C. Cauchy (sèries): $\sum a_n$ conv. $\iff \forall\varepsilon>0, \exists n_0$ t. q. $m>n\geq n_0$ llavors, $|s_m-s_n|=|a_{n+1}+\cdots+a_m|<\varepsilon$.

• La convergència és lineal i associativa.

Sèries geomètriques: $\sum_{n\geq 1}\alpha^n$ conv. sii $\alpha\in(-1,1)$, div. sii $\alpha>1$, oscil·lant altrament.

1 Sèries n. positius

Dins aquest apartat les successions són totes de termes positius.

C. comp. dir.: $a_n\leq b_n \forall n\geq n_0 \implies \sum_{n=n_0}^\infty a_n\leq\sum_{n=n_0}^\infty b_n \implies (\sum b_n$ conv. $\implies \sum a_n$ conv.) i ($\sum a_n$ div. $\implies \sum b_n$ div.).

C. comp. al límit: $\lim\frac{a_n}{b_n}=l\in[0,+\infty]$. Si $l<\infty, \sum b_n$ conv. $\implies \sum a_n$ conv.. Si $l>0, \sum a_n$ conv. $\implies \sum b_n$ conv.

C. arrel Cauchy: (a_n) positiva i $\exists\lim a_n^{1/n}=\alpha \implies (\alpha>1$ div.) i ($\alpha<1$ conv.).

C. quo. Alambert: (a_n) estr. pos. i $\exists\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha \implies (\alpha>1$ div.) i ($\alpha<1$ conv.).

C. Raabe: (a_n) estr. pos. i $\exists\lim n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n})=L \implies (L>1$ conv.) i ($L<1$ div.).

C. Leibniz sèr. alt.: (a_n) decr. i $\lim a_n=0$, llavors $\sum(-1)^n a_n$ és conv.. A més, $|s-s_N|<a_{n+1}$.

C. de la integral: $a_n=f(n), f\geq 0$ int. i decreixent, $\int_M^\infty f$ convergeix $\iff \sum a_k$ convergeix i $\sum_M^\infty=\sum_M^{N-1}+\int_N^\infty f+\varepsilon_N$, $\varepsilon_N\in[0,a_N]$.

C. logarítmic: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\log a_n}{\log n}=L \implies (L>1$ conv.) i ($L<1$ div.).

C. condensació: a_n decreixent, $a_n\geq 0$, $\sum a_n$ convergent $\iff \sum 2^n a_{2^n}$ convergent.

Sèrie Rie.: $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^p}$ és conv. sii $p>1$, div. altrament.

2 Altres sèries

• Sèrie cond. conv. $\implies$ podem reordenar per tal que $\sum=s\in[-\infty,+\infty]$.

Sèrie alternada: un pos., un neg., ...

C. Dirichlet: Si s_n d'(a_n) fitades i (b_n) decr., $\lim b_n=0$, llavors $\sum a_n b_n$ convergeix.

3 Sèries de potències

Radi de convergència: Màxim r t. q. $\sum a_n r^n$ és conv.

Domini de conv.: $(-R,R)$, on R és radi de conv.. És possible qe convergeixi als externs.

T. Cauchy-Hadamard: Sigui $\sum a_n x^n, R$ ve donada per $\frac{1}{R}=\lim\sup|a_n|^{1/n}$. La sèrie de potències és abs. conv. si $|x|<R$ i div. si $|x|>R$. Si $|x|=R$ no sabem res.

Càlcul radi de conv.: $\frac{1}{R}=\lim|a_n|^{1/n}$ o $\frac{1}{R}=\lim\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

4 Integrals impròpies

• La convergència d'integrals és lineal.

C. Cauchy per a int. impròpies: $f\colon[a,b)\to\mathbb{R}$. $\int_a^b f$ és conv. $\iff \forall\varepsilon>0, \exists c_0\in[a,b)$ t. q. si $c_1,c_2>c_0$, llavors $\left|\int_{c_1}^{c_2}f\right|<\varepsilon$.

C. comp. dir.: $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$, $f,g>0$, $f\leq g$ localment integrables. Aleshores $\int_a^b f\leq\int_a^b g$. Si la segona conv., la primera també. Si la primera div., la segona també.

