues D_2 (el exterior de la elipse) no está acotado. Como no es cerrado y acotado $\Rightarrow$ $\boxed{D_1 \cup D_2 \text{ no es compacto.}}$

$\boxed{C2}$ $(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{y \to 0} g(x) = +\infty$$

$$L = \lim_{(x,y) \to (0,0)} (f(x) - g(x))$$

(siguiente cara)

a) No existe L.

No podemos afirmar que L exista o no, pues tenemos una indeterminación del tipo $[\infty - \infty]$, y como $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$, no podemos aplicar $\lim_{x\to 0} f(x) - g(x) = \lim_{x\to 0} f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)$.

b) Si f es un infinito de orden superior a g, entonces $L = +\infty$.

No podemos afirmarlo porque no tenemos certeza de que exista el límite de dos variables.

c) Para determinadas funciones f y g, el límite existe y es finito.

Análogo a a) y b), no podemos afirmar que exista el límite en dos variables.

$\boxed{C3}$

$f, g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ y $A = \{x \in \mathbb{R}^m : f(x) = g(x)\}$.

a) ¿A abierto?

Si $f = g \Rightarrow A = \mathbb{R}^m$ y es cierto.

Sino, $fr(A) \neq \emptyset$. De hecho, y como si $x \in fr(A) \Rightarrow \forall r > 0$ $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset \Rightarrow B(x,r) \not\subset A \Rightarrow x \notin int(A) \Rightarrow A \subset int(A) \Rightarrow$ $\boxed{A \text{ no es abierto.}}$

b) ¿A cerrado?

Si, se da $A = \bar{A}$. $\boxed{\text{Si es cerrado.}}$

c) ¿A compacto?

No tiene porqué, pues A no está necesariamente acotado $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Es una afirmación falsa.}}$

4

$\boxed{C4}$ $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua en $\overline{B}$

a) No es posible que $f(B) = [5,\infty)$

Como f es continua en $\overline{B} \Rightarrow$ es continua en $B \subset \overline{B}$ y con B abierto $\underset{\text{Teorema 2-36.}}{\Rightarrow}$ $f(B)$ es abierto.

Observamos que $[5,\infty)$ no es abierto pues $5 \in f(B)$ pero $5 \notin \text{int}(f(B))$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{La afirmación es verdadera}}$. Pues como $f(B)$ ha de ser abierto pero $[5,\infty)$ no lo es $\Rightarrow f(B) \neq [5,\infty)$.

b) No es posible que $f(B) = [1,5]$

$\boxed{\text{La afirmación es verdadera}}$. Porque f continua en B abierto $\Rightarrow f(B)$ abierto pero $\text{int}([1,5]) = (1,5) \neq [1,5]$ y no es abierto. Por tanto, $f(B) \neq [1,5]$.

c) Es posible que $f(B) = [1,5]\setminus\{4\}$

$\boxed{\text{La afirmación es falsa.}}$ Por un motivo similar a b).

$\left\{\begin{array}{l} f(B) \text{ ha de ser abierto} \\ \text{int}([1,5]\setminus\{4\}) = (1,5)\setminus\{4\} \neq [1,5]\setminus\{4\} \Rightarrow \text{no es} \end{array}\right.$

abierto.

$\Rightarrow f(B) \neq [1,5]\setminus\{4\}$

$\boxed{C5}$

$$f(x,y) = \frac{(xy)^k}{y-x^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow k \geq 2$

Sup. $k \geq 2$ y calculemos $f(x,y)$. Coordenadas polares:

$$\lim_{\substack{u\to 0\\ 0\leq v<2\pi}} f(x,y) = \lim_{u\to 0} \frac{u^k \cdot \cos(v)^k \cdot u^k \cdot \operatorname{sen}(v)^k}{u \cdot \operatorname{sen}(v) - u^2 \cdot \cos^2(v)} =$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{u^{2k} \cdot \cos(v)^k \cdot \operatorname{sen}(v)^k}{u(u\cdot\cos^2(v) - \operatorname{sen}(v))} = \lim_{u\to 0} u^{2k-1} \frac{\cdot \cos(v)^k \cdot \operatorname{sen}(v)^k}{u\cdot\cos^2(v) - \operatorname{sen}(v)} \overset{\substack{v \neq \pi\cdot k\ (k\in 0,1)\\ \uparrow}}{=} 0$$

Si $v = 0$ o π entonces:

$$\left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{u\to 0} \frac{u^{2k-1} \cdot \operatorname{sen}(2v)^k \cdot \frac{1}{2}}{u\cdot\cos^2(v) - \operatorname{sen}(v)} \overset{\substack{L'H\\ \uparrow}}{=}$$

$$\overset{\substack{L'H\\ \uparrow}}{=} \frac{1}{2}\cdot \lim_{u\to 0} \frac{1}{2} \frac{(2k-1)\cdot u^{2k-2} \cdot \operatorname{sen}(2v)^k + u^{2k-1} \cdot 2k \cdot \cos(2v)^{k-1}}{-\cos(v) + \cos^2(v) - 2u\cdot\operatorname{sen}(v)} \overset{\substack{v\neq 0\\ \uparrow}}{=} 0$$

Si $v = 0$ tenemos:

$$\lim_{\substack{u\to 0\\ v=0}} \frac{u^{2k}\cdot\cos(v)^k\cdot\operatorname{sen}(v)^k}{u\cdot(u\cdot\cos^2(v) - \operatorname{sen}(v))} = \lim_{u\to 0} \frac{0}{u^2} = 0, \text{ pues}$$

Si $a_n = \left(\frac{0}{u_n}\right)$ de manera que $a_n \xrightarrow{n\to\infty}$, $u_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ es nula $\Rightarrow \forall n,\ a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Por tanto, este límite es 0 siempre y no depende de k.

