

---

# TEORIA DE LA PROBABILITAT

---

**ApuntsFME**

BARCELONA, OCTUBRE 2018

Darrera modificació: 15 d'octubre de 2018.

This work is licensed under a [Creative Commons](#)  
“[Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International](#)”  
license.



# Continguts

<b>1</b>	<b>Espai de probabilitat</b>	<b>1</b>
1.1	Definició axiomàtica de probabilitat . . . . .	1
	Desigualtats de Bonferroni . . . . .	2
1.2	Probabilitat condicionada . . . . .	4
1.3	Independència . . . . .	5
1.4	Espai producte . . . . .	5
1.5	Lema de Borel-Cantelli . . . . .	6
	Lema de Borel-Cantelli . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Variables aleatòries</b>	<b>9</b>
2.1	Definició i propietats bàsiques de les variables aleatòries . . . . .	9
	Teorema de l'existència d'una funció de distribució . . . . .	12
2.2	Esperança d'una variable aleatòria. Desigualtats de Markov i Chebyshev	13
	Desigualtat de Markov . . . . .	15
	Desigualtat de Chebyshev . . . . .	15
2.3	Vectors de variables aleatòries. Independència de variables aleatòries . . .	16
<b>3</b>	<b>Variables aleatòries discretes</b>	<b>19</b>
3.1	Definició i objectes relacionats . . . . .	19
3.2	Funció generadora de probabilitat . . . . .	20
	<b>Índex alfabètic</b>	<b>23</b>



# Tema 1

## Espai de probabilitat

### 1.1 Definició axiomàtica de probabilitat

**Definició 1.1.1.** Un espai de probabilitat és un espai de mesura  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  tal que  $p(\Omega) = 1$ . Diem que

- $\Omega$  és l'espai mostral,
- $\mathcal{A}$  és el conjunt d'esdeveniments o de successos,
- $p$  és la funció de probabilitat.

**Observació 1.1.2.** Recordem que  $(\Omega, \mathcal{A})$  és un espai mesurable si  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  és una  $\sigma$ -àlgebra d' $\Omega$ , és a dir,

- i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ,
- ii)  $A \in \mathcal{A} \iff \bar{A} \in \mathcal{A}$ ,
- iii) Si  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ , aleshores  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ .

I que  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  és un espai de mesura si  $\mu$  és una mesura sobre l'espai mesurable  $(\Omega, \mathcal{A})$ , és a dir,

- i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- ii)  $\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) \geq 0$ ,
- iii) ( $\sigma$ -additivitat) Si  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$  és tal que  $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$ , aleshores

$$\mu \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i).$$

**Proposició 1.1.3.** Sigui  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  un espai de probabilitat. Aleshores,

- i) Si  $A_1, \dots, A_r \in \mathcal{A}$  són tals que  $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$ , aleshores  $p \left( \bigcap_{i=1}^r A_i \right) = \sum_{i=1}^r p(A_i)$ .

- ii)  $A \in \mathcal{A} \implies p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ .
- iii)  $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \implies p(B \setminus A) = p(B) - p(A)$ .
- iv)  $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \implies p(A) \leq p(B)$ .
- v) Successions monòtones:

- a) Si  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$  són tals que  $A_i \subseteq A_{i+1}$ , aleshores  $p\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} p(A_i)$ .
- b) Si  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$  són tals que  $A_i \supseteq A_{i+1}$ , aleshores  $p\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} p(A_i)$ .

*Demostració.*

1. Conseqüència directa de la  $\sigma$ -additivitat.
2. Conseqüència directa de ii) usant que  $\mathcal{A} = A \cup \bar{A}$ .
3. Com que  $A \subseteq B$ ,  $B = (B \setminus A) \cup A$  i, per tant,  $p(B \setminus A) = p(B) - p(A)$ .
4. Conseqüència directa de iii) ja que  $p(B \setminus A) \geq 0$ .
5.
  - a) Sigui  $B_0 = A_0$  i per  $i > 0$  sigui  $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$ . Aleshores, es compleix que  $\forall i \neq j, B_i \cap B_j = \emptyset$  i que  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ , de manera que

$$\begin{aligned} p\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) &= p\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} p(B_i) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N p(B_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} p\left(\bigcup_{i=0}^N B_i\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} p(A_N). \end{aligned}$$

- b) Anàleg al cas anterior.

□

Observem que l'apartat v) només es pot aplicar en casos molt particulars. En general, si tenim  $A_1, \dots, A_r$  successos, hi ha estimacions per a  $p(\bigcup_{i=1}^r A_i)$ :

**Teorema 1.1.4.** *Desigualtats de Bonferroni.*

Siguin  $A_1, \dots, A_r \in \mathcal{A}$ , i per  $I \subseteq \{1, \dots, r\}$  sigui  $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$ . Definim

$$S_k = \sum_{I \in \{1, \dots, n\}, \#I=k} p(A_I),$$

això és,  $S_1 = \sum p(A_i)$ ,  $S_2 = \sum_{i \neq j} p(A_i \cap A_j)$ , ... Aleshores:

- i) Si  $t$  és parell,

$$p\left(\bigcup_{i=1}^r A_i\right) \geq \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} S_i$$

ii) Si  $t$  és senar,

$$p\left(\bigcup_{i=1}^r A_i\right) \leq \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} S_i$$

**Observació 1.1.5.** Amb els casos  $t = 1$  (desigualtat de Boole) i  $t = 2$  es poden donar fites inferiors i superiors.

**Exemple 1.1.6.**

1. Espais de probabilitat numerables.

Prenem  $\Omega$  un conjunt numerable  $\Omega = \{a_i\}_{i \geq 1}$ . Prenem  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$  (que és una  $\sigma$ -àlgebra). Per a definir la probabilitat sobre  $(\Omega, \mathcal{A})$  prenem una successió  $\{p_i\}_{i \geq 1}$  tal que  $0 \leq p_i \leq 1$  que compleix que  $\forall i, p(a_i) = p_i$  i  $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$ . Per tant, per a qualsevol element  $A \in \mathcal{A}$ , tenim que

$$p\left(\bigcup_{a \in A} \{a\}\right) = p(A) = \sum_{i \geq 1} p(\{a_i\}).$$

Si, a més,  $|\Omega| < +\infty$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$  té  $2^{|\Omega|}$  elements i si prenem  $\Omega = \{a_i\}_{i=1}^N$  i  $p_1 = p_2 = \dots = p_N = \frac{1}{N}$  obtenim un espai clàssic de probabilitat.

2. Espai de probabilitat en  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ .

Sigui  $\Omega = [a, b]$  i prenem  $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap [a, b]$  amb  $\mathcal{B}$  un borelià i com a funció de probabilitat  $p = \frac{\lambda}{b-a}$ , on  $\lambda$  és la mesura de Lebesgue. Observem que no podem prendre tot  $\mathbb{R}$  perquè no podem normalitzar  $\lambda(\mathbb{R})$ . Malgrat això, usant  $\lambda$  construirem més endavant funcions de probabilitat sobre  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ .

