TEORIA DE LA PROBABILITAT

ApuntsFME

Barcelona, Octubre 2018

Darrera modificació: 2 d'octubre de 2018.

Continguts

Tema 1

Espai de probabilitat

1.1 Definició axiomàtica de probabilitat

Definició 1.1.1. Un espai de probabilitat és un espai de mesura $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ t. q. $p(\Omega) = 1$.

Definició 1.1.2. Diem que Ω és l'espai mostral.

Definició 1.1.3. Diem que $\mathcal{A}$ és el conjunt d'esdeveniments o de successos.

Definició 1.1.4. Diem que p és la funció de probabilitat.

Observació 1.1.5. Recordem que $(\Omega, \mathcal{A})$ és un espai mesurable si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ és una σ-àlgebra d'Ω, és a dir,

i) $\varnothing \in \mathcal{A}$,

ii) $A \in \mathcal{A} \iff \overline{A} \in \mathcal{A}$,

iii) Si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, aleshores $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

I que $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ és un espai de mesura si μ és una mesura sobre l'espai mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, és a dir,

i) $\mu(\varnothing) = 0$,

ii) $\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) \geq 0$,

iii) (σ-additivitat) Si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ és tal que $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, aleshores

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i).$$

Proposició 1.1.6. Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat. Aleshores,

i) Si $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{A}$ són tals que $\forall i \neq j$, $A_i \cup A_j = \varnothing$, aleshores $p\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_i\right) = \sum_{i=1}^{r} p\left(A_i\right)$.

ii) $A \in \mathcal{A} \implies p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

iii) $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \implies p\left(B \setminus A\right) = p\left(B\right) - p\left(A\right)$.

iv) $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \implies p(A) \leq p(B)$.

v) Successions monòtones:

a) Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ són tals que $A_i \subseteq A_{i+1}$, aleshores $p\left(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \lim\limits_{i\to\infty} p\left(A_i\right)$.

b) Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ són tals que $A_i \supseteq A_{i+1}$, aleshores $p\left(\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \lim\limits_{i\to\infty} p\left(A_i\right)$.

Demostració.

1. Conseqüència directa de la σ-additivitat.
2. Conseqüència diecta de ii) usant que $\mathcal{A} = A \cup \overline{A}$.
3. Com que $A \subseteq B$, $B = \left(B \setminus A\right) \cup A$ i, per tant, $p\left(B \setminus A\right) = p\left(B\right) - p\left(A\right)$.
4. Conseqüència directa de iii) ja que $p\left(B \setminus A\right) \geq 0$.
5.

a) Sigui $B_0 = A_0$ i per $i > 0$ sigui $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$. Aleshores, es compleix que $\forall i \neq j$, $B_i \cap B_j = \varnothing$ i que $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} B_i = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$, de manera que

$$p\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = p\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} p\left(B_i\right) =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} p\left(B_i\right) = \lim_{N\to\infty} p\left(\bigcup_{i=0}^{N} B_i\right) = \lim_{N\to\infty} p\left(A_N\right).$$

b) Anàleg al cas anterior.

$\square$

Observem que l'apartat v) només es pot aplicar en casos molt particulars. En general, si tenim $A_i, \ldots, A_r$ succcessos, hi ha estimacions per a $p(\bigcup_{i=1}^{r} A_i)$:

Teorema Desigualtats de Bonferroni (1.1.7)
Siguin $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{A}$, i per $I \subseteq \{1, \ldots, r\}$ sigui $A_I = \bigcap\limits_{i\in I} A_i$. Definim

$$S_k = \sum_{I\in\{1,\ldots,n\}, \#I=k} p(A_I),$$

això és, $S_1 = \sum p(A_i)$, $S_2 = \sum_{i\neq j} p\left(A_i \cap A_j\right), \ldots$. Aleshores:

i) Si t és parell,

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{r} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} S_i$$

ii) Si t és senar,

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{r} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} S_i$$

Observació 1.1.8. Amb els casos $t = 1$ (desigualtat de Boole) i $t = 2$ es poden donar fites inferiors i superiors.