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \quad \forall k\in\mathbb{N}}$$

(La afirmación es falsa, pues se da para $k=1$).

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow k \geq 3$

Ya está demostrado en a). Repetimos: cambio a polares.

$$\lim_{\substack{u\to 0\\ 0\leq v<2\pi}} f(x,y) = \lim_{u\to 0} \frac{u^k\cdot\cos(v)^k\cdot u^k\cdot \operatorname{sen}(v)^k}{u\cdot\operatorname{sen}(v) - u^2\cdot\cos^2(v)} =$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\cancel{u}^{2k \to u^{2k-1}}\cdot\cos(v)^k\cdot\operatorname{sen}(v)^k}{\cancel{u}\cdot(-u\cos^2(v)+\operatorname{sen}(v))} \overset{\operatorname{sen}(v)\neq 0}{=} 0$$

Si $\operatorname{sen}(v) = 0$, el límite es: $(\operatorname{sen}(v)=0 \Rightarrow \cos(v)\neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos^2(v)\neq 0)$

$$\lim_{u\to 0} \frac{\cancel{u^{2k}}^{u^k}\cdot\cos(v)^k\cdot \cancel{\operatorname{sen}(v)}^{0}{}^k}{\cancel{u^2}\cdot\cos^2(v)} = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0}$ (La afirmación es falsa, pues se da para $k=1$)

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

Falso, Por lo visto en b) y a).

C6

$\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y $f(x,y) = \begin{cases} \varphi(xy+y) + xy^2 & \text{si } x\geq 0 \\ 2\varphi(2x+y) + x^3 - y & \text{si } x<0 \end{cases}$

a) ¿f continua en el eje OY?

En el eje OY: $x=0 \Leftrightarrow f(0,y_0) \overset{\text{suma de límites y } \varphi \text{ continua}}{=} \varphi(y_0)$. Calculamos ahora:

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y_0) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} 2\cdot\varphi(2x+y_0)+x^3-y_0 \overset{\text{suma de límites y } \varphi \text{ continua}}{=}$$

$= 2\varphi(y_0) - y_0$

Entonces ha de darse:

$$\varphi(y_0) = 2\varphi(y_0) - y_0 \Leftrightarrow \varphi(y_0) = y_0$$

Por tanto: f continua $\Rightarrow \varphi(y_0) = y_0 \quad (\forall (0,y) \in \mathbb{R}^2)$

Sup. $\varphi(y_0) = y_0$. Entonces:

$f(0,y_0) = \varphi(y_0) = y_0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = 2\varphi(y_0) - y_0 = 2y_0 - y_0 = y_0$$

y así $\varphi(y_0) = y_0 \Rightarrow f$ continua $(\forall (0,y) \in \mathbb{R}^2)$

Así hemos demostrado que:

f es continua en todos los puntos de $OY \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \varphi(t) = t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(La afirmación a) es falsa).

b) f continua en $OY \Leftrightarrow \varphi(t) = \varphi(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Por lo demostrado en a):
f continua en $OY \Rightarrow \varphi(t) = t \Rightarrow t = -(-t) \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(t) = -\varphi(-t)$ y por tanto la afirmación b) es falsa.

c) f continua $OY \Leftrightarrow \varphi(t) = t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Sí, lo hemos demostrado en a). c) es verdadera.

$\boxed{C7}$

$$f(x,y) = \frac{x^4 + y^4 + ax^2y}{2x^2 + 2y^2 - xy} \quad y \quad L = \lim_{(x,y)} f(x,y)$$

Calculamos L.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Cambio a polares:

$$\begin{cases} x = u \cdot \cos(v) \\ y = u \cdot \operatorname{sen}(v) \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{\substack{u\to 0 \\ 0 \le v < 2\pi}} \frac{u^4 \cdot \cos^4(v) + u^4 \cdot \operatorname{sen}^4(v) + a \cdot u^3 \cdot \cos^2(v) \cdot \operatorname{sen}(v)}{\underbrace{2u^2 \cdot \cos^2(v) + 2u^2 \cdot \operatorname{sen}^2(v)}_{2u^2} - u^2 \cdot \cos(v) \cdot \operatorname{sen}(v)} =$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{u^{\cancel{3}} \cdot \left(u\cos(v) + u\operatorname{sen}(v) + a\cos^2(v)\operatorname{sen}(v)\right)}{\cancel{u^2}\left(2 - \cos(v) \cdot \operatorname{sen}(v)\right)} = 0$$

Porque $2 - \cos(v) \cdot \operatorname{sen}(v) = 0 \Rightarrow \cos(v) \cdot \operatorname{sen}(v) = 2$ y

$$\left.\begin{array}{l} -1 \le \cos(v) \le 1 \\ -1 \le \operatorname{sen}(v) \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos(v) \cdot \operatorname{sen}(v) \le 1$$ por tanto

hemos llegado a una contradicción $\Rightarrow 2 - \cos(v) \cdot \operatorname{sen}(v) \neq 0$, el denominador nunca se anula, el numerador es 0, y el límite es 0 $(\forall a \in \mathbb{R})$. $\Rightarrow \boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L = 0}$

a) Es falsa.
b) Es falsa.
c) Es verdadera.