3. Tirada indefinida d'una moneda.

En aquest cas tenim que  $\Omega = \{a_i\}_{i \geq 1}$ ,  $a_i \in \{0, 1\}$  de la forma

$$\begin{array}{l} 00010001110110\dots \\ 01001110101101\dots \\ 10010111110010\dots \end{array}$$

sent 0 creu i 1 cara. Aquest conjunt és no numerable fàcilment demostrable amb l'argument de la diagonal de Cantor. Per a construir una  $\sigma$ -àlgebra sobre  $\Omega$  trobem una "bijecció" amb  $[0, 1]$  de la forma

$$\begin{aligned} \varphi: \Omega &\rightarrow [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \\ a = a_1 a_2 \dots &\mapsto 0.a_1 a_2 \dots \end{aligned}$$

on  $0.a_1 a_2 \dots$  és un nombre en binari. No és una bijecció completa ja que hi ha elements diferents que van a la mateixa imatge degut als nombres que acaben en 1 periòdic, però al ser tots racionals, el conjunt d'aquests nombres és numerable i per tant té mesura nul·la. És per això que podem definir una  $\sigma$ -àlgebra sobre  $\Omega$  prenent  $\{\varphi^{-1}(A)\}_{A \subseteq \mathcal{B} \cup [0, 1]}$ . Similarment ho fem amb la mesura.

## 1.2 Probabilitat condicionada

**Definició 1.2.1.** Sigui  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  un espai de probabilitat i siguin  $A, B \in \mathcal{A}$ . Definim la probabilitat d' $A$  condicionada a  $B$  com

$$p(A | B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

**Observació 1.2.2.** Sigui  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  un espai de probabilitat i sigui  $B \in \mathcal{A}$  tal que  $p(B) > 0$ . Aleshores, l'aplicació

$$\begin{aligned} p_B: \mathcal{A} &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto p_B(A) := p(A | B) \end{aligned}$$

defineix un espai de probabilitat  $(\Omega, \mathcal{A}, p_B)$ .

**Proposició 1.2.3.** Sigui  $I$  un conjunt numerable o finit i siguin  $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{A}$  tals que

- i)  $p(A_i) > 0$ ,
- ii)  $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ ,
- iii)  $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$ .

Aleshores,

- 1) Probabilitat total:

$$p(B) = \sum_{i \in I} p(B | A_i) p(A_i), \quad \forall B \in \mathcal{A}.$$

- 2) Fórmula de Bayes:

$$p(A_i | B) = \frac{p(B | A_i) p(A_i)}{\sum_{j \in I} p(B | A_j) p(A_j)}, \quad \forall B \in \mathcal{A} \text{ amb } p(B) > 0.$$

*Demostració.*

- 1) Com que els  $A_i$  són disjunts i  $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$ ,  $\forall B \in \mathcal{A}$ ,  $B = \bigcup_{i \in I} B \cap A_i$ , i la unió és disjunta. Es té

$$p(B) = p\left(\bigcup_{i \in I} B \cap A_i\right) \stackrel{\sigma\text{-add.}}{=} \sum_{i \in I} p(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} p(B | A_i) p(A_i).$$

- 2)

$$\begin{aligned} p(A_i | B) \sum_{j \in I} p(B | A_j) p(A_j) &\stackrel{i)}{=} p(A_i | B) p(B) = \\ \frac{p(B \cap A_i)}{p(B)} p(B) &= p(B \cap A_i) = p(B | A_i) p(A_i). \end{aligned}$$

□



**Problema 1.2.4.** *Ruïna del jugador.* Partim d'un capital de  $k$  unitats i, en cada jugada (sense memòria) augmenta o disminueix el capital en una unitat, amb probabilitats  $1/2$  i  $1/2$ . El joc acaba si ens quedem sense capital o si assolim un objectiu  $N$  ( $N > k$ ). Quina és la probabilitat de perdre tot el capital?

*Solució.* Sigui  $A_k$  el succés “el jugador, començant amb capital  $k$ , perd”. Condicionem  $A_k$  a la primera tirada de la moneda, definim  $B$ : “la primera tirada surt cara”.

$$\begin{aligned} p(A_k) &= p(A_k|B)p(B) + p(A_k|\overline{B})p(\overline{B}) = p(A_k|B)\frac{1}{2} + p(A_k|\overline{B})\frac{1}{2} \\ \implies 2p(A_k) &= p(A_{k-1}) + p(A_{k+1}) \implies p(A_k) - p(A_{k-1}) = p(A_{k+1}) - p(A_k) = C, \end{aligned}$$

el que ens diu que la diferència entre nivells és constant. Per tant  $p(A_k) = p(A_0) + kC$ . Sabent que  $p(A_0) = 1$  i  $p(A_N) = 0$  ens queda que

$$0 = 1 + CN \implies C = -\frac{1}{N} \implies p(A_k) = 1 - \frac{k}{N}.$$

### 1.3 Independència

**Definició 1.3.1.** Sigui  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  un espai de probabilitat, sigui  $I$  un conjunt finit o numerable i sigui  $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{A}$ . Diem que els esdeveniments  $A_i$  són independents si per tot  $J \subseteq I$  amb  $|J| \in \mathbb{N}$  es té que

$$p\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} p(A_j).$$

### 1.4 Espai producte

Donats dos espais de probabilitat  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, p_1)$  i  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, p_2)$ , volem construir un nou espai de probabilitat  $(\Omega_3, \mathcal{A}_3, p_3)$  que codifiqui els dos espais de probabilitat inicials. A aquest espai de probabilitat l'anomenarem espai de probabilitat producte.

**Definició 1.4.1.** Siguin  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, p_1)$  i  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, p_2)$  dos espais de probabilitat. Anomenem espai de probabilitat producte a la terna  $(\Omega_3, \mathcal{A}_3, p_3)$  tal que

- i)  $\Omega_3 = \Omega_1 \times \Omega_2$
- ii)  $\mathcal{A}_3 = \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$  ( $\sigma$ -àlgebra generada per  $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ )
- iii)  $p_3$  és una funció de probabilitat que compleix que  $\forall A_1, A_2$  t. q.  $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$  aleshores  $p_3(A_1 \times A_2) = p_1(A_1)p_2(A_2)$ .

**Observació 1.4.2.**  $p_3$  està ben definida ja que pel Teorema d'extensió de Carathéodory podem construir una  $\sigma$ -àlgebra sobre  $\Omega_1 \times \Omega_2$  a partir d'una extensió de  $\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$  i restringir  $p_3$  segons [iii](#)).

**Observació 1.4.3.** Podem estendre  $\lambda$  (la mesura de Lebesgue) a  $\mathbb{R}^2$  de la següent forma. Sabem que  $([0, 1], \mathcal{B} \cap [0, 1], \lambda_{[0, 1]})$  és un espai de probabilitat. Aleshores

$$([0, 1] \times [0, 1], \sigma(\mathcal{B} \cap [0, 1] \times \mathcal{B} \cap [0, 1]), \lambda_{[0, 1] \times [0, 1]})$$

defineix un espai de probabilitat a  $\mathbb{R}^2$ .

