

---

# CÁLCULO INTEGRAL

---

APUNTES BASADOS EN EL CURSO IMPARTIDO POR XAVIER GRÀCIA

**ApuntsFME**

BARCELONA, ENERO 2018

Autor principal: Ernesto Lanchares.

Revisores: Òscar Benedito, Jordi Castellví, Iñaki Garrido, Miquel Ortega, Èric Sierra.

La elaboración de este documento no habría sido posible sin los apuntes de Oriol Navarro del curso de Cálculo Integral, impartido por Xavier Gràcia en la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Última modificación: 2 de octubre de 2018.

This work is licensed under a [Creative Commons](#) “[Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International](#)” license.



# Contenidos

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Series Numéricas e Integrales Impropias</b>                                   | <b>1</b>  |
| 1.1. Series numéricas   | 1         |
| 1.2. Series de números positivos  | 3         |
| 1.3. Series absoluta y condicionalmente convergentes                                | 8         |
| Teorema de Riemman para series condicionalmente convergentes                        | 10        |
| 1.4. Aplicación: Series de potencias  | 11        |
| Teorema de Cauchy-Hadamard  | 11        |
| 1.4.1. Series de números complejos  | 14        |
| 1.5. Integrales impropias: definición y ejemplos                                    | 15        |
| 1.6. Criterios de convergencia de integrales impropias                              | 17        |
| <b>2. Integración multiple</b>  | <b>21</b> |
| 2.1. Integral de Riemann sobre rectángulos compactos                                | 21        |
| 2.2. Conjuntos de medida nula   | 24        |
| 2.3. El Teorema de Lebesgue   | 27        |
| Teorema de Lebesgue   | 30        |
| 2.4. Integral de Riemann sobre conjuntos más generales                              | 31        |
| 2.5. Propiedades de la integral   | 33        |
| Teorema del valor medio   | 33        |
| Teorema del valor medio (alternativo)   | 33        |
| 2.6. El teorema de Fubini   | 34        |
| Teorema de Fubini   | 35        |
| 2.7. Teorema del cambio de variable   | 38        |
| Teorema del cambio de variable  | 38        |
| 2.8. Integrales impropias   | 46        |
| <b>3. Integrales de línea y de superficie</b>                                       | <b>49</b> |
| 3.1. Longitud de una curva  | 49        |
| 3.2. Integrales de línea de funciones escalares                                     | 53        |
| 3.3. Integrales de línea de campos vectoriales                                      | 54        |
| 3.4. integral de superficie de funciones escalares                                  | 56        |
| 3.5. Integrales de superficie en campos vectoriales (en $\mathbb{R}^3$ )            | 58        |
| 3.6. Integración de funciones en una subvariedad $m$ -dimensional de $\mathbb{R}^n$ | 60        |
| <b>4. Teoremas integrales del análisis vectorial</b>                                | <b>61</b> |
| 4.1. Operadores diferenciales canónicos en $\mathbb{R}^3$                           | 61        |
| 4.2. Fórmulas integrales de la teoría de campos                                     | 64        |
| Teorema fundamental del cálculo, o del gradiente                                    | 64        |

|   |           |
|---|-----------|
| Teorema de Kelvin-Stokes, o del rotacional . . . . .                        | 64        |
| Teorema de Gauss-Ostrogradski, o de la divergencia . . . . .                | 65        |
| 4.3. Potenciales . . . . .  | 66        |
| 4.4. Campos en el plano: Teorema de Green y potenciales . . . . .           | 70        |
| Teorema de Green . . . . .  | 70        |
| 4.5. Operadores diferenciales en otros sistemas de coordenadas . . . . .    | 71        |
| <b>5. Integración de formas diferenciales y teorema de Stokes</b>           | <b>73</b> |
| 5.1. Formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$ . . . . .                       | 73        |
| 5.2. La diferencial exterior en $\mathbb{R}^n$ . . . . .                    | 74        |
| Lema de Poincaré . . . . .  | 76        |
| 5.3. Pullback de formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$ . . . . .           | 77        |
| 5.4. Integral de formas diferenciales . . . . .                             | 78        |
| 5.5. Subvariedades de $\mathbb{R}^n$ . . . . .                              | 79        |
| 5.6. Formas diferenciales en una variedad . . . . .                         | 79        |
| 5.7. Integración de formas diferenciales en variedades orientadas . . . . . | 80        |
| 5.8. Variedades con borde y teorema de Stokes . . . . .                     | 81        |
| Teorema de Stokes . . . . .   | 82        |
| <b>Índice alfabético</b>  | <b>83</b> |

# Tema 1

## Series Numéricas e Integrales Impropias

### 1.1. Series numéricas

**Definición 1.1.1.** Una serie de números reales es una pareja de sucesiones de números reales  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $(s_n)_{n \geq 0}$ , relacionadas por

$$s_n = \sum_{i=0}^n a_i.$$

Denominaremos término  $n$ -ésimo de la serie al elemento  $a_n$  y llamaremos suma parcial  $n$ -ésima de la serie a  $s_n$ .

**Observación 1.1.2.** Las sumas parciales definen los términos

$$a_0 = s_0, \quad a_n = s_n - s_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

**Definición 1.1.3.** Llamaremos suma de una serie a

$$s = \lim s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k,$$

suponiendo que existe.

**Observación 1.1.4.** Denotaremos  $s = \sum_{n \geq 0} a_n = \sum_{n \geq 0}^{\infty} a_n$ . Esta misma notación nos servirá para representar la serie.

**Definición 1.1.5.** Diremos que una serie  $\sum a_n$  es convergente o divergente si lo es la sucesión de sumas parciales,

- Convergente:  $\lim s_n \in \mathbb{R}$
- Divergente:  $\lim s_n = +\infty$  o  $\lim s_n = -\infty$
- Oscilante:  $\nexists \lim s_n$ .

**Observación 1.1.6.** Una serie no tiene por qué comenzar por el índice 0, y por tanto, podemos considerar series con términos  $a_n$  donde  $n \geq n_0$ . En tal caso, las sumas parciales son  $s_n = \sum_{k=n_0}^n a_k$ , y la suma (si existe)  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^n a_k$ .

**Definición 1.1.7.** Sea  $r \in \mathbb{R}$ . Llamaremos serie geométrica de razón  $r$  a la serie

$$\sum_{n \geq 0} r^n.$$

**Proposición 1.1.8.** La serie geométrica es convergente si y solo si  $|r| < 1$ , en tal caso la suma es

$$\sum_{n \geq 0} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

*Demostración.* Primero, calculamos el término  $n$ -ésimo

$$s_n = 1 + r + \cdots + r^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } r = 1 \\ \frac{r^{n+1}-1}{r-1} & \text{si } r \neq 1 \end{cases}$$

- Si  $r = 1$ ,  $\lim s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty$ .
- Si  $|r| > 1$ ,  $\lim s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^{n+1}-1}{r-1} = +\infty$ .
- Si  $|r| < 1$ ,  $\lim s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^{n+1}-1}{r-1} = \frac{-1}{r-1}$ .
- Si  $r = -1$ ,  $s_n = 0$  si  $n$  par y  $s_n = 1$  si  $n$  impar. Por lo tanto, la serie es oscilante.

□

**Proposición 1.1.9.** Si  $\sum a_n$  es convergente, entonces  $\lim a_n = 0$ .

*Demostración.* Sabemos que  $a_n = s_n - s_{n-1}$ , por lo tanto  $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1})$ , como  $\lim s_n$  existe (y por lo tanto también  $\lim s_{n-1}$ )

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0.$$

□

**Proposición 1.1.10.** *Criterio de Cauchy para series.* La serie  $\sum a_n$  es convergente si  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$m, n \geq n_0 \implies |s_m - s_n| = |a_m + a_{m-1} + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

**Proposición 1.1.11.** *Linealidad.* Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y sean  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  series convergentes. Entonces  $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$  también lo es y  $\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$ .

**Proposición 1.1.12.** Sean dos sucesiones  $(a_n)$  y  $(b_n)$ , iguales salvo en número finito de términos, entonces las series  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  tienen la misma convergencia.

*Demostración.* Sea  $d_n = b_n - a_n$ , que vale 0 salvo en número finito de términos

- Si  $\sum a_n$  converge,  $\sum b_n = \sum a_n + \overbrace{\sum d_n}^{\text{Suma finita}} \implies \sum b_n$  converge.
- Si  $\sum a_n$  diverge,  $\sum b_n = \sum a_n + \sum d_n \implies \sum b_n$  diverge.
- Si  $\sum a_n$  oscila,  $\sum b_n = \sum a_n + \sum d_n \implies \sum b_n$  oscila.

□

**Proposición 1.1.13.** *Asociatividad.* Sea  $\sum a_n$  una serie y  $(n_k)_{k \geq 0}$  una sucesión estrictamente creciente de números naturales, definimos

$$b_0 = a_0 + \cdots + a_{n_0}, \quad b_k = a_{(n_{k-1}+1)} + \cdots + a_{n_k}.$$

Si existe la suma de  $\sum a_n$ , entonces también existe la suma de  $\sum b_k$  y son iguales.

*Demostración.* Sea  $A_n = \sum_{i=0}^n a_i$  y  $B_k = \sum_{i=0}^k b_i$ , por la definición anterior se tiene que  $B_k = A_{n_k}$  y por lo tanto  $(B_k)$  es una sucesión parcial de  $(A_n)$ , lo cual implica que si  $(A_n)$  converge,  $(B_k)$  también y lo hace al mismo número. □

## 1.2. Series de números positivos

**Proposición 1.2.1.** Si una serie  $\sum a_n$  es de *términos positivos* ( $a_n \geq 0$ ) entonces la sucesión  $(s_n)$  de sumas parciales es *creciente*, y por tanto, siempre tiene límite:

$$\sum a_n = \lim s_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n.$$

Este puede ser finito (si la sucesión de sumas parciales es acotada) o infinito (en caso contrario).

**Proposición 1.2.2.** *Criterio de comparación directa.* Sean  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  series de términos positivos. Si  $\exists n_0$  tal que  $a_n \leq b_n$  ( $\forall n \geq n_0$ ), entonces

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n.$$

Por tanto, la convergencia de  $\sum b_n$  implica la de  $\sum a_n$  y la divergencia de  $\sum a_n$  implica la de  $\sum b_n$ .

*Demostración.* Por el enunciado

$$\sum_{i=n_0}^n a_i \leq \sum_{k=n_0}^n b_k \implies \sum_{i=n_0}^{\infty} a_i \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k.$$

Los términos  $a_0, \dots, a_{n_0}$  se pueden añadir al sumatorio y no alteran la convergencia. □

**Definición 1.2.3.** Llamamos serie armónica a la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}.$$

**Definición 1.2.4.** Sea  $p \in \mathbb{R}$ . Llamaremos serie armónica generalizada o serie de Riemman de parámetro  $p$  a la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}.$$

**Proposición 1.2.5.** La serie de Riemman es convergente si y solo si  $p > 1$ .

*Demostración.* Distinguiremos entre varios casos:

- Si  $p = 1$ . Suponemos que la serie es convergente con suma  $s$

$$s = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots > \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = s,$$

contradicción ya que  $s > s$ .

- Si  $p < 1$ .

$$n^p \leq n \implies \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$$

y por comparación directa con la serie armónica, diverge.

- Si  $p > 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p} &= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \cdots \leq \\ &\leq 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{2(p-1)}} + \cdots \end{aligned}$$

que es una serie geométrica de razón  $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$  y por lo tanto convergente.

□

**Proposición 1.2.6.** *Criterio de comparación en el límite.* Sean  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  series de términos estrictamente positivos. Suponemos que existe el límite

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = l \in [0, +\infty].$$

- Si  $l < +\infty$ :  $\sum b_n$  converge  $\implies \sum a_n$  converge y  $\sum a_n$  diverge  $\implies \sum b_n$  diverge.
- Si  $l > 0$ :  $\sum a_n$  converge  $\implies \sum b_n$  converge y si  $\sum b_n$  diverge  $\implies \sum a_n$  diverge.
- Si  $0 < l < +\infty$ : Entonces las dos series tienen el mismo carácter.

*Demostración.* Proharemos cada caso de manera individual

- Caso  $l < +\infty$ . Fijado  $\varepsilon > 0$ , por definición de límite, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon \implies a_n < (l + \varepsilon)b_n$$

y el resultado queda provado por comparación directa.

- Caso  $l > 0$ . Se deduce del primer caso, considerando

$$\lim \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{l}$$

- Caso  $0 < l < +\infty$ . Se trata de una conjunción de los casos anteriores

□



**Lema 1.2.7.** Sea  $\sum a_n$  una serie de términos positivos.

- Suponemos que hay  $n_0 \in \mathbb{N}$  y  $r < 1$  tal que

$$n \geq n_0 \implies a_n^{1/n} < r,$$

entonces  $\sum a_n < +\infty$ .

- Suponemos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies a_n^{1/n} \geq 1,$$

entonces  $\sum a_n = +\infty$ .

*Demostración.* Proharemos cada caso por separado

- $a_n^{1/n} < r \implies a_n < r^n$  que es la serie geométrica de razón  $r < 1$ , de modo que por comparación directa el resultado queda demostrado.
- $a_n^{1/n} \geq 1 \implies a_n \geq 1$  y por lo tanto diverge.

□

**Proposición 1.2.8.** *Criterio de la raíz de Cauchy.* Sea  $\sum a_n$  una serie de términos positivos. Suponemos que existe  $\lim a_n^{1/n} = \alpha$ , entonces, si  $\alpha > 1$  la serie diverge y si  $\alpha < 1$  la serie converge.

*Demostración.* Demostraremos cada caso por separado

- Caso  $\alpha < 1$ . Sea  $\alpha < r < 1$ . Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies a_n^{1/n} \leq r.$$

El resultado queda provado aplicando el lema anterior.

- Caso  $\alpha > 1$ . Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies a_n^{1/n} \geq 1,$$

y aplicamos el lema anterior.

□

**Lema 1.2.9.** Sea  $\sum a_n$  una serie de términos estrictamente positivos.

- Suponemos que hay  $n_0 \in \mathbb{N}$  y  $r < 1$  tal que

$$n \geq n_0 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r,$$

entonces  $\sum a_n < +\infty$ .

- Suponemos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,$$

entonces  $\sum a_n = +\infty$ .

*Demostración.* Separaremos los casos.

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$ :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \implies a_{n+1} \leq r a_n \implies a_n \leq C r^n \quad (n \geq n_0)$$

donde  $C = \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}}$  y, por el criterio de comparación directa,  $\sum a_n$  converge.

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \implies a_{n+1} \geq a_n \implies a_n \text{ es creciente} \implies \sum a_n \text{ diverge.}$$

□

**Proposición 1.2.10.** *Criterio del cociente de Alembert.* Sea  $\sum a_n$  una serie de términos estrictamente positivos. Suponemos que existe  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ , entonces

- Si  $\alpha > 1$  la serie diverge.
- Si  $\alpha < 1$  la serie converge.

*Demostración.* Separamos los dos casos

- Si  $\alpha < 1$ . Sea  $\alpha < r < 1$  entonces  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$$

y aplicamos el lema anterior.

- Si  $\alpha > 1$ . Entonces  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

y aplicamos el lema anterior.

□

**Ejemplo 1.2.11.** Estudiar la convergencia de

- $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ .  $n!$  crece más que  $n^2$  ( $n! > n^2$ )  $\implies \frac{1}{n!} < \frac{1}{n^2}$  que es la serie de Riemman de parámetro 2 (convergente). Por tanto,  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$  es convergente.
- $\sum \frac{x^n}{n!}$  para  $x > 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1) n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1.$$

Por lo tanto, aplicando el criterio del cociente de Alembert, la serie converge.

$$\blacksquare \sum \alpha^{n+\sqrt{n}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{\frac{n+\sqrt{n}}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = \alpha.$$

Por lo tanto, por el criterio de la raíz,  $\begin{cases} \alpha < 1 \text{ convergente} \\ \alpha > 1 \text{ divergente} \end{cases}$ . Si  $\alpha = 1$ , la serie es

$$\sum 1^{n+\sqrt{n}} = \sum 1 \text{ que es divergente.}$$

**Observación 1.2.12.** Los criterios anteriores no deciden cuando  $\alpha = 1$ . Como  $a_{n+1}/a_n \rightarrow \alpha$  implica que  $a_n^{1/n} \rightarrow \alpha$ , si el criterio del cociente no decide, entonces el de la raíz tampoco.

**Proposición 1.2.13.** *Criterio de Raabe.* Sea  $\sum a_n$  una serie de términos estrictamente positivos tal que existe el límite

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right).$$

Si  $L > 1$ , la serie  $\sum a_n$  es convergente. Si  $L < 1$ , la serie  $\sum a_n$  es divergente.

**Proposición 1.2.14.** *Criterio de condensación.* Sea  $(a_n)$  una sucesión de números positivos decreciente, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge}$$

**Proposición 1.2.15.** *Criterio logarítmico.* Sea  $\sum a_n$  una serie de términos positivos tal que existe el límite

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln(a_n)}{\ln(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\ln(n)}.$$

Si  $L > 1$ , la serie  $\sum a_n$  es convergente. Si  $L < 1$ , la serie  $\sum a_n$  es divergente.

**Proposición 1.2.16.** *Criterio de la integral.* Sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  y  $f: [n_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  positiva, localmente integrable y decreciente. Consideramos  $a_n = f(n)$  ( $n \geq n_0$ ), entonces

i) La serie  $\sum a_n$  y la integral impropia  $\int_{n_0}^{+\infty} f$  tienen el mismo carácter.

ii) Para  $N \geq n_0$

$$\sum_{n \geq n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{N-1} a_n + \int_N^{+\infty} f + \varepsilon_N$$

donde  $\varepsilon_N \in [0, a_N]$ .

**Ejemplo 1.2.17.**

■  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  tiene el mismo carácter que  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$  (convergente  $\iff \alpha > 1$ )

■ Calcular  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1,01}}$  con error  $< 10^{-3}$ .

Necesitamos que

$$\frac{1}{N^{1,01}} < 10^{-3} \implies N > 1000^{1/1,01} \implies N \geq 934$$

Calculamos ahora

$$\sum_{n=1}^{933} \frac{1}{n^{1,01}} + \int_{934}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1,01}} \simeq 100,577 \simeq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1,01}}$$

**Proposición 1.2.18.** Sea  $\sum a_n$  una serie de términos positivos. Dada cualquier permutación  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , la serie  $\sum a_{\sigma(n)}$  tiene la misma suma que  $\sum a_n$ .

*Demostración.* Sea  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$  y  $B_n = \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)}$  y sean  $A = \lim A_n$  y  $B = \lim B_n$ . Sea  $m \in \mathbb{N}$ , entonces  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\{0, 1, \dots, m\} \leq \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n)\},$$

ya que  $\sigma$  es suprayectiva. Entonces  $a_0 + a_1 + \dots + a_m \leq a_{\sigma(0)} + a_{\sigma(1)} + \dots + a_{\sigma(n)}$  por lo tanto,  $A_m \leq B_n \implies A \leq B$ . Haciendo el mismo razonamiento para  $\sigma^{-1}$  (biyectiva), obtenemos que  $B \leq A$ . Y por lo tanto,  $A = \sum a_n = \sum a_{\sigma(n)} = B$ .  $\square$

### 1.3. Series absoluta y condicionalmente convergentes

**Definición 1.3.1.** Diremos que una serie  $\sum a_n$  es absolutamente convergente, si la serie  $\sum |a_n|$  es convergente.

**Proposición 1.3.2.** Toda serie absolutamente convergente es convergente.

*Demostración.* Aplicamos criterio de Cauchy para series a  $\sum |a_n|$ :  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$m > n \geq n_0 \implies \|a_{n+1}| + \dots + |a_m|\| < \varepsilon. \implies |a_{n+1}| + \dots + |a_m| < \varepsilon.$$

De donde se deduce que

$$|a_{n+1} + \dots + a_m| < |a_{n+1}| + \dots + |a_m| < \varepsilon,$$

por la desigualdad triangular. Y por lo tanto,  $\sum a_n$  cumple el criterio de Cauchy.  $\square$

**Definición 1.3.3.** Una serie convergente, que no es absolutamente convergente, se dice que es condicionalmente convergente.

**Ejemplo 1.3.4.** La serie armónica alternada  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  es condicionalmente convergente.

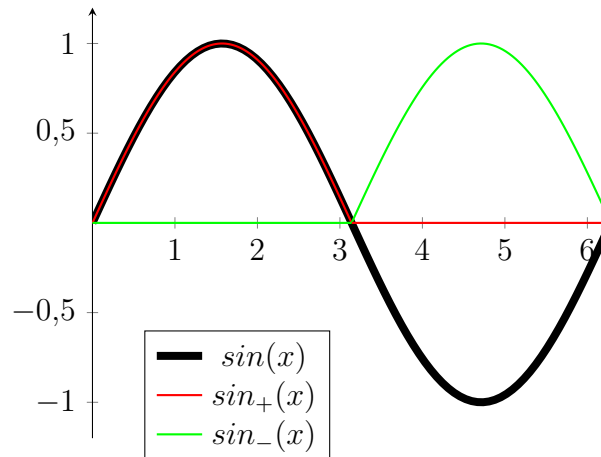
**Proposición 1.3.5.** Si  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  son absolutamente convergentes, y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces  $\sum (a_n + b_n)$  y  $\sum \lambda a_n$  son absolutamente convergentes.

**Definición 1.3.6.** Sea  $a \in \mathbb{R}$ . Definimos  $a_+$  (la parte positiva de  $a$ ) como  $a_+ = \max(a, 0)$ , asimismo, definimos la parte negativa de  $a$  como  $a_- = \max(-a, 0)$ .

**Observación 1.3.7.** Dado un  $a$ , podemos expresar  $a = a_+ - a_-$  y  $|a| = a_+ + a_-$ .

**Observación 1.3.8.** Dada  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos hacer exactamente lo mismo, ( $f = f_+ - f_-$ ,  $|f| = f_+ + f_-$ ).

**Ejemplo 1.3.9.**



**Lema 1.3.10.** Sea  $(a_n)$  una sucesión de números reales. Sean  $(p_n)$  y  $(q_n)$  sus partes positiva y negativa (respectivamente),

- i)  $\sum a_n$  converge absolutamente  $\iff \sum p_n, \sum q_n$  son convergentes.
- ii) Si  $\sum a_n$  es condicionalmente convergente, entonces  $\sum p_n$  y  $\sum q_n$  son divergentes.

*Demostración.*

- i) Se tiene que

$$\sum_{k=0}^n |a_k| = \sum_{k=0}^n p_k + \sum_{k=0}^n q_k.$$

Si  $\sum |a_n|$  converge  $\implies \sum p_n$  y  $\sum q_n$  tienen el mismo carácter, como ambas son series de términos positivos,  $\sum p_n$  y  $\sum q_n$  convergen.

El recíproco es directo por linealidad.

- ii) Se tiene que

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n p_k - \sum_{k=0}^n q_k.$$

$\sum p_n$  y  $\sum q_n$  no pueden ser las dos convergentes por i) y tampoco puede ser que solo una de las dos sea divergente, porque entonces  $\sum a_n$  divergería.

□

**Proposición 1.3.11.** Si una serie es absolutamente convergente, entonces todas sus series reordenadas son convergentes con la misma suma. Es decir,  $\forall \sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  permutación,  $\sum a_n = \sum a_{\sigma(n)}$ .

*Demostración.* Primero, escribimos

$$a_n = p_n - q_n \xrightarrow{a_n \text{ abs. conv.}} \sum a_n = \sum p_n - \sum q_n.$$

Consideramos ahora  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  permutación, entonces,  $\sum a_{\sigma(n)}$  también es absolutamente convergente ( $\sum |a_{\sigma(n)}| = \sum |a_n|$  reordenando términos positivos). Ahora tenemos que

$$\sum a_{\sigma(n)} = \sum p_{\sigma(n)} - \sum q_{\sigma(n)} \stackrel{\text{términos positivos}}{=} \sum p_n - \sum q_n = \sum a_n.$$

□

**Teorema de Riemman para series condicionalmente convergentes (1.3.12)**

Sea  $\sum a_n$  una serie condicionalmente convergente.  $\forall s \in [-\infty, +\infty]$  existe una reordenación de la serie  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  (permutación) tal que  $\sum a_{\sigma(n)} = s$ .

**Definición 1.3.13.** Una serie alternada es una serie donde los términos cambian de signo alternativamente. Es decir, una serie de la forma  $\sum (-1)^n a_n$  donde  $a_n \geq 0$ .

**Proposición 1.3.14. Criterio de Leibnitz.** Si  $(a_n)$  es una sucesión descendiente de términos positivos con  $\lim a_n = 0$ , entonces  $\sum (-1)^n a_n$  es convergente. Además, si  $S_N$  es la  $N$ -ésima suma parcial de  $\sum (-1)^n a_n$  y  $S$  es su suma,  $|S - S_n| \leq a_{n+1}$ .