C. comp. al límit: $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$, $f,g>0$ localment integrables. Suposem $\exists\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=l$. Si $l<\infty$, $\int_a^b g$ conv. $\implies \int_a^b f$ conv.. Si $l>0$, $\int_a^b f$ conv. $\implies \int_a^b g$ conv..

C. Dirichlet: $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ localment integrables. Suposem $\exists M>0$ t. q. si $a<c<b, \left|\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq M$ i g decreixent amb $\lim\limits_{x\to b}g=0$. Aleshores $\int_a^b fg$ és conv..

5 Integrals a rectangles

Suma inf. del rect.: $m_R=\inf_{x\in\mathbb{R}}f(x)$, $s(f;\mathcal{P})=\sum_R m_R\operatorname{vol}(R)$.

Suma sup. del rect.: $M_R=\sup_{x\in\mathbb{R}}f(x)$, $S(f;\mathcal{P})=\sum_R M_R\operatorname{vol}(R)$.

Si $\mathcal{P}'$ més fina que $\mathcal{P}$: $s(f;\mathcal{P})\leq s(f;\mathcal{P}')\leq S(f;\mathcal{P}')\leq S(f;\mathcal{P})$.

• $\underline{\int}_A f=\sup_{\mathcal{P}}s(f;\mathcal{P})$, $\overline{\int}_A f=\inf_{\mathcal{P}}S(f;\mathcal{P})\to$ si són iguals, f és integrable Riemann.

C. Riemann: f int. Rie. $\iff \forall\varepsilon>0, \exists\mathcal{P}$ t. q. $S(f;\mathcal{P})-s(f;\mathcal{P})<\varepsilon$.

• Integrabilitat Riemann és lineal.

Suma de Rie.: Siguin $\xi_k\in R_k$, la suma és $R(f;\mathcal{P};\xi)=\sum_k f(\xi_k)\operatorname{vol}(R_k)$.

6 Mesura nul·la

Mesura nul·la: Recobert per numerables rectangles de mesura $<\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0$.

Contingut nul: Mesura nul·la amb un nombre finit de rectangles.

• Si un conjunt té un punt interior, no és de mesura nul·la.

Quadrat: volum: c^n, diàmetre: $c\sqrt{n}$ (a $\mathbb{R}^n$, on c costat).

• Sigui $z\subset\mathbb{R}^n$ mesura nul·la. $\forall\varepsilon, \exists$ família numerable de quadrats compactes Q_k t. q. $z\in\bigcup_k Q_k, \sum\operatorname{vol}(Q_k)<\varepsilon$.

• Sigui $f\colon U\to\mathbb{R}$ classe $\mathscr{C}^1$ o lipschitziana, $z\subset U$ mesura nul·la, llavors $f(z)\subset\mathbb{R}^n$ té mesura nul·la.

7 Teorema de Lebesgue

• Sigui X espai mètric, $f\colon X\to\mathbb{R}$, l'oscil·lació de f sobre $E\subset X$ és el diàmetre de $f(E)$: $\omega(f,E)=\sup_{x,y\in E}\mathrm{d}(f(x),f(y))\in[0,+\infty]$. Finita $\iff f_{|E}$ fitada, 0 $\iff f_{|E}$ constant.

Oscil·lació en $a\in X$: $\omega(f,a)=\lim\limits_{r\to 0}\omega(f,B(a;r))=\inf_{r>0}\omega(f,B(a;r))$.

• f cont. en $a \iff \omega(f,a)=0$.

T. Lebesgue: Sigui $A\subset\mathbb{R}^n$ rectangle compacte, $f\colon A\to\mathbb{R}$ fitada. Llavors f és integrable Riemann $\iff \operatorname{disc}(f)$ és de mesura nul·la $\iff$ contínua gairebé pertot.

8 Integral de Rie.

• $C\subset\mathbb{R}^n$ és admissible o mesurable Jordan si és fitat i $\operatorname{Fr}(C)$ té mesura nul·la.

• $\operatorname{Fr}(A\cup A'),\operatorname{Fr}(A\cap A'),\operatorname{Fr}(A\setminus A')\subseteq\operatorname{Fr}(A)\cup\operatorname{Fr}(A')$.

• $\operatorname{Fr}(A\times B)=(\operatorname{Fr}(A)\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times\operatorname{Fr}(B))$.

• $A,A'\subset\mathbb{R}^n$ admissibles $\implies A\cup A',A\cap A',A\setminus A'$ admissibles.