Exemple 1.1.9.

1. Espais de probabilitat numerables.

   Prenem Ω un conjunt numerable $\Omega = \{a_i\}_{i\geq 1}$. Prenem $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (que és una σ-àlgebra). Per a definir la probabilitat sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ prenem una successió $\{p_i\}_{i\geq 1}$ t. q. $0 \geq p_i \geq 1$ que cumpleix que $\forall i$, $p(a_i) = p_i$ i $\sum\limits_{i\geq 1} p_i = 1$. Per tant, per a qualsevol element $A \in \mathcal{A}$, tenim que

   $$p\left(\bigcup_{a\in A} \{a\}\right) = p(A) = \sum_{i\geq 1} p\left(\{a\}\right).$$

   Si, a més, $|\Omega| < +\infty$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ té $2^{|\Omega|}$ elements i si premnem $\Omega = \{a_i\}_{i=1}^{N}$ i $p_1 = p_2 = \cdots = p_N = \frac{1}{N}$ obtenim un espai clàssic de probabilitat.

2. Espai de probabilitat en $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

   Sigui $\Omega = [a, b]$ i prenem $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap [a, b]$ amb $\mathcal{B}$ un borelià i com a funció de probabilitat $p = \frac{\lambda}{b-a}$, on λ és la mesura de Lebesgue. Observem que no podem prendre tot $\mathbb{R}$ perquè no podem normalitzar $\lambda(\mathbb{R})$. Malgrat això, usant λ construirem més endavant funcions de probabilitat sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

3. Tirada indefinida d'una moneda.

   En aquest cas tenim que $\Omega = \{a_i\}_{i\geq 1}$, $a_i \in \{0, 1\}$ de la forma

   $$\begin{gathered} 00010001110110\ldots \\ 01001110101101\ldots \\ 10010111110010\ldots \end{gathered}$$

   sent 0 creu i 1 cara. Aquest conjunt és no numerable fàcilment demostrable amb l'argument de la diagonal de Cantor. Per a construir una σ-àlgebra sobre Ω trobem una "bijecció" amb $[0, 1]$ de la forma

   $$\begin{aligned} \varphi\colon \Omega &\to [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \\ a = a_1 a_2 \ldots a_n &\mapsto 0.a_1 a_2 \ldots a_n \end{aligned}.$$

   No és una bijecció completa ja que hi ha elements diferrents que van a la mateixa imatge degut als nombres que acaben en 1 periòdic, però al ser tots racionals, el conjunt d'aquests nombres és numerable i per tant té mesura nul·la. És per això que podem definir una σ-àlgebra sobre Ω prenent $\left\{\varphi^{-1}(A)\right\}_{A\subseteq \mathcal{B}\cup[0,1]}$. Similarment ho fem amb la mesura.

1.2 Probabilitat condicionada

Definició 1.2.1. Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat i siguin $A, B \in \mathcal{A}$. Definim la probabilitat d'A condicionada a B com

$$p\left(A \mid B\right) = \frac{p\left(A \cap B\right)}{p\left(B\right)}.$$

Observació 1.2.2. Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat i sigui $B \in \mathcal{A}$ tal que $p\left(B\right) > 0$. Aleshores, l'aplicació

$$\begin{aligned} p_B \colon \mathcal{A} &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto p_B\left(A\right) := p\left(A \mid B\right) \end{aligned}$$

defineix un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{A}, p_B)$.

Proposició 1.2.3. Sigui I un conjunt numerable o finit i siguin $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{A}$ tals que

i) $p\left(A_i\right) > 0$,

ii) $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$,

iii) $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$.