*Demostración.* Consideramos la serie  $(S_{2N})$ ,

$$S_{2N+2} = S_{2N} + \overbrace{(a_{2N+1} + a_{2N+2})}^{\leq 0} \leq S_{2N}.$$

Por lo tanto,  $(S_{2N})$  es descendiente, acotada inferiormente por  $a_0 - a_1$ . Consideramos ahora  $(S_{2N+1})$ ,

$$S_{2N+3} = S_{2N+1} + \overbrace{(a_{2N+2} + a_{2N+3})}^{\geq 0} \geq S_{2N+1}.$$

Con lo cual  $(S_{2N+1})$  es creciente. Además se tiene que

$$a_0 - a_1 = S_1 \leq S_{2N+1} \leq S_{2N} \leq S_0 = a_0. \quad (1.1)$$

Con lo cual deducimos que tanto  $(S_{2N})$  como  $(S_{2N+1})$  son convergentes (monótonas y acotadas). Por último, tenemos que

$$\lim(S_{2N} - S_{2N-1}) = \lim a_{2N} = 0 \implies \left. \begin{array}{l} \lim S_{2N} = S \\ \lim S_{2N+1} = S \end{array} \right\} \implies \lim S_N = S.$$

Para acabar, sabemos por (1.1) que  $S$  está dentro del intervalo de extremos  $S_N$  y  $S_{N+1}$  de longitud  $a_{N+1}$ , por lo tanto  $|S - S_N| \leq a_{N+1}$ .  $\square$

**Ejemplo 1.3.15.** La serie armónica alternada,  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  es convergente por el criterio de Leibnitz.

Hay otros criterios de convergencia para series cualesquiera, entre los cuales destaca el criterio de Dirichlet.

**Proposición 1.3.16. Criterio de Dirichlet.** Sean  $(a_n)$  y  $(b_n)$  dos sucesiones numéricas. Suponemos que

- i) las sumas parciales  $s_n$  de la serie  $\sum a_n$  están acotadas y
- ii) la sucesión  $(b_n)$  es positiva y decreciente con límite 0.

Entonces la serie  $\sum a_n b_n$  es convergente.

## 1.4. Aplicación: Series de potencias

**Definición 1.4.1.** Una serie de potencias (centrada en 0) es una expresión

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n,$$

donde  $a_n$  son los coeficientes de la serie. A menudo, notaremos simplemente  $\sum a_n x^n$ .

**Lema 1.4.2.** El conjunto de los  $r \geq 0$  tales que  $\sum |a_n| r^n$  converge es un intervalo que contiene el 0.

*Demostración.* Si  $0 \leq s \leq r$  y  $\sum |a_n| r^n$  converge, entonces  $\sum |a_n| s^n$  converge también por comparación directa ( $|a_n| s^n \leq |a_n| r^n$ ) y  $\sum |a_n| 0^n$  converge a 0 trivialmente.  $\square$

**Definición 1.4.3.** Sea  $\sum a_n x^n$  una serie de potencias y sea  $I$  el intervalo de los  $r \geq 0$  tales que  $\sum |a_n| r^n$  converge. Llamamos radio de convergencia de la serie a  $R$  el extremo superior del intervalo  $I$ . Denominamos dominio de convergencia de la serie al intervalo  $(-R, R)$ .

**Observación 1.4.4.** La serie puede converger en los puntos frontera del dominio de convergencia.

**Observación 1.4.5.** Los casos extremos corresponden a  $R = 0$  (la serie solo converge para  $x = 0$ ) y  $R = +\infty$  (la serie converge para todo  $x$ ).

**Teorema de Cauchy-Hadamard (1.4.6)**

Sea  $\sum a_n x^n$  una serie de potencias. Su radio de convergencia  $R$  viene dado por

$$\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n}.$$

La serie de potencias es absolutamente convergente si  $|x| < R$  y es divergente si  $|x| > R$ .

**Observación 1.4.7.** A priori no se puede afirmar nada cuando  $|x| = R$ .

*Demostración.* Separaremos la demostración en varios casos

- Caso  $0 < R < +\infty$ . Sea  $0 < |x| < R$ . Existe  $C < 1$  tal que

$$|x| < CR \implies \frac{1}{R} < \frac{C}{|x|}.$$

Por lo tanto, si  $n$  es suficientemente grande

$$|a_n|^{1/n} \leq \frac{C}{|x|} \implies |a_n x^n| \leq C^n.$$

Como  $C^n$  es la serie geométrica de razón  $C < 1$ , la serie converge.

Sea ahora  $|x| > R$ , tenemos que  $\frac{1}{R} > \frac{1}{|x|}$ . Hay infinitos  $n$  tal que

$$|a_n|^{1/n} > \frac{1}{|x|} \implies |a_n x^n| > 1.$$

Por lo tanto  $a_n x^n$  no tiende a 0 y por lo tanto la serie no converge.

- Caso  $R = +\infty$ . Entonces  $\limsup |a_n|^{1/n} = 0$ . Por lo tanto, para  $n$  suficientemente grande  $\exists C < 1$  tal que  $|a_n|^{1/n} < \frac{C}{|x|} \implies |a_n x^n| < C^n$  y por lo tanto la serie converge.
- Caso  $R = 0$ . Entonces  $\forall x$  hay infinitos  $n$  tales que  $|a_n|^{1/n} > \frac{1}{|x|} \implies |a_n x^n| > 1 \neq 0$  y por lo tanto, la serie diverge.

□

**Observación 1.4.8.** El radio de convergencia también se puede calcular con las expresiones

$$\frac{1}{R} = \lim |a_n|^{1/n} \quad \frac{1}{R} = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Suponiendo que los límites existan.

**Ejemplo 1.4.9.**

- $\sum n! x^n$ ,  $\frac{1}{R} = \lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim (n+1) = +\infty \implies R = 0$ .
- $\sum x^n$ ,  $\frac{1}{R} = \lim 1^{1/n} = 1^0 = 1 \implies R = 1$ .
- $\sum \frac{x^n}{n!}$ ,  $\frac{1}{R} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 \implies R = +\infty$ .
- Las series  $\sum_{n \geq 0} x^n$ ,  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$  y  $\sum \frac{x^n}{n^2}$  tienen  $R = 1$ , pero tienen comportamiento distinto en la frontera.

**Definición 1.4.10.** Si una serie de potencias  $\sum a_n x^n$  tiene radio de convergencia  $R > 0$ , define una función

$$f: (-R, R) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \sum a_n x^n$$

**Observación 1.4.11.** Se puede probar que  $f$  es continua, integrable y derivable “término a término”.

**Observación 1.4.12.** La serie derivada término a término tiene radio de convergencia  $R$ , y por lo tanto, la función es de clase  $\mathcal{C}^\infty$ .

*Demostración.* Primero, consideramos la función derivada  $f'(x) = \sum_{n \geq 0} n a_n x^{n-1} = \sum_{k \geq 0} (k+1) a_{k+1} x^k$ , calculamos ahora el radio de convergencia por la definición.

$$\limsup |n+1|^{1/n} |a_{n+1}|^{1/n} = \limsup |n|^{1/n-1} |a_n|^{1/n-1} = \limsup \left( n^{1/n} |a_n|^{1/n} \right)^{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{R},$$

además

$$f^{(k)}(0) = k! a_k \rightarrow f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

□

**Definición 1.4.13.** Una función tal que alrededor de cada punto se puede expresar como una serie de potencias (convergente) se llama analítica.



**Definición 1.4.14.** Sea  $D$  un intervalo abierto tal que  $0 \in D$  y sea  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^\infty$ . Entonces,  $f$  define una serie de potencias

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

que es la serie de Taylor de  $f$  (centrada en 0).

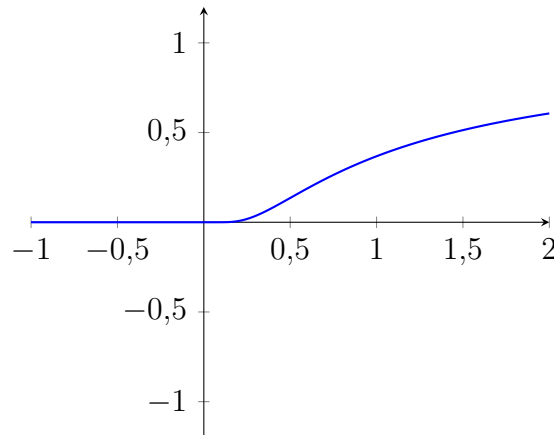
**Proposición 1.4.15.** Sea  $D$  un intervalo abierto tal que  $0 \in D$  y sea  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^\infty$ . Suponemos que la serie de Taylor de  $f$  tiene radio de convergencia  $R > 0$ . Recordando la fórmula de Taylor  $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$  (donde  $P_n$  es el polinomio de Taylor de grado  $\leq n$  de  $f$  en 0, y  $R_n$  el correspondiente residuo de Taylor), por tanto en  $D \cap (-R, R)$ ,

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \iff \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

**Observación 1.4.16.** Hay funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^\infty$  tales que su serie de Taylor (centrada en 0) converge para todo  $x$ , pero no coincide con  $f(x)$  en ningún punto salvo el origen.

Hay funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^\infty$  tales que su serie de Taylor (centrada en 0) tiene radio de convergencia 0.

**Ejemplo 1.4.17.** La función  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$



Su serie de Taylor es nula ( $f^{(k)}(0) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ ). Pero  $f$  no se anula en ningún entorno de 0  $\implies f$  no coincide con la serie de Taylor en ningún entorno de 0.

**Proposición 1.4.18.** Algunas series de Taylor importantes.

- $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
- $\cos(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
- $\sin(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

- $\log(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad |x| < 1.$
- $(1+x)^p = \sum_{n \geq 0} \binom{p}{n} x^n \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} & \text{si } p \in \mathbb{N} \\ |x| < 1 & \text{si } p \notin \mathbb{N} \end{cases}.$
- $(1+x)^{-1} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n \quad |x| < 1.$

**Ejemplo 1.4.19.**

- $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = e^1 = e.$
- $\frac{1}{(1-x)} = \sum_{n \geq 0} x^n \implies \sum_{n \geq 1} nx^{n-1} = \left( \frac{1}{(1-x)} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$

Por lo tanto

$$\sum_{n \geq 1} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

- $f = \arctan(x)$  con  $|x| < 1$  (a partir de  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ )

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{2n} \implies \arctan(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

### 1.4.1. Series de números complejos

**Definición 1.4.20.** La definición de serie, de serie convergente y de serie absolutamente convergente, es la misma si, en vez de considerar números reales, consideramos números complejos.

**Proposición 1.4.21.** Una serie  $\sum c_n$  de números complejos es convergente si y solo si lo son separadamente sus partes real e imaginaria.

**Proposición 1.4.22.** Toda serie  $\sum c_n$  de números complejos absolutamente convergente, es convergente.

**Observación 1.4.23.** El estudio de las series de potencias es completamente análogo. En el caso complejo, si la serie de potencias  $\sum c_n z^n$  tiene radio de convergencia  $R$  ( $\frac{1}{R} = \limsup |c_n|^{1/n}$ ). Entonces, el dominio de convergencia es un disco abierto  $|z| < R$  del plano complejo.

**Observación 1.4.24.** La serie de Taylor de la función exponencial real permite definir la exponencial compleja como

$$e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

**Proposición 1.4.25.** Tomando  $z \in \mathbb{C}$  un imaginario puro, y separando las partes real e imaginaria de las potencias, obtenemos la formula de Euler,

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x).$$

En particular para  $x = \pi$ , se tiene que  $e^{i\pi} + 1 = 0$ .

## 1.5. Integrales impropias: definición y ejemplos

**Definición 1.5.1.** Sea  $D \subset \mathbb{R}$  un intervalo, y  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Diremos que  $f$  es localmente integrable si es integrable para todo intervalo compacto  $K \subset D$ .

**Observación 1.5.2.** Si consideramos por ejemplo,  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $a < b \leq +\infty$ . Entonces,  $f$  es localmente integrable si es integrable en cualquier intervalo  $[a, M]$  donde  $a < M < b$ .

En tal caso, podemos estudiar la integral impropia

$$\int_a^b f := \lim_{M \rightarrow b^-} \int_a^M f.$$

**Observación 1.5.3.** A veces se dice que una integral impropia es

- De primera especie, si el intervalo no es acotado.
- De segunda especie, si la función no es acotada.
- De tercera especie, sin ni la función ni el intervalo son acotados.

**Definición 1.5.4.** Diremos que la integral impropia es convergente si  $\exists \left| \int_a^b f \right| < +\infty$ , y divergente si  $\exists \int_a^b f = \pm\infty$ .

**Observación 1.5.5.** De forma totalmente análoga, podemos considerar la integral impropia de una función  $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  localmente integrable, con  $-\infty \leq a < b$ .

**Definición 1.5.6.** Consideramos una función localmente integrable  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Si tomamos un punto arbitrario  $c$  tal que  $a < c < b$ , podemos descomponer

$$\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f = \lim_{M \rightarrow a^+} \int_M^c f + \lim_{N \rightarrow b^-} \int_c^N f$$

y estudiar las dos integrales impropias. Si las dos son convergentes, una es convergente y la otra divergente o las dos son divergentes con el mismo signo, entonces se define la integral impropia del primer miembro como la suma de las dos del segundo miembro.

**Observación 1.5.7.** Más generalmente, podemos considerar una función localmente integrable definida en un dominio  $D$  que sea unión finita y disjunta de intervalos. Entonces, definimos  $\int_D f$  como la suma de las integrales sobre estos intervalos, suponiendo que sean convergentes.

**Proposición 1.5.8.** Consideramos una función integrable por Riemman,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces

$$\int_b^a f = \lim_{M \rightarrow b^-} \int_a^M f.$$

**Observación 1.5.9.** Así, la notación introducida para las integrales impropias no produce ningún conflicto con la notación habitual definida para integrales “propias”.

**Ejemplo 1.5.10.** Algunos ejemplos de integrales importantes son

- $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ . Es convergente si y solo si  $\alpha > 1$  (y vale  $\frac{1}{\alpha-1}$ ). Y es divergente si  $\alpha \leq 1$ .

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \alpha = 1 & \lim_{M \rightarrow +\infty} [\log x]_1^M = +\infty \\ \alpha \neq 1 & \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^M = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{M^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases} \end{cases}$$

- $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ . Es convergente si y solo si  $\alpha < 1$  (y vale  $\frac{1}{1-\alpha}$ ). Y es divergente si  $\alpha \geq 1$ .

Podemos observar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty,$$

independientemente del valor de  $\alpha$ .

- $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$ . Es convergente si y solo si  $\alpha > 0$  (y vale  $\frac{1}{\alpha}$ ).

### Ejemplo 1.5.11.

- $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{M \rightarrow +\infty} [\arctan x]_0^M = \frac{\pi}{2} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi. \end{aligned}$$

- $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = +\infty.$$

Pero  $[-\frac{1}{x}]_{-1}^1 = -2$ , es decir, que no podemos aplicar la regla de Barrow.

- $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ : No existe

- $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \cos x dx$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} \cos x dx = \left[ \cos \frac{1}{x} \right]_0^1 = \dots \text{ No existe.}$$

**Observación 1.5.12.** Las reglas de cálculo de integrales se aplican a las integrales impropias teniendo en cuenta que hay que aplicar un límite. Explicitamos algunas.

**Proposición 1.5.13.** *Linealidad.* Si  $\int_a^b f$ ,  $\int_a^b g$  son integrales impropias convergentes, también lo es  $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ .

Si  $\int_a^b f$  es convergente y  $\lambda \in \mathbb{R}$   $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$ .

**Proposición 1.5.14.** *Regla de Barrow.* Si  $f$  es continua y  $f = F'$  en  $[a, b)$ , entonces

$$\int_a^b f = \lim_{M \rightarrow b} F(M) - F(a),$$

suponiendo que el límite exista.

**Proposición 1.5.15.** *Integración por partes.* Suponemos que  $f, g$  son funciones de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $[a, b)$ . Entonces

$$\int_a^b f'g = \lim_{t \rightarrow b} [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=t} - \int_a^b g'f,$$

suponiendo que los miembros del segundo término existan.

## 1.6. Criterios de convergencia de integrales impropias

**Proposición 1.6.1.** *Criterio de Cauchy para integrales impropias.* Sea  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una función localmente integrable. La integral impropia  $\int_a^b f$  es convergente si y solo si  $\forall \varepsilon > 0 \exists c_0 \in [a, b)$  tal que

$$c_0 \leq c_1 < c_2 < b \implies \left| \int_{c_1}^{c_2} f \right| < \varepsilon.$$

*Demostración.* Es consecuencia del criterio de Cauchy aplicado a la función

$$F: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f$$

y el límite  $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$  existe si y solo si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $c_0$  tal que

$$a \leq c_0 \leq c_1 < c_2 < b \implies |F(c_2) - F(c_1)| = \left| \int_{c_1}^{c_2} f \right| < \varepsilon.$$

□

**Definición 1.6.2.** Diremos que una integral impropia  $\int_a^b f$  es absolutamente convergente, si la integral impropia  $\int_a^b |f|$  es convergente.

**Proposición 1.6.3.** Si  $\int_a^b f$  es absolutamente convergente, es convergente.

*Demostración.* Aplicamos el criterio de Cauchy a  $\int_a^b |f|$ .  $\forall \varepsilon > 0, \exists c_0 \geq a$  tal que  $c_0 \leq c_1 < c_2 < b \implies \left| \int_{c_1}^{c_2} |f| \right| = \int_{c_1}^{c_2} |f| < \varepsilon$  y utilizando que  $\left| \int_{c_1}^{c_2} f \right| \leq \int_{c_1}^{c_2} |f|$ , tenemos que

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} f \right| \leq \int_{c_1}^{c_2} |f| < \varepsilon.$$

Y por lo tanto,  $\int_a^b f$  también satisface el criterio de Cauchy, y por lo tanto, es convergente.

□

**Definición 1.6.4.** Una integral impropia convergente pero no absolutamente convergente, diremos que es condicionalmente convergente.

**Proposición 1.6.5.** Sea  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  (con  $a < b \leq +\infty$ ) localmente integrable y positiva ( $f \geq 0$ ), entonces, la función

$$F(x) = \int_a^x f$$

es creciente, y por lo tanto, siempre existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow b} F(x) = \sup_{x \geq a} F(x).$$

Si  $F$  es acotada, entonces la integral impropia  $\int_a^b f$  es convergente, en caso contrario, es divergente.

**Proposición 1.6.6.** *Criterio de comparación directa.* Sean  $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  funciones positivas y localmente integrables. Si  $f \leq g$ , entonces

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Por lo tanto, si la segunda converge, la primera también y si la primera diverge, la segunda también.

*Demostración.*

$$f \leq g \stackrel{\text{Cálculo I}}{\implies} \int_a^x f \leq \int_a^x g \implies \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f \leq \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x g \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

□

**Proposición 1.6.7.** *Criterio de comparación en el límite.* Sean  $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  estrictamente positivas y localmente integrables. Suponemos que existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in [0, +\infty].$$

Entonces,

$$\text{i) Si } L < +\infty, \text{ si } \int_a^b g < +\infty \implies \int_a^b f < +\infty \left( \int_a^b f = +\infty \implies \int_a^b g = +\infty \right)$$

$$\text{ii) Si } L > 0, \text{ si } \int_a^b f < +\infty \implies \int_a^b g < +\infty \left( \int_a^b g = +\infty \implies \int_a^b f = +\infty \right)$$

iii) Si  $0 < L < +\infty$ , ambas integrales tienen el mismo carácter.

*Demostración.*

i) Fijada  $\varepsilon > 0$ , existe  $x_0$  con  $a < x_0 < b$  tal que

$$x_0 \leq x < b \implies \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon \implies f(x) < (L + \varepsilon)g(x).$$

Y aplicamos comparación directa.

ii) Consideramos

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{1}{L} < +\infty.$$

Por álgebra de límites. Ahora, aplicamos i).

iii) Es consecuencia directa de i) y de ii).

□

**Proposición 1.6.8.** *Criterio de Dirichlet.* Sean  $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  funciones localmente integrables. Suponemos que

- hay una constante  $M > 0$  tal que, si  $a < c < b$ ,  $|\int_a^c f| < M$  y
- $g$  es decreciente con  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$ .

Entonces, la integral impropia  $\int_a^b f(x)g(x) dx$  es convergente.

**Ejemplo 1.6.9.**

- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx < +\infty$ , ya que

$$e^{-x^2} \leq e^{-x} \implies \int_1^{+\infty} e^{-x} dx < +\infty \implies \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx < +\infty$$

- $\int_1^{+\infty} (1 - \cos \frac{1}{x}) dx < +\infty$ , ya que

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + o(z^3) \implies 1 - \cos z \sim \frac{z^2}{2} \implies 1 - \cos \frac{1}{x} \sim \frac{1}{2x^2}.$$

Por lo tanto,  $1 - \cos \frac{1}{x}$  y  $\frac{1}{2x^2}$  son infinitesimos equivalentes, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{2x^2}} = 1.$$

Como sabemos que  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty$ , aplicamos comparación en el límite.

**Ejemplo 1.6.10.** La integral impropia  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  es condicionalmente convergente. Primero, observamos que la función es el seno cardinal

$$\text{sinc } x = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

que es de clase  $\mathcal{C}^\infty$ , por lo tanto, la integral es de primera especie (es impropia por el intervalo). Por lo tanto, podemos estudiar la integral  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  que tendrá el mismo carácter que la original.

Vemos que es convergente.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \left[ -\frac{\cos x}{x} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -\frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Ahora observamos que el primero de los sumandos vale  $\cos(1)$  y el segundo sumando, es absolutamente convergente porque

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{y} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty.$$

Ahora, veremos que  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$  es divergente. Primero, tenemos que  $\frac{\sin^2 x}{x} < \frac{|\sin x|}{x}$  y, también

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx &= \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(2x)}{2} \frac{1}{x} dx = \left[ \frac{x - \frac{1}{2} \sin(2x)}{2} \frac{1}{x} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{x - \frac{1}{2} \sin(2x)}{2} \frac{1}{x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sin 2}{4} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} + \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx = +\infty. \end{aligned}$$

Ya que la segunda integral es absolutamente convergente (por la misma razón que lo era  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ ).



## Tema 2

# Integración múltiple

### 2.1. Integral de Riemann sobre rectángulos compactos

**Definición 2.1.1.** Un rectángulo de  $\mathbb{R}^n$  es un producto  $A := I_1 \times \cdots \times I_n$  donde  $I_j \in \mathbb{R}$  son intervalos que suponemos acotados y no degenerados, es decir, ni vacíos, ni reducidos a un punto.

Si los  $I_j$  son compactos o abiertos, también lo es  $A$ .

**Definición 2.1.2.** La medida o volumen  $n$ -dimensional (o área si  $n = 2$ ) de un rectángulo acotado  $A = I_1 \times \cdots \times I_n$  es el producto de las longitudes de sus costados, es decir

$$\text{vol}(A) = \text{long}(I_1) \times \cdots \times \text{long}(I_n)$$

**Observación 2.1.3.** Recordemos que denominamos partición de un intervalo compacto  $[a, b]$  a un subconjunto finito de puntos  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  tales que  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$ . La partición expresa el intervalo como la unión de  $N$  subintervalos

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup \cdots \cup [x_{N-1}, x_N].$$

**Observación 2.1.4.** Una partición  $\mathcal{P}'$  se dice que es más fina que otra  $\mathcal{P}$  cuando  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$  (es decir, cuando tiene más puntos).

**Definición 2.1.5.** Dado un rectángulo compacto  $A = I_1 \times \cdots \times I_n$ , denominamos una partición  $\mathcal{P}$  de  $A$  al resultado de hacer una partición  $\mathcal{P}_j$  a cada intervalo  $I_j$ . La partición de  $A$  viene representada por  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$  y expresa el rectángulo  $A$  como unión de  $N = (|\mathcal{P}_1| - 1) \times \cdots \times (|\mathcal{P}_n| - 1)$  subrectángulos más pequeños.

**Observación 2.1.6.** Sean  $A', A'' \subset A$  rectángulos de la partición, entonces  $\overset{\circ}{A}' \cap \overset{\circ}{A}'' = \emptyset$ .

**Lema 2.1.7.** Si  $A$  es un rectángulo, y  $\mathcal{P}$  una partición de  $A$ , se tiene que

$$\text{vol}(A) = \sum_{R \in \mathcal{P}} \text{vol}(R).$$

**Definición 2.1.8.** Dadas dos particiones  $\mathcal{P} = \prod_{j=1}^n \mathcal{P}_j$  y  $\mathcal{P}' = \prod_{j=1}^n \mathcal{P}'_j$  de un rectángulo  $A$ .

Diremos que la partición  $\mathcal{P}'$  es más fina que  $\mathcal{P}$  si cada  $\mathcal{P}'_j$  es más fina que  $\mathcal{P}_j$  (es decir,  $P_j \subset P'_j \forall j \iff \mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ ).

Entonces, cada subrectángulo de  $\mathcal{P}$  es unión de subrectángulos de  $\mathcal{P}'$ .