• $A\subset\mathbb{R}^n, B\subset\mathbb{R}^m$ admissibles $\implies A\times B\subset\mathbb{R}^{n+m}$ admissible.

• Els rectangles fitats i les boles euclidianes són admissibles.

Funció característica de $C\subset X$: (o indicatriu) $\chi_C\colon X\to\mathbb{R}, \chi_C(x)=1$ si $x\in C$, val 0 altrament.

• χ no és contínua a $\operatorname{Fr}(C) \implies (C$ adm. $\iff C$ fitat i $\forall R, \exists\int_R\chi_C$ t. q. $C\subset R)$.

• $g\colon E\to\mathbb{R}, \tilde{g}\colon X\to\mathbb{R}(\tilde{g}(x)=0, \forall x\notin E)$. Aleshores $\operatorname{disc}(g)\subseteq\operatorname{disc}(\tilde{g})\subseteq\operatorname{disc}(g)\cup\operatorname{Fr}(E)$.

• $f\chi_C$ integrable Rie. en R $\iff \operatorname{disc}(f)$ de mesura nul·la.

Pel T. Lebesgue: $C\subset\mathbb{R}^n$ admissible. $f\colon C\to\mathbb{R}$ és integrable Rie. $\iff \operatorname{disc}(f)$ mesura nul·la.

• Si C adm., $\operatorname{vol}(C)=\int_C 1$ és la mesura (o contingut) de Jordan o volum (n-dimensional) de C.

• $C\subset\mathbb{R}^n$ té contingut nul $\iff C$ adm. i $\operatorname{vol}(C)=0$.

9 Propietats de la int. de Rie.

• Sigui $E\subset\mathbb{R}^n$ mesurable Jordan, $\operatorname{Rie}(E)=\{f|f$ int. Rie. en $E\}$ és un $\mathbb{R}$-e.v. i $\operatorname{Rie}\colon E\to\mathbb{R}, \operatorname{Rie}(f)=\int_E f$ és una forma lineal positiva i monòtona.

T. valor mitjà per a integrals: Sigui E m.J., $f\colon E\to\mathbb{R}$ int. Rie.. $m\leq f\leq M \implies m\operatorname{vol}(E)\leq\int_E f\leq M\operatorname{vol}(E)$.

• E m.J. connex, $f\colon E\to\mathbb{R}$ fitada i cont., $\exists x_0\in E$ t. q. $\int_E f=f(x_0)\operatorname{vol}(E)$.

• E m.J., $f\colon E\to\mathbb{R}$ int. Rie., $h\colon f(E)\to\mathbb{R}$ cont., $h\circ f$ és int. Rie..

• f,h int. Rie. no implica $h\circ f$ int. Rie..

• f int. Rie. $\implies |f|$ int. Rie. i $\left|\int_E f\right|\leq\int_E|f|$.

• f,g int. Rie. $\implies f\times g$ int. Rie..

• Siguin $A,B\subset\mathbb{R}^n$ m.J. $f\colon A\cup B\to\mathbb{R}$ fitada. Si f és int. Rie. a A i B, aleshores ho és a $A\cap B$ i a $A\cup B$ i es compleix: $\int_{A\cup B}f=\int_A f+\int_B f-\int_{A\cap B}f$.

• E m.J., $f\colon E\to\mathbb{R}$ positiva i int. Rie., aleshores $\int_E f=0 \iff f$ nul·la gairebé pertot.

• Dues funcions int. i iguals gairebé pertot tenen la mateixa integral (tot i que canviar els valors en un conjunt de mesura nul·la pot destruir la integrabilitat).

10 Teorema de Fubini

T. Fubini: $A\subset\mathbb{R}^n, B\subset\mathbb{R}^m$ rect. comp., $f\colon A\times B\to\mathbb{R}$ int. Rie.. Sigui $\Phi\colon A\to\mathbb{R}$ t. q. $\underline{\int}_B f(x,)\leq\Phi(x)\leq\overline{\int}_B f(x,)$. Aleshores Φ int. Rie. i $\int_{A\times B}f=\int_A\Phi$, ($A\leftrightarrow B$ també).

• $x\in A$ t. q. $f(x,)$ no int. Rie. té mesura nul·la.