Aleshores,

1) Probabilitat total:

$$p\left(B\right) = \sum_{i\in I} p\left(B \mid A_i\right) p\left(A_i\right), \quad \forall B \in \mathcal{A}.$$

2) Fórmula de Bayes:

$$p\left(A_i \mid B\right) = \frac{P\left(B \mid A_i\right) p\left(A_i\right)}{\sum_{j\in I} p\left(B \mid A_j\right) p\left(A_j\right)}, \quad \forall B \in \mathcal{A} \text{ amb } p\left(B\right) > 0.$$

Demostració.

1) Com que els A_i són disjunts i $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$, $\forall B \in \mathcal{A}$, $B = \bigcup_{i\in I} B \cap A_i$, i la unió és disjunta. Es té

$$p(B) = p\left(\bigcup_{i\in I} B \cap A_i\right) \overset{\sigma-add.}{=} \sum_{i\in I} p(B \cap A_i) = \sum_{i\in I} p(B|A_i)p(A_i).$$

2)

$$p(A_i|B) \sum_{j\in I} p(B|A_j)p(A_j) \overset{i)}{=} p(A_i|B)p(B) =$$
$$\frac{p(B \cap A_i)}{p(B)} p(B) = p(B \cap A_i) = P\left(B \mid A_i\right) p\left(A_i\right).$$

$\square$

Problema 1.2.4. *Ruïna del jugador.* Partim d'un capital de k unitats i, en cada jugada (sense memòria) augmenta o disminueix el capital en una unitat, amb probabilitats $1/2$ i $1/2$. El joc acaba si ens quedem sense capital o si assolim un objectiu N $(N > k)$. Quina és la probabilitat de perdre tot el capital?

Solució. Sigui A_k el succés "el jugador, començant amb capital k, perd".Condicionem A_k a la primera tirada de la moneda, definim B: "la primera tirada surt cara".

$$p(A_k) = p(A_k|B)p(B) + p(A_k|\overline{B})p(\overline{B}) = p(A_k|B)\frac{1}{2} + p(A_k|\overline{B})\frac{1}{2}$$
$$\implies 2p(A_k) = p(A_{k-1}) + p(A_{k+1}) \implies p(A_k) - p(A_{k-1}) = p(A_{k+1}) - p(A_k) = C,$$

el que ens diu que la diferència entre nivells és constant. Per tant $p(A_k) = p(A_0) + kC$. Sabent que $p(A_0) = 1$ i $p(A_N) = 0$ ens queda que

$$0 = 1 + CN \implies C = -\frac{1}{n} \implies p(A_k) = 1 - \frac{k}{N}.$$

1.3 Independència

Definició 1.3.1. Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat, sigui I un conjunt finit o numerable i sigui $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{A}$. Diem que els esdeveniments A_i són independents si per tot $J \subseteq I$ amb $|J| \in \mathbb{N}$ es té que

$$p\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} p\left(A_j\right).$$

Exemple 1.3.2.

1. $\varnothing, \Omega$ són independents entre si.

2. A és independent amb si mateix si i només si $p\left(A\right) = 1$ o $p\left(A\right) = 0$.

1.4 Espai producte

Donats dos espais de probabilitat $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, p_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, p_2)$, volem construir un nou espai de probabilitat $(\Omega_3, \mathcal{A}_3, p_3)$ que codifiqui els dos espais de probabilitat inicials. A aquest espai de probabilitat l'anomenarem espai de probabilitat producte.

Definició 1.4.1. Siguin $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, p_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, p_2)$ dos espais de probabilitat. Anomenem espai de probabilitat producte a la terna $(\Omega_3, \mathcal{A}_3, p_3)$ tal que

i) $\Omega_3 = \Omega_1 \times \Omega_2$

ii) $\mathcal{A}_3 = \sigma\left(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\right)$ (σ-àlgebra generada per $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$)

iii) p_3 és una funció de probabilitat que cumpleix que $\forall A_1, A_2$ t. q. $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ aleshores $p_3\left(A_1 \times A_2\right) = p_1\left(A_1\right) p_2\left(A_2\right)$.