**Problema 1.4.4.** *Agulla de Buffon.* Considerem el pla  $\mathbb{R}^2$  tesel·lat amb línies paral·leles indefinides separades per una distància  $L$ . Llancem una agulla de longitud  $l \leq L$  sobre el pla. Trobar quina és la probabilitat que l'agulla toqui una de les línies.

*Solució.* Considerarem dues variables:  $x$  com la distància del centre de l'agulla a la línia més propera i  $\theta$  com l'angle de l'agulla amb la direcció de les línies. Tenim que  $x \in [0, \frac{L}{2}]$  i  $\theta \in [0, \pi)$  i per tant,  $\Omega = [0, \frac{L}{2}] \times [0, \pi)$ ,  $\mathcal{A}$  són els borelians del conjunt i  $p$  la mesura de Lebesgue normalitzada en  $\mathcal{A}$ . Sigui  $A \in \mathcal{A}$  l'esdeveniment “l'agulla talla una recta” i  $\omega \in \Omega$  una tirada. Aleshores  $w \in A \iff x \leq \frac{l}{2} \sin \theta$ . Per tant,

$$p(A) = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2} \sin \theta \, d\theta}{\frac{L\pi}{2}} = \frac{2l}{L\pi}.$$

## 1.5 Lema de Borel-Cantelli

Siguin  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  un espai de probabilitat i  $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ . Volem donar-li un sentit a “límit de  $\{A_n\}_{n \geq 1}$ ”. Farem com a  $\mathbb{R}$  i definirem els límits superior i inferior (que sempre existiran) i, si coincideixen, aquest serà el límit.

**Definició 1.5.1.** Sigui  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  un espai de probabilitat. Donats  $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ , definim els límits superior i inferior de la successió de successos  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  com

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \end{aligned}$$

**Observació 1.5.2.** Els dos límits pertanyen a  $\mathcal{A}$  ja que son unió i intersecció numerable de successos.

**Proposició 1.5.3.** Sigui  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  un espai de probabilitat i siguin  $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ . Aleshores,

- i)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \exists m \equiv m(\omega) \text{ amb } \omega \in A_r \, \forall r \geq m(\omega)\},$
- ii)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ pertany a un nombre infinit dels } A_n\},$
- iii)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n.$

*Demostració.*

- i)  $\omega \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \iff \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \iff \exists m \equiv m(\omega) \text{ t. q. } \omega \in \bigcap_{k=m(\omega)}^{\infty} A_k,$  és a dir, si  $\exists m \equiv m(\omega) \text{ t. q. } \omega \in A_r \, \forall r \geq m(\omega).$
- ii)  $\omega \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \iff \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \iff \omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \, \forall n \iff \forall n, \exists n_0 \geq n \text{ t. q. } \omega \in A_{n_0} \iff \omega \text{ pertany a un nombre infinit dels } A_n.$
- iii) Si  $\omega \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ , aleshores  $\omega \in A_r, \forall r \geq m(\omega)$ , de manera que pertany a un nombre infinit dels  $A_n$  i, en conseqüència, pertany a  $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ .

□

**Proposició 1.5.4.** Sigui  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  un espai de probabilitat i siguin  $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ , amb  $\lim A_n = A$ . Aleshores,  $p(A) = p(\lim A_n) = \lim p(A_n)$  i aquest límit existeix.

*Demostració.* Definim  $B_n = \cup_{k \geq n} A_k$  i  $C_n = \cap_{k \geq n} A_k$ . Observem que  $\{B_n\}_{n \geq 1}$  és decreixent i que  $\{B_n\}_{n \geq 1}$  és creixent. Naturalment,  $C_n \subseteq A_n \subseteq B_n$ ,  $\limsup A_n = \cap_{n \geq 1} B_n$  i  $\liminf A_n = \cup_{n \geq 1} C_n$ .

Vegem que  $p(\liminf A_n) \leq \liminf p(A_n)$ .

$$p(\liminf A_n) = p\left(\bigcup_{n \geq 1} C_n\right) = \lim p(C_n) = \lim p\left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right) \leq \liminf p(A_n).$$

Al darrer pas hem utilitzat el fet que  $p(\cap_{k \geq n} A_k) \leq p(A_n)$ . Anàlogament, tenim que  $\limsup p(A_n) \leq p(\limsup A_n)$ . Així doncs,

$$p(\liminf A_n) \leq \liminf p(A_n) \leq \limsup p(A_n) \leq p(\limsup A_n).$$

Atès que  $p(\liminf A_n) = p(\limsup A_n) = p(A)$ , concloem que

$$\liminf p(A_n) = \limsup p(A_n) = \lim p(A_n) = p(A).$$

□

**Teorema 1.5.5.** *Lema de Borel-Cantelli.*

Sigui  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  un espai de probabilitat i siguin  $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ . Aleshores,

- i)  $\sum_{n \geq 1} p(A_n) < \infty \implies p(\limsup A_n) = 0$ .
- ii) Si  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  és independent,  $\sum_{n \geq 1} p(A_n) = \infty \implies p(\limsup A_n) = 1$ .

*Demostració.* Posem  $A = \limsup A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$ .

i) Sabem que

$$0 \leq p(A) \leq p\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \sum_{k \geq n} p(A_k), \forall n \in \mathbb{N}$$

i que  $\sum_{n \geq 1} p(A_n) < \infty$ , de manera que  $\lim \sum_{k \geq n} p(A_k) = 0$  i immediatament deduïm que  $p(A) = 0$ .

ii) Observem primer que  $\bar{A} = \overline{\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k} = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \bar{A}_k = \liminf \bar{A}_n$ . Veurem que

$$p(\bar{A}) = 0. \text{ Calculem } p\left(\bigcap_{m \geq n} \bar{A}_m\right).$$

$$\begin{aligned} 0 \leq p\left(\bigcap_{m \geq n} \bar{A}_m\right) &= \lim_{r \rightarrow \infty} p\left(\bigcap_{m=n}^r \bar{A}_m\right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{m=n}^r p(\bar{A}_m) = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{m=n}^r (1 - p(A_m)) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{m=n}^r (e^{-p(A_m)}) = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-\sum_{m=n}^r p(A_m)} = 0, \end{aligned}$$

de manera que  $p\left(\bigcap_{m \geq n} \overline{A_m}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Finalment,

$$0 \leq p(\overline{A}) = p\left(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} \overline{A_m}\right) \leq \sum_{n \geq 1} p\left(\bigcap_{m \geq n} \overline{A_m}\right) = 0 + 0 + \dots = 0,$$

i concloem que  $p(A) = 1$ .

□

## Tema 2

# Variables aleatòries

### 2.1 Definició i propietats bàsiques de les variables aleatòries

**Definició 2.1.1.** Siguin  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$  i  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$  espais mesurables. Diem que  $X: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  és una variable aleatòria si

$$X^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1, \forall A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

En aquest curs, sempre prendrem  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . Per tant, quan parlem de variable aleatòria ens estarem referint a una aplicació  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  amb  $B \in \mathcal{B} \implies X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ , on  $(\Omega, \mathcal{A})$  és un espai de mesura.