• $D\subset X, f\colon D\to\mathbb{R}$ cont., $E=\{(x,y)\in X\times\mathbb{R}|x\in D, y\geq f(x)\}$, llavors ($D\subset X$ tancat $\implies E\subset X\times\mathbb{R}$

tancat) i $(\mathrm{Fr}(E) \subset \mathrm{graf}(f) \cup (\mathrm{Fr}(D) \times \mathbb{R}))$.

• $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ comp., m.J., $\varphi, \psi \colon D \to \mathbb{R}$ cont. t.q. $\varphi \le \psi$, $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x \in D, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\} \subset \mathbb{R}^n$ és compacte i m.J.. (Si $f \colon E \to \mathbb{R}, \int_E f = \int_D \mathrm{d}x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \mathrm{d}y\, f(x,y)$).

Regió elemental: A $\mathbb{R}$ és un interval compacte. Si no és de la forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} | x \in D, \phi(x) \le y \le \psi(x)\}$, on $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ és regió elemental i $\phi \le \psi \colon D \to \mathbb{R}$ contínues.

11 Canvi de variables

• Sigui $V \subset \mathbb{R}^n$ obert, $\varphi \colon V \to \mathbb{R}^n$ injectiva, classe $\mathscr{C}^1$ amb $\det \mathrm{d}\varphi(y) \neq 0, \forall y \in V$. Sigui $U = \varphi(V) (\varphi \colon V \to U$ difeo. classe $\mathscr{C}^1)$. Si $f \colon U \to \mathbb{R}$ int., $\int_U f = \int_V (f \circ \varphi) |\det \mathrm{d}\varphi|$.

11.1 Alguns canvis de variables

Polars a $\mathbb{R}^2$: $\int_U f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$.

Cilíndriques a $\mathbb{R}^3$: $\int_U f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_V f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$.

Esfèriques a $\mathbb{R}^3$: $\int_U f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_V f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\, r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$.

12 Integrals impròpies

Exhaustió: $E \subset \mathbb{R}^n$. (E_i) m.J tals que $E_i \subset E$, $E_i \subset E_{i+1}$, $\bigcup_i E_i = E$

Integral de Riemann impròpia: Sigui (E_i) exhaustió, és $\int_E f := \lim_i \int_{E_i} f$ (suposant que no depengui de l'exhaustió).

• Si E m.J., (E_i) exh., $\lim_i \mathrm{vol}(E_i) = \mathrm{vol}(E)$, i si $f \colon E \to \mathbb{R}$ int. Rie., f és int. Rie. a cada E_i i int. Rie. coincideix amb la int. impròpia.

• Siguin $E \subset \mathbb{R}^n, f \colon E \to \mathbb{R}, f \ge 0$, llavors $\lim_i \int_{E_i} f$ no depèn de l'exh. considerada.

Lema ceba: Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ obert no buit, $\exists (V_i)$ de conj. oberts m.J., $\overline{V}_i \subset U$ t.q. $\overline{V}_i$ és compacte, $\overline{V}_i \subset V_{i+1}$, $\bigcup_i V_i = U$.

13 Camins i long. de corba

Longitud d'una poligonal: $L(\gamma, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{N} ||\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})||$.

Longitud d'una corba: $L(\gamma) = \sup_{\mathcal{P}} L(\gamma, \mathcal{P}) \in [0, +\infty]$.

Camí rectificable: Si longitud és finita.

Additivitat camí: $a < c < b \implies L(\gamma) = L(\gamma_{|[a,c]}) + L(\gamma_{|[c,b]})$.

• Sigui $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{R}, l(a) = 0$ i $l(t) = L(\gamma_{|[a,t]}), a < t \le b$, $l \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ és creixent i continua.

• Si $\vec{f} \colon E \to \mathbb{R}^n$ int., $\|\vec{f}\|$ també (norma euclidiana).

• $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^n$ classe $\mathscr{C}^1 \implies$ rectificable i $L(\gamma) = \int_I \|\gamma'\|$.

14 Integrals de línia

Int. de línia f. escalars: $\int_C f\,\mathrm{d}l = \int_\sigma f\,\mathrm{d}l := \int_I f(\sigma(s)) \|\sigma'(s)\|\,\mathrm{d}s$.

Int. de línia c. vectorials: (o circulació) $\int_\sigma \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_I \vec{f}(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s)\,\mathrm{d}s$.