Observació 1.4.2. p_3 està ben definida ja que pel Teorema d'extensió de Carathéodory podem construir una σ-àlgebra sobre $\Omega_1 \times \Omega_2$ a partir d'una extensió de $\sigma\left(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\right)$ i restringir p_3 segons iii).

Observació 1.4.3. Podem extendre λ (la mesura de Lebesgue) a $\mathbb{R}^2$ de la següent forma. Sabem que $\left([0,1], \mathcal{B} \cap [0,1], \lambda_{[0,1]}\right)$ és un espai de probabilitat. Aleshores

$$\left([0,1] \times [0,1], \sigma\left(\mathcal{B} \cap [0,1] \times \mathcal{B} \cap [0,1]\right), \lambda_{[0,1]\times[0,1]}\right)$$

defineix un espai de probabilitat a $\mathbb{R}^2$.

Problema 1.4.4. *Agulla de Buffon.* Considerem el pla $\mathbb{R}^2$ tesel·lat amb linies paral·leles indefinides separades per una distància L. Llancem una agulla de longitud $l \leq L$ sobre el pla. Trobar quina és la probabilitat que l'agulla toqui una de les linies.

Solució. Considerarem dues variables: x com la distància del centre de l'agulla a la linia més propera i θ com l'angle de l'agulla amb la direcció de les lines. Tenim que $x \in \left[0, \frac{L}{2}\right]$ i $\theta \in [0, \pi)$ i per tant, $\Omega = \left[0, \frac{L}{2}\right] \times [0, \pi)$, $\mathcal{A}$ són els borelians del conjunt i p la mesura de Lebesgue normalitzada en $\mathcal{A}$. Sigui $A \in \mathcal{A}$ l'esdeveniment "l'agulla talla una recta" i $\omega \in \Omega$ una tirada. Aleshores $w \in A \iff x \leq \frac{l}{2} \sin\theta$. Per tant,

$$p(A) = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta}{\frac{L\pi}{2}} = \frac{2l}{L\pi}.$$

1.5 Lema de Borel-Cantelli

Siguin $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat i $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$. Volem donar-li un sentit a "límit de $\{A_n\}_{n\geq 1}$". Farem com a $\mathbb{R}$ i definirem els límits superior i inferior (que sempre existiran) i, si coincideixen, aquest serà el límit.

Definició 1.5.1. Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat. Donats $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$, definim els límits superior i inferior de la successió de successos $\{A_n\}_{n\geq 1}$ com

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Observació 1.5.2. Els dos límits pertanyen a $\mathcal{A}$ ja que son unió i intersecció numerable de sucessos.

Proposició 1.5.3. Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat i siguin $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$. Aleshores,

i) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \left\{\omega \in \Omega \colon \exists m \equiv m(\omega) \text{ amb } \omega \in A_r \ \forall r \geq m(\omega)\right\}$,

ii) $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega \colon \omega \text{ pertany a un nombre infinit dels } A_n\}$,

iii) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

Demostració.

i) $\omega \in \liminf A_n \iff \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \iff \exists m \equiv m(\omega)$ t. q. $\omega \in \bigcap_{k=m(\omega)}^{\infty} A_k \iff \omega \in A_r \quad \forall r \geq m(\omega)$.

ii) $\omega \in \limsup A_n \iff \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \iff \omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \forall n \iff \forall n, \exists n_0 \geq n$ t. q. $\omega \in A_{n_0} \iff \omega$ pertany a un nombre infinit dels A_n.

iii) Si $\omega \in \liminf A_n$, aleshores $\omega \in A_r$, $\forall r \geq m(\omega)$, de manera que pertany a un nombre infinit dels A_n i, en conseqüència, pertany a $\limsup A_n$.

□

Proposició 1.5.4. Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat i siguin $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$, amb $\lim A_n = A$. Aleshores, $p(A) = p(\lim A_n) = \lim p(A_n)$ i aquest límit existeix.