**Definición 2.1.9.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un rectángulo compacto y  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Sea  $\mathcal{P}$  una partición de  $A$ . Para cada subrectángulo  $R$  de  $\mathcal{P}$  escribimos

$$m_R = \inf_{x \in R} f(x) \quad M_R = \sup_{x \in R} f(x)$$

Denominamos suma inferior y suma superior de  $f$  respecto a  $\mathcal{P}$  a los números

$$s(f; \mathcal{P}) = \sum_R m_R \text{vol}(R) \quad S(f; \mathcal{P}) = \sum_R M_R \text{vol}(R)$$

**Observación 2.1.10.** Sea  $\mathcal{P}$  una partición de  $A$

$$m_A \text{vol}(A) \leq s(f; \mathcal{P}) \leq S(f; \mathcal{P}) \leq M_A \text{vol}(A)$$

**Observación 2.1.11.** Si  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{P}'$  son dos particiones y  $\mathcal{P}'$  es más fina que  $\mathcal{P}$ , entonces

$$s(f; \mathcal{P}) \leq s(f; \mathcal{P}') \leq S(f; \mathcal{P}') \leq S(f; \mathcal{P})$$

**Lema 2.1.12.** Si  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{P}'$  son dos particiones de un rectángulo  $A$ , existe una partición  $\mathcal{P}''$  de  $A$  que es más fina que  $\mathcal{P}$  y que  $\mathcal{P}'$ .

**Corolario 2.1.13.** Si  $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$  son dos particiones de  $A$ , entonces,  $s(f; \mathcal{P}) \leq S(f; \mathcal{P}')$ . Por lo tanto,  $\{s(f; \mathcal{P}) | \mathcal{P} \text{ partición de } A\}$  está acotado superiormente y  $\{S(f; \mathcal{P}) | \mathcal{P} \text{ partición de } A\}$  está acotado inferiormente.

**Definición 2.1.14.** Sea  $A$  un rectángulo compacto y sea  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Denominamos integral inferior e integral superior de  $f$  en  $A$  a los números

$$\int_A f = \sup_{\mathcal{P}} s(f; \mathcal{P}) \quad \text{y} \quad \overline{\int}_A f = \inf_{\mathcal{P}} S(f; \mathcal{P})$$

donde el supremo y el ínfimo se toman sobre el conjunto de todas las posibles particiones  $\mathcal{P}$  de  $A$ . Obviamente,  $\int_A f \leq \overline{\int}_A f$ .

**Definición 2.1.15.** Diremos que una función  $f$  acotada es integrable en  $A$  cuando sus integrales inferior y superior coinciden. En este caso, su valor común se denomina integral de Riemann de  $f$  en  $A$  y se denota por

$$\int_A f, \quad \int_A f(x) \, d^n x, \quad \int_A f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \cdots dx_n \quad \text{o} \quad \int_A f \, dV$$

En el caso de  $n = 2$  o  $n = 3$  se habla de integral doble o integral triple respectivamente, ya que es habitual poner dos o tres signos de integral para representarlas.

**Proposición 2.1.16.** *Criterio de Riemann.* Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un rectángulo compacto y  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada.  $f$  es integrable Riemann sii  $\forall \varepsilon > 0, \exists \mathcal{P}$  partición de  $A$  tal que  $S(f; \mathcal{P}) - s(f; \mathcal{P}) < \varepsilon$ .

*Demostración.* Cálculo I □

**Ejemplo 2.1.17.**

- Si  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  constante, entonces  $f(x) = c$  y  $m_R = M_R = c \forall R$

$$s(f; \mathcal{P}) = \sum_R m_R \text{vol}(R) = c \sum_R \text{vol}(R) = c \text{vol}(A) = S(f; \mathcal{P})$$

Por lo tanto,  $f$  es integrable Riemann, y además

$$\int_A f = c \text{vol}(A) \implies \int_A 1 = \text{vol}(A)$$

- Consideramos la función  $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x, y \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{En otro caso} \end{cases},$$

entonces,  $m_R = 0$  y  $M_R = \text{vol}(R)$  para todo  $R$ , y entonces

$$\int_{\underline{A}} f = 0, \quad \overline{\int}_A f = \text{vol}(A) = 1 \times 1 = 1$$

Y por lo tanto,  $f$  no es integrable Riemann.

**Proposición 2.1.18. Linealidad.** Sea  $A$  un rectángulo compacto y  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  integrables Riemann. Entonces

- $f + g$  es integrable Riemann y  $\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$ .
- Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces  $\lambda f$  es integrable Riemann y  $\int_A (\lambda f) = \lambda \int_A f$ .

Es decir,  $\text{Rie}(A) = \{f: A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ integrable Riemann}\}$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y

$$\begin{aligned} \text{Rie}(A) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_A f \end{aligned}$$

es una forma lineal.

*Demostración.*

- Observamos que  $\inf(f) + \inf(g) \leq \inf(f + g)$  y que  $\sup(f) + \sup(g) \geq \sup(f + g)$ , y por lo tanto,

$$m_R(f) + m_R(g) \leq m_R(f + g) \leq M_R(f + g) \leq M_R(f) + M_R(g)$$

Por lo tanto, para toda  $\mathcal{P}$  partición de  $A$

$$s(f; \mathcal{P}) + s(g; \mathcal{P}) \leq s(f + g; \mathcal{P}) \leq S(f + g; \mathcal{P}) \leq S(f; \mathcal{P}) + S(g; \mathcal{P})$$

Y por último

$$\int_{\underline{A}} f + \int_{\underline{A}} g \leq \int_{\underline{A}} f + g \leq \overline{\int}_A f + g \leq \overline{\int}_A f + \overline{\int}_A g$$

Como  $f, g$  son integrables Riemann,  $(f + g)$  también lo es y vale  $\int_A f + \int_A g$

ii) Suponemos que  $\lambda > 0$ , entonces,

$$\inf(\lambda f) = \lambda \inf(f) \implies \int_{\underline{A}} (\lambda f) = \lambda \int_{\underline{A}} f$$

Análogamente,

$$\sup(\lambda f) = \lambda \sup(f) \implies \int_{\overline{A}} (\lambda f) = \lambda \int_{\overline{A}} f$$

Y por lo tanto,  $\int_A (\lambda f) = \lambda \int_A f$ . Y para demostrar el caso de  $\lambda < 0$ , usaremos que  $\int_A (-f) = -\int_A f$ . □

**Proposición 2.1.19. Positividad.** Sea  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  integrable Riemann. Si  $f \geq 0$ , entonces  $\int_A f \geq 0$ .

*Demostración.*

$$f \geq 0 \implies s(f; \mathcal{P}) \geq 0 \implies \int_{\underline{A}} f \geq 0 \implies \int_A f \geq 0$$

□

**Corolario 2.1.20.** Sean  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  integrables Riemann. Si  $f \leq g$ , entonces

$$\int_A f \leq \int_A g$$

Sean  $m, M \in \mathbb{R}$  tales que  $m < f(x) < M \forall x \in A$ . Entonces  $m \operatorname{vol}(A) \leq \int_A f \leq M \operatorname{vol}(A)$ .

*Demostración.*

$$f \leq g \implies g - f \geq 0 \xRightarrow{2.1.19} \int_A (g - f) \geq 0 \xRightarrow{2.1.18} \int_A g - \int_A f \geq 0 \implies \int_A g \geq \int_A f$$

□

**Proposición 2.1.21.** Sea  $A$  un rectángulo compacto, sea  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada, sea  $\mathcal{P}$  una partición de  $A$  y  $\xi = (\xi_k)$  una familia de puntos  $\xi_k \in R_k$ , donde  $R_k$  son los rectángulos de la partición. Se define la suma de Riemann

$$R(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_k f(\xi_k) \operatorname{vol}(R_k)$$

Si  $f$  es integrable Riemann entonces, en un sentido que habría que precisar,  $R(f, \mathcal{P}, \xi)$  se aproxima al valor de  $\int_A f$  a medida que la malla de  $\mathcal{P}$  (el máximo de las longitudes de los costados de los rectángulos  $R_k$  de  $\mathcal{P}$ ) tiende a 0.

## 2.2. Conjuntos de medida nula

**Definición 2.2.1.** Diremos que un subconjunto  $T \subset \mathbb{R}^n$  tiene medida ( $n$ -dimensional) cero o medida nula, si,  $\forall \varepsilon > 0$  Se puede recubrir  $T$  con una familia numerable de rectángulos compactos tales que la suma de sus medidas  $n$ -dimensionales sea  $< \varepsilon$ . En otras palabras, hay una sucesión (finita o infinita) de rectángulos compactos  $R_k$  tales que

$$T \subset \bigcup_k R_k \quad \text{y} \quad \sum_k \operatorname{vol}(R_k) < \varepsilon$$

**Observación 2.2.2.** En la definición es irrelevante usar rectángulos compactos o rectángulos abiertos.

**Observación 2.2.3.** Todo conjunto finito tiene medida nula.  
Si  $T$  tiene medida nula, entonces todo  $S \subset T$  tiene medida nula

**Proposición 2.2.4.** La reunión de una familia numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula.

*Demostración.* Si  $T = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$  donde  $T_i$  tiene medida nula para todo  $i$ . Recubrimos  $T_i$  con rectángulos compactos  $R_{ik}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) tal que  $\sum_k \text{vol}(R_{ik}) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ . Entonces,  $T = \bigcup_{i,k} R_{ik}$  y

$$\sum_{i,k} \text{vol}(R_{i,k}) = \sum_i \left( \sum_k \text{vol}(R_{i,k}) \right) < \sum_i \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \varepsilon$$

□

**Corolario.** Todo conjunto numerable tiene medida nula

**Ejemplo 2.2.5.**

- $\left. \begin{array}{l} \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \\ \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \end{array} \right\}$  Son conjuntos de medida nula, porque son numerables
- El conjunto de Cantor  $K \subset \mathbb{R}$  tiene medida nula, pero no es numerable.
- En  $\mathbb{R}^3$ ,  $T = [0, 1] \times [0, 1] \times \{0\}$ , tiene medida nula, ya que

$$T \subset [0, 1] \times [0, 1] \times \left[ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2} \right] (\text{vol}(R) = \varepsilon) \implies \mathbb{R}^2 \times \{0\}$$

Ya que

$$\mathbb{R}^2 \times \{0\} = \bigcup_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} [k, k+1] \times [l, l+1] \times \{0\}$$

(unión numerable de  $R$  con medida nula).

- Si  $a < b$ , entonces  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  no tiene medida nula.

**Corolario 2.2.6.** Dentro de  $\mathbb{R}^n$ , el subespacio,  $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$  tiene medida nula.

**Definición 2.2.7.** Diremos que un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  tiene contenido ( $n$ -dimensional) cero o contenido nulo, si  $\forall \varepsilon > 0$ , hay un recubrimiento finito de  $A$  por rectángulos compactos  $R_i$  tal que

$$\sum \text{vol}(R_i) < \varepsilon$$

**Observación 2.2.8.** En la definición, se pueden substituir los rectángulos compactos por rectángulos abiertos.

**Observación 2.2.9.** Un conjunto de contenido cero, tiene medida cero.

**Observación 2.2.10.** Que un conjunto tenga medida cero, no implica que tenga contenido cero.

**Proposición 2.2.11.** Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es compacto y tiene medida cero, entonces tiene contenido cero.

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ , existe una sucesión  $(R_i)$  de rectángulos abiertos tal que

$$A \subset \bigcup_i R_i \quad \sum_i \text{vol}(R_i) < \varepsilon$$

Como  $A$  es compacto, un número finito de los  $R_i$  recubren  $A$  (condición de Heine-Borel de compacto) y la suma de sus volúmenes es  $< \varepsilon$ .  $\square$

**Lema 2.2.12.** Si  $a < b$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  no tiene contenido cero. Más precisamente, sea  $\{R_1, \dots, R_n\}$  un recubrimiento de  $[a, b]$  por intervalos compactos. Entonces,  $\sum_{i=1}^n \text{long}(R_i) \geq b - a$

*Demostración.* Hacemos inducción sobre  $n$ . Si  $n = 1$ , el resultado es trivial. Ahora, suponemos cierto el resultado anterior para  $n$  y consideramos  $\{R_1, \dots, R_{n+1}\}$  un recubrimiento de  $[a, b]$  por intervalos compactos. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $a \in R_1$ , por tanto,  $R_1 = [\alpha, \beta]$  donde  $\alpha \leq a \leq \beta$ . Ahora, hay dos opciones. Si  $\beta \geq b$ , entonces  $\text{long}(R_1) \geq b - a$  y ya está. Si  $\beta < b$ , entonces,  $[\beta, b]$  está recubierto por  $\{R_2, \dots, R_{n+1}\}$  y por hipótesis de inducción  $\sum_{i=2}^{n+1} \text{long}(R_i) \geq b - \beta$ . Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \text{long}(R_i) \geq (\beta - a) + (b - \beta) = b - a. \quad \square$$

**Corolario.** Si  $a < b$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , no tiene medida nula.

**Observación 2.2.13.** De la misma manera, un rectángulo compacto no degenerado de  $\mathbb{R}^n$  no tiene medida nula.

**Corolario.** Si un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  tiene un punto interior, entonces, no tiene medida nula.

**Observación 2.2.14.** Un conjunto de contenido nulo es, necesariamente, acotado. Pero hay conjuntos acotados de medida nula, que no son de contenido nulo.

**Proposición 2.2.15.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$  acotado,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente continua. El grafo de  $f$ ,  $\text{graf}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$ , tiene medida nula.

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ . Sea  $R \supset D$  un rectángulo compacto de volumen  $|R|$ .

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{|R|}.$$

Partimos ahora  $R$  en subrectángulos compactos  $I_k$  suficientemente pequeños como para que cada uno de ellos esté contenido en una bola de radio  $\frac{\delta}{2}$ . Entonces,  $f(I_k) \subset J_k$ , siendo  $J_k$  un intervalo compacto de longitud menor o igual a  $\frac{\varepsilon}{|R|}$ . Además,  $\text{graf}(f) \subset \bigcup_k I_k \times J_k$ . Finalmente,

$$\sum_k \text{vol}(I_k \times J_k) = \sum_k \text{vol}(I_k) \cdot \text{vol}(J_k) \leq \sum_k \text{vol}(I_k) \cdot \frac{\varepsilon}{|R|} = \varepsilon.$$

$\square$

**Corolario.** Si  $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$  es compacto y  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\text{graf}(f) \subset \mathbb{R}^n$  tiene medida nula.

**Corolario.** Si  $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$  es abierto y  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\text{graf}(f) \subset \mathbb{R}^n$  tiene medida nula.

*Demostración.* Cualquier punto de  $D$  está contenido en una bola cerrada (que es un conjunto compacto) de centro en coordenadas racionales y radio racional. Además, como el conjunto de bolas de centro en coordenadas racionales y radio racional es el producto cartesiano de conjuntos numerables, es a su vez numerable. Así pues,  $D$  es la unión numerable de conjuntos compactos, sean estos  $K_i$ . Entonces,  $\text{graf}(f) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{graf}(f|_{K_i})$ . Finalmente, por el corolario anterior y la proposición 2.2.4,  $\text{graf}(f)$  tiene medida nula.  $\square$

**Definición 2.2.16.** Diremos que un *cuadrado* es un rectángulo cuyos lados tienen la misma longitud.

**Proposición 2.2.17.** Sea  $Q$  un cuadrado en  $\mathbb{R}^n$ . Si la longitud de su lado es  $l$ , su volumen es  $l^n$  y su diámetro (en la norma euclídeana de  $\mathbb{R}^n$ ) es  $l\sqrt{n}$ .

**Proposición 2.2.18.** Sea  $Z \subset \mathbb{R}^n$  de medida nula. Para toda  $\varepsilon > 0$  existe una familia numerable de cuadrados compactos  $Q_k$  tales que  $Z \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$  y  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \text{vol}(Q_k) < \varepsilon$ .

**Lema 2.2.19.** Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  un rectángulo compacto y  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función lipshitziana. Si  $Z \subset A$  tiene medida nula,  $f(Z)$  tiene medida nula.

*Demostración.* Más adelante.  $\square$

**Proposición 2.2.20.** Sea  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $\mathcal{C}^1$  en un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Si  $Z \subset U$  tiene medida nula,  $f(Z)$  tiene medida nula.

El resultado es falso si  $f$  es solamente  $\mathcal{C}^0$ . Un ejemplo de esto es la curva de Peano.

*Demostración.* Más adelante.  $\square$

**Corolario 2.2.21.** Toda subvariedad  $M \subset \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1$  de dimensión  $m < n$  tiene medida nula.

## 2.3. El Teorema de Lebesgue

**Definición 2.3.1.** Sean  $X$  un espacio métrico y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Llamamos *oscilación* de  $f$  sobre  $E \subset X$  a

$$\omega(f, E) := \sup_{x, y \in E} |f(x) - f(y)|.$$

También se llama a este valor diámetro de  $f(E) \in [0, +\infty]$ .  $\omega(f, E)$  es zero si y solo si  $f|_E$  es constante y  $+\infty$  si y solo si  $f|_E$  no es acotada.

**Observación 2.3.2.**  $E \subset E' \implies \omega(f, E) \leq \omega(f, E')$ .

**Lema 2.3.3.** Si  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  es acotada,  $\omega(f, E) = \sup_{x \in E} f(x) - \inf_{x \in E} f(x)$ .

**Definición 2.3.4.** Sean  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in X$ . Llamamos oscilación de  $f$  en  $a$  a

$$\omega(f, a) := \lim_{r \rightarrow 0} \omega(f, B(a, r)).$$

**Observación 2.3.5.**

$$\omega(f, a) = \inf_{r>0} \omega(f, B(a, r)).$$

**Lema 2.3.6.**

$$f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ es continua en } a \iff \omega(f, a) = 0.$$

*Demostración.*  $\boxed{\implies}$

Supongamos que  $f$  es continua en  $a$ . Entonces,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q. } d(x, a) < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Sean  $x, y \in B(a, \delta)$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(y)| \leq 2\varepsilon \implies \\ &\implies \omega(f, B(a, \delta)) \leq 2\varepsilon \implies \omega(f, a) = 0. \end{aligned}$$

$\boxed{\impliedby}$

Supongamos  $\omega(f, a) = 0$ . Sea  $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  t.q.  $\omega(f, B(a, \delta)) < \varepsilon$ . Por tanto,  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  si  $d(x, a) < \delta \implies f$  continua en  $a$ .  $\square$

**Ejemplo 2.3.7.** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

1.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$   
 $\omega(f, 0) = \lim_{r \rightarrow 0} \omega(f, B(0, r)) = \infty \implies f$  no es continua en  $x = 0$ .
2.  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$   
 $\omega(f, 0) = \lim_{r \rightarrow 0} \omega(f, B(0, r)) = 2 \implies f$  no es continua en  $x = 0$ .

**Lema 2.3.8.** Sea  $a$  t.q.  $\omega(f, a) < c$ .  $\exists \delta$  t.q.  $\omega(f, B(a, \delta)) < c$ .

*Demostración.* Por contrarecíproco.  $\forall \delta, \omega(f, B(a, \delta)) \geq c \implies \omega(f, a) \geq c$ . Contradicción.  $\square$

**Proposición 2.3.9.** Sea  $X$  un espacio métrico,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . El conjunto  $a = \{x \in X | \omega(f, x) < c\}$  es abierto.

*Demostración.* Sea  $a \in A$  t.q.  $\omega(f, a) < c, c > 0$ . Por el lema 2.3.8  $\exists \delta$  t.q.  $\omega(f, B(a, \delta)) < c$ .

Sea  $b \in B(a, \delta)$ ,  $\exists \delta'$  t.q.  $B(b, \delta') \subset B(a, \delta)$ .

$$\omega(f, B(b, \delta')) \leq \omega(f, B(a, \delta)) < c \xrightarrow{2.3.8} \omega(f, b) < c$$

Por tanto,  $b \in A$  y  $B(a, \delta) \subset A \implies a$  es un punto interior de  $A \implies A$  es abierto.  $\square$

**Corolario.** Si  $X$  es compacto,  $\{x \in X | \omega(f, x) \geq c\}$  es compacto.

*Demostración.* Todo conjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.  $\square$

**Lema 2.3.10.** (1). Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  rectángulo compacto. Sean  $T_1, \dots, T_n \subset A$  rectángulos compactos t.q.  $A = \bigcup_{i=1}^n T_i$ . Existe una partición  $\mathcal{P}$  de  $A$  t.q. para cada subrectángulo  $R$  de  $\mathcal{P}$ , existe un  $i$  t.q.  $R \subset T_i$ .



*Demostración.*  $A = I_1 \times \cdots \times I_k \times \cdots \times I_n \implies \mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$  cada

$$\mathcal{P}_k = \{x_0 = a, x_{1-}, x_{1+}, \dots, x_{i-}, x_{i+}, \dots, x_{n-}, x_{n+}, b\},$$

donde  $x_{i-}, x_{i+}$  son los extremos inferiores y superiores (respectivamente) de  $T_i$ . Por construcción,  $R \subseteq T_i$ .  $\square$

**Lema 2.3.11.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  rectángulo compacto,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  acotada. Suponemos  $\forall x \in A, \omega(f, x) < \varepsilon$ . Entonces existe una partición  $\mathcal{P}$  de  $A$  t.q.  $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon \text{vol}(A)$ .

*Demostración.* Sea  $x \in A$ , existe un rectángulo compacto  $R_x \subset A$  t.q.  $x \in \overset{\circ}{R}_x$  (interior relativo a  $A$ ) y  $\omega(f, R_x) = M_{R_x} - m_{R_x} < \varepsilon$ .

Sean  $R_{x_i}$  un conjunto finito de los  $R_x$  que recubren  $A$ . Sea  $\mathcal{P}$  una partición de  $A$  t.q. cada subrectángulo de  $\mathcal{P}$  esté dentro de uno de los  $R_{x_i}$ , para cada subrectángulo  $R$  de  $\mathcal{P}$ ,  $M_R - m_R < \varepsilon$ . Entonces,

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) = \sum_{R \in \mathcal{P}} (M_R - m_R) \text{vol}(R) < \varepsilon \sum_{R \in \mathcal{P}} \text{vol}(R) = \varepsilon \text{vol}(A).$$

$\square$

**Corolario.**  $f$  continua  $\implies f$  integrable Riemann (ya que  $f$  continua  $\implies \forall x \omega(f, x) = 0$ ).

**Lema 2.3.12.** (2). Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  rectángulo compacto,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  acotada,  $c > 0$ . Si  $f$  es integrable Riemann, el conjunto  $B_c = \{x \in A | \omega(f, x) \geq c\}$  tiene medida nula.

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ , aplicando el criterio de Riemann, existe una partición  $\mathcal{P}$  de  $A$  t.q.  $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < c\varepsilon$ .

Observamos que

$$A = A_1 \cup A_2 \quad A_1 = \bigcup_{R \in \mathcal{P}} \overset{\circ}{R}$$

$A_2$  tiene medida nula por ser unión finita de subconjuntos de subespacios de  $\dim < n$ . Ahora, separamos los subrectángulos de  $\mathcal{P}$  en dos clases

- $\mathcal{P}'$  subrectángulos  $R$  tal que  $B_c$  corta a  $R \implies$  en todos ellos,  $M_R - m_R \geq c$ .
- $\mathcal{P}''$  el resto.

Tenemos

$$\begin{aligned} c \sum_{R \in \mathcal{P}'} \text{vol}(R) &\leq \sum_{R \in \mathcal{P}'} (M_R - m_R) \text{vol}(R) \leq \sum_{R \in \mathcal{P}} (M_R - m_R) \text{vol}(R) = \\ &= S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < c\varepsilon \implies \sum_{R \in \mathcal{P}'} \text{vol}(R) < \varepsilon \end{aligned}$$

Así pues, hemos recubierto  $B_c \cap A_1$  con un número finito de rectángulos de volúmenes  $< \varepsilon$ . También podemos hacerlo con  $B_c \cap A_2$ , ya que tiene medida nula  $\implies$  podemos recorrer  $B_c$  con rectángulos de volúmenes  $< 2\varepsilon \implies B_c$  tiene medida nula.  $\square$

**Definición 2.3.13.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Definimos discontinuidad de  $f$  como

$$\text{disc}(f) = \{x \in A | x \text{ no es continua en } A\}.$$

**Teorema de Lebesgue (2.3.14)**

Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un rectángulo compacto,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada.  $f$  es integrable Riemann en  $A$  si y solo si  $\text{disc}(f)$  tiene medida nula.

*Demostración.* Por comodidad, llamaremos  $B = \text{disc}(f)$  y  $B_c = \{x \in A \mid \omega(f, x) \geq c\}$ .

$\Rightarrow$

Sea  $f$  integrable Riemann en  $A$ . Observamos que

$$B = \bigcup_{k \geq 1} B_{1/k}$$

por el lema 2,  $B_{1/k}$  tienen medida nula. Como es una unión numerable,  $B$  tiene medida nula.

$\Leftarrow$

Suponemos que  $B$  tiene medida nula. Sea  $\varepsilon > 0$  y  $B_\varepsilon \subset B$ , que tiene medida nula por estar contenido en  $B$  y es compacto como se ha visto [anteriormente](#), por lo tanto, tiene contenido nulo y, por lo tanto, existen rectángulos compactos  $T_1, \dots, T_N \subset A$  tales que

$$B_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^N NT_i \quad \sum_{i=1}^N N \text{vol}(T_i) < \varepsilon$$

Sea  $\mathcal{P}$  una partición de  $A$ . Separamos los subrectángulos  $R$  en los siguientes tipos

- $R_1$ :  $R$  está dentro de algún  $T_i$
- $R_2$ : el resto.