**Exemple 2.1.2.**

1. Sigui  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espai de mesura. Aleshores,  $\forall c \in \mathbb{R}$ , l'aplicació

$$\begin{aligned} X: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto c \end{aligned}$$

és una variable aleatòria, atès que,  $\forall B \in \mathcal{B}$ , es té que

$$X^{-1}(B) = \begin{cases} \Omega, & \text{si } c \in B, \\ \emptyset, & \text{si } c \notin B. \end{cases}$$

2. Siguin  $X$  i  $Y$  variables aleatòries. Aleshores, també son variables aleatòries les següents funcions.

- $X + Y$
- $X - Y$
- $aX, \forall a \in \mathbb{R}$
- $XY$
- $|X|$
- $\max\{X, Y\}$
- $\min\{X, Y\}$

- $X^+$
  - $X^-$
  - $g(X, Y)$ , on  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  és una funció mesurable.
3. Sigui  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espai de mesura i sigui  $A \in \mathcal{A}$ . Definim la variable aleatòria indicadora d' $A$  com

$$\mathbb{I}_A \equiv \mathbb{1}_A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \mapsto \mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } \omega \notin A, \\ 1, & \text{si } \omega \in A. \end{cases}$$

Vegem que, efectivament, es tracta d'una variable aleatòria. Sigui  $B \in \mathcal{B}$ . Aleshores,

$$\mathbb{I}_A^{-1}(B) = \begin{cases} \Omega, & \text{si } 0 \in B, 1 \in B, \\ \overline{A}, & \text{si } 0 \in B, 1 \notin B, \\ A, & \text{si } 0 \notin B, 1 \in B, \\ \emptyset, & \text{si } 0 \notin B, 1 \notin B. \end{cases}$$

**Observació 2.1.3.** A partir d'ara, emprarem la notació següent. Sigui  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  un espai de probabilitat i sigui  $B \in \mathcal{B}$ , escrivim

$$p(X \in B) := p\left(\{\omega \in \Omega \mid \omega \in X^{-1}(B)\}\right).$$

**Exemple 2.1.4.**  $p(X \leq 2) = p\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 2\}\right)$ .

**Observació 2.1.5.** Sigui  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  un espai de probabilitat i sigui  $X$  una variable aleatòria.  $X$  indueix una funció de probabilitat  $P_X$  sobre l'espai de mesura  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

$$P_X(B) := p(X \in B).$$

És a dir,  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$  és un espai de probabilitat. Comprovem, primer, que és un espai de mesura.

- i)  $P_X(\emptyset) = p\left(\{\omega \in \Omega \mid \omega \in X^{-1}(\emptyset)\}\right) = p(\emptyset) = 0$ , atès que  $p$  és una funció de probabilitat.
- ii)  $0 \leq p\left(\{\omega \in \Omega \mid \omega \in X^{-1}(B)\}\right) = P_X(B)$ , atès que  $p$  és una funció de probabilitat.
- iii) Si  $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$  són disjunts dos a dos, aleshores  $\{X^{-1}(B_i)\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$  també són disjunts dos a dos. I, per ser  $p$  una funció de probabilitat, es té que

$$\begin{aligned} P_X\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) &= p\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \omega \in X^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right)\right\}\right) = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} p\left(\{\omega \in \Omega \mid \omega \in X^{-1}(B_i)\}\right) = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} P_X(B_i). \end{aligned}$$

A més a més, per ser  $p$  una funció de probabilitat,

$$P_X(\mathbb{R}) = p\left(\{\omega \in \Omega \mid \omega \in X^{-1}(\mathbb{R})\}\right) = p(\Omega) = 1$$

i  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_x)$  és un espai de probabilitat.

**Observació 2.1.6.** Sigui  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espai mesurable. Recordem que  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  és una funció mesurable si i només si  $X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{A}$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

**Definició 2.1.7.** Sigui  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  un espai de probabilitat i sigui  $X$  una variable aleatòria. Anomenem funció de distribució de probabilitat d' $X$  a l'aplicació

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto F_X(x) = p(X \leq x) = P_X((-\infty, x]).$$

**Proposició 2.1.8.** Sigui  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  un espai de probabilitat i sigui  $F_X$  la funció de distribució de probabilitat d'una variable aleatòria  $X$  sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ . Aleshores,

- i)  $x_1 \leq x_2 \implies F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ .
- ii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  i  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ .
- iii)  $F_X$  és contínua per la dreta, és a dir,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$ .

*Demostració.*

- i)  $F_X(x_1) = p\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_1\}\right) \leq p\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_2\}\right) = F_X(x_2)$ , atès que  $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_1\} \subseteq \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_2\}$  i que  $p$  és una funció mesurable.
- ii) Vegem que  $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ , es té que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n) = 0$ . Definim  $A_n = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_n\}$ . Tenim que  $\emptyset \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n$ . A més,  $\limsup A_n = \emptyset$  perquè, altrament, hi hauria un nombre infinit de conjunts  $A_n$  contenint un  $\omega \in \Omega$  determinat. Per tant,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(A_n) = p\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = p(\emptyset) = 0.$$

Anàlogament, es demostra que  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ .

- iii) Fixat  $x$ , volem veure que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$ .

Prenem  $C_n = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x + h_n\}$ , on  $\{h_n\}$  és una successió de reals no negatius amb límit zero. Aleshores,  $\liminf C_n = \limsup C_n = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ . Això ens diu que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x + h_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(C_n) = p\left(\lim_{n \rightarrow \infty} C_n\right) = p(C) = F_X(x).$$

Com això és cert  $\forall h$  t. q.  $\{h_n\} \rightarrow 0$ , tenim que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$ .

□

**Observació 2.1.9.** En general no podem assegurar que sigui contínua per l'esquerra. Fent la mateixa prova prenent  $x - h_n$  amb  $h_n \rightarrow 0^+$  en comptes de  $x + h_n$ , obtenim que  $C = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}$  i, per tant

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} F_X(x + h) = p(X < x) = F_X(x) - p(X = x).$$

**Lema 2.1.10.** Sigui  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funció creixent i fitada. Aleshores  $f$  és mesurable Lebesgue.

*Demostració.* Suposem que  $f$  té un nombre no numerable de discontinuïtats. Observem que totes les discontinuïtats són de salt. Sigui  $D \subseteq \mathbb{R}$  el conjunt de punts on  $f$  és discontinua. Aleshores, tenim que, per tots els punts  $x_d \in D$ , existeixen els límits  $\lim_{x \rightarrow x_d^+} f(x)$  i  $\lim_{x \rightarrow x_d^-} f(x)$ . Definim, per tot  $n \in \mathbb{N}$ , els conjunts

$$A_n = \left\{ x_d \in D \mid \frac{1}{n+1} \leq \lim_{x \rightarrow x_d^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_d^-} f(x) < \frac{1}{n} \right\},$$

on cometem l'abús de notació  $\frac{1}{0} = \infty$ . Com que  $D$  és no numerable, hi ha un nombre numerable de conjunts  $A_n$  i  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = D$ , necessàriament  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal que  $|A_n| \notin \mathbb{N}$ . Per tant, hi ha un nombre infinit de salts de, com a mínim  $\frac{1}{n+1}$ , la qual cosa contradiu la hipòtesi que  $f$  és fitada. Per tant,  $f$  té un nombre numerable de discontinuïtats i és, doncs, mesurable.  $\square$

**Teorema 2.1.11.** *Teorema de l'existència d'una funció de distribució.*

Sigui  $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  una funció de probabilitat tal que

- i)  $x_1 \leq x_2 \implies F_X(x_1) \leq F(x_2)$ .
- ii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  i  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ .
- iii)  $F$  és contínua per la dreta, és a dir,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} F(x + h) = F(x)$ .