Demostració. Definim $B_n = \cup_{k\geq n} A_k$ i $C_n = \cap_{k\geq n} A_k$. Observem que $\{B_n\}_{n\geq 1}$ és decreixent i que $\{B_n\}_{n\geq 1}$ és creixent. Naturalment, $C_n \subseteq A_n \subseteq B_n$, $\limsup A_n = \cap_{n\geq 1} B_n$ i $\liminf A_n = \cup_{n\geq 1} C_n$.
Vegem que $p(\liminf A_n) \leq \liminf p(A_n)$.

$$p(\liminf A_n) = p\left(\bigcup_{n\geq 1} C_n\right) = \lim p(C_n) = \lim p\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) \leq \liminf p(A_n).$$

Al darrer pas hem utilitzat el fet que $p\left(\cap_{k\geq n} A_k\right) \leq p(A_n)$. Anàlogament, $\limsup p(A_n) \leq p(\limsup A_n)$. Així doncs, tenim que

$$p(\liminf A_n) \leq \liminf p(A_n) \leq \limsup p(A_n) \leq p(\limsup A_n).$$

Atàs que $p(\liminf A_n) = p(\limsup A_n) = p(A)$, concloem que

$$\liminf p(A_n) = \limsup p(A_n) = \lim p(A_n) = p(A).$$

□

Lema de Borel-Cantelli (1.5.1)
Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat i siguin $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$. Aleshores,

i) $\sum\limits_{n\geq 1} p(A_n) < \infty \implies p(\limsup A_n) = 0$.

ii) Si $\{A_n\}_{n\geq 1}$ és independent, $\sum\limits_{n\geq 1} p(A_n) = \infty \implies p(\limsup A_n) = 1$.

Demostració. Posem $A = \limsup A_n = \bigcap\limits_{n\geq 1} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k$.

i) Sabem que

$$0 \leq p(A) \leq p\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k\geq n} p(A_k), \forall n \in \mathbb{N}$$

i que $\sum_{n\geq 1} p(A_n) < \infty$, de manera que $\lim \sum_{k\geq n} p(A_k) = 0$ i immediatament deduïm que $p(A) = 0$.

ii) Observem primer que $\overline{A} = \overline{\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k} = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n}\overline{A_k} = \liminf \overline{A_n}$. Veurem que $p\left(\overline{A}\right) = 0$. Calculem $p\left(\bigcap_{m\geq n}\overline{A_m}\right)$.

$$
\begin{aligned}
0 \leq p\left(\bigcap_{m\geq n}\overline{A_m}\right) &= \lim_{r\to\infty} p\left(\bigcap_{m=n}^{r}\overline{A_m}\right) = \lim_{r\to\infty}\prod_{m=n}^{r}\left(p\left(\overline{A_m}\right)\right) = \\
&= \lim_{r\to\infty}\prod_{m=n}^{r}\left(1 - p\left(A_m\right)\right) \leq \lim_{r\to\infty}\prod_{m=n}^{r}\left(e^{-p(A_m)}\right) = \\
&= \lim_{r\to\infty} e^{-\sum_{m=n}^{r} p(A_m)} = 0,
\end{aligned}
$$

de manera que $p\left(\bigcap_{m\geq n}\overline{A_m}\right) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Finalment,

$$
0 \leq p\left(\overline{A}\right) = p\left(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{m\geq n}\overline{A_m}\right) \leq \sum_{n\geq 1} p\left(\bigcap_{m\geq n}\overline{A_m}\right) = 0 + 0 + \cdots = 0,
$$

i concloem que $p\left(A\right) = 1$.

$\square$

Tema 2

Variables aleatòries

Definició 2.0.1. Siguin $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ espais mesurables. Diem que $X\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ és una variable aleatòria si

$$X^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1,\ \forall A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

En aquest curs, sempre pendrem $(\Omega_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Per tant, quan parlem de variable aleatòria ens estarem referint a una aplicació $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ amb $B \in \mathcal{B} \implies X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, on $(\Omega, \mathcal{A})$ és un espai de mesura.