Tenemos ahora que

$$\sum_{R \in R_1} (M_R - m_R) \text{vol}(R) \leq (M_A - m_A) \sum_{i=1}^N \text{vol}(T_i) < (M_A - m_A) \varepsilon$$

Ahora, si  $R \in R_2$ , entonces  $R$  no conta a  $B_\varepsilon$ , por lo tanto,  $w(f, x) < \varepsilon \forall x \in R$ , por el lema 1, existe una partición  $\mathcal{P}_R$  de  $R$  tal que  $S(f, \mathcal{P}_R) - s(f, \mathcal{P}_R) < \varepsilon \text{vol}(R)$ .

Podemos refinar  $\mathcal{P}$  a una partición  $\mathcal{P}'$  tal que todos sus subrectángulos, estén dentro de los subrectángulos de  $\mathcal{P}_R$  (por [2.3.10](#))

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}') - s(f, \mathcal{P}') &= \sum_{R' \in R_1} (M_{R'} - m_{R'}) \text{vol}(R') + \sum_{R' \in R_2} (M_{R'} - m_{R'}) \text{vol}(R') < \\ &< (M_A - m_A) \varepsilon + \sum_{R' \in R_2} \varepsilon \text{vol}(R') = \varepsilon ((M_A - m_A) + \text{vol}(A)) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\sum_{R \in R_2} \sum_{R' \in R} (M_{R'} - m_{R'}) \text{vol}(R') < \sum_{R \in R_2} \varepsilon \text{vol}(R)$$

Ahora, tan solo queda observar que  $\varepsilon ((M_A - m_A) + \text{vol}(A))$  lo podemos hacer tan pequeño como queramos.  $\square$

**Definición 2.3.15.** Una propiedad que se satisface para todos los puntos de un conjunto  $A$ , excepto en un conjunto  $N \subset A$  de medida nula, se dice que se satisface casi para todo.

**Proposición 2.3.16.** Toda función  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  continua sobre un rectángulo compacto es integrable.

## 2.4. Integral de Riemann sobre conjuntos más generales

**Definición 2.4.1.** Un subconjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  se dice que es admisible (o mesurable Jordan) si es acotado y  $\text{Fr}(C)$  es de medida nula.

**Observación 2.4.2.** Sea  $X$  un espacio métrico,  $C \subset X$ :  $\text{Fr}(C) = \overline{C} \setminus \overset{\circ}{C} = \overline{C} \cap \overline{(X \setminus C)} = X \setminus (\text{Int}(C) \cup \text{Ext}(C))$  y  $X = \text{Int}(C) \cup \text{Fr}(C) \cup \text{Ext}(C)$ .

**Lema 2.4.3.**

- (1)  $\text{Fr}(A \cup A'), \text{Fr}(A \cap A'), \text{Fr}(A \setminus A') \subset \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(A')$ .
- (2)  $A \subset X, B \subset Y \implies \text{Fr}(A \times B) = (\text{Fr}(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \text{Fr}(B))$ .

**Corolario 2.4.4.**

- (1)  $A, A' \subset \mathbb{R}^n$  admisibles  $\implies A \cup A', A \cap A'$  y  $A \setminus A'$  son admisibles.
- (2)  $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^n$  son admisibles  $\implies A \times B \subset \mathbb{R}^{m+n}$  es admisible.

**Ejemplo 2.4.5.**

- (1) Los rectángulos compactos y los rectángulos abiertos acotados son admisibles.
- (2) Las bolas euclidianas son admisibles.
- (3) Existen conjuntos de medida nula que no son admisibles. Por ejemplo,  $A = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ .
- (4) Existen conjuntos abiertos y acotados que no son admisibles.
- (5) Existen conjuntos compactos que no son admisibles.

**Definición 2.4.6.** Sea  $X$  un espacio métrico, y sea  $C \subset X$ . Definimos la función característica de  $C$  como

$$\chi_C: X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \chi_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C \\ 0 & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

**Lema 2.4.7.** Sea  $X$  un espacio métrico, sea  $C \in X$  y sea  $\chi_C$  su función característica.

$$\text{disc}(\chi_C) = \text{Fr}(C)$$

*Demostración.*

■  $\text{Ext}(C)$

$$\forall a \in \text{Ext}(C), \exists r > 0 \text{ t.q. } \chi_C(x) = 0 \forall x \in B(a, r) \implies \chi_C \text{ es continua en } \text{Ext}(C).$$

■  $\text{Int}(C)$

$$\forall a \in \text{Int}(C), \exists r > 0 \text{ t.q. } \chi_C(x) = 1 \forall x \in B(a, r) \implies \chi_C \text{ es continua en } \text{Int}(C).$$

■  $\text{Fr}(C)$

$$\begin{aligned} \forall a \in \text{Fr}(C), \forall r > 0, \exists x \in B(a, r) \text{ t.q. } \chi_C(x) = 1 \text{ y} \\ \exists y \in B(a, r) \text{ t.q. } \chi_C(y) = 0 \implies a \in \text{disc}(\chi_C). \end{aligned}$$

□

**Corolario 2.4.8.** Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  acotado.

$$C \text{ es admisible} \iff \begin{cases} C \text{ es acotado} \\ \forall \text{ rect. compacto } R \supset C \text{ existe la integral de Riemann } \int_R \chi_C \end{cases}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} C \text{ es admisible} &\iff \begin{cases} C \text{ es acotado} \\ \text{Fr}(C) \text{ tiene medida nula} \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} C \text{ es acotado} \\ \text{disc}(\chi_C) \text{ tiene medida nula} \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} C \text{ es acotado} \\ \text{disc}((\chi_C)|_R) \text{ tiene medida nula, } \forall R \supset C \text{ rectángulo compacto} \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} C \text{ es acotado} \\ \forall \text{ rect. compacto } R \supset C \text{ existe la integral de Riemann } \int_R \chi_C \end{cases}. \end{aligned}$$

□

**Lema 2.4.9.** Sea  $X$  un espacio métrico, sea  $E \subset X$  y sea  $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ . Sea  $\tilde{g}: X \rightarrow \mathbb{R}$  la extensión de  $g$  definida por

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

Entonces,  $\text{disc}(g) \subseteq \text{disc}(\tilde{g}) \subseteq \text{disc}(g) \cup \text{Fr}(E)$ .

*Demostración.*

- $\forall x \in \text{Ext}(E), \tilde{g}$  es continua en  $x$ .
- $\forall x \in \text{Int}(E), \tilde{g}$  es continua en  $x \iff g$  es continua en  $x$ .
- $\forall x \in \text{Fr}(E), \tilde{g}$  es continua en  $x \implies g$  es continua en  $x$ .

□

**Definición 2.4.10.** Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto admisible, sea  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y sea  $R \supset C$  un rectángulo compacto. Definimos la extensión de  $f$  a todo  $R$  como

$$\begin{aligned} f\chi_C: R &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f\chi_C(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in C \\ 0 & \text{si } x \notin C \end{cases} \end{aligned}$$

**Lema 2.4.11.** Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto admisible, sea  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y sea  $R \supset C$  un rectángulo compacto.

$f\chi_C$  es integrable Riemann en  $R \iff \text{disc}(f)$  tiene medida nula.

*Demostración.* Inmediata del lema 2.4.9 y del teorema de Lebesgue.  $\square$

**Lema 2.4.12.** Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto admisible, sea  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y sean  $R, R' \supset C$  rectángulos compactos.

$$\int_R f\chi_C = \int_{R'} f\chi_C.$$

## 2.5. Propiedades de la integral

**Proposición 2.5.1.** *Linealidad y positividad.* Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible Jordan. El conjunto  $\text{Rie}(E)$  de funciones integrables Riemann en  $E$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, y la integral:

$$\begin{array}{ll} \text{Rie}(E) \rightarrow \mathbb{R} & \text{es una forma lineal positiva.} \\ f \mapsto \int_E f & \left( f \geq 0 \rightarrow \int_E f \geq 0 \right) \end{array}$$

*Demostración.* Consecuencia de las mismas propiedades para un rectángulo compacto  $A \supset E$ .  $\square$

**Corolario 2.5.2.** *Monotonía.*

$$f \leq g \implies \int_E f \leq \int_E g.$$

**Definición 2.5.3.** Sea  $E$  medible Jordan, el valor medio de  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\langle f \rangle := \frac{\int_E f}{\int_E 1} = \frac{1}{\text{vol}(E)} \int_E f, \quad (\text{vol}(E) \neq 0).$$

**Teorema del valor medio (2.5.4)**

Si  $m \leq f \leq M$ :

$$m(\text{vol}(E)) \leq \int_E f \leq M(\text{vol}(E)).$$

*Demostración.* Consecuencia de las últimas proposiciones.  $\square$

**Corolario 2.5.5.**

$$\text{vol}(E) = 0 \implies \int_E f = 0.$$

**Teorema del valor medio (alternativo) (2.5.6)**

Sea  $E$  medible Jordan y connexo;  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y continua. Existe  $x_o \in E$  tal que:

$$\int_E f = f(x_o) \text{vol}(E), \quad (\langle f \rangle = f(x_o))$$

**Proposición 2.5.7.** Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible Jordan,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  integrable Riemann,  $h: f(E) \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Entonces  $h \circ f$  es integrable Riemann.

*Demostración.*  $\text{disc}(h \circ f) \subset \text{disc}(f)$  (medida nula) y teorema de Lebesgue.  $\square$

**Observación 2.5.8.**  $f, h$  integrables Riemann no implica  $h \circ f$  integrable Riemann.

## 2.6. El teorema de Fubini

**Lema 2.6.1.** Siguen  $B_i \subset \mathbb{R}$  ( $i \in I$ ) no vacíos y acotados inferiormente,  $B = \bigcup_{i \in I} B_i$ . Entonces

$$\inf B = \inf \{ \inf B_i | i \in I \}.$$

*Demostración.* Ejercicio 2. Indicación:  $B = \{ \inf B_i | i \in I \}$  tienen las mismas cotas inferiores.  $\square$

**Lema 2.6.2.** Sean  $R, S$  conjuntos no vacíos,  $f: R \times S \rightarrow \mathbb{R}$  acotada inferiormente. Entonces

$$\inf_{(x,y) \in R \times S} f(x, y) = \inf_{x \in R} \inf_{y \in S} f(x, y).$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} R \times S &= \bigcup_{x \in R} (\{x\} \times S) \implies f(R \times S) = \bigcup_{x \in R} f(\{x\} \times S) \xrightarrow[\text{anterior}]{\text{Lema}} \inf f(R \times S) = \\ &= \inf \bigcup_{x \in R} f(\{x\} \times S) = \inf_{x \in R} \inf_{y \in S} f(x, y) \implies \inf_{(x,y) \in R \times S} f(x, y) = \inf_{x \in R} \inf_{y \in S} f(x, y). \end{aligned}$$

$\square$

**Lema 2.6.3.** Sean  $g_j: R \rightarrow \mathbb{R}$  una familia de funciones acotadas inferiormente. Entonces,

$$\sum_j \inf_{x \in R} g_j(x) \leq \inf_{x \in R} \sum_j g_j(x)$$

*Demostración.* Fijamos  $x_0 \in R$ :

$$\sum_j \inf_{x \in R} g_j(x) \leq \sum_j g_j(x_0), \text{ (cota inferior).}$$

Como  $x_0$  es arbitrario,

$$\sum_j \inf_{x \in R} g_j(x) \leq \inf_{x \in R} \sum_j g_j(x).$$

$\square$

**Lema 2.6.4.** Sean  $A \subset \mathbb{R}^m$ ,  $B \subset \mathbb{R}^n$  rectángulos compactos. Sea  $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Sea  $\Phi: A \rightarrow \mathbb{R}$  t. q.

$$\int_B f(x, \cdot) \leq \Phi(x) \leq \int_B f(x, \cdot), \forall x \in A.$$

Entonces,

$$\int_{A \times B} f \leq \int_A \Phi, \quad \int_A \Phi \leq \int_{A \times B} f.$$

*Demostración.* Sean  $P, Q$  particiones de  $A, B$  respectivamente,  $P \times Q$  es una partición de  $A \times B$  con subrectángulos  $R_i \times S_j$ . Sea  $|T| = \text{vol}(T)$ , entonces  $|R_i \times S_j| = |R_i||S_j|$ . Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} s(f, P \times Q) &= \sum_{i,j} |R_i \times S_j| \inf_{(x,y) \in R_i \times S_j} f(x,y) = \sum_i \sum_j |R_i||S_j| \inf_{(x,y) \in R_i \times S_j} f(x,y) = \\ &= \sum_i |R_i| \sum_j |S_j| \inf_{(x,y) \in R_i \times S_j} f(x,y) \stackrel{2.6.2}{=} \sum_i |R_i| \sum_j |S_j| \inf_{x \in R_i} \inf_{y \in S_j} f(x,y) = \\ &= \sum_i |R_i| \sum_j \inf_{x \in R_i} |S_j| \inf_{y \in S_j} f(x,y) \stackrel{2.6.3}{\leq} \sum_i |R_i| \inf_{x \in R_i} \left( \sum_j |S_j| \inf_{y \in S_j} f(x,y) \right) = \\ &= \sum_i |R_i| \inf_{x \in R_i} s(f(x, \cdot), Q) \leq \sum_i |R_i| \inf_{x \in R_i} \int_B f(x, \cdot) \stackrel{\text{def } \phi}{\leq} \sum_i |R_i| \inf_{x \in R_i} \phi(x) = \\ &= s(\phi, P) \leq \int_A \phi \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\int_A \phi$  es una cota superior de  $s(f, P \times Q)$ , como  $\int_{A \times B} f$  es la cota superior más pequeña:

$$\int_{A \times B} f \leq \int_A \phi$$

□

**Lema 2.6.5.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$  admisible y compacto,  $\phi, \psi: D \rightarrow \mathbb{R}$  continuas,  $\phi \leq \psi$ . Sea

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} | x \in D, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

$E$  es admisible y compacto, y  $\text{Fr}(E) \subset (\text{graf}(\phi) \cup \text{graf}(\psi) \cup (\text{Fr}(D) \times \mathbb{R}))$ .

*Demostración.*  $\text{graf}(\phi)$ ,  $\text{graf}(\psi)$  y  $\text{Fr}(D) \times \mathbb{R}$  tienen medida nula, como  $\text{Fr}(E)$  está contenida en estos conjuntos,  $\text{Fr}(E)$  tiene medida nula, por lo tanto,  $E$  es admisible. □

**Teorema de Fubini (2.6.6)**

Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  rectángulos compactos, sea  $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  integrable Riemann. Sea  $\phi: A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\int_B f(x, \cdot) \leq \phi(x) \leq \bar{\int}_B f(x, \cdot) \quad \forall x \in A$$

Entonces,  $\phi$  es integrable Riemann y

$$\int_{A \times B} f = \int_A \phi$$

Análogamente, si tenemos  $\psi: B \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\int_A f(\cdot, y) \leq \psi(y) \leq \bar{\int}_A f(\cdot, y)$  ( $\forall y \in B$ ), entonces  $\psi$  es integrable Riemann y  $\int_{A \times B} f = \int_B \psi$

*Demostración.* Por el lema 2.6.4

$$\begin{aligned} \int_{A \times B} f &\leq \int_A \phi \leq \bar{\int}_A \phi \leq \bar{\int}_{A \times B} f \stackrel{f \text{ integrable Riemann}}{\implies} \int_{A \times B} f = \int_A \phi = \bar{\int}_A \phi = \bar{\int}_{A \times B} f \implies \\ &\implies \phi \text{ es integrable Riemann y } \int_{A \times B} f = \int_A \phi \end{aligned}$$

□

**Observación 2.6.7.** A partir de ahora, usaremos la siguiente notación:

$$\int_A f = \int_A f(x) \, d^n x = \int_A d^n x f(x)$$

**Observación 2.6.8.** Si  $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable Riemann, el conjunto

$$\{x \in A \mid f(x, \cdot) \text{ NO es integrable Riemann}\}$$

tiene medida nula

*Demostración.* Definimos  $\Delta(x) := \bar{\int}_B f(x, \cdot) - \underline{\int}_B f(x, \cdot) \geq 0$ . Por el teorema de Fubini

$$\int_A \Delta = \int_{A \times B} f - \int_{A \times B} f = 0 \xrightarrow{\Delta \geq 0} \Delta \stackrel{\text{Casi para todos}}{=} 0 \implies \text{El conjunto tiene medida nula}$$

□

**Observación 2.6.9.** Cuando  $\forall x \in A$   $f(x, \cdot)$  es integrable, tenemos que

$$\int_{A \times B} d^n x \, d^n y f(x, y) = \int_A d^n x \int_B d^n y f(x, y)$$

**Observación 2.6.10.** Más simplemente, si  $f$  es continua, existen y son iguales los siguientes números

$$\int_{A \times B} dx \, dy f(x, y) = \int_A dx \left( \int_B dy f(x, y) \right) = \int_B dy \left( \int_A dx f(x, y) \right)$$

**Corolario 2.6.11.** Si  $f$  es continua, y  $A = I_1 \times \cdots \times I_n$ , podemos escribir

$$\int_A f = \int_{I_1} dx_1 \int_{I_2} dx_2 \cdots \int_{I_n} dx_n f(x_1, \dots, x_n)$$

**Ejemplo 2.6.12.** Sea  $A = [0, 1] \times [0, 1]$  y  $D = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times \{0\}$  y consideramos  $f = X_D$ , es decir

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Vemos que

$$\int_A f = \int_0^1 dx \underbrace{\int_0^1 dy f(x, y)}_0 = 0$$

Sin embargo,

$$\int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \neq 0 \\ \neq 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Es decir, esta fórmula no sirve, en lugar de esta fórmula, hemos de usar

$$\int_A f = \int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x, y) = 0 \quad \int_A f = \int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x, y) = 0$$



**Observación 2.6.13.** Hay funciones  $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  acotadas y no integrables Riemann, tales que

$$\int_A dx \int_B dy f(x, y) = \int_B dy \int_A dx f(x, y)$$

El teorema de Fubini se puede utilizar para integrar sobre regiones más generales que los rectángulos.

**Lema 2.6.14.** Sea  $X$  un espacio métrico y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Los conjuntos

$$W^+ = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} | y > f(x)\} \subset X \times \mathbb{R}$$

$$W^- = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} | y < f(x)\} \subset X \times \mathbb{R}$$

son abiertos, y los conjuntos

$$E^+ = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} | y \geq f(x)\}$$

$$E^- = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} | y \leq f(x)\}$$

son cerrados.

**Lema 2.6.15.** Sea  $X$  un espacio métrico,  $D \subset X$  un subconjunto, y  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Consideramos

$$E = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} | x \in D, y \geq f(x)\}$$

denominado epígrafo de la función. Entonces

- i) Si  $D \subset X$  es cerrado,  $E \subset X \times \mathbb{R}$  es cerrado.
- ii)  $\text{Fr}(E) \subset \text{graf}(f) \cup (\text{Fr}(D) \times \mathbb{R})$ .

*Demostración.*

- i) por el lema anterior.
- ii) ejercicio

□

**Lema 2.6.16.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$  admisible y compacto y  $\phi, \psi: D \rightarrow \mathbb{R}$  continuas con  $\phi \leq \psi$ . Consideramos

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} | x \in D, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\} \subset \mathbb{R}^n$$

$E$  es compacto y admisible

*Demostración.* Veremos que  $E$  es cerrado, acotado y  $\text{Fr}(E)$  tiene medida nula.  $E = E_\phi^+ \cap E_\psi^-$  por lo tanto, es cerrado (intersección de cerrados).  $D$  está acotado y  $y$  está acotada  $\forall x$ , por lo tanto,  $E$  es acotado. y  $\text{Fr}(E) \subset \text{graf}(\phi) \cup \text{graf}(\psi) \cup (\text{Fr}(D) \times \mathbb{R})$  que tienen todos medida nula. □

**Proposición 2.6.17.** Bajo las hipótesis anteriores, si  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  es continua

$$\int_E f = \int_D dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} dy f(x, y)$$

*Demostración.* Tomamos rectángulos compactos  $R \supset D$  en  $\mathbb{R}^{n-1}$  y  $S \supset [\inf \phi, \sup \psi]$  en  $\mathbb{R}$ , de forma que  $E \subset R \times S$ .

Para  $x \in D$  sea  $S_x = [\phi(x), \psi(x)]$ , entonces  $X_E(x, y) = X_D(x)X_{S_x}(y)$

$$\begin{aligned} \int_E f &= \int_{R \times S} f X_E \stackrel{T.Fubini}{=} \int_R dx \int_S dy f(x, y) X_D(x) X_{S_x}(y) = \\ &= \int_R dx X_D(x) \int_S dy f(x, y) X_{S_x}(y) = \int_D dx \int_{S_x} dy f(x, y) = \int_D dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} dy f(x, y) \end{aligned}$$

□

**Definición 2.6.18.** Una región elemental es un conjunto  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  de la forma siguiente:

- $n = 1$ ,  $E$  es un intervalo compacto.
- $n > 1$ ,  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x \in D, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ , con  $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$  es una región elemental,  $\phi \leq \psi: D \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas.

En esta construcción, admitimos cambios de orden en las variables

**Observación 2.6.19.** Entonces, una integral  $\int_E f$  se reduce al cálculo de  $n$  integrales sucesivas más simples.

**Ejemplo 2.6.20.**  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x), \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$ , entonces,

$$\int_E f = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{\beta(x, y)}^{\alpha(x, y)} dz f(x, y, z)$$

**Ejemplo 2.6.21.** Si tenemos  $E: x^2 + y^2 = a^2$ , podemos reescribirlo como

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x \leq a, -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}$$

Entonces, el área de  $E$  se puede calcular como

$$\begin{aligned} \text{área}(E) &= \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy = \int_{-a}^a dx 2\sqrt{a^2 - x^2} = 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \\ &\stackrel{x=a \sin \theta}{=} 4a^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta = \pi a^2 \end{aligned}$$

**Observación 2.6.22.** En algunos casos, la región de integración se puede presentar como unión finita de regiones elementales, entonces se puede calcular usando aditividad respecto al dominio y el teorema de Fubini en cada región elemental.

## 2.7. Teorema del cambio de variable

**Teorema del cambio de variable (2.7.1)**

Sean  $V \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto, y  $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación inyectiva, de clase  $\mathcal{C}^1$ , y con  $D_\phi(y) \neq 0 \forall y \in V$ . Sea  $U = \phi(V)$  (es decir,  $\phi: V \rightarrow U$  es un difeomorfismo de clase  $\mathcal{C}^1$ ). Si  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable, entonces

$$\int_U f = \int_V (f \circ \phi) |det D_\phi|$$

Aunque podemos utilizar una fórmula más gráfica

$$\int_U f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \cdots dx^n = \int_{\phi^{-1}(U)} f(\phi^1(y), \dots, \phi^n(y)) \left| \det \frac{\partial (x^1, \dots, x^n)}{\partial (y^1, \dots, y^n)} \right| dy^1 \cdots dy^n$$

**Observación 2.7.2.** El teorema es cierto, literalmente, para la integral de Lebesgue, pero para la integral de Riemann hay que suponer que

- $U, V$  abiertos medibles Jordan
- $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  de soporte compacto e integrable Riemann ( $\text{supp}(f) = \overline{\{x | f(x) \neq 0\}}$ )

**Observación 2.7.3.** En el enunciado del teorema, se puede suprimir la hipótesis de  $\det D_\phi(y) \neq 0$  (en ese caso  $\phi^{-1}: U \rightarrow V$  es continua, pero puede no ser de clase  $\mathcal{C}^1$ ).

**Observación 2.7.4.** Debido a la gran importancia práctica, estudiaremos la expresión de la fórmula de cambio de variables en los tres casos más usuales. Denotamos por  $U$  el abierto correspondiente a las coordenadas cartesianas donde se calcula la integral y por  $V = c^{-1}(U)$  el abierto correspondiente a las coordenadas consideradas, siendo  $c$  el difeomorfismo que ejecuta el cambio a cartesianas.