Aleshores, existeixen un espai de probabilitat  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  i una variable aleatòria  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tals que  $F_X(x) = F(x)$ .

*Demostració.* Prenem  $(\Omega, \mathcal{A}, p) = ([0, 1], \mathcal{B} \cap [0, 1], \lambda_{[0, 1]})$  i definim

$$X: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ \omega \mapsto X(\omega) = \sup \{y \in \mathbb{R} \mid F(y) \leq \omega\}.$$

Observem que a tots els punts on  $F$  és contínua  $X$  també ho és, de manera que  $X$  és una funció mesurable. Vegem que  $F_X(x) = F(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Donat  $x \in \mathbb{R}$ , definim els conjunts

$$A = \{\omega \in [0, 1] \mid X(\omega) \leq x\}, \\ B = \{\omega \in [0, 1] \mid \omega \leq F(x)\}$$

i observem que

$$P(A) = P(X \leq x) = F_X(x), \\ P(B) = \lambda([0, F(x)]) = F(x).$$

Si demostrem que  $A = B$ , haurem acabat.



- $\omega \in B \implies \omega \leq F(x) \implies x \notin \{y \in \mathbb{R} \mid F(y) < \omega\} \implies x \geq X(\omega) \implies \omega \in A.$
- $\omega \notin B \implies \omega > F(x) \implies \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } \omega > F(x + \varepsilon) \implies x(\omega) \geq x + \varepsilon > x \implies X(\omega) > x \implies \omega \notin A.$

□

## 2.2 Esperança d'una variable aleatòria. Desigualtats de Markov i Chebyshev

**Definició 2.2.1.** Sigui  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  un espai de probabilitat i sigui  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una variable aleatòria. Com ja sabem,  $X$  induïx una probabilitat  $P_X$  sobre  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . Definim l'esperança de la variable aleatòria d' $X$ ,  $\mathbb{E}[X]$  com

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X \, dp = \int_{\mathbb{R}} x \, dP_X,$$

si existeix aquesta integral.

**Observació 2.2.2.** La demostració que aquestes dues integrals són iguals resulta de l'aplicació de la definició de la integral de Lebesgue, però escapa dels objectius d'aquest curs i no l'escriurem.

**Observació 2.2.3.** Igual que es va veure al curs de teoria de la mesura, pot ser que  $\mathbb{E}[X]$  no existeixi o que sigui infinita. No obstant això, atès que  $|\int_{\Omega} f \, dp| \leq \int_{\Omega} |f| \, dp$ , sovint demanarem que  $\mathbb{E}[|X|] \leq +\infty$  per poder afirmar que  $\mathbb{E}[X] \leq +\infty$ .

**Exemple 2.2.4.** Sigui  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  un espai de probabilitat i sigui  $A \in \mathcal{A}$ . Considerem la variable aleatòria

$$X(\omega) = \mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } \omega \in A, \\ 1, & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

Observem que, donat  $B \in \mathcal{B}$ ,

$$P_{\mathbb{I}_A}(B) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0, 1 \in B, \\ p(A), & \text{si } 0 \notin B, 1 \in B, \\ p(\overline{A}), & \text{si } 0 \in B, 1 \notin B, \\ 0, & \text{si } 0, 1 \notin B. \end{cases}$$

Així, podem calcular l'esperança amb les dues integrals i comprovar que el resultat és el mateix.

$$\mathbb{E}[\mathbb{I}_A] = \int_{\Omega} \mathbb{I}_A \, dp = 1 \cdot p(A) + 0 \cdot p(\overline{A}) = p(A),$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{I}_A] = \int_{\mathbb{R}} x \, dP_{\mathbb{I}_A} = 1 \cdot P_{\mathbb{I}_A}(\{1\}) + 0 \cdot P_{\mathbb{I}_A}(\{0\}) + \int_{\mathbb{R} \setminus \{0,1\}} x \, dP_{\mathbb{I}_A} = P_{\mathbb{I}_A}(\{1\}) = p(A).$$

**Proposició 2.2.5.** Sigui  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funció mesurable i sigui  $X$  una variable aleatòria. Aleshores,  $f(X)$  és una variable aleatòria i

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\Omega} f(X) \, dp = \int_{\mathbb{R}} x \, dP_{f(X)}.$$

*Demostració.* Si  $f$  és mesurable, aleshores  $f(X)$  també, de manera que  $f(X)$  és una variable aleatòria i la resta segueix de la definició.  $\square$

**Definició 2.2.6.** Sigui  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  un espai de probabilitat i sigui  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una variable aleatòria. Aleshores, definim

- Moment d'ordre  $r$  d' $X$ :

$$\mathbb{E}[X^r],$$

on  $r \in \mathbb{R}$  i hem suposat que  $\mathbb{E}[|X|^r] < +\infty$ .

- Moment factorial d'ordre  $r$  d' $X$ :

$$\mathbb{E}[(X)_r] = X(X-1)\cdots(X-r+1),$$

on  $r \in \mathbb{N}$ .

- Variància d' $X$ :

$$\mathbb{V}\text{ar}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

- Desviació típica d' $X$ :

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{V}\text{ar}[X]}.$$

**Proposició 2.2.7.** Siguin  $X, Y$  variables aleatòries, siguin  $a, b \in \mathbb{R}$  i sigui  $A \in \mathcal{A}$ . Es tenen les següents propietats de l'esperança.

- $\mathbb{E}[a] = a$ ,
- $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$ ,
- $\mathbb{E}[\mathbb{I}_A] = p(A)$ ,
- $|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|]$ .

Es tenen les següents propietats de la variància.

- $\mathbb{V}\text{ar}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2 + \mathbb{E}[X]^2 - 2X\mathbb{E}[X]] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[X]^2 - 2\mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ ,
- $\mathbb{V}\text{ar}[a] = 0$ ,
- $\mathbb{V}\text{ar}[a + X] = \mathbb{V}\text{ar}[X]$ ,
- $\mathbb{V}\text{ar}[aX] = a^2 \mathbb{V}\text{ar}[X]$ .