Exemple 2.0.2.

1. Sigui $(\Omega, \mathcal{A})$ un espai de mesura. Aleshores, $\forall c \in \mathbb{R}$, l'aplicació

$$\begin{aligned} X\colon \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto c \end{aligned}$$

és una variable aleatòria, atès que, $\forall B \in \mathcal{B}$, es té que

$$X^{-1}(B) = \begin{cases} \Omega, & \text{si } c \in B, \\ \varnothing, & \text{si } c \notin B. \end{cases}$$

2. Siguin X i Y variables aleatòries. Aleshores, també son variables aleatòries les següents funcions.

- $X + Y$
- $X - Y$
- aX, $\forall a \in \mathbb{R}$
- XY
- $|X|$
- $\max\{X, Y\}$
- $\min\{X, Y\}$
- X^+
- X^-
- $g(X, Y)$, on $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és ua funció mesurable.

3. Sigui $(\Omega, \mathcal{A})$ un espai de mesura i sigui $A \in \mathcal{A}$. Definim la variable aleatòria indicadora d'A com

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_A \equiv \mathbb{1}_A \colon \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } \omega \notin A, \\ 1, & \text{si } \omega \in A. \end{cases} \end{aligned}$$

Vegem que, efectivament, es tracta d'una variable aleatòria. Sigui $B \in \mathcal{B}$. Aleshores,

$$\mathbb{I}_A(B) = \begin{cases} \Omega, & \text{si } 0 \in B,\ 1 \in B, \\ \overline{A}, & \text{si } 0 \in B,\ 1 \notin B, \\ A, & \text{si } 0 \notin B,\ 1 \in B, \\ \varnothing, & \text{si } 0 \notin B,\ 1 \notin B. \end{cases}$$

Observació 2.0.3. A partir d'ara, emprarem la notació següent. Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat i sigui $B \in \mathcal{B}$, escrivim

$$p(X \in B) := p\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \omega \in X^{-1}(B)\right\}\right).$$

Exemple 2.0.4. $p(X \leq 2) = p\left(\left\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 2\right\}\right)$.

Observació 2.0.5. Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat i sigui X una variable aleatòria. X indueix una funció de probabilitat P_X sobre l'espai de mesura $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

$$P_X(B) := p(X \in B).$$

És a dir, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_x)$ és un espai de probabilitat. Comprovem, primer, que és un espai de mesura.

i) $P_X(\varnothing) = p\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \omega \in X^{-1}(\varnothing)\right\}\right) = p(\varnothing) = 0$, atès que p és una funció de probabilitat.

ii) $0 \leq p\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \omega \in X^{-1}(B)\right\}\right) = P_X(B)$, atès que p és una funció de probabilitat.

iii) Si $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ són disjunts dos a dos, aleshores $\left\{X^{-1}(B_i)\right\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ també són disjunts dos a dos. I, per ser p una funció de probabilitat, es té que

$$\begin{aligned} P_X\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) &= p\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \omega \in X^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right)\right\}\right) = \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} p\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \omega \in X^{-1}(B_i)\right\}\right) = \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} P_X(B_i). \end{aligned}$$

A més a més, per ser p una funció de probabilitat,

$$P_X(\mathbb{R}) = p\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \omega \in X^{-1}(\mathbb{R})\right\}\right) = p(\Omega) = 1$$

i $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_x)$ és un espai de probabilitat.