#### Integración en coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$

Tenemos

$$\begin{aligned} c: (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) | x \leq 0\} \\ (r, \phi) &\mapsto (x, y) \equiv (r \cos \phi, r \sin \phi) \end{aligned}$$

con el determinante de la jacobiana  $= r$ .

$$\int_U f(x, y) dx dy = \int_V f(r \cos \phi, r \sin \phi) r dr d\phi$$

#### Integración en coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$

Tenemos

$$\begin{aligned} c: (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) | x \leq 0\} \\ (\rho, \phi, z) &\mapsto (x, y, z) \equiv (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z) \end{aligned}$$

con el determinante de la jacobiana igual a  $\rho$

$$\int_U f(x, y, z) dx dy dz = \int_V f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z) \rho d\rho d\phi dz$$

**Integración en coordenadas esféricas en  $\mathbb{R}^3$** 

Tenemos

$$c: (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) | x \leq 0\}$$

$$(r, \theta, \phi) \mapsto (x, y, z) = (r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta)$$

con el determinante de la jacobiana igual a  $r^2 \sin \theta$ 

$$\int_U f(x, y, z) dx dy dz = \int_V f(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

**Ejemplo 2.7.5.** Sea  $B: x^2 + y^2 + z^2 < a^2$ , en esféricas,  $r < a$ ,

$$\text{vol}(B) = \int_B dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \int_0^a dr r^2 \sin \theta = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

**Demostración del teorema del cambio de variable****Lema 2.7.6.** (1). Sea  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un isomorfismo lineal y sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un rectángulo compacto, entonces,

$$\text{vol}(\varphi(A)) = |\det \varphi| \text{vol}(A).$$

*Demostración.* Toda matriz invertible es producto de matrices elementales y, por tanto, basta demostrarlo con matrices de transformaciones elementales

i) Permutación

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \dots & 1 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad |\det P| = 1.$$

ii) Alargamiento ( $m \neq 0$ )

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & m \end{pmatrix} \quad |\det L| = |m|.$$

iii) Traslación

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad |\det T| = 1.$$

Sea  $A = I_1 \times \dots \times I_n$  un rectángulo compacto,

$$\text{i)} \quad P(A) = I_1 \times \cdots \times I_j \times \cdots \times I_i \times \cdots \times I_n$$

$$\text{vol}(P(A)) = \text{vol}(A) |\det P|.$$

$$\text{ii)} \quad L(A) = I_1 \times \cdots \times I_{n-1} \times mI_n$$

$$\text{vol}(L(A)) = |m| \text{vol}(A) = |\det L| \text{vol}(A).$$

iii) Para  $T(A)$  tenemos

$$\begin{aligned} \text{vol}(T(A)) &= \int_{T(A)} dx_1 \cdots dx_n \stackrel{T.Fubini}{=} \int_{I_n} dx_n \cdots \int_{I_2} dx_2 \int_{I_1+x_2} dx_1 = \\ &= \int_{I_n} dx_n \cdots \int_{I_2} dx_2 \int_{I_1} dx_1 = \text{vol}(A) = \text{vol}(A) |\det T|. \end{aligned}$$

□

**Lema 2.7.7.** (2). Sea  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un isomorfismo lineal y sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  medible Jordan. Entonces,

$$\text{vol}(\phi(A)) = |\det \phi| \text{vol}(A).$$

*Demostración.* Sea  $R \supset A$  un rectángulo compacto.  $X_A$  es integrable Riemann.

Por el criterio de Riemann,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{P}$  partición de  $R$  tal que

$$S(X_A, \mathcal{P}) - s(X_A, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Ahora, definimos  $I$  como la unión de subrectángulos de  $\mathcal{P}$  contenidos en  $A$  y  $E$  como la unión de subrectángulos que cortan a  $A$ , entonces  $I \subseteq A \subseteq E$  y

$$\text{vol}(I) = s(X_A, \mathcal{P}) \leq \text{vol}(A) \leq S(X_A, \mathcal{P}) = \text{vol}(E).$$

Ahora, como  $\phi$  es biyectiva, se tiene que  $\phi(I) \subseteq \phi(A) \subseteq \phi(E)$  y por lo tanto

$$|\det \phi| \text{vol}(I) \leq \text{vol}(\phi(A)) \leq |\det \phi| \text{vol}(E) \implies \text{vol}(\phi(A)) = |\det \phi| \text{vol}(A).$$

□

**Lema 2.7.8.** (3). Si la fórmula del cambio de variable se satisface para  $f = 1$  (constante), entonces se satisface para todo  $f$  integrable Riemann.

*Demostración.* Sea  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  integrable Riemann, y sea  $R \supset U$  un rectángulo compacto. Tomamos  $\mathcal{P}$  una partición de  $R$ , entonces,

$$\begin{aligned} s(f, \mathcal{P}) &= \sum_i m_{R_i} \text{vol}(R_i) = \sum_i \int_{R_i} m_{R_i} \stackrel{\text{hipótesis}}{=} \sum_i \int_{\phi^{-1}(R_i)} (m_{R_i} \circ \phi) |\det \phi| \leq \\ &\leq \sum_i \int_{\phi^{-1}(R_i)} (f \circ \phi) |\det \phi| \stackrel{\text{aditividad}}{=} \int_{\cup \phi^{-1}(R_i)} (f \circ \phi) |\det \phi| \implies \\ &\implies \int_U f \leq \int_V (f \circ \phi) |\det \phi|. \end{aligned}$$

Cambiando  $s$  por  $S$ , obtenemos que  $\int_U f \geq \int_V (f \circ \phi) |\det \phi|$  y por lo tanto,

$$\int_U f = \int_V (f \circ \phi) |\det \phi|.$$

□

**Lema 2.7.9.** (4). La fórmula del cambio de variable se satisface si  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es lineal.

*Demostración.* Por el lema 2, tenemos que

$$\int_{\phi(V)} 1 = \int_V |\det \phi| = \int_V |\det D_\phi|,$$

y por el lema 3, tenemos que

$$\int_{\phi(V)} f = \int_V (f \circ \phi) |\det D_\phi|.$$

□

**Lema 2.7.10.** (5). Si la fórmula del cambio de variable se satisface para  $\psi: W \rightarrow V$  y para  $\phi: V \rightarrow U$ , entonces, se satisface para  $\phi \circ \psi$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \int_{(\phi \circ \psi)(W)} f &= \int_{\phi(\psi(W))} f \stackrel{\text{F.C.V.}}{=} \int_{\psi(W)} (f \circ \phi) |\det D_\phi| \stackrel{\text{F.C.V.}}{=} \\ &= \int_W (f \circ \phi \circ \psi) |\det D_{\phi \circ \psi}| |\det D_\psi| = \int_W (f \circ (\phi \circ \psi)) |\det D_{\phi \circ \psi}| \end{aligned}$$

□

Ahora, haremos un breve repaso antes de proseguir con la demostración.

**Definición 2.7.11.** Recordemos que definíamos la norma de una matriz  $M$  como

$$\|M\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$$

**Proposición 2.7.12.** La norma cumple que

- $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$
- $\|\text{Id}\| = 1$
- $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$

**Definición 2.7.13.** Una aplicación  $\phi: X \rightarrow Y$  diremos que es lipschitziana con constante de Lipschitz  $L \geq 0$ , si

$$\forall x, \bar{x} \quad d(\phi(x), \phi(\bar{x})) \leq L d(x, \bar{x})$$

**Observación 2.7.14.** Se tiene que

- $\text{diámetro}(\phi(E)) \leq L \text{diámetro}(E)$
- $\phi(B(a; r)) \subset B(\phi(a); Lr)$

**Proposición 2.7.15.** Si  $\phi: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , entonces,  $\phi$  es localmente lipschitziana.

*Demostración.* Por el teorema del valor medio, tenemos que, si  $[x, \bar{x}] \subset U$ , entonces

$$\|\phi(\bar{x}) - \phi(x)\| \leq \sup_{z \in [x, \bar{x}]} \|D_\phi(z)\| \|\bar{x} - x\|$$

Por lo tanto, si  $B \subset U$  bola, tal que  $\bar{B} \subset U$ ,  $\phi|_{\bar{B}}$  es lipschitziana con  $L = \sup_{z \in \bar{B}} \|D_\phi(z)\|$ .  $\square$

**Lema 2.7.16.** Sea  $R \subset \mathbb{R}^n$  un rectángulo compacto,  $\forall \varepsilon > 0$ , existe un conjunto finito de cubos compactos  $Q_k \subset R$  tal que

$$R = \bigcup_j Q_k \quad \sum_q \text{vol}(Q_k) < \text{vol}(R) + \varepsilon$$

**Lema 2.7.17.** Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  de medida nula (contenido nulo).  $\forall \varepsilon > 0$  existe una sucesión (finita) de cubos compactos  $Q_j$  tal que

$$C \subset \bigcup_j Q_j \quad \sum_j \text{vol}(Q_j) < \varepsilon$$

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ , existen rectángulos  $R_i$ , tal que

$$C \subset \bigcup_i R_i \quad \sum \text{vol}(R_i) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando ahora,

$$R_i = \bigcup_k Q_k \quad \text{t. q.} \quad \sum_k \text{vol}(Q_k) < 2 \text{vol}(R_i)$$

Por lo tanto,  $\sum \text{vol}(Q_{ij}) < \varepsilon$   $\square$

**Lema 2.7.18.** Sea  $Q \subset \mathbb{R}^n$  un cubo compacto y  $\phi: Q \rightarrow \mathbb{R}^n$  con constante  $L$ . Entonces, existe un cubo  $\bar{Q}$  tal qu

$$\phi(Q) \subseteq \bar{Q} \quad \text{vol}(\bar{Q}) \leq L^n \text{vol}(Q)$$

*Demostración.* Si consideramos la distancia manhattan (de orden 1), tenemos

$$Q = \bar{B}(a; r) \implies \phi(Q) \subseteq \bar{B}(\phi(a); Lr) \equiv \bar{Q}$$

Y se tiene que  $\text{vol}(\bar{Q}) = L^n (2r)^n \leq L^n \text{vol}(Q) = L^n (2r)^n$ .  $\square$

**Lema 2.7.19.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un rectángulo compacto,  $\phi: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función lipschitziana. Si  $N \subset A$  tiene medida nula,  $\phi(N)$  también

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ . Existe una sucesión de cubos compactos  $Q_j \subset \mathbb{R}^n$  tal que

$$N \subset \bigcup_j Q_j \quad \sum_j \text{vol}(Q_j) < \varepsilon$$

Observamos ahora que cada  $Q_j$  tiene diámetro  $\text{vol}(Q_j)^{1/n}$ , por lo tanto,  $Q_j \cap A$  tiene diámetro más pequeño, y  $\phi(Q_j \cap A) \leq L \text{vol}(Q_j)^{1/n}$ . Ahora  $\phi(Q_j \cap A)$  está contenido en un cubo  $\bar{Q}_j$  de diámetro  $L \text{vol}(Q_j)^{1/n}$ , por lo tanto  $\text{vol}(\bar{Q}_j) = L^n \text{vol}(Q_j)$ . Ahora

$$\phi(N) \subset \phi\left(\bigcup_j (Q_j \cap A)\right) = \bigcup_j \phi(Q_j \cap A) \subset \bigcup_j \bar{Q}_j$$

Y tenemos

$$\sum_j \text{vol}(\bar{Q}_j) = L^n \sum_j \text{vol}(Q_j) < L^n \varepsilon$$

□

**Lema 2.7.20.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un abierto y  $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función localmente lipschitziana, Si  $N \subset U$  tiene medida nula,  $\phi(N)$  también.

*Demostración.* Para cada  $x \in N$ , hay una vecindad  $R_x \subset U$  de  $x$  tal que  $\phi|_{R_x}$  es lipschitziana. Los internos  $\overset{\circ}{R}_x$  recubren

$$U = \bigcup_{x \in U} \overset{\circ}{R}_x$$

Ahora, aplicaremos un lema no demostrado en clase, a partir de unrecubrimiento de abiertos, se puede extraer un recubrimiento numerable y por lo tanto un conjunto numerable de los  $\overset{\circ}{R}_x$  recubre  $U$ , es decir

$$U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_{x_i} \quad N = \bigcup (N \cap R_{x_i})$$

Por la segunda igualdad, tenemos que

$$\phi(N) = \bigcup_i \underbrace{\phi(N \cap R_{x_i})}_{\text{medida nula}} \implies \phi(N) \text{ tiene medida nula.}$$

□

**Acabada ya esta pequeña pausa para repasar algunas cosas importantes, continuamos con la demostración**

**Lema 2.7.21.** (0). Sea  $\phi: V \rightarrow U$  un difeomorfismo de clase  $\mathcal{C}^1$  entre abiertos. Sea  $B \subset V$  tal que

- $B$  es medible Jordan
- $\bar{B} \subset V$  y  $\bar{B}$  es compacto.

Entonces,  $A = \phi(B)$  es medible Jordan.

*Demostración.* Tenemos que ver que  $A$  es acotado y que su frontera tiene medida nula. Sabemos que  $A = \phi(B) \subset \phi(\bar{B})$  que es compacto, por lo tanto, es acotado y  $A$  esta acotado. Veamos ahora que su frontera tiene medida nula

$$\text{Fr}_U(\phi(B)) = \phi(\text{Fr}_V(B)) \implies \text{Fr}(A) = \phi(\underbrace{\text{Fr}(B)}_{\text{medida nula}}) \xRightarrow{\phi \text{ loc. lips.}} \text{Fr}(A) \text{ tiene medida nula}$$

□

**Lema 2.7.22.** (6). Sea  $\phi: V \rightarrow U$  un difeomorfismo de clase  $\mathcal{C}^1$ ,  $\psi = \phi^{-1}$ , sea  $B \subset V$  un cubo compacto y sean

$$K := \max_{z \in B} \|D_\psi(\phi(z))\| \quad \Delta := \max_{x, y \in B} \|D_\phi(x) - D_\phi(y)\|$$

Entonces

$$\text{vol}(\phi(B)) \leq |\det D_\phi(x)| (1 + K\Delta)^n \text{vol}(B)$$



*Demostración.* Por el teorema del valor medio, tenemos que

$$\phi_j(y) - \phi_j(x) = D_{\phi_j}(z_j)(y - x)$$

Operando, obtenemos

$$\phi(y) - \phi(x) = D_\phi(x) \left( \text{Id} + D_\psi(\phi(x)) \begin{pmatrix} D_{\phi_1}(z_1) - D_{\phi_1}(x) \\ \vdots \\ D_{\phi_n}(z_n) - D_{\phi_n}(x) \end{pmatrix} \right) (y - x)$$

Tomando normas, tenemos

$$\underbrace{\|\text{Id}\|}_1 \underbrace{\|D_\psi(\phi(x))\|}_{\leq K} \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} D_{\phi_1}(z_1) - D_{\phi_1}(x) \\ \vdots \\ D_{\phi_n}(z_n) - D_{\phi_n}(x) \end{pmatrix} \right\|}_{\leq \Delta} \leq 1 + K\Delta$$

Ahora, el conjunto de estos puntos, tiene diámetro acotado por  $(1 + K\Delta)\text{diámetro}(B)$ . Por lo tanto, su volumen, está acotado por  $(1 + K\Delta)^n \text{diámetro}^n(B) = (1 + K\Delta)^n \text{vol}(B)$  ( $B$  es un cubo). Y el conjunto  $\phi(B)$  de los puntos obtenidos aplicando  $D_\phi(x)$ , tiene volumen (por el lema 2)

$$\text{vol}(\phi(B)) \leq |\det D_\phi(x)| (1 + K\Delta)^n \text{vol}(B)$$

□

**Lema 2.7.23.** (7). Sea  $\phi: V \rightarrow U$  un difeomorfismo de clase  $\mathcal{C}^1$ ,  $B \subset V$  un cubo compacto, entonces,

$$\text{vol}(\phi(B)) \leq \int_B |\det D_\phi|$$

*Demostración.* Como  $\phi$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ ,  $D_\phi$  es continua y, como  $B$  es compacto,  $D_\phi$  es uniformemente continua, por ello,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que  $\|x - y\| < \delta \implies \|D_\phi(x) - D_\phi(y)\| < \varepsilon$ . Consideramos ahora  $Q \subset B$  un cubo compacto de diámetro  $< \delta$ . Ahora, si  $x, y \in Q$ , tenemos

$$\max_Q \|D_\phi(x) - D_\phi(y)\| < \varepsilon$$

Por el lema 6

$$\text{vol}(\phi(Q)) \leq |\det D_\phi(\cdot)| (1 + K\varepsilon)^n \text{vol}(Q) \implies \text{vol}(\phi(Q)) \leq (1 + K\varepsilon)^n \inf_{z \in Q} |\det D_\phi(z)| \text{vol}(Q)$$

Tomamos  $\mathcal{P}$  una partición de  $B$  en  $Q$  lo suficientemente pequeña para que  $\text{diam}(Q) < \delta$

$$\begin{aligned} \text{vol}(\phi(B)) &\leq (1 + K\varepsilon)^n s(|\det D_\phi|, \mathcal{P}) \leq \\ &\leq (1 + K\varepsilon)^n \int_B |\det D_\phi| \xrightarrow{\forall \varepsilon} \text{vol}(\phi(B)) \leq \int_B |\det D_\phi| \end{aligned}$$

□

**Aquí, acabamos los pasos previos para demostrar el teorema del cambio de variable**

Procedemos a la demostración

*Demostración 2.7.1.* Tenemos que

$$f|_{\phi(Q)} \leq \sup_{z \in Q} (\phi(z)) \xrightarrow{\text{lema 7}} \int_{\phi(Q)} f \leq \cdots \leq \sup_{z \in Q} ((f \circ \phi)|\det D_\phi|)(z) \text{vol}(Q)$$

Ahora, Sea  $C \supset B$  un cubo y  $\mathcal{P}$  una partición de  $C$  en subrectángulos suficientemente pequeños, y definimos  $\tilde{C}$  como la unión de los subrectángulos  $Q$  de  $\mathcal{P}$  que cortan a  $V$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_{\phi(\tilde{C})} f \stackrel{\text{aditividad}}{=} \sum_{Q \subset \tilde{C}} \int_{\phi(Q)} \phi(Q) f \leq \sum_{Q \subset \tilde{C}} \sup_{z \in Q} ((f \circ \phi)|\det D_\phi|)(z) \text{vol}(Q) = \\ &= S((f \circ \phi)|\det D_\phi|, \mathcal{P}) \implies \int_A f \leq \int_B (f \circ \phi)|\det D_\phi| \end{aligned}$$

Tomando ahora  $\phi^{-1}$  en lugar de  $\phi$  y  $(f \circ \phi)|\det D_\phi|$  en lugar de  $f$ , y repetimos

$$\int_B (f \circ \phi)|\det D_\phi| \leq \int_A (f \circ \phi \circ \phi^{-1}) \underbrace{|\det D_{\phi \circ \phi^{-1}}| |\det D_{\phi^{-1}}|}_1 = \int_A f$$

Teniendo en cuenta que

$$1 = \det D_{\phi \circ \phi^{-1}} = \det D_\phi \phi^{-1}(y) \det D_{\phi^{-1}}(y)$$

Entonces, hemos visto que

$$\left. \begin{aligned} \int_A f &\leq \int_B (f \circ \phi)|\det D_\phi| \\ \int_A f &\geq \int_B (f \circ \phi)|\det D_\phi| \end{aligned} \right\} \implies \int_A f = \int_B (f \circ \phi)|\det D_\phi|$$

□

## 2.8. Integrales impropias

**Definición 2.8.1.** Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Definimos por *exhaustión* de  $E$  una sucesión  $(E_i)$  de conjuntos medibles Jordan tales que

- $E_i \subset E$
- $E_i \subset E_{i+1}$
- $\bigcup_i E_i = E$

**Definición 2.8.2.** Sea  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ . Sea  $(E_i)$  una exhaustión de  $E$ , y suponemos que  $f$  es integrable Riemann en cada  $E_i$ . Definimos la *integral de Riemann impropia* de  $f$  en  $E$  como el límite

$$\int_E f := \lim_i \int_{E_i} f,$$

suponiendo que exista y no dependa de la exhaustión elegida.

Cuando el límite es finito, decimos que la integral es convergente, y cuando no lo es, decimos que es divergente.

**Proposición 2.8.3.** Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible Jordan y sea  $(E_i)$  una exhaustión de  $E$ . Entonces,

- (i)  $\lim_i \text{vol}(E_i) = \text{vol}(E)$ .
- (ii) Si  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable Riemann, entonces  $f$  es integrable Riemann en cada  $E_i$  y  $\lim_i \int_{E_i} f = \int_E f$ .

**Proposición 2.8.4.** Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f \geq 0$ , entonces el límite  $\lim_i \int_{E_i} f$  no depende de la exhaustión  $(E_i)$  considerada.

**Lema 2.8.5.** *Lema de la cebolla.* Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto no vacío. Existe una sucesión  $(V_i)$  de conjuntos abiertos medibles Jordan, con  $\overline{V_i} \subset U$  tales que

- $\overline{V_i}$  es compacto,
- $\overline{V_i} \subset V_{i+1}$ ,
- $\bigcup_i V_i = U$ .

**Definición 2.8.6.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto. Decimos que una función  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  es *localmente integrable Riemann* si todo punto  $x \in U$  tiene un entorno abierto  $V_x$  tal que  $V_x$  es medible Jordan y  $f|_{V_x}$  es integrable Riemann.

**Proposición 2.8.7.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y sea  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  localmente integrable Riemann. Entonces,  $f$  es integrable Riemann sobre todo subconjunto compacto medible Jordan  $A \subset U$ .

**Definición 2.8.8.** Decimos que una función  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  es *localmente acotada* si todo punto  $x \in X$  tiene un entorno  $V_x$  tal que  $f|_{V_x}$  es acotada.

**Proposición 2.8.9.**  $f$  es localmente integrable Riemann si y solo si  $f$  es localmente acotada y  $\text{disc}(f)$  tiene medida nula.

En particular, toda función continua sobre un abierto es localmente integrable Riemann.

**Corolario 2.8.10.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y sea  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  localmente integrable Riemann y positiva. La integral impropia  $\int_U f$  existe, entendida como el límite  $\lim_i \int_{V_i} f = \sup_i \int_{V_i} f$ , donde  $(V_i)$  es una exhaustión cualquiera como la dada por el lema de la cebolla.

**Observación 2.8.11.** Si  $f$  no es positiva, se puede estudiar su integrabilidad a través de la descomposición  $f = f_+ - f_-$ . De esta forma, se puede estudiar su convergencia uniforme y deducir que si  $\int_U |f| < +\infty$ , entonces la integral impropia  $\int_U f$  es convergente.

**Observación 2.8.12.** Recíprocamente, se puede demostrar que si  $\int_U f$  es convergente, entonces  $\int_U |f|$  es convergente. Por tanto, para las integrales impropias de funciones sobre conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  ( $n > 1$ ), las nociones de convergencia y convergencia absoluta coinciden.



## Tema 3

# Integrales de línea y de superficie

### 3.1. Longitud de una curva

**Definición 3.1.1.** Denominamos camino o curva parametrizada a una aplicación continua  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo no degenerado.

La imagen  $C := \gamma(I) \equiv \text{Im}(\gamma) \subset \mathbb{R}^n$  la llamamos (vulgarmente) curva, aunque no siempre lo es.

**Observación 3.1.2.** De aquí en adelante, a no ser que se especifique lo contrario, supondremos que  $I$  es un intervalo compacto.

**Definición 3.1.3.** Sea  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y sea  $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_n\}$  una partición de  $[a, b]$ . Entonces, los  $\gamma(t_i)$  son los vértices de una poligonal, que denominamos poligonal de longitud y cuya longitud es

$$L(\gamma, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^N \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|.$$

**Observación 3.1.4.** Refinar la partición aumenta la longitud. (Demostración por la desigualdad triangular).

**Definición 3.1.5.** Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva. La longitud de  $\gamma$  es

$$L(\gamma) = \sup_{\mathcal{P} \subset I} L(\gamma, \mathcal{P}) \in [0, \infty].$$

**Observación 3.1.6.** Si  $L(\gamma) = 0$  entonces  $\gamma$  es constante.

**Definición 3.1.7.** Diremos que un camino es rectificable, cuando su longitud es finita, es decir, cuando

$$L(\gamma) < +\infty.$$

**Proposición 3.1.8.** Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva lipschitziana, entonces  $\gamma$  es rectificable.

*Demostración.* Como  $\gamma$  es lipschitziana, entonces  $\exists c \geq 0$  tal que

$$\|\gamma(t) - \gamma(s)\| \leq c|t - s| \quad \forall t, s \in I.$$

Tomamos ahora, una partición  $\mathcal{P}$  de  $I$ , entonces, se cumple que

$$\begin{aligned} L(\gamma, \mathcal{P}) &= \sum_i \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq \sum_i c|t_i - t_{i-1}| = \\ &= c \sum_i (t_i - t_{i-1}) \implies L(\gamma, \mathcal{P}) \leq c(b - a) \implies L(\gamma) \leq c(b - a) < +\infty. \end{aligned}$$

(Suponiendo que  $I = [a, b]$ ). □

**Observación 3.1.9.** Hay caminos (continuos) definidos en un intervalo compacto con longitud infinita.

**Proposición 3.1.10.** Sea  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino y sea  $a < c < b$ , entonces

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[a, c]}) + L(\gamma|_{[c, b]}).$$

*Demostración.* Consideramos  $\mathcal{P}$ , una partición cualquiera de  $[a, b]$ , ahora definimos  $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{c\}$ ,  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}' \cap [a, c]$  partición de  $[a, c]$  y  $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}' \cap [c, b]$  partición de  $[c, b]$ . Ahora, se tiene que

$$L(\gamma, \mathcal{P}) \leq L(\gamma, \mathcal{P}') = L(\gamma|_{[a, c]}, \mathcal{P}_1) + L(\gamma|_{[c, b]}, \mathcal{P}_2) \leq L(\gamma|_{[a, c]}) + L(\gamma|_{[c, b]}).$$

Por lo tanto,  $L(\gamma) \leq L(\gamma|_{[a, c]}) + L(\gamma|_{[c, b]})$ .