**Proposició 2.2.8.** *Desigualtat de Holder.* Siguin  $X, Y$  variables aleatòries i siguin  $p, q \in \mathbb{R}$  tals que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Si  $\mathbb{E}[|X|^p], \mathbb{E}[|Y|^q] < +\infty$ , aleshores

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}[|Y|^q]^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

*Desigualtat de Cauchy-Schwarz.* Siguin  $X, Y$  variables aleatòries. Si  $\mathbb{E}[|X|^2], \mathbb{E}[|Y|^2] < +\infty$ , aleshores

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^2]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}[|Y|^2]^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

*Desigualtat de Minkowsky.* Siguin  $X, Y$  variables aleatòries i sigui  $p \in \mathbb{R}$ . Si  $\mathbb{E}[|X|^p], \mathbb{E}[|Y|^p] < +\infty$ , aleshores

$$\mathbb{E}[|X + Y|^p]^{\frac{1}{p}} \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}} + \mathbb{E}[|Y|^p]^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

*Demostració.* Tots aquests resultats són l'aplicació de les desigualtats corresponents demostrades al curs de teoria de la mesura.  $\square$

**Observació 2.2.9.** La desigualtat de Cauchy-Schwarz és el cas particular  $p = q = 2$  de la desigualtat de Holder.

**Teorema 2.2.10.** *Desigualtat de Markov.*

Sigui  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  un espai de probabilitat, sigui  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una variable aleatòria amb  $X > 0$  i sigui  $a \in \mathbb{R}^+$ . Aleshores,

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

*Demostració.* Sigui  $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq a\}$ . Com que  $X$  és mesurable,  $A$  és un succés. Observem que

$$a\mathbb{I}_A(\omega) \leq X(\omega), \forall \omega \in \Omega.$$

Aleshores,

$$ap(X \geq a) = \mathbb{E}[a\mathbb{I}_A(\omega)] \leq \mathbb{E}[X(\omega)] = \mathbb{E}[X].$$

$\square$

**Teorema 2.2.11.** *Desigualtat de Chebyshev.*

Sigui  $X$  una variable aleatòria amb  $\mathbb{E}[X] < +\infty$ ,  $\text{Var}[X]$  i  $\text{Var}[X] \neq 0$ . Aleshores, per tot  $k > 0$ , es té que

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq k \sqrt{\text{Var}[X]}) \leq \frac{1}{k^2}.$$

*Demostració.* Posem  $Y := |X - \mathbb{E}[X]|$ . Observem que  $Y$  és una variable aleatòria. Tenim que, per tot  $a > 0$ ,

$$\begin{aligned} P(Y \geq a) &= P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) = \\ &= P((X - \mathbb{E}[X])^2 \geq a^2) \leq \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}{a^2} = \\ &= \frac{\text{Var}[X]}{a^2}, \end{aligned}$$

on hem aplicat la desigualtat de Markov. Prenent ara  $a = k \sqrt{\text{Var}[X]}$ , deduïm el resultat volgut.  $\square$

**Observació 2.2.12.** Quan  $\text{Var}[X] = 0$ , seguim tenint que, per tot  $a > 0$ ,

$$0 \leq P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\text{Var}[X]}{a^2} = 0,$$

i tenim que  $P(X = \mathbb{E}[X]) = 1$ .

## 2.3 Vectors de variables aleatòries. Independència de variables aleatòries

**Definició 2.3.1.** Sigui  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  un espai de probabilitat. Diem que un vector de variables aleatòries o una variable aleatòria multidimensional de dimensió  $n$  és una funció mesurable  $\vec{X}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Observació 2.3.2.** La funció

$$\begin{aligned} \pi_i: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_i \end{aligned}$$

és una funció mesurable. Per tant, les components  $\pi_i \circ \vec{X} = \pi_i(\vec{X}) = X_i$  d' $\vec{X}$  són variables aleatòries.

**Definició 2.3.3.** Sigui  $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un vector de variables aleatòries de dimensió  $n$ . Anomenem funció de distribució de probabilitat d' $\vec{X}$  a

$$F_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n).$$

**Proposició 2.3.4.** Sigui  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  un espai de probabilitat i sigui  $\vec{X} = (X, Y): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  un vector de variables aleatòries amb funció de distribució  $F_{\vec{X}}(x, y)$ . Aleshores,

- i)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (-\infty, -\infty)} F_{\vec{X}}(x, y) = 0$  i  $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} F_{\vec{X}}(x, y) = 1$ .
- ii)  $x_1 \leq x_2 \implies F_{\vec{X}}(x_1, y) \leq F_{\vec{X}}(x_2, y), \forall y \in \mathbb{R}$ .
- iii)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0^+, y_0^+)} F_{\vec{X}}(x, y) = F_{\vec{X}}(x_0, y_0)$ .
- iv)  $\lim_{y \rightarrow +\infty} F_{\vec{X}}(x, y) = F_X(x)$ . A aquestes funcions les anomenem distribucions marginals.
- v)  $P(a < x \leq b, c < y \leq d) = F_{\vec{X}}(b, d) - F_{\vec{X}}(b, c) - F_{\vec{X}}(a, d) + F_{\vec{X}}(a, c) = \Delta_R F$ ,

on  $R$  és el rectangle que determinen  $a, b, c, d$ .

*Demostració.* Les demostracions de les tres primeres propietats son anàlogues a les de una sola dimensió. Les altres no les farem.  $\square$

**Proposició 2.3.5.** Sigui una  $F(x, y)$  una funció que satisfà les cinc propietats de la proposició anterior i tal que  $\Delta_R F > 0$  per tot rectangle  $R$ . Aleshores,

$$\exists \vec{X} = (X, Y) \text{ variable aleatòria tal que } F(x, y) = F_{\vec{X}}.$$

*Demostració.* La demostració és llarga i pesada, i no la farem.  $\square$

**Definició 2.3.6.** Sigui  $\{X_i\}_{i \in I}$  una família de variables aleatòries sobre un espai de probabilitat  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ . Diem que  $\{X_i\}_{i \in I}$  és independent si per tot  $J \subseteq I$  amb  $|J| < +\infty$  i per qualssevol  $B_1, \dots, B_{|J|} \in \mathcal{B}$  es té que

$$P\left(\bigcap_{j \in J} X_j \in B_j\right) = \prod_{j \in J} P(X_j \in B_j).$$

En general, no podem conèixer la distribució de  $X_1, \dots, X_n$  si coneixem només les seves distribucions marginals. Tanmateix, sí que podem conèixer-la si les variables aleatòries són independents.

**Proposició 2.3.7.** Si prenem  $B_i = (-\infty, x_i)$  i una família finita de variables aleatòries independent  $\{X_i\}_{i=1}^n$  (i posant  $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ), tenim que

$$F_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i).$$

*Demostració.*

$$\begin{aligned} F_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n) &= p\left(\bigcap_{i=1}^n X_i \in B_i\right) = p\left(\bigcap_{i=1}^n X_i \leq x_i\right) = \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x_i) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i). \end{aligned}$$

□

**Observació 2.3.8.** Es pot demostrar que la implicació recíproca és certa, és a dir, que si una determinada família de variables aleatòries satisfà la igualtat anterior, aleshores és independent.