τ i σ equivalents: $\int_\tau \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{l} = \pm \int_\sigma \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{l}$, signe és el de φ'.

Vector tangent a parametrització: $\vec{t}(\sigma(s)) = \frac{\sigma'(s)}{\|\sigma'(s)\|}$.

Component tangencial: $f_t = \vec{f} \cdot \vec{t}$.

• $\int_C \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_C f_t\,\mathrm{d}l$.

15 Integrals de superfície

Vectors tangents: $\sigma \colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$, $\vec{J}_\sigma = (\vec{T}_1\ \ \vec{T}_2)$.

Int. de superfície f. escalars: $\sigma \colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\int_\sigma f\,\mathrm{d}S = \int_U f(\sigma(\omega)) \|\vec{T}_1 \times \vec{T}_2\|\,\mathrm{d}\omega_1\,\mathrm{d}\omega_2$.

Int. de superfície c. vectorials: (o flux a través de σ) $\sigma \colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\int_\sigma \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{S} := \int_U \vec{f}(\sigma(u)) \cdot (\vec{T}_1 \times \vec{T}_2)\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2$.

σ difeo.: $\int_{\tilde{\sigma}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{S} = \pm \int_\sigma \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{S}$, signe de $\det J_\sigma$.

Vector normal a sup.: $\vec{n}(\sigma(u)) = \frac{\vec{T}_1 \times \vec{T}_2}{\|\vec{T}_1 \times \vec{T}_2\|}$.

Component normal: $f_n = \vec{f} \cdot \vec{n}$.

• $\int_M \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_M f_n\,\mathrm{d}S$.

16 Operadors dif. a $\mathbb{R}^3$

Gradient: $\mathrm{grad}\, f := \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$.

Rotacional: $\mathrm{rot}\, \vec{F} := (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z})\hat{\imath} + (\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x})\hat{\jmath} + (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})\hat{k}$.

Divergència: $\mathrm{div}\, \vec{F} := \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$.

Regles de Leibniz:

- $\mathrm{grad}(fg) = f\,\mathrm{grad}\, g + g\,\mathrm{grad}\, f$,
- $\mathrm{rot}(f\vec{G}) = f\,\mathrm{rot}\,\vec{G} + \mathrm{grad}\, f \times \vec{G}$,
- $\mathrm{div}(f\vec{G}) = f\,\mathrm{div}\,\vec{G} + \mathrm{grad}\, f \cdot \vec{G}$,
- $\mathrm{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{F} - \vec{F} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{G}$.

T. Schwarz: $f, \vec{F} \in \mathscr{C}^2 \implies \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) = 0, \mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{F}) = 0$.

Camp conservatiu: $\vec{F} = \mathrm{grad}\, f$.

Camp irrotacional: $\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0$.

Camp solenoidal: $\vec{G} = \mathrm{rot}\,\vec{F}$.

Camp sense div.: $\mathrm{div}\,\vec{G} = 0$.

Laplacià: $\Delta f := \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f), \Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

17 Fórmules int. camps

T. fon. càlcul: (o gradient) $W \subseteq \mathbb{R}^n$ obert, $f \colon W \to \mathbb{R}$ classe $\mathscr{C}^1$. C corba regular orientada classe $\mathscr{C}^1$, t.q. $\bar{C} \subset W$ compacte $\implies \int_C \mathrm{grad}\, f\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_{\partial C} f = f(x_1) - f(x_0), \partial C = \{x_0, x_1\}$ (orientada $x_0 \to x_1$). $\partial C = \varnothing \implies \int_{\partial C} f = 0$.

T. Kelvin-Stokes: (o rotacional) $W \subseteq \mathbb{R}^3$ obert, $\vec{F} \colon W \to \mathbb{R}^3$ classe $\mathscr{C}^1$, $M \subset W$ superficie orientada classe $\mathscr{C}^2$ t.q. $\bar{M}$ compacte, $\bar{M} \subset W$, ∂M * $\implies \int_M \mathrm{rot}\,\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_{\partial M} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{l}$.

T. Gauss-Ostrogradski: (o divergència) $W \subset \mathbb{R}^3$ obert, $\vec{F} \colon W \to \mathbb{R}^3$ classe $\mathscr{C}^1$, $B \subset W$ obert t.q. $\bar{B}$ compacte, $\bar{B} \subset W$, ∂B * $\implies \int_B \mathrm{div}\,\vec{F}\,\mathrm{d}V = \int_{\partial B} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S}$.