Sea  $\mathcal{P}_1$  una partición de  $[a, c]$  y  $\mathcal{P}_2$  una partición de  $[c, b]$ . Definimos  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ , entonces

$$L(\gamma|_{[a, c]}, \mathcal{P}_1) + L(\gamma|_{[c, b]}, \mathcal{P}_2) = L(\gamma, \mathcal{P}) \leq L(\gamma).$$

De donde concluimos que

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[a, c]}) + L(\gamma|_{[c, b]}).$$

□

**Proposición 3.1.11.** *Continuidad de la longitud.* Sea  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino rectificable, para cada  $a \leq t \leq b$  definimos

$$l(t) = L(\gamma|_{[a, t]}), \quad (l(a) := 0).$$

Entonces,  $l$  es creciente y continua. Si  $\gamma$  no es constante en ningún subintervalo de  $[a, b]$ , entonces,  $l$  es estrictamente creciente.

**Definición 3.1.12.** Sean  $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino y  $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  un homeomorfismo. Entonces, la composición  $\tau = \sigma \circ \varphi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un camino, y diremos que  $\sigma$  y  $\tau$  son caminos equivalentes.

También diremos que  $\tau$  es el camino parametrizado de  $\sigma$  para la reparametrización  $\varphi$ .

**Observación 3.1.13.**  $\sigma$  y  $\tau$  recorren la misma curva,  $\text{Im}(\sigma) = \text{Im}(\tau) = \text{Im}(\sigma \circ \varphi)$ .

**Observación 3.1.14.** Si  $\varphi$  es creciente,  $\sigma$  y  $\tau$  tienen la misma orientación, si  $\varphi$  es decreciente,  $\sigma$  y  $\tau$  tienen orientaciones opuestas.

**Proposición 3.1.15.** Si  $\sigma$  y  $\tau$  son dos caminos equivalentes, tienen la misma longitud:

$$L(\sigma) = L(\tau).$$

*Demostración.* Consideramos  $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  homeomorfismo tal que  $\tau = \sigma \circ \varphi$  (existe por la definición de caminos equivalentes). Tomamos ahora  $Q = \{t_0, \dots, t_n\}$ , una partición de  $[c, d]$ , entonces,  $\varphi(Q)$  es una partición de  $[a, b]$ , ahora, se tiene que

$$\begin{aligned} L(\tau, Q) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \|(\sigma \circ \varphi)(t_i) - (\sigma \circ \varphi)(t_{i-1})\| = \sum_i \|\sigma(\varphi(t_i)) - \sigma(\varphi(t_{i-1}))\| = \\ &= L(\sigma, \varphi(Q)) \leq L(\sigma) \stackrel{\text{supremo}}{\implies} L(\sigma \circ \varphi) \leq L(\sigma). \end{aligned}$$

Cambiando  $\varphi$  por  $\varphi^{-1}$ , obtenemos  $L(\sigma) \leq L(\sigma \circ \varphi)$ .  $\square$

**Proposición 3.1.16.** Si  $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\tau: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  son caminos inyectivos con la misma imagen  $C$ , entonces, son equivalentes.

*Demostración.* Consideramos  $\sigma: [a, b] \rightarrow C$  continua (porque  $\sigma$  continua en  $\mathbb{R}^n$ ). Ahora,  $[a, b]$  compacto  $\implies C$  compacto (la imagen de un intervalo cerrado es cerrado)  $\implies \sigma$  es un homeomorfismo y  $\varphi(t) := \sigma^{-1}(\tau(t))$ .  $\square$

**Observación 3.1.17.** Los resultados anteriores sugieren que la longitud de una curva es una propiedad de  $C$  más que una propiedad de  $\sigma$ , es decir, es una propiedad más analítica que geométrica. Si  $C \subset \mathbb{R}^n$  es una “curva” parametrizable por un camino inyectivo, podemos definir la longitud de  $C$  como  $L(C) = L(\sigma)$  donde  $\sigma$  es cualquier parametrización inyectiva de  $C$ .

## Integración de funciones vectoriales

**Definición 3.1.18.** Sea  $E \subset \mathbb{R}^m$  un conjunto medible Jordan y  $\vec{f}: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tenemos que

$$\vec{f} = (f_1, \dots, f_n).$$

Si todas las  $f_i$  son integrables, definimos

$$\int_E \vec{f} = \left( \int_E f_1, \dots, \int_E f_n \right) \in \mathbb{R}^n.$$

**Proposición 3.1.19.** *Regla de Barrow.* Sea  $E = [a, b]$  un intervalo y  $\vec{f}: E \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función. Si  $\vec{f}$  tiene una primitiva  $\vec{F}$  ( $\vec{F}' = \vec{f}$ ), entonces

$$\int_a^b \vec{f} = \vec{F}(b) - \vec{F}(a).$$

**Proposición 3.1.20.** Sea  $\vec{f}: E \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función cualquiera, si  $\vec{f}$  es integrable,  $\|\vec{f}\|$  también y

$$\left\| \int_E \vec{f} \right\| \leq \int_E \|\vec{f}\|,$$

considerando la norma euclidiana.

*Demostración.* Tenemos que  $\|\vec{f}\| = (f_1^2 + \dots + f_n^2)^{1/2}$ , que es integrable por ser composición de integrables con continuidad.

Sea ahora  $\vec{a} = \int_E \vec{f}$ , por la desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{f}(\cdot) &\leq \|\vec{a}\| \|\vec{f}(\cdot)\| \implies \|\vec{a}\| \int_E \|\vec{f}(t)\| dt \geq \int_E (\vec{a} \cdot \vec{f}(t)) dt = \\ &= \int_E \sum_{i=1}^n (a_i f_i(t)) dt = \sum_i a_i \overbrace{\int_E f_i(t) dt}^{a_i} = \|\vec{a}\|^2. \end{aligned}$$

Si  $\|\vec{a}\| \neq 0$ , tenemos que

$$\|\vec{a}\| \leq \int_E \|\vec{f}(t)\| dt \implies \left\| \int_E \vec{f} \right\| \leq \int_E \|\vec{f}\|.$$

□

**Proposición 3.1.21.** Si  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ , entonces es rectificable y su longitud es

$$L(\gamma) = \int_I \|\gamma'\|,$$

considerando la norma euclidiana.

*Demostración.* Consideremos  $\mathcal{P}$  una partición de  $I$ . Por la regla de Barrow,

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \implies \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma' \right\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'\|.$$

Si sumamos,

$$L(\gamma, \mathcal{P}) \leq \int_I \|\gamma'\| \xrightarrow{\text{supremo}} L(\gamma) \leq \int_I \|\gamma'\|.$$

Por otro lado,  $\gamma'$  continua en un compacto  $\implies \gamma'$  uniformemente continua. Sea  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que  $|s - t| < \delta \implies \|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| < \varepsilon$  para todo  $s, t \in I$ . Si  $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_n\}$  es una partición de  $I$  con subintervalos de longitud  $< \delta$ , entonces

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'\| \leq \overbrace{\dots}^{\text{dem. no en clase}} \leq \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + 2\varepsilon(t_i - t_{i-1}).$$

Si  $I = [a, b]$  y sumamos,

$$\int_I \|\gamma'\| \leq L(\gamma, \mathcal{P}) + 2\varepsilon(b - a) \leq L(\gamma) + \overbrace{2\varepsilon(b - a)}^{\text{tan pequeño como queramos}}.$$

Por tanto  $\int_I \|\gamma'\| \leq L(\gamma)$ , pero ya hemos visto que  $\int_I \|\gamma'\| \geq L(\gamma)$  es decir, que  $\int_I \|\gamma'\| = L(\gamma)$ . □

**Observación 3.1.22.** La fórmula anterior es igualmente válida si  $\gamma$  es  $\mathcal{C}^1$  a trozos.

**Definición 3.1.23.** Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino definido en un intervalo no compacto. Podemos definir la longitud de  $\gamma$ ,  $L(\gamma)$ , como el supremo de las longitudes  $L(\gamma|_k)$ , donde  $k \subset I$  es un subintervalo compacto de  $I$ .

Cuando  $\gamma$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  definida a trozos, la longitud viene dada por  $\int_I \|\gamma'\|$  (tomada como integral impropia si es necesario).



**Definición 3.1.24.** Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  una curva regular de clase  $\mathcal{C}^1$ . Si  $C$  es la imagen de una parametrización inyectiva  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiremos la longitud de  $C$  como la longitud de  $\gamma$ .

Si la imagen de  $\gamma$  es todo  $C$  salvo en un número finito de puntos, también diremos que la longitud de  $C$  es la longitud de  $\gamma$ .

Si  $C$  es la unión disjunta de un número finito de curvas como las precedentes, definiremos la longitud de  $C$  como la suma de las longitudes de estas.

**Ejemplo 3.1.25.** Consideremos  $C: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$  y

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi) &\rightarrow C \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (x_0 + R \cos(t), y_0 + R \sin(t)). \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -R \sin(t) \\ R \cos(t) \end{pmatrix} \quad \|\gamma'(t)\| = R.$$

Y, por último,

$$L(C) = L(\gamma) = \int_0^{2\pi} R \, dt = 2\pi R.$$

## 3.2. Integrales de línea de funciones escalares

**Definición 3.2.1.** Sea  $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos,  $C = \sigma(I)$  y  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ . Definimos la integral de línea de  $f$  a lo largo de  $\sigma$  como

$$\int_{\sigma} f \, dl := \int_I f(\sigma(s)) \|\sigma'(s)\| \, ds.$$

La integral existe, por ejemplo, si  $I$  es compacto y  $f$  continua.

**Observación 3.2.2.** Cuando  $f$  es 1, recuperamos la longitud  $\int_{\sigma} dl = L(\sigma)$ .

**Proposición 3.2.3.** *Invariancia bajo reparametrizaciones.* Si tenemos  $\sigma: I \rightarrow C$  y  $\tau: J \rightarrow C$  dos curvas equivalentes, y consideramos una función  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\int_{\tau} f \, dl = \int_{\sigma} f \, dl.$$

*Demostración.* Consideramos  $\varphi: I \rightarrow J$  un difeomorfismo de clase  $\mathcal{C}^1$  tal que  $\sigma = \tau \circ \varphi$ .

$$\begin{aligned} \int_{\tau} f \, dl &= \int_J f(\tau(t)) \|\tau'(t)\| \, dt \stackrel{TCV}{=} \int_I f(\underbrace{\tau(\varphi(s))}_{\sigma(s)}) \overbrace{\|\tau'(\varphi(s))\|}^{\|(\tau \circ \varphi)'(s)\| = \|\sigma'(s)\|} \|\varphi'(s)\| \, ds = \\ &= \int_I f(\sigma(s)) \|\sigma'(s)\| \, ds = \int_{\sigma} f \, dl. \end{aligned}$$

□

**Definición 3.2.4.** Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  una curva regular. Si  $C$  es la imagen de una parametrización inyectiva  $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , llamamos integral de línea de  $f$  a lo largo de  $C$  a

$$\int_C f \, dl := \int_\sigma f \, dl.$$

**Observación 3.2.5.** Está bien definido y no depende de la parametrización tomada.

**Observación 3.2.6.** Se pueden hacer las mismas consideraciones que en 3.1.24.

### 3.3. Integrales de línea de campos vectoriales

**Definición 3.3.1.** Sean  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo,  $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos con  $C = \sigma(I)$ , por último, sea  $\vec{f}: C \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial definido en un conjunto abierto  $W \supset C$ . Definimos la integral de línea o de circulación de  $\vec{f}$  a lo largo de  $\sigma$  como

$$\int_\sigma \vec{f} \, d\vec{l} = \int_I \vec{f}(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s) \, ds.$$

(donde  $\cdot$  marca el producto escalar euclidiano en  $\mathbb{R}^n$ ).

**Proposición 3.3.2.** *Invariancia bajo reparametrizaciones.* Sea  $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino, sea  $\varphi: I \rightarrow J$  un difeomorfismo de clase  $\mathcal{C}^1$ . Consideramos el camino reparametrizado  $\tau = \sigma \circ \varphi^{-1}$ . Entonces, si  $\vec{f}$  es una función cualquiera,

$$\int_\tau \vec{f} \, d\vec{l} = \pm \int_\sigma \vec{f} \, d\vec{l},$$

donde el signo depende del signo de  $\varphi'$ .

*Demostración.* Ejercicio. □

**Definición 3.3.3.** Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  una curva regular parametrizada por una parametrización regular inyectiva. Una orientación de  $C$  es una clase de equivalencia de parametrizaciones de  $C$ , donde se considera que dos parametrizaciones son equivalentes cuando la reparametrización tiene una derivada positiva. Así mismo, diremos que una curva está orientada cuando se ha tomado una orientación.

**Observación 3.3.4.** Suponemos  $C$  orientada por una parametrización regular inyectiva  $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $C = \sigma(I)$ ). Los vectores tangentes  $\sigma'(s) \in T_{\sigma(s)}C$  definen orientaciones de los respectivos espacios tangentes. Esta orientación no cambia si se usa un camino reparametrizado  $\tau = \sigma \circ \varphi^{-1}$  con  $\varphi' > 0$ .

**Observación 3.3.5.** Una curva regular compleja puede requerir 2 parametrizaciones regulares para recubrirla completamente. En tal caso, para orientar  $C$ , se requiere que, en la imagen común de las 2 parametrizaciones, las orientaciones coincidan.

**Ejemplo 3.3.6.** Una curva conexa tiene exactamente dos orientaciones.

**Ejemplo 3.3.7.** Una curva no conexa se orienta orientando cada componente conexa.

**Definición 3.3.8.** Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  una curva orientada por una parametrización regular inyectiva  $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sea  $\vec{f}: C \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Definimos la integral de línea o circulación de  $\vec{f}$  a lo largo de  $C$

$$\int_C \vec{f} d\vec{l} = \int_\sigma \vec{f} d\vec{l}.$$

**Observación 3.3.9.** Si  $C$  es una curva regular orientada y  $\sigma$  la parametriza toda excepto un número finito de puntos, también escribiremos

$$\int_C \vec{f} d\vec{l} = \int_\sigma \vec{f} d\vec{l}.$$

Si  $C$  es unión disjunta de un número finito de curvas como la anterior, igualmente calculamos la circulación al largo de cada una y sumamos.

**Observación 3.3.10.** Si  $C^\circ$  es la curva  $C$  con orientación opuesta, entonces

$$\int_{C^\circ} \vec{f} d\vec{l} = - \int_C \vec{f} d\vec{l}.$$

**Observación 3.3.11.** Es habitual usar la notación

$$\int_C \vec{f} d\vec{l} = \int_C (f_1 dx_1 + \cdots + f_N dx_N).$$

Si  $C$  es cerrada (definición más adelante), usaremos

$$\oint \vec{f} d\vec{l} = \int_C \vec{f} d\vec{l}.$$

**Proposición 3.3.12.** Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  una curva regular orientada,  $p \in C$ . Respecto al producto escalar estándar de  $\mathbb{R}^n$ , el espacio tangente  $T_p C$  tiene un único vector tangente unitario  $\vec{t}(p)$  perteneciente a la orientación de  $C$ . Es el vector tangente unitario a  $C$  en  $p$ .

Si  $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una parametrización regular inyectiva correspondiente a la orientación de  $C$ , entonces

$$\vec{t}(\sigma(s)) = \frac{\sigma'(s)}{\|\sigma'(s)\|} \in T_{\sigma(s)} C.$$

**Observación 3.3.13.** Orientar  $C$  equivale a hacer una elección continua de un vector tangente unitario sobre  $C$ .

**Definición 3.3.14.** Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  una curva y  $\vec{f}: C \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial. Llamamos componente tangencial de  $\vec{f}$  a la función

$$f_t = \vec{f} \cdot \vec{t},$$

( $f_t: C \rightarrow \mathbb{R}$ ).

**Observación 3.3.15.** Si  $E$  es un e.v. euclidiano y  $F \subseteq E$ ,  $E = F \oplus F^\perp$ . Si  $F = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ ,  $\Pi_F(x) = \langle x, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle x, u_r \rangle u_r$ , lo que quiere decir que

$$\mathbb{R}^n = T_p C \oplus T_p C^\perp \quad \text{y} \quad \Pi_{T_p C}(\vec{f}(p)) = \underbrace{\langle \vec{f}(p), \vec{t}(p) \rangle}_{f_t(p)} \vec{t}(p).$$

**Proposición 3.3.16.** Bajo las condiciones anteriores,

$$\int_C \vec{f} d\vec{l} = \int_C f_t dl.$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \int_C \vec{f} d\vec{l} &= \int_{\sigma} \vec{f} d\vec{l} = \int_I \vec{f}(\sigma(s)) \sigma'(s) ds = \int_I \underbrace{\vec{f}(\sigma(s)) \frac{\overbrace{\sigma'(s)}^{\vec{t}(\sigma(s))}}{\|\sigma'(s)\|}}_{f_t(\sigma(s))} \|\sigma'(s)\| ds = \\ &= \int_I f_t(\sigma(s)) \|\sigma'(s)\| ds = \int_{\sigma} f_t ds = \int_C f_t dl. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 3.3.17.** En  $\mathbb{R}^2$  consideramos  $C: y = x^3$  desde (1,1) a (2,8) y  $\vec{F}(x, y) = (6x^3y, 10xy^2)$ . Consideramos la parametrización  $\gamma(x) = (x, x^3)$  para  $x \in [1, 2]$ , entonces

$$\int_C \vec{F} d\vec{l} = \dots = \frac{22245}{7} \approx 3177,9.$$

### 3.4. integral de superficie de funciones escalares

**Definición 3.4.1.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^2$  abierto y  $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una superficie parametrizada con  $M = \sigma(U)$ . Denotamos por  $\vec{T}_1 = D_1 \sigma$  y  $\vec{T}_2 = D_2 \sigma$ , a los vectores tangentes a la parametrización, es decir

$$\vec{J}_{\sigma} = \begin{pmatrix} \vec{T}_1 & \vec{T}_2 \end{pmatrix}$$

Diremos que  $\sigma$  es regular cuando  $\text{rg}(J_{\sigma}) = 2$  en todos los puntos. Esto, es equivalente a que  $\vec{T}_1$  y  $\vec{T}_2$  sean linealmente independientes que ocurre si y solo si la matriz de Gram

$$G = \begin{pmatrix} \langle \vec{T}_1, \vec{T}_1 \rangle & \langle \vec{T}_1, \vec{T}_2 \rangle \\ \langle \vec{T}_2, \vec{T}_1 \rangle & \langle \vec{T}_2, \vec{T}_2 \rangle \end{pmatrix}$$

es invertible en todo punto. Representaremos por  $g := \det G$ .

**Definición 3.4.2.** Sea  $M$  una superficie parametrizada por  $\sigma$  y sea  $f: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos la integral de superficie de  $f$  sobre/a lo largo de  $\sigma$  como

$$\int_{\sigma} f dS := \int_U f(\sigma(w)) \sqrt{\det G(w)} dw_1 dw_2.$$

**Observación 3.4.3.** Siempre supondremos que  $\sigma \in \mathcal{C}^1$ .

**Observación 3.4.4.** Si suponemos que  $U$  es un abierto medible Jordan,  $f$  es continua,  $\sqrt{\det G(w)}$  acotado, podemos asegurar que la integral existe.

**Lema 3.4.5.** Sean  $\varphi: U \rightarrow \tilde{U}$  difeomorfismo de clase  $\mathcal{C}^1$ ,  $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una superficie parametrizada. Consideramos  $\tilde{\sigma} := \sigma \circ \varphi^{-1}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\int_{\tilde{\sigma}} f dS = \int_{\sigma} f dS.$$

**Observación 3.4.6.** Eso quiere decir que la integral de superficie no está referida a la parametrización, sino al objeto parametrizado.

**Definición 3.4.7.** Sea  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  una superficie regular. Si  $M$  es la imagen de una parametrización regular inyectiva  $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , denominamos integral de superficie de una función  $f$  sobre  $M$  a

$$\int_M f \, dS := \int_\sigma f \, dS.$$

**Observación 3.4.8.** Ya hemos visto que no depende del  $\sigma$  elegido.

**Observación 3.4.9.** Si  $M$  es, a parte de un conjunto “negligible” (unión finita de puntos y curvas regulares conexas), la imagen de una parametrización regular inyectiva, definimos igualmente

$$\int_M f \, dS = \int_\sigma f \, dS.$$

**Observación 3.4.10.** Si  $M$  es unión finita disjunta de superficies como las de la observación 3.4.9, calculamos

$$\int_M f \, dS = \sum_i \int_{M_i} f \, dS.$$

**Definición 3.4.11.** Definimos el área de  $M$  (una superficie regular) como

$$\text{área}(M) := \int_M dS.$$

**Lema 3.4.12.** Sea  $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie parametrizada. Entonces

$$\int_\sigma f \, dS = \int_U f(\sigma(w)) \|\vec{T}_1 \times \vec{T}_2\| \, dw_1 \, dw_2.$$

*Demostración.*

$$\begin{vmatrix} \vec{T}_1 \cdot \vec{T}_1 & \vec{T}_1 \cdot \vec{T}_2 \\ \vec{T}_2 \cdot \vec{T}_1 & \vec{T}_2 \cdot \vec{T}_2 \end{vmatrix} = \|\vec{T}_1\|^2 \|\vec{T}_2\|^2 - \|\vec{T}_1\|^2 \|\vec{T}_2\|^2 \cos^2 \theta = \|\vec{T}_1\|^2 \|\vec{T}_2\|^2 \sin^2 \theta = \|\vec{T}_1 \times \vec{T}_2\|^2.$$

□

**Ejemplo 3.4.13.** Consideramos  $M: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  una esfera en  $\mathbb{R}^3$ . Vamos a calcular su área. Consideramos la parametrización

$$\sigma(\theta, \phi) = (R \cos \phi \sin \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \theta),$$

definida sobre  $U = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ , entonces

$$J_\sigma(T_\theta, T_\phi) = \begin{pmatrix} R \cos \phi \cos \theta & -R \sin \phi \sin \theta \\ R \sin \phi \cos \theta & R \cos \phi \sin \theta \\ -R \sin \theta & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad g = \sqrt{\det G} = R^2 |\sin \theta| \stackrel{\theta \in (0, \pi)}{=} R^2 \sin \theta,$$

$$\begin{aligned} \text{área}(M) &= \int_M dS = \int_\sigma dS = \int_U R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi = R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = \\ &= R^2 2\pi \left[ -\cos \theta \right]_0^\pi = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

### 3.5. Integrales de superficie en campos vectoriales (en $\mathbb{R}^3$ )

**Definición 3.5.1.** Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  abierto,  $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie parametrizada regular con  $M = \sigma(U)$ . Sea  $J_\sigma = (\vec{T}_1, \vec{T}_2)$ , con  $\vec{T}_i = D_i \sigma$ . Sea  $\vec{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial a lo largo de  $M$ . Denominamos integral de superficie de  $\vec{f}$  sobre  $\sigma$  (o el flujo de  $\vec{f}$  a través de  $\sigma$ ) a

$$\int_\sigma \vec{f} d\vec{S} := \int_U \vec{f}(\sigma(u)) (\vec{T}_1 \times \vec{T}_2) du_1 du_2.$$

**Observación 3.5.2.** Suponiendo  $\vec{f}$  continua,  $U$  abierto medible Jordan,  $\sigma$  con derivadas parciales acotadas (p.e.  $\sigma \in \mathcal{C}^1$ ), podemos asegurar que la integral anterior existe.

**Lema 3.5.3.** Sea  $\varphi: U \rightarrow \tilde{U}$  un difeomorfismo entre abiertos conexos de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie parametrizada regular y sea  $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \varphi^{-1}$  su reparametrización. Entonces

$$\int_{\tilde{\sigma}} \vec{f} d\vec{S} = \pm \int_\sigma \vec{f} d\vec{S}.$$

Donde el signo es el mismo que el de  $\det J_\varphi$ .

**Definición 3.5.4.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular parametrizada por una parametrización regular inyectiva. Una orientación de  $M$  es una clase de equivalencia de parametrizaciones donde se dice que dos parametrizaciones son equivalentes si el difeomorfismo que nos permite obtener una reparametrización de la otra tiene jacobiana positiva.

**Definición 3.5.5.** Diremos que una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  está orientada cuando hemos elegido una orientación. A partir de la orientación de  $M$  dada por  $\sigma$ , cada  $T_p M$  está orientado por la base  $(\vec{T}_1 \quad \vec{T}_2)$ . Esta orientación no cambia si usamos otra parametrización de  $M$  correspondiente a la misma orientación que  $\sigma$ .

**Observación 3.5.6.** En general,  $M$  requiere dos parametrizaciones inyectivas regulares para recubrirla totalmente. Entonces, para orientar  $M$ , se requiere que estas parametrizaciones definan las mismas orientaciones de los espacios tangentes de los puntos que recubren comúnmente.

**Definición 3.5.7.** Una superficie se dice que es orientable cuando tiene una orientación, así mismo, una superficie orientable, diremos que está orientada cuando se ha elegido una orientación.

**Observación 3.5.8.**

- Una superficie conexa orientable tiene 2 orientaciones.
- Una superficie *NO* conexa se orienta orientando cada componente conexa.