**Observació 2.3.9.** Siguin  $\{X_i\}_{i=1}^n$  una família de variables aleatòries independent i siguin  $f_1, \dots, f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funcions mesurables. Aleshores,  $\{f_1(X_i)\}_{i=1}^n$  també són independents.

**Proposició 2.3.10.** Siguin  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatòries independents. Aleshores

$$\mathbb{E}[X_1 \dots X_n] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i].$$

**Definició 2.3.11.** Siguin  $X, Y$  variables aleatòries. La covariància de  $X$  i  $Y$  és:

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right]$$

**Observació 2.3.12.** Està ben definida sempre que  $\mathbb{E}[|X|], \mathbb{E}[|Y|] < \infty$  i

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

*Demostració.*

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[XY - \mathbb{E}[X]Y - \mathbb{E}[Y]X + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]] = \\ &= \mathbb{E}[XY] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]. \end{aligned}$$

□

**Observació 2.3.13.** Si  $X$  i  $Y$  són independents, aleshores  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

**Observació 2.3.14.** Per  $X, Y$  variables aleatòries, es satisfà  $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}(X, Y)$ . Si a més són independents,  $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$ .

*Demostració.*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(X+Y)^2] - \mathbb{E}[X+Y]^2 = \\ &= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] + 2\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2 - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \\ &= \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}(X, Y). \end{aligned}$$

□

**Proposició 2.3.15.** Siguin  $X, Y, Z$  variables aleatòries, i  $a, b, C$  constants. Aleshores

- i)  $\text{Cov}(C, X) = 0$ .
- ii)  $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}[X]$ .
- iii)  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ .
- iv)  $\text{Cov}(aX + bY, Z) = a\text{Cov}(X, Z) + b\text{Cov}(Y, Z)$ .
- v)  $\text{Cov}(X, Y)^2 \leq \text{Var}[X] \text{Var}[Y]$ .

*Demostració.* Demostrarem només l'últim apartat. Els altres es deixen com exercici pel lector. Tenim doncs que

$$|\text{Cov}(X, Y)| = \left| \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \right| \leq \mathbb{E} \left[ |(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])| \right]$$

Que, aplicant Cauchy-Schwarz, és menor que

$$\sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]} \sqrt{\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]} = \sqrt{\text{Var}[X]} \sqrt{\text{Var}[Y]}.$$

És a dir,  $\text{Cov}(X, Y)^2 \leq \text{Var}[X] \text{Var}[Y]$ . □

**Observació 2.3.16.** Com es conclou de la desigualtat de Cauchy-Schwarz, la desigualtat anterior és una igualtat si i només si  $X - \mathbb{E}[X] = \lambda(Y - \mathbb{E}[Y])$ .

**Observació 2.3.17.**  $\text{Cov}(X, Y) = 0 \not\Rightarrow X, Y$  independents.

*Demostració.* En donem un contraexemple. Definim  $X, Y$  variables aleatòries tals que

$$X = \begin{cases} 1 & \text{amb probabilitat } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{amb probabilitat } \frac{1}{2} \end{cases}, Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X = -1 \\ \pm 1 & \text{amb probabilitat } \frac{1}{2} \text{ si } X = 1 \end{cases}.$$

En aquest cas,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &= \int_{\Omega} XY \, dp = \\ &= 0 \cdot P(X = -1) + 1 \cdot P(X = 1, Y = 1) - 1 \cdot P(X = 1, Y = -1) = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0, \end{aligned}$$

i també tenim que

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot P(X = 1) - 1 \cdot P(X = -1) = 0.$$

Per les últimes dues igualtats,  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$ . Vegem però que no són independents:

$$P(X = 1)P(Y = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Però  $P(X = 1, Y = 0) = 0$ , és a dir, com volíem veure  $X$  i  $Y$  no són independents. □

# Tema 3

## Variables aleatòries discretes

### 3.1 Definició i objectes relacionats

**Definició 3.1.1.** Sigui  $(\Omega, \mathcal{A}, p)$  un e. prob. i  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una variable aleatòria. Diem que  $X$  és discreta si  $\text{Im}(X)$  és numerable.

**Observació 3.1.2.** En la pràctica  $\text{Im}(X) = \{x_1 < x_2 < \dots\}$  és un conjunt numerable ordenat, en els casos que veurem  $\text{Im}(X) \subseteq \mathbb{Z}$ . Escrivem  $p_i = p(X = x_i)$

**Observació 3.1.3.** Sigui  $A \subset \mathcal{B}$ ,  $p_X(A) = p(X \in A) = \sum_{i \in A} p_i$ .

**Observació 3.1.4.** Donat  $\{x_i\}_{i \geq 1} \subset \mathbb{R}$  creixent i valors  $\{p_i\}_{i \geq 1} \subset [0, 1]$  t. q.  $\sum p_i = 1$ , es pot definir una variable discreta  $X$  que pren valors a  $\{x_i\}$  tals que  $p(X = x_i) = p_i$ .

**Observació 3.1.5.** La funció de distribució, amb  $|\text{Im}(X)| < +\infty$ , és

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ p_1 + \dots + p_j & \text{si } x_j \leq x < x_{j+1} \\ 1 & \text{si } x \geq x_n \end{cases}$$

**Proposició 3.1.6.** *Operador esperança.* Sigui  $X$  v.a. discreta,

i)

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i \geq 1} x_i p_i$$

ii)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable,

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{i \geq 1} g(x_i) p_i$$

*Demostració.*

i)

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \, dP_X = \sum x_i P_X(X = x_i) + \int_{\mathbb{R} \setminus \cup \{x_i\}} x \, dP_X = \sum_{i \geq 1} x_i p_i + 0$$

perquè  $P_X(\mathbb{R} \setminus \cup \{x_i\}) = 0$

ii) Exercici

□

**Observació 3.1.7.**  $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[X]^2 = \sum_{i \geq 1} x_i^2 p_i - (\sum_{i \geq 1} x_i p_i)^2$

**Proposició 3.1.8.**  $X, Y$  v.a. discretes,  $\text{Im}(X) = \{x_i\}_{i \geq 1}$ ,  $\text{Im}(Y) = \{y_i\}_{i \geq 1}$ ,  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Aleshores

$$\mathbb{E}[g(X, Y)] = \sum_{i, j \geq 1} g(x_i, y_j) p(X = x_i, Y = y_j)$$

**Proposició 3.1.9.**  $X, Y$  v.a. discretes. Són independents si i només si,  $\forall x \in \text{Im}(X)$  i  $\forall y \in \text{Im}(Y)$ ,

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

**Definició 3.1.10.** Sigui  $(X, Y): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  un vector aleatori. Direm que és discret si  $\text{Im}((X, Y))$  és numerable.

**Observació 3.1.11.**  $(X, Y)$  vector aleatori és discret  $\iff X$  i  $Y$  són discretes.

**Definició 3.1.12.** Sigui  $(X, Y)$  vector aleatori discret,  $\forall (X, Y) \in \text{Im}((X, Y))$  definim

$$P_{(X, Y)}(x, y) = P(X = x)P(Y = y)$$

que si  $X, Y$  són independents és  $P(X = x, Y = y)$ .