18 Potencials

Potencial escalar: f és el pot. esc. de $\vec{F} \iff \mathrm{grad}\, f = \vec{F}$.

Propietats: $U \subseteq \mathbb{R}^3$ obert connex, $\vec{F} \colon U \to \mathbb{R}^3$ classe $\mathscr{C}^1$, són equivalents:

- $\vec{F}$ conservatiu,
- $p_0, p_1 \in U$, $C \subset U$ corba orientada t.q. $\partial U = \{p_0, p_1\}$, circulación $\int_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{l} = f(p_0, p_1)$,
- $\forall C \subset U$ corba tancada, $\oint_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{l} = 0$.

• $U \subset \mathbb{R}^3$ obert simplement connex (def. apunts profe) i $\vec{F} \colon U \to \mathbb{R}^3$ classe $\mathscr{C}^1$ irrotacional $\implies \vec{F}$ conservatiu.

T. Green: $U \subseteq \mathbb{R}^2$ obert, $\vec{F} \colon U \to \mathbb{R}^2$ classe $\mathscr{C}^1$, $M \subset U$ obert t.q. $\bar{M} \subset U$ compacte, ∂M * $\implies \int_M (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial M} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{l}$.

19 Tema 5

• $(f\,\mathrm{d}x^I) \wedge (g\,\mathrm{d}x^J) = fg\,\mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J$.

• $\alpha \wedge \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \wedge \alpha$.

• $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) = \Omega^0(\mathbb{R}^n)$, podem construir $\mathrm{d}f := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$.

Diferencial exterior: Aplicació lineal, $\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}x^I) = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^I$.

• $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = (\mathrm{d}\alpha) \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$.

• $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.

Tancada: α tancada $\iff \mathrm{d}\alpha = 0$.

Exacta: β exacta $\iff \exists \alpha$ t.q. $\beta = \mathrm{d}\alpha$.

• Exacta $\implies$ tancada.

Lema Poincaré: En $\mathbb{R}^n$, α tancada i $|\alpha| \ge 1 \implies \alpha$ exacta.

Pullback: $F \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ classe $\mathscr{C}^\infty$, $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, el pullback és $F^*(g) := g \circ F \in \mathscr{C}^\infty \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, F^* és $\mathbb{R}$-lineal, $F^*(g\,\mathrm{d}y^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{i_k}) := F^*(g)\,\mathrm{d}F^*(y^{i_1}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}F^*(y^{i_k})$.

• $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*(\alpha) \wedge F^*(\beta)$.

• $F^*(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}F^*(x)$.

Integral de ω al llarg de σ: $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n), \sigma \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, \implies \int_\sigma \omega := \int_{\mathbb{R}^k} \sigma^*(\omega)$.

T. Stokes: M varietat amb vora, orientada i $\dim M = m$, $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ de suport compacte i ∂M té orientació induïda $\implies \int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega$.

20.1 Altres. Sèries

• $\sum r^n$ conv. $\iff |r| < 1$ (`else` div.).

• $\sum \frac{1}{n^p}$ conv. $\iff p > 1$ (`else` div.).

20.2 Altres. Integrals

• $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ conv. $\iff \alpha > 1$ i és $\frac{1}{\alpha - 1}$.

• $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ conv. $\iff \alpha < 1$ i és $\frac{1}{1-\alpha}$.

• $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ conv. $\iff \alpha > 0$ i és $\frac{1}{\alpha}$.

20.3 Altres. Taylor

• $e^x = \sum_{n \ge 0} \frac{x^n}{n!}$.

• $\cos x = \sum_{n \ge 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

• $\sin x = \sum_{n \ge 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

• $\log(1+x) = \sum_{n \ge 1} (-1)^n + 1 \frac{x^n}{n}$.

• $(1+x)^p = \sum_{n \ge 0} \binom{p}{n} x^n$.

• $(1+x)^{-1} = \sum_{n \ge 0} (-1)^n x^n$.

20.4 Altres. Trigonometria

• $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$.

• $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$.

• $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$.

• $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$.

---

* amb orientació induïda (mà dreta) i punts frontera de M regulars o conjunt de punts frontera singulars és finit.

Nom: ______________________