Observació 2.0.6. Sigui $(\Omega, \mathcal{A})$ un espai mesurable. Recordem que $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ és una funció mesurable si i només si $X^{-1}\big((-\infty, a]\big) \in \mathcal{A}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Definició 2.0.7. Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat i sigui X una variable aleatòria. Anomenem funció de distribució de probabilitat d'X a l'aplicació

$$\begin{aligned} F_X\colon \mathbb{R} &\to [0,1] \\ x &\mapsto F_X(x) = p(X \leq x) = P_X\big((-\infty, x]\big). \end{aligned}$$

Proposició 2.0.8. Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat i sigui F_X la funció de distribució de probabilitat d'una variable aleatòria X sobre $(\Omega, \mathcal{A}, p)$. Aleshores,

i) $x_1 \leq x_2 \implies F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.

ii) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ i $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.

iii) F_X és contínua per la dreta, és a dir, $\lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$.

Demostració.

i) $F_X(x_1) = p\Big(\big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_1\big\}\Big) \leq p\Big(\big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_2\big\}\Big) = F_X(x_2)$, atès que $\big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_1\big\} \subseteq \big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_2\big\}$ i que p és una funció mesurable.

ii) Vegem que $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, es té que $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = 0$. Definim $A_n = \big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_n\big\}$. Tenim que $\varnothing \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n$. A més, $\limsup A_n = \varnothing$ perquè, altrament, hi hauria un nombre infinit de conjunts A_n contenint un $\omega \in \Omega$ determinat. Per tant,

$$\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to\infty} p(A_n) = p\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = p(\varnothing) = 0.$$

Anàlogament, es demostra que $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.

iii) Fixat x, volem veure que $\lim_{h\to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$.

Prenem $C_n = \big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x + h_n\big\}$, on $\{h_n\}$ és una successió de reals no negatius amb límit zero. Aleshores, $\liminf C_n = \limsup C_n = \big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\big\}$. Això ens diu que

$$\lim_{n\to\infty} F_X(x+h_n) = \lim_{n\to\infty} p(C_n) = p\left(\lim_{n\to\infty} C_n\right) = p(C) = F_X(x).$$

Com això és cert $\forall h$ t. q. $\{h_n\} \to 0$, tenim que $\lim_{h\to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$.

$\square$

Observació 2.0.9. En general no podem assegurar que sigui contínua per l'esquerra. Fent la mateixa prova prenent $x - h_n$ amb $h_n \to 0^+$ en comptes de $x + h_n$, obtenim que $C = \big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\big\}$ i, per tant

$$\lim_{h\to 0^-} F_X(x+h) = p(X < x) = F_X(x) - p(X = x).$$

Lema 2.0.10. Sigui $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció creixent i fitada. Aleshores f és mesuable Lebesgue.

Demostració. Suposem que f té un nombre no numerable de discontinuïats. Observem que totes les discontinuïtats són de salt. Sigui $D \subseteq \mathbb{R}$ el conjunt de punts on f és discontínua. Aleshores, tenim que, per tots els punts $x_d \in D$, existeixen els límits $\lim_{x\to x_d^+} f(x)$ i $\lim_{x\to x_d^-} f(x)$. Definim, per tot $n \in \mathbb{N}$, els conjunts

$$A_n = \left\{ x_d \in D \mid \frac{1}{n+1} \leq \lim_{x\to x_d^+} f(x) - \lim_{x\to x_d^-} f(x) < \frac{1}{n} \right\},$$

on cometem l'abús de notació $\frac{1}{0} = \infty$. Com que D és no numerable, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $|A_n| \notin \mathbb{N}$. Per tant, hi ha un nombre infinit de salts de, com a mínim $\frac{1}{n+1}$, la qual cosa contradiu la hipòtesi que f és fitada. Per tant, f té un nombre numerable de discontinuïtats i és, doncs, mesurable. $\square$

Teorema de l'existència d'una funció de distribució (2.0.11)
Sigui $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ una funció de probabilitat tal que

i) $x_1 \leq x_2 \implies F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.

iii) F_X és contínua per la dreta, és a dir, $\lim\limits_{h\to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$.

Aleshores, $\exists\,(\Omega, \mathcal{A}, p)$ i una variàble aleatòria X t. q. $F_X(x) = F(x)$.

Demostració. $\square$

Índex alfabètic