**Lema 3.1.13.** Si  $X, Y$  són v.a. discretes independents, amb  $\mathbb{E}[|X|], \mathbb{E}[|Y|] < +\infty$ ,

$$\mathbb{E}[xy] = \mathbb{E}[x] \mathbb{E}[y]$$

*Demostració.*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[xy] &= \int_{\mathbb{R}} x \, dP_{XY} \\ &= \sum_{u \in \text{Im}(X, Y)} u P(XY = u) \\ &= \sum_{x \in \text{Im}(X) \setminus \{0\}} \left( \sum_{\frac{u}{x} \in \text{Im}(Y)} u P\left(X = x, Y = \frac{u}{x}\right) \right) \end{aligned}$$

□

## 3.2 Funció generadora de probabilitat

D'aquí en endavant, prendrem  $X$  variable aleatòria discreta amb  $\text{Im}(X) \subseteq \mathbb{N}_{\geq 0}$ .

**Definició 3.2.1.** La funció generadora de probabilitat de  $X$  és la sèrie formal de potències

$$G_X(z) = \sum_{n \geq 0} P(X = n) z^n.$$

Podem pensar-la com  $\mathbb{E}[z^X]$ .

**Proposició 3.2.2.**  $G_X(z)$  satisfà les següents propietats:

- i)  $G_X(z)$  és una funció holomorfa al voltant de  $z = 0$  amb radi de convergència major o igual a 1.



ii)  $G_X(0) = P(X = 0)$  i  $G_X(1) = 1$ .

iii)  $\left. \frac{d^k G_X(z)}{dz^k} \right|_{z=1} = \mathbb{E} [X(X-1) \dots (X-k+1)] = \mathbb{E} [(X)_k]$ .

*Demostració.*

i) Si  $\rho \in \mathbb{C}$ ,  $|\rho| < 1$ , aleshores:

$$0 \leq |G_X(\rho)| = \left| \sum_{n \geq 0} P(X = n) \rho^n \right| \leq \sum_{n \geq 0} P(X = n) |\rho|^n$$

Que, quan  $|\rho| \leq 1$ , és menor o igual a

$$\sum_{n \geq 0} P(X = n) = 1.$$

Per tant  $G_X(\rho)$  és analítica (es pot expressar com una sèrie de potències convergent) a  $B_1(0)$ , i per tant, com s'ha vist a variable complexa,  $G_x(\rho)$  és holomorfa a  $B_1(0)$  (per tant infinitament derivable en sentit complex).

ii) És directe.

iii) Si derivem terme a terme obtenim

$$\frac{d^k G_X(z)}{dz^k} = \frac{d^k \sum_{n \geq 0} P(X = n) z^n}{dz^k} = \sum_{n \geq 0} n(n-1) \dots (n-k+1) (P(X = n)) z^{n-k}.$$

Que, avaluat en  $z = 1$ , és

$$\sum_{n \geq 0} n(n-1) \dots (n-k+1) (P(X = n)) = \mathbb{E} [(X)_n].$$

□

**Exemple 3.2.3.** Definim  $X$  com una variable aleatòria discreta tal que  $P(X = 0) = 0$  i  $P(X = n) = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2}$ . Aleshores

$$G_X(z) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} z^n,$$

que té radi de convergència igual a 1, i

$$G_X(1) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = 1.$$

Finalment, en calculem la seva esperança,

$$\mathbb{E}[X] = \left. \frac{dG_X(z)}{dz} \right|_{z=1} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = \infty.$$

**Observació 3.2.4.**  $G_X(z)$  codifica totes les probabilitats  $P(X = n)$  i per tant coneixent  $G_X(z)$  coneixem  $X$ .

L'aplicació més útil de les funcions generadores de probabilitat és que ens permet trobar convolucions discretes de variables aleatòries.

**Observació 3.2.5.** Siguin  $X, Y$  variables aleatòries discretes, amb  $\text{Im}(X) = \text{Im}(Y) = \mathbb{N}_{\geq 0}$ . Aleshores

$$P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n P(X + Y = n, X = k) = \sum_{k=0}^n P(Y = n - k, X = k).$$

**Proposició 3.2.6.** Si  $X, Y$  són variables aleatòries discretes independents amb  $\text{Im}(X) = \text{Im}(Y) = \mathbb{N}_{\geq 0}$  aleshores:

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z)$$

*Demostració.*

$$G_X(z)G_Y(z) = \sum_{i \geq 0} P(X = i)z^i \sum_{j \geq 0} P(Y = j)z^j = \sum_{i,j \geq 0} P(X = i)P(Y = j)z^{(i+j)}$$

I, com  $X, Y$  són independents, podem unir el producte i obtenim

$$\begin{aligned} \sum_{i,j \geq 0} P(X = i, Y = j)z^{(i+j)} &= \sum_{n \geq 0} \sum_{i=0}^n P(X = i, Y = n - i)z^n = \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{i=0}^n P(X = i, X + Y = n)z^n = \sum_{n \geq 0} \sum_{i=0}^n P(X = i | X + Y = n)P(X + Y = n)z^n = \\ &= \sum_{n \geq 0} P(X + Y = n)z^n \sum_{i=0}^n P(X = i | X + Y = n). \end{aligned}$$

Si observem que la suma interior val 1 perquè està sumant la probabilitat de tots esdeveniments possibles, ens queda

$$\sum_{n \geq 0} P(X + Y = n)z^n = G_{X+Y}(z).$$

□

**Observació 3.2.7.** Això és equivalent a que si  $X, Y$  són variables aleatòries discretes independents amb  $\text{Im}(X) = \text{Im}(Y) = \mathbb{N}_{\geq 0}$  aleshores

$$\mathbb{E}[z^X] \mathbb{E}[z^Y] = \mathbb{E}[z^{X+Y}].$$

**Observació 3.2.8.** En general, si  $X_1, \dots, X_n$  són variables aleatòries discretes independents amb  $\text{Im } X_i = \mathbb{N}_{\geq 0}$ :

$$G_{X_1, \dots, X_n}(z) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(z)$$

# Índex alfabètic

- conjunt
  - d'esdeveniments, [1](#)
  - de successos, [1](#)
- covariància, [17](#)
- desviació típica, [14](#)
- distribució
  - marginal, [16](#)
- esdeveniments independents, [5](#)
- espai
  - de probabilitat, [1](#)
  - producte, [5](#)
  - mostral, [1](#)
- esperança d'una variable aleatòria, [13](#)
- funció
  - de distribució de probabilitat, [16](#), [11](#)
  - de probabilitat, [1](#)
- generadora de probabilitat, [20](#)
- límit
  - inferior d'esdeveniments, [6](#)
  - superior d'esdeveniments, [6](#)
- moment
  - d'ordre  $r$ , [14](#)
  - factorial d'ordre  $r$ , [14](#)
- probabilitat condicionada, [4](#)
- variància, [14](#)
- variable
  - aleatòria, [9](#)
  - discreta, [19](#)
  - multidimensional, [16](#)
- vector de variables aleatòries, [16](#)
  - discret, [20](#)