**Observación 3.5.9.** Hay superficies no orientables, como por ejemplo, la banda de Möbius.

**Definición 3.5.10.** Sea  $M$  una superficie orientada. Suponemos que es la imagen de una parametrización inyectiva regular  $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  correspondiente a la orientación de  $M$ . Sea  $\vec{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial. La integral de superficie, o flujo de  $\vec{f}$  a través de  $M$  es

$$\int_M \vec{f} d\vec{S} := \int_\sigma \vec{f} d\vec{S}.$$

**Observación 3.5.11.** Si  $M$  es, salvo un conjunto “negligible” de puntos, la imagen de una parametrización de estas, también definimos el flujo como

$$\int_M \vec{f} d\vec{S} := \int_\sigma \vec{f} d\vec{S}.$$

Si  $M$  es unión disjunta de un número finito de superficies como la anterior, el flujo se calcula para cada una y se suma.

**Observación 3.5.12.** Si  $M^\circ$  es  $M$  con la orientación opuesta,

$$\int_{M^\circ} \vec{f} d\vec{S} = - \int_M \vec{f} d\vec{S}.$$

**Observación 3.5.13.** Si  $M$  es cerrada, a veces, se escribe

$$\oint_M \vec{f} d\vec{S} = \int_M \vec{f} d\vec{S}.$$

**Definición 3.5.14.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular orientada,  $p \in M$ , el subespacio  $T_p M \subset T_p \mathbb{R}^3$  está orientado y tiene dimensión 2, y por tanto, su ortogonal  $(T_p M)^\perp$  también está orientado y tiene dimensión 1. Respecto al producto escalar estándar de  $\mathbb{R}^3$ , el espacio  $(T_p M)^\perp$ , tiene un único vector normal *unitario*  $\vec{n}(p)$ , correspondiente a la orientación del espacio. Es el vector normal unitario a  $M$  en  $p$ .

**Observación 3.5.15.** Si  $M$  está parametrizada por  $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces

$$\vec{n}(\sigma(u)) = \frac{\vec{T}_1 \times \vec{T}_2}{\|\vec{T}_1 \times \vec{T}_2\|}.$$

Orientar una superficie en  $\mathbb{R}^3$  equivale a hacer una elección continua de un vector normal unitario sobre  $M$ .

Por este motivo, se dice que una superficie tiene “dos caras”.

**Definición 3.5.16.** Sea  $\vec{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial. La componente normal de  $\vec{f}$  sobre  $M$  es

$$f_n = \vec{f} \cdot \vec{n},$$

donde  $\vec{n}$  es el vector normal unitario de  $M$ .

**Proposición 3.5.17.** Bajo las condiciones anteriores,

$$\int_M \vec{f} d\vec{S} = \int_M f_n dS.$$

*Demostración.*

$$\int_M \vec{f} d\vec{S} = \int_U \underbrace{\vec{f}(\sigma(u))}_{f_n(\sigma(u))} \underbrace{\frac{\vec{T}_1 \times \vec{T}_2}{\|\vec{T}_1 \times \vec{T}_2\|}}_{\vec{n}} \|\vec{T}_1 \times \vec{T}_2\| du_1 du_2 = \int_\sigma f_n(\sigma(u)) dS = \int_M f_n dS.$$

□

**Ejemplo 3.5.18.** Sea  $M : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  orientada “hacia el exterior”, consideramos la función  $\vec{f} = r^\alpha \vec{r}$ , donde  $\vec{r} = (x, y, z)$ , y  $r = \|\vec{r}\|$ , es decir,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Tomamos la parametrización de  $M$  en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \sigma : U &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) &\mapsto (R \cos \phi \sin \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \theta). \end{aligned}$$

Entonces,  $J_\sigma = \begin{pmatrix} \vec{T}_\theta & \vec{T}_\phi \end{pmatrix}$  y

$$\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\phi = R^2 \sin \theta \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \vec{T}_\theta \times \vec{T}_\phi = R \sin \theta \sigma(\theta, \phi).$$

Como apunta “hacia afuera”,

$$\begin{aligned} \int_M \vec{f} d\vec{S} &= + \int_\sigma \vec{f} d\vec{S} = \int_U \vec{f}(\sigma(\theta, \phi)) (\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\phi) d\theta d\phi = \int_U R^{\alpha+3} \sin \theta d\theta d\phi = \\ &= R^{\alpha+3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin \theta}_2 = 4\pi R^{\alpha+3}. \end{aligned}$$

Por otro lado,  $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$

$$f_n = \vec{f} \cdot \vec{n} = r^\alpha \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = r^{\alpha+1} = R^{\alpha+1}.$$

Ahora, simplemente

$$\int_M \vec{f} d\vec{S} = \int_M f_n dS = R^{\alpha+1} \underbrace{\int_M dM}_{\text{Área}(M)=4\pi R^2} = 4\pi R^{\alpha+3}.$$

### 3.6. Integración de funciones en una subvariedad $m$ -dimensional de $\mathbb{R}^n$

Este tema no se ha dado en clase, si se está interesado, consultar los apuntes del profesor.



## Tema 4

# Teoremas integrales del análisis vectorial

### 4.1. Operadores diferenciales canónicos en $\mathbb{R}^3$

**Observación 4.1.1.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^3$  un abierto no vacío. Denotaremos por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{(k)}(U) &:= \left\{ \text{campos escalares } \mathcal{C}^k \text{ sobre } U \right\}, \\ \mathcal{V}^{(k)}(U) &:= \left\{ \text{campos vectoriales } \mathcal{C}^k \text{ sobre } U \right\}.\end{aligned}$$

Si no se especifica el grado de diferenciabilidad, se entenderá que es el que sea necesario para la realización de cálculos.

Así pues, un campo vectorial  $\vec{F} \in \mathcal{V}^{(k)}(U)$ , se identifica con una función vectorial  $\vec{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , aunque sería más preciso escribirlo por componentes. Si representamos la base canónica de  $\mathbb{R}^3$  por  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , entonces  $\vec{F} = f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$ . Aunque también es habitual representarla por  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ .

**Definición 4.1.2.** En  $\mathbb{R}^3$  hay tres operadores diferenciales lineales de primer orden canónicos.

- *Gradiente*  $\text{grad}: \mathcal{E}^{(1)}(U) \rightarrow \mathcal{V}^0(U)$ , que en coordenadas cartesianas se expresa como

$$\text{grad } f := \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}.$$

- *Rotacional*  $\text{rot}: \mathcal{V}^{(1)}(U) \rightarrow \mathcal{V}^{(0)}(U)$ , que en coordenadas cartesianas se expresa como

$$\text{rot } \vec{F} := \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{k}.$$

- *Divergencia*  $\text{div}: \mathcal{V}^{(1)}(U) \rightarrow \mathcal{E}^{(0)}(U)$ , que en coordenadas cartesianas se expresa como

$$\text{div } \vec{F} := \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

**Observación 4.1.3.** Si los campos son de clase  $\mathcal{C}^k$  el resultado es de clase  $\mathcal{C}^{k-1}$ .

**Observación 4.1.4.** Las definiciones de gradiente y de divergencia se pueden aplicar sin casi ningún cambio a  $\mathbb{R}^n$ .

**Observación 4.1.5.** Recordemos que el gradiente tiene una relación directa con la diferencial a través del producto escalar de  $\mathbb{R}^n$ : si  $D_f(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la diferencial de  $f$  en  $p$ ,  $\text{grad } f(p)$  es el vector tal que,  $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ ,  $(\text{grad } f(p)|u) = D_f(p) \cdot u$ .

**Definición 4.1.6.** Definimos el operador *nabla* como

$$\vec{\nabla} := \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \vec{\nabla} f := \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) f, \\ \text{rot } \vec{F} &= \vec{\nabla} \times \vec{F} := \begin{vmatrix} \hat{i} & \frac{\partial}{\partial x} & f_1 \\ \hat{j} & \frac{\partial}{\partial y} & f_2 \\ \hat{k} & \frac{\partial}{\partial z} & f_3 \end{vmatrix}, \\ \text{div } \vec{F} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{F} := \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \vec{F}. \end{aligned}$$

**Proposición 4.1.7.**  $\text{grad}$ ,  $\text{rot}$  y  $\text{div}$  son lineales, es decir

$$\begin{aligned} \text{grad}(f + g) &= \text{grad } f + \text{grad } g, \\ \text{grad}(cf) &= c \text{grad } f, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(Análogamente con  $\text{rot}$  y  $\text{div}$ ).

**Proposición 4.1.8.** *Reglas de Leibnitz.* Si  $f, g$  son campos escalares y  $\vec{F}, \vec{G}$  campos vectoriales, todos de clase  $\mathcal{C}^1$ , se tiene que

- $\text{grad}(fg) = f \text{grad } g + g \text{grad } f$ ,
- $\text{rot}(f\vec{G}) = f \text{rot } \vec{G} + \text{grad } f \times \vec{G}$ ,
- $\text{div}(f\vec{G}) = f \text{div } \vec{G} + \text{grad } f \cdot \vec{G}$ ,
- $\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \cdot \text{rot } \vec{G}$ .

**Corolario 4.1.9.** *T. Schwarz.* Sea  $f$  un campo escalar de clase  $\mathcal{C}^2$ ,  $\vec{F}$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^2$ . Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{grad } f) &= 0, \\ \text{div}(\text{rot } \vec{F}) &= 0. \end{aligned}$$

**Definición 4.1.10.** Sea  $\vec{F}$  un campo vectorial. Diremos que  $\vec{F}$  es un campo conservativo si  $\exists f$  tal que

$$\vec{F} = \text{grad } f.$$

También diremos que  $\vec{F}$  es un campo irrotacional si

$$\text{rot } \vec{F} = 0.$$

**Definición 4.1.11.** Sea  $\vec{G}$  un campo vectorial. Diremos que  $\vec{G}$  es solenoidal si  $\exists \vec{F}$  tal que

$$\vec{G} = \text{rot } \vec{F}.$$

Y diremos que  $\vec{G}$  es sin divergencia si

$$\text{div } \vec{G} = 0.$$

**Observación 4.1.12.** Los resultados de 4.1.9, se pueden resumir en que todo campo conservativo es irrotacional y que todo campo solenoidal es sin divergencia.

Posteriormente estudiaremos los recíprocos de estas afirmaciones.

**Definición 4.1.13.** Sea  $f \in \mathcal{E}^{(2)}(U)$ . Definimos el laplaciano como

$$\Delta f := \text{div}(\text{grad } f),$$

que es un operador diferencial de segundo orden, por tanto actúa sobre campos escalares de clase  $\mathcal{C}^2$ . En coordenadas cartesianas

$$\Delta = \nabla^2 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

**Observación 4.1.14.** Podemos extender la definición del laplaciano a  $\mathbb{R}^n$ , y en coordenadas cartesianas sería

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

**Observación 4.1.15.** La expresión en coordenadas cartesianas del laplaciano, permite aplicarlo también a campos vectoriales en  $\mathbb{R}^3$ , aplicándolo a cada componente, y, de hecho, se satisface que

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{F}) = \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}.$$

**Observación 4.1.16.** La ecuación de Laplace es la ecuación en derivadas parciales

$$\nabla^2 f = 0.$$

las soluciones de esta ecuación se llaman *funciones armónicas*.

**Observación 4.1.17.** El laplaciano interviene en otras ecuaciones de gran importancia, como la ecuación del calor

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \nabla^2 f,$$

con  $\alpha > 0$  o en la ecuación de las ondas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 f,$$

donde  $c > 0$ . Esta ecuación también se puede expresar como  $\square f = 0$ , donde  $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$  es el operador *d'alembertiano*.

## 4.2. Fórmulas integrales de la teoría de campos

**Proposición 4.2.1.** Sea  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto,  $f: W \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar de clase  $\mathcal{C}^1$  y  $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow W$  un camino de clase  $\mathcal{C}^1$ . Con  $\gamma(t_0) = x_0$  y  $\gamma(t_1) = x_1$ , entonces

$$\int_{\gamma} \vec{\text{grad}} f \, d\vec{l} = f(x_1) - f(x_0).$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{\text{grad}} f \, d\vec{l} &= \int_{t_0}^{t_1} \vec{\text{grad}} f(\gamma(t)) \, \gamma'(t) \, dt \stackrel{\text{def. grad.}}{=} \int_{t_0}^{t_1} Df(\gamma(t)) \, \gamma'(t) \, dt = \\ &\stackrel{\text{regla cadena}}{=} \int_{t_0}^{t_1} D(f \circ \gamma)(t) \, dt \stackrel{\text{Regla Barrow}}{=} (f \circ \gamma)(t_1) - (f \circ \gamma)(t_0) = f(x_1) - f(x_0). \end{aligned}$$

□

**Teorema fundamental del cálculo, o del gradiente (4.2.2)**

Sea  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto,  $f: W \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$ .  $C$  una curva regular orientada de clase  $\mathcal{C}^1$ , tal que  $\bar{C} \subset W$  es compacto. Entonces

$$\int_C \vec{\text{grad}} f \, d\vec{l} = \int_{\partial C} f,$$

(donde  $\partial C$  es el borde de  $C$ ) donde interpretamos

$$\int_{\partial C} f = f(x_1) - f(x_0).$$

Si  $\partial C = \{x_0, x_1\}$  con  $C$  “orientada” de  $x_0$  a  $x_1$ . Y  $\int_{\partial C} f = 0$  si  $\partial C = \emptyset$ .

**Teorema de Kelvin-Stokes, o del rotacional (4.2.3)**

Sea  $W \subseteq \mathbb{R}^3$  abierto,  $\vec{F}: W \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  y  $M \subset W$  una superficie orientada de clase  $\mathcal{C}^2$  tal que  $\bar{M}$  es compacto y  $\bar{M} \subset W$ . Sea  $\partial M$  el borde de  $M$  con la orientación inducida (“regla del tornillo” o “regla de la mano derecha”).

Entonces, se satisface la fórmula de *Kelvin-Stokes*

$$\int_M \text{rot } \vec{F} \, d\vec{S} = \int_{\partial M} \vec{F} \, d\vec{l},$$

si todos los puntos frontera de  $M$  son regulares; o, más generalmente, si el conjunto de puntos de la frontera singulares es finito.

**Observación 4.2.4.** Los puntos frontera de  $M$  se clasifican en:

- Puntos frontera regulares, si pertenecen a una curva regular incluida en la frontera de  $M$ ,
- Puntos singulares.

**Ejemplo 4.2.5.** Consideramos

$$H = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z > 0 \end{cases}, \quad \partial H = \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

orientadas “hacia arriba” y en “sentido positivo” al plano  $xy$ . Consideramos la función

$$\vec{F}(x, y, z) = -y\hat{i} + x\hat{j} + z\hat{k}.$$

Comprobaremos ahora el T.K.S. (4.2.3), ahora parametrizamos  $H$  como

$$\sigma(\theta, \phi) = (R \cos \phi \sin \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \theta), \quad \vec{T}_\theta \times \vec{T}_\phi = R^2 \sin \theta \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Por último,

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \partial x & -y \\ \hat{j} & \partial y & x \\ \hat{k} & \partial z & z \end{vmatrix} = 2\hat{k}.$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \int_H \text{rot } \vec{F} d\vec{S} &\stackrel{\text{orientación}}{=} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta R^2 \sin \theta \underbrace{\cos \theta}_z 2 = 4\pi R^2 \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta = \\ &= 2\pi R^2 [\sin^2 \theta]_0^{\pi/2} = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, podemos parametrizar  $\partial H$  como

$$\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, 0), \quad 0 < t < 2\pi, \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, podemos calcular

$$\int_{\partial H} \vec{F} d\vec{l} = \int_0^{2\pi} dt R^2 = 2\pi R^2.$$

Y como vemos, se satisface el teorema.

**Teorema de Gauss-Ostrogradski, o de la divergencia (4.2.6)**

Sea  $W \subset \mathbb{R}^3$  abierto,  $\vec{F}: W \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $\mathcal{C}^1$ ,  $B \subset W$  un abierto tal que  $\bar{B}$  es compacto y  $\bar{B} \subset W$ . Sea  $\partial B$  el borde de  $B$  con la orientación inducida (“normal hacia afuera”). Entonces, se satisface la fórmula de *Gauss-Ostrogradski*

$$\int_B \text{div } \vec{F} dV = \int_{\partial B} \vec{F} d\vec{S}.$$

Si todos los puntos frontera de  $B$  son regulares; o, más generalmente, si el conjunto de puntos frontera singulares de  $B$  es “negligible” (como que esté contenido en una unión finita de curvas regulares conexas).

**Observación 4.2.7.** La definición precisa de puntos frontera regulares y singulares, de borde y su orientación, se explicarán con más detalle en la sección 5.8.

**Ejemplo 4.2.8.** Consideramos

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

un campo vectorial radial con  $\operatorname{div} \vec{r} = 3$ . Sea

$$\begin{aligned} B &: x^2 + y^2 + z^2 < R^2, \\ \partial B &: x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \end{aligned}$$

Ahora, tenemos

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{r}\hat{r} = \frac{r^2}{r} = r \stackrel{B}{=} R.$$

Por último,

$$\operatorname{vol}(B) = \int_B dV = \frac{1}{3} \int_B \operatorname{div} \vec{r} dV = \frac{1}{3} \int_{\partial B} \vec{r} d\vec{S} = \frac{1}{3} \int_{\partial B} (\vec{r}\hat{r}) dS.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{vol}(B) = \frac{1}{3} R \operatorname{vol}(\partial B).$$

### 4.3. Potenciales

**Definición 4.3.1.** Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto conexo,  $\vec{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial. Diremos que  $\vec{F}$  es conservativo cuando existe  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^1$  tal que  $\vec{F} = \operatorname{grad} f$ , diremos que  $f$  es el potencial escalar para  $\vec{F}$ .

**Observación 4.3.2.** Si  $c \in \mathbb{R}$  y  $f$  es potencial escalar para  $\vec{F}$ ,  $f + c$  también lo es ( $\operatorname{grad}(f + c) = \operatorname{grad} f$ ).

**Proposición 4.3.3.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  conexo,  $\vec{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial, si  $f, g$  son dos potenciales escalares para  $\vec{F}$ , entonces  $f - g$  es una constante.

*Demostración.*  $f, g$  son potenciales escalares para  $\vec{F} \implies \operatorname{grad} f = \operatorname{grad} g \implies \operatorname{grad}(f - g) = 0 \stackrel{U \text{ conexo}}{\implies} f - g = \text{constante}.$   $\square$

**Observación 4.3.4.** Sea  $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos, con  $\gamma(t_0) = x_0$ ,  $\gamma(t_1) = x_1$ . Suponemos  $\vec{F}$  conservativo, es decir  $\vec{F} = \operatorname{grad} f$ , entonces,

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{l} = f(x_1) - f(x_0)$$

En otras palabras, la circulación de  $\vec{F}$  solo depende de los puntos inicial y final.

En este caso, escribiremos

$$\int_{x_0}^{x_1} \vec{F} d\vec{l}$$

También, tenemos que  $\int_{x_0}^{x_0} \vec{F} d\vec{l} = 0$ ,  $\oint \vec{F} d\vec{l} = 0$  y las fórmulas

$$\int_{x_0}^{x_1} \vec{F} d\vec{l} + \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} d\vec{l} = \int_{x_0}^{x_2} \vec{F} d\vec{l} \quad \int_{x_0}^{x_1} \vec{F} d\vec{l} = - \int_{x_1}^{x_0} \vec{F} d\vec{l}$$

**Proposición 4.3.5.** Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto convexo y  $\vec{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^0$ . Suponemos que la circulación de  $\vec{F}$  a lo largo de cualquier camino de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos solo depende de los puntos iniciales y final. Entonces,  $\vec{F}$  es conservativo.

**Observación 4.3.6.** Se puede construir  $f$  fijando  $x_0 \in U$  un punto que llamaremos el origen del potencial. Entonces, la función

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) := \int_{x_0}^x \vec{F} d\vec{l}$$

que está bien definida y  $\text{grad } f = \vec{F}$ .

*Demostración.* Sea  $x \in U$ ,  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ . Calculamos

$$D_{x,\vec{u}} f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x + t\vec{u})$$

Sea  $t > 0$  suficientemente pequeño, de manera que  $[x - t\vec{u}, x + t\vec{u}] \subset U$

$$f(x + t\vec{u}) = \int_{x_0}^{x+t\vec{u}} \vec{F} d\vec{l} = \underbrace{\int_{x_0}^x \vec{F} d\vec{l}}_{\text{constante}} + \int_x^{x+t\vec{u}} \vec{F} d\vec{l}$$

Aplicando un cambio de variable

$$\int_x^{x+t\vec{u}} \vec{F} d\vec{l} = \int_0^t \vec{F}(x + s\vec{u}) \vec{u} dS$$

Por lo tanto,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_x^{x+t\vec{u}} \vec{F} d\vec{l} \stackrel{\text{T.F.C.}}{=} \left. \vec{F}(x + t\vec{u}) \cdot \vec{u} \right|_{t=0} = \vec{F}(x) \cdot \vec{u} \implies D_{x,\vec{u}} f = \vec{F}(x) \cdot \vec{u}$$

Tomando ahora  $\vec{u} = e_i$ , obtenemos

$$D_{e_i} f = F_i \quad \forall i \implies \text{grad } f = \vec{F}$$

□

**Teorema 4.3.7.**

Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  abierto conexo.  $\vec{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $\mathcal{C}^1$ . Consideramos las propiedades

- (i)  $\vec{F}$  es conservativo
- (ii) Dados  $p_0, p_1 \in U$  y una curva orientada  $C \subset U$  tal que  $\partial U = \{p_0, p_1\}$ ; la circulación  $\int_C \vec{F} d\vec{l}$  solo depende de  $p_0, p_1$ .
- (iii) Para toda curva cerrada  $C \subset U$   $\oint_C \vec{F} d\vec{l} = 0$
- (iv)  $\text{rot } \vec{F} = 0$ , es decir,  $\vec{F}$  es irrotacional

Las tres primeras afirmaciones son equivalentes e implican la cuarta. Sin embargo, el recíproco es falso en general, depende de la topología de  $U$  y es cierto en algunas circunstancias.

**Definición 4.3.8.** Un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  se dice que es estrellado respecto a un punto  $p \in A$  si  $\forall q \in A$ ,  $[p, q] \subset A$ . Diremos que  $A$  es estrellado si lo es respecto a un punto.

**Observación 4.3.9.** Un conjunto es convexo  $\iff$  es estrellado respecto a todos sus puntos.

**Ejemplo 4.3.10.** Los siguientes conjuntos son estrellados

- Las semirectas en  $\mathbb{R}^2$ .
- Un semiplano en  $\mathbb{R}^3$ .

Lo siguientes, sin embargo, no lo son

- $\mathbb{R}^2 \setminus \text{un punto}$ .
- $\mathbb{R}^3 \setminus \text{un punto}$ .

**Lema 4.3.11.** de Poincaré.

Sea  $U \subset \mathbb{R}^3$  un abierto estrellado y  $\vec{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$ . Si  $\vec{F}$  es irrotacional ( $\text{rot } \vec{F} = 0$ ), entonces es conservativo (tiene potencial escalar).

**Definición 4.3.12.** Sea  $A$  un espacio métrico. Sean  $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow A$  dos caminos con los mismos puntos de origen  $p$  y término  $q$ . Diremos que  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  son caminos homótopos (con extremos fijos) si existe una homotopía de caminos entre  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$ , es decir:

una familia  $(\Gamma_s)_{0 \leq s \leq 1}$  de caminos en  $A$ , de origen en  $p$  y término en  $q$ , tales que

- $\Gamma_0 = \gamma_0$
- $\Gamma_1 = \gamma_1$
- La aplicación  $\Gamma: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow A$  definida por  $\Gamma(s, t) = \Gamma_s(t)$  es continua.

**Definición 4.3.13.** Un camino cerrado o lazo de punto base  $p$ , es un camino con origen y término  $p$ .

**Definición 4.3.14.** Diremos que un conjunto  $A$  es simplemente conexo si

- i) Es arco-conexo.



ii) Dados dos caminos  $\gamma_0, \gamma_1$  con el mismo origen y final,  $\gamma_0$  es homótopo a  $\gamma_1$ .

**Observación 4.3.15.** ii) es equivalente a requerir que cualquier camino  $\gamma_0$  cerrado es homótopo al camino constante.

**Observación 4.3.16.** Ejemplos de conjuntos simplemente conexos son:  $\mathbb{R}^n$ , las bolas, los rectángulos, los semiespacios de  $\mathbb{R}^n$ , los conjuntos estrellados, o  $\mathbb{R}^2 \setminus$  semirecta.

Ejemplos de conjuntos *NO* simplemente conexos son:  $\mathbb{R}^2 \setminus$  punto,  $\mathbb{R}^3 \setminus$  recta o  $\mathbb{R}^3 \setminus$  circunferencia.

**Proposición 4.3.17.** Si  $U \subset \mathbb{R}^3$  es un conjunto abierto simplemente conexo y  $\vec{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  irrotacional ( $\text{rot } \vec{F} = 0$ ), entonces  $\vec{F}$  es conservativo (tiene potencial escalar).

**Observación 4.3.18.** En caso de que  $U = \mathbb{R}^3$  y  $\vec{F}$  sea irrotacional, el cálculo del potencial escalar se puede hacer integrando la ecuación en derivadas parciales  $\text{grad } f = \vec{F}$ . Son tres ecuaciones que se integran sucesivamente de manera elemental, en términos del cálculo de primitivas.

**Ejemplo 4.3.19.** Consideramos  $U = \mathbb{R}^3$  y

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ z \cos(yz) + x \\ y \cos(yz) \end{pmatrix}$$

con  $\text{rot } \vec{F} = 0$ . Ahora, intentaremos resolver  $\text{grad } f = \vec{F}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = F_1 = y &\xrightarrow{\text{integrar}} f = xy + \underbrace{g(y, z)}_{\text{constante respecto a } x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = F_2 = z \cos(yz) + x &\rightarrow x + \frac{\partial g}{\partial y} = x + z \cos(yz) \xrightarrow{\text{int}} g = \sin(yz) + h(z) \implies \\ &\implies f = xy + \sin(yz) + h(z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = F_3 = y \cos(yz) &\rightarrow \cancel{y \cos(yz)} + \frac{dh}{dz} = \cancel{y \cos(yz)} \implies h(z) = C \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que

$$f(x, y, z) = xy + \sin(yz) + C$$

**Ejemplo 4.3.20.** Sea  $U = \mathbb{R}^3 \setminus \text{eje } z$ . Tomamos

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{rot } \vec{F} = 0$$

Tomamos

$$C = \begin{cases} x^2 + y^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

orientada “positivamente”. Se puede comprobar que  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 2\pi \neq 0$ , es decir, que  $\vec{F}$  no es conservativa

## Potenciales vectoriales

Esta tema tampoco se ha estudiado (debido a la falta de tiempo) en clase, así que hacemos un pequeño resumen y referenciamos, como siempre, a los curiosos a los apuntes del profesor.

Recordemos que decíamos que un campo  $\vec{G}$  es solenoidal si existe  $\vec{F}$  tal que  $\vec{G} = \text{rot } \vec{F}$ , esto, implica que  $\text{div } \vec{G} = 0$ , es decir, todo campo solenoidal es sin divergencia. Sin embargo, el recíproco es, en general falso. A pesar de ello, el lema de Poincaré, nos asegura que si  $U$  es estrellado, todo campo sin divergencia es solenoidal.

## 4.4. Campos en el plano: Teorema de Green y potenciales

**Definición 4.4.1.** Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  un abierto. Se puede definir el gradiente de un campo escalar y la divergencia de un campo vectorial en  $U$ , de hecho, en coordenadas cartesianas

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{e}_2 \quad \text{div } \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

También podemos considerar  $\vec{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  como un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$ , entonces,

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \implies \text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

### Teorema de Green (4.4.2)

Sean  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  un abierto,  $\vec{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $\mathcal{C}^1$ ,  $M \subset U$  abierto tal que  $\bar{M}$  compacto con  $\bar{M} \subset U$ , sea  $\partial M$  es el borde de  $M$  con la orientación inducida (“la parte de dentro, a la izquierda”). Entonces, se satisface la fórmula de *Green*

$$\int_M \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial M} \vec{F} d\vec{l},$$

suponiendo que todos los puntos frontera de  $M$  son regulares, o, más generalmente, si el conjunto de puntos frontera singulares de  $M$  es finito.

**Observación 4.4.3.** El teorema de Green se puede considerar como caso particular del teorema de Kelvin-Stokes (4.2.3), considerando  $\vec{F}$  como campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$  y  $M$  como superficie dentro de  $\mathbb{R}^3$ .

**Ejemplo 4.4.4.** Aplicación del teorema de Green para el cálculo de áreas. Sea  $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$ , por ejemplo

$$\vec{F} = \frac{1}{2} (-y\hat{i} + x\hat{j})$$

Aplicando la fórmula de Green, tenemos que

$$\text{área}(M) = \int_M dx dy = \int_{\partial M} \vec{F} d\vec{l} \implies \text{área}(M) = \frac{1}{2} \int_{\partial M} (-y dx + x dy)$$

**Proposición 4.4.5.** Sea  $\vec{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  definido en un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Recordamos que  $\vec{F}$  es conservativo cuando existe  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\vec{F} = \text{grad } f$ . En tal caso, la circulación de  $\vec{F}$  a lo largo de una curva cerrada es 0. Además, si  $\vec{F}$  es conservativo, necesariamente se cumple

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

**Proposición 4.4.6.** Igualmente, si consideramos  $\vec{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial tal que

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$\vec{F}$  es conservativo si  $U$  es simplemente conexo.

De nuevo, por falta de tiempo, se “prescindió” de este tema en clase, considerándolo como un caso particular del  $\mathbb{R}^3$ , aún así, puede ser interesante consultar los apuntes del profesor, tanto de lo que queda de esta sección como de la siguiente.

## 4.5. Operadores diferenciales en otros sistemas de coordenadas

Como ya hemos anunciado, se prescindió de este tema en clase debido a la falta de tiempo. Referenciamos a los curiosos a los apuntes del profesor.



## Tema 5

# Integración de formas diferenciales y teorema de Stokes

En este tema, consideraremos, salvo mención contraria, que todas las funciones son de clase  $\mathcal{C}^\infty$ .

### 5.1. Formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$

**Definición 5.1.1.** Definiremos  $\Omega^1$  como el espacio vectorial generado por  $dx^1, \dots, dx^n$ , que es un espacio vectorial real de dimensión  $n$ . Denotaremos como  $\Omega^\bullet$  el álgebra exterior de  $\Omega^1$ . Su producto está regido por

$$dx^i \wedge dx^i = 0, \quad dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i, \quad (i \neq j).$$

Así pues, tenemos  $\Omega^\bullet = \bigoplus_{r=0}^n \Omega^r$ , donde estos subespacios tienen dimensión y bases

- $\dim \Omega^0 = 1$ , base 1.
- $\dim \Omega^1 = n$ , base  $(dx^i)_{1 \leq i \leq n}$ .
- $\dim \Omega^2 = \binom{n}{2}$ , base  $(dx^i \wedge dx^j)_{i < j}$ .
- $\vdots$
- $\dim \Omega^{n-1} = n$ , base  $(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n)_i$ .
- $\dim \Omega^n = 1$ , base  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ .

En general, se tiene que  $\Omega^k$  tiene dimensión  $\binom{n}{k}$ , y una base es  $(dx^I)$  donde

$$dx^I \equiv dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

e  $I = (i_1, \dots, i_k)$  es un multiíndice de longitud  $k$  estrictamente creciente. Así pues,  $\dim \Omega^\bullet = 2^n$ .

**Definición 5.1.2.** Denominamos formas diferenciales en  $\mathbb{R}^n$  a los elementos del conjunto  $\Omega^\bullet(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes \Omega^\bullet$ , es decir, expresiones de la forma

$$\omega = \sum_I f_I dx^I$$

Donde  $f_I \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  e  $I$  es un multiíndice. También tenemos la gradución de  $\Omega^\bullet(\mathbb{R}^n)$

$$\Omega^\bullet(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(\mathbb{R}^n) \quad \text{donde } \Omega^k(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes \Omega^k$$

son las formas diferenciales de grado  $k$  ( $k$ -forma diferencial). Así, podemos escribir

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n$$

Los elementos de  $\Omega^n(\mathbb{R}^n)$  se denominan por abuso del lenguaje “formas diferenciales de grado máximo”. Si  $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ , escribiremos  $|\omega| := k$ .

**Definición 5.1.3.** Las operaciones algebraicas de  $\Omega^\bullet$  se trasladan a operaciones algebraicas de  $\Omega^\bullet(\mathbb{R}^n)$ . En particular, el producto exterior de dos formas diferenciales se calcula según la distributividad respecto de la suma, y con la regla

$$\left(f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right) \wedge \left(g dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}\right) = fg dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}.$$

**Proposición 5.1.4.** El producto exterior en  $\Omega^\bullet(\mathbb{R}^n)$  tiene elemento neutro (la función constante igual a 1) y es asociativo y anticonmutativo: si  $\alpha$  y  $\beta$  son formas diferenciales de grados  $|\alpha|$  y  $|\beta|$ , entonces

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{|\alpha||\beta|} \alpha \wedge \beta.$$

## 5.2. La diferencial exterior en $\mathbb{R}^n$

**Definición 5.2.1.** Dada una función  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) = \Omega^0(\mathbb{R}^n)$ , podemos construir una 1-forma diferencial  $df \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ , de acuerdo con la fórmula

$$df := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

donde  $\frac{\partial f}{\partial x^i}$  representa la derivada parcial de  $f$  respecto a la variable  $i$ -ésima.

**Observación 5.2.2.** Observamos que si  $f(a^1, \dots, a^n) = a^i$ , entonces  $df = dx^i$ . Esta función se conoce como la coordenada cartesiana  $i$ -ésima y es habitual denotarla por  $x^i$ .

**Definición 5.2.3.** La diferencial actuando sobre funciones se puede extender a una aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal, denominada *diferencial exterior* y definida de la manera siguiente

$$\begin{aligned} d: \Omega^\bullet(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \Omega^\bullet(\mathbb{R}^n) \\ f dx^I &\mapsto d(f dx^I) := df \wedge dx^I. \end{aligned}$$

**Observación 5.2.4.** Si  $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ , entonces,  $d\omega \in \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ .

**Ejemplo 5.2.5.** En  $\mathbb{R}^2$ , se tiene que

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \\ d(f dx \wedge dy) &= 0, \\ d(f dx + g dy) &= df \wedge dx + dg \wedge dy = \\ &= \left( \cancel{\frac{\partial f}{\partial x} dx} + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial g}{\partial x} dx + \cancel{\frac{\partial g}{\partial y} dy} \right) \wedge dy = \left( -\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

En  $\mathbb{R}^3$ , se tiene que

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz, \\ d(f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz) &= \dots = \\ &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy, \\ d(g_1 dy \wedge dz + g_2 dz \wedge dx + g_3 dx \wedge dy) &= \dots = \left( \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

**Observación 5.2.6.** La diferencial exterior  $d: \Omega^\bullet(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^\bullet(\mathbb{R}^n)$  es una antiderivación de grado +1: es  $\mathbb{R}$ -lineal, aumenta el grado en 1 y sigue la regla de Leibniz “graduada”:

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge d\beta.$$

**Proposición 5.2.7.** Sea  $d: \Omega^\bullet(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^\bullet(\mathbb{R}^n)$  la diferencial exterior. Entonces tenemos que  $d \circ d = 0$ .

*Demostración.* Basta demostrarlo para

$$d(df) = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) dx^j \wedge dx^i = 0.$$

Aplicando el lema

$$\begin{cases} \delta_{ij} = \delta_{ji} \\ A_{ij} = -A_{ji} \end{cases} \implies \sum_{i,j} \delta_{ij} A_{ij} = 0.$$

□

**Definición 5.2.8.** Diremos que una forma diferencial  $\alpha$  es cerrada si  $d\alpha = 0$ . Diremos que una forma diferencial  $\beta$  es exacta, si existe otra forma diferencial  $\alpha$  tal que  $\beta = d\alpha$ .

**Observación 5.2.9.** La propiedad 5.2.7 significa que exacta  $\implies$  cerrada.

**Proposición 5.2.10.** Sean  $y^j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) funciones en  $\mathbb{R}^n$ . Tenemos

$$dy^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i.$$

La aplicación  $\psi = (y^1, \dots, y^n): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo alrededor de cada punto. Y  $\psi$  es un difeomorfismo, si es biyectiva y  $J_\psi$  es invertible en todos los puntos.

T. Función  
 $\iff$   
Inversa

En estas condiciones, las diferenciales  $dy^j$  también son base para las 1-formas diferenciales. Observamos además que

$$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = \det \left( \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

**Observación 5.2.11.** Sea  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Interpretamos  $g$  como una función de las  $y^j$ , entonces

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial y^j} dy^j = \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i \stackrel{\text{regla}}{\text{cadena}} \sum_i \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i = dg.$$

Esta relación, demuestra que la diferencial exterior no depende del sistema de coordenadas utilizado.

**Definición 5.2.12.** Para cada  $k \geq 1$  definimos una función  $\mathbb{R}$ -lineal

$$K: \Omega^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$$

$$f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \mapsto \sum_{r=1}^k (-1)^r \left( \int_0^1 t^{k-1} f(tp) dt \right) x^{i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_r}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} \Big|_p$$

donde  $\widehat{dx^{i_r}}$  significa que ese término no está presente.

**Lema 5.2.13.** Para toda forma diferencial  $\omega$  de grado  $\geq 1$  en  $\mathbb{R}^n$

$$\omega = K d\omega + dK\omega.$$

**Lema de Poincaré (5.2.14)**

Toda forma diferencial en  $\mathbb{R}^n$  cerrada de grado  $\geq 1$  es exacta.

*Demostración.*

$$\omega = K d\omega + dK\omega.$$

□

**Ejemplo 5.2.15.** En  $\mathbb{R}^2$ , podemos considerar el cambio de coordenadas de  $(x, y)$  a  $(r, \phi)$ , entonces

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, & y &= r \sin \phi, \\ dx &= \cos \phi dr - r \sin \phi d\phi, \\ dy &= \sin \phi dr + r \cos \phi d\phi, \\ \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \phi)} &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Consideramos ahora la función

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = x^2 + y^2 = r^2. \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} df &= 2x dx + 2y dy, & df &= 2r dr, \\ dx \wedge dy &= \det \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} dr \wedge d\phi = r dr \wedge d\phi. \end{aligned}$$



### 5.3. Pullback de formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$

**Definición 5.3.1.** Sea  $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación de clase  $\mathcal{C}^\infty$ . Dada una función  $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , la función

$$F^*(g) := g \circ F \in \mathcal{C}^\infty: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

se denomina *pullback* de  $g$  por  $F$ . Así, tenemos una aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal  $F^*: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ .

**Observación 5.3.2.** Es similar a la aplicación transponer de álgebra lineal.

**Definición 5.3.3.** Podemos extender el pullback a formas diferenciales, definiendo una aplicación  $F^*: \Omega^\bullet(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^\bullet(\mathbb{R}^m)$  denominada pullback y definida por las propiedades siguientes

- La aplicación es  $\mathbb{R}$ -lineal.
- Sobre  $\Omega^0(\mathbb{R}^n)$  es el pullback de funciones.
- La aplicación conmuta con el producto exterior

$$F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*(\alpha) \wedge F^*(\beta).$$

- Si  $g \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $F^*(dg) = dF^*(g)$ .

Por lo tanto,  $F^*$  aplica de  $k$ -formas en  $k$ -formas y  $F^*$  conmuta con la diferencial exterior

$$d \circ F^* = F^* \circ d.$$

$F^*$  se define poniendo

$$F^*\left(g \, dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_l}\right) = F^*(g) \, dF^*\left(y^{j_1}\right) \wedge \cdots \wedge dF^*\left(y^{j_l}\right).$$

**Observación 5.3.4.** En particular, tenemos

$$F^*\left(dy^j\right) = dF^*\left(y^j\right) = \sum_i \frac{\partial F^*\left(y^j\right)}{\partial x^i} dx^i.$$

Donde podemos observar la aparición de la jacobiana de  $F$

$$J_F = \left( \frac{\partial F^*\left(y^j\right)}{\partial x^i} \right).$$

**Observación 5.3.5.** En el caso particular de que  $m = n$ , tenemos que

$$F^*\left(dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n\right) = \det J_F \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

**Proposición 5.3.6.** Cuando  $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo (necesita  $m = n$ ), entonces las diferenciales  $dF^*(y^j)$  también forman una base para las formas diferenciales de grado 1 en  $\mathbb{R}^m$ , y la matriz de cambio de base respecto a la base de las  $dx^i$  es la matriz jacobiana  $J_F$ .

**Ejemplo 5.3.7.** Consideramos la función

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) \mapsto F(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} F^*(x) &= u^2 - v^2, & F^*(y) &= 2uv, \\ F^*(x^2 + y^2) &= (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2, \\ F^*(dx) &= dF^*(x) = 2u du - 2v dv, & F^*(dy) &= dF^*(y) = 2v du + 2u dv, \\ F^*(dx \wedge dy) &= F^*(dx) \wedge F^*(dy) = \cdots = 4(u^2 + v^2) du \wedge dv, \\ F^*(-y dx + x dy) &= \cdots = 2(u^2 + v^2)(-v du + u dv). \end{aligned}$$

## 5.4. Integral de formas diferenciales

**Observación 5.4.1.** Recordemos que si  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua de clase  $\mathcal{C}^\infty$ , está definida la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx^1 \cdots dx^n.$$

**Definición 5.4.2.** Sea  $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$  una  $n$ -forma diferencial escrita como  $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ , con  $f$  de clase  $\mathcal{C}^\infty$ . Si  $f$  tiene soporte compacto, se define su integral como

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega := \int_{\mathbb{R}^n} f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_{\mathbb{R}^n} f dx^1 \cdots dx^n.$$

**Proposición 5.4.3.** Sea  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difeomorfismo y  $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$  con soporte compacto, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} F^*(\omega) = \pm \int_{\mathbb{R}^n} \omega,$$

donde el signo es el de  $J_F$ .

*Demostración.* Por un lado, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx^1 \cdots dx^n \stackrel{\text{T.C.V.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(F(y)) |\det J_F(y)| dy^1 \cdots dy^n.$$

Por otro lado,

$$\int_{\mathbb{R}^n} F^*(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} F^*(f) \det J_F dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = \int_{\mathbb{R}^n} f(F(y)) \det J_F(y) dy^1 \cdots dy^n.$$

□

**Observación 5.4.4.** Si interpretamos  $F$  como un cambio de variables, esta fórmula, demuestra que la definición dada de integral de una forma diferencial de grado máximo **NO** depende del sistema de coordenadas utilizado, aunque cambia de signo dependiendo de la orientación.

**Definición 5.4.5.** Sea  $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$  una forma diferencial de grado  $k < n$ . Si  $\sigma: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación, se define la integral de  $\omega$  a lo largo de  $\sigma$  como la integral

$$\int_{\sigma} \omega := \int_{\mathbb{R}^k} \sigma^*(\omega),$$

suponiendo que  $\sigma^*(\omega)$  tenga soporte compacto.

**Observación 5.4.6.** Todo lo que hemos hecho, se puede hacer en abiertos de  $\mathbb{R}^n$  en lugar de en todo  $\mathbb{R}^n$ . Si  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto,  $\Omega^\bullet(V)$ ,  $\Omega^k(V)$ ,  $\omega = \sum_I g_I dx^I$  ( $g_I \in \mathcal{C}^\infty(V)$ ). Pullback de  $F: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $F^*: \Omega^\bullet(V) \rightarrow \Omega^\bullet(U)$ .

Para el lema de Poincaré es necesario que  $V \subset \mathbb{R}^n$  sea estrellado respecto al origen.

**Definición 5.4.7.** Decimos que una forma diferencial es de clase  $\mathcal{C}^k$  cuando sus coeficientes son de clase  $\mathcal{C}^k$ , en los apartados anteriores hemos considerado diferenciabilidad de clase  $\mathcal{C}^\infty$ , pero algunas operaciones con formas diferenciales no requieren tanta diferenciabilidad.

## 5.5. Subvariedades de $\mathbb{R}^n$

Este tema es un repaso de cálculo diferencial, así que referenciamos a los apuntes del profesor ante cualquier duda, este apartado se trata de un simple repaso de las propiedades básicas de las subvariedades.

## 5.6. Formas diferenciales en una variedad

**Observación 5.6.1.** No trataremos el tema de los campos vectoriales en subvariedades, pero sí que aparecen en el resumen de apuntes. Como siempre, los curiosos a los apuntes.

**Definición 5.6.5.** Sea  $M$  una subvariedad, llamaremos 1-forma diferencial en  $M$  a una aplicación

$$\begin{aligned} \theta: M &\rightarrow T^*M \equiv \bigcup_{p \in M} T_p^*M \\ p &\mapsto \theta_p \equiv \theta(p) \in T_p^*M. \end{aligned}$$

**Observación 5.6.6.** Si  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $df: M \rightarrow T^*M$  que envía cada punto  $p \in M$  a la diferencial  $df(p)$ .

En particular, en el dominio de una carta, tenemos las diferenciales de las funciones de las funciones coordenadas,  $dx^i$ .

**Definición 5.6.7.** En el dominio  $V$  de una carta, una 1-forma diferencial  $\theta$  se expresa de manera única como

$$\theta|_V = \sum_{i=1}^m a_i dx^i,$$

donde  $a_i: V \rightarrow \mathbb{R}$  son los componentes de  $\theta$  en la carta.

Diremos que  $\theta$  es de clase  $\mathcal{C}^\infty$  cuando sus componentes son de clase  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Proposición 5.6.8.** En el dominio de una carta, la diferencial de una función se expresa como

$$df|_V = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

**Definición 5.6.9.** Definiremos una  $k$ -forma diferencial como una expresión del tipo

$$\omega|_V = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

El resto de este tema tampoco se ha realizado en clase, ante cualquier duda o curiosidad, consultar los apuntes del profesor.

## 5.7. Integración de formas diferenciales en variedades orientadas

**Definición 5.7.1.** Una parametrización  $g: W \rightarrow M$  de una variedad define en cada espacio tangente  $T_p M$  una base de vectores tangentes coordenados, y, por tanto, una orientación de  $T_p M$ .

Otra parametrización  $f: V \rightarrow M$  de  $M$  define la misma orientación de los espacios tangentes sii el cambio de coordenadas  $f^{-1} \circ g: W \rightarrow V$  tiene jacobiana positiva.

**Definición 5.7.2.** Un atlas orientado de  $M$  es un conjunto de cartas que recubren  $M$  y tal que sus cambios de coordenadas (en sus dominios comunes) tienen jacobianas positivas. Un atlas orienta los diferentes espacios tangentes de  $M$  de manera coherente. En caso de existir dicho atlas, se dice que  $M$  es orientable.

**Definición 5.7.3.** Una orientación de una variedad orientable viene dada por la elección de un atlas orientado. Una variedad orientada es una variedad orientable en la cual se ha elegido una orientación.

**Definición 5.7.4.** Si  $M$  es una variedad orientada, diremos que una carta de  $M$  pertenece a la orientación de  $M$  o que es una carta positiva cuando su cambio de coordenadas respecto a las cartas de la orientación de  $M$  tiene jacobiana positiva.

**Definición 5.7.5.** Una forma diferencial  $\Omega$  en  $M$  de grado máximo que no se anula en ningún punto, se denomina forma de volumen.

**Proposición 5.7.6.** Si una variedad tiene una forma de volumen, entonces es orientable.

*Demostración.* En cada punto  $p \in M$  la forma diferencial  $\Omega_p$  define una orientación del espacio tangente  $T_p M$ : una base  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  de  $T_p M$  es positiva cuando  $\Omega_p(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) > 0$ . De manera análoga, una carta  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  es positiva cuando

$$\Omega \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) > 0.$$

Las cartas positivas constituyen un atlas orientado en  $M$ , y por tanto, definen la orientación.  $\square$

**Observación 5.7.7.** Recíprocamente, se puede demostrar que si una variedad tiene un atlas orientado, entonces tiene una forma de volumen.

**Observación 5.7.8.** Una variedad orientada conexa tiene exactamente 2 orientaciones.

**Definición 5.7.9.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  una subvariedad  $m$ -dimensional orientada,  $\omega \in \Omega^m(M)$  una forma diferencial de grado máximo con soporte compacto. Si  $M$  admite una parametrización global  $g: W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  correspondiente a la orientación de  $M$ , se define la integral de  $\omega$  como

$$\int_M \omega := \int_W g^*(\omega).$$

**Lema 5.7.10.** La integral anterior no depende de la parametrización escogida.

*Demostración.* Sea  $g': W' \rightarrow M$  otra parametrización y sea  $X: W' \rightarrow W$  un difeomorfismo, entonces

$$\int_{W'} g'^*(\omega) = \int_{W'} X^*(g^*(\omega)) = \pm \int_W g^*(\omega),$$

donde el signo es el signo de la jacobiana de  $X$ .  $\square$

**Observación 5.7.11.** Si  $M$  requiere diversas parametrizaciones, se requiere un instrumento técnico para definir la integral de una forma diferencial, si alguno está interesado puede consultar en los apuntes del profesor (en el mismo índice).

**Definición 5.7.12.** Sea  $\phi_\alpha: V_\alpha \rightarrow M$  una familia de cartas positivas que recubren todo  $M$  y  $(\chi_\alpha)$  es una partición de la unidad subordinada, tenemos pues que  $\omega = \sum_\alpha \chi_\alpha \omega$ , lo cual nos permite definir

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M \chi_\alpha \omega.$$

Donde  $\int_M \chi_\alpha \omega$  se debe entender como la integral sobre los abiertos  $V_\alpha$  ya que  $\chi_\alpha$  fuera de ellos vale 0.

**Observación 5.7.13.** Como hemos supuesto que  $\omega$  tiene soporte compacto, la suma es una suma finita, y, en general,  $M$  se puede expresar como

$$M = \underbrace{\left( \bigcup_\alpha V_\alpha \right)}_{\text{finito}} \cup \underbrace{Z}_{\text{medida nula}},$$

y entonces,

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_{V_\alpha} \omega.$$

## 5.8. Variedades con borde y teorema de Stokes

**Observación 5.8.1.** El modelo local de variedad con borde es el semiespacio cerrado  $H^m$ ,

$$H^m = \left\{ (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m \mid x^1 \leq 0 \right\} = (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}.$$

Formado por  $(-\infty, 0) \times \mathbb{R}^{m-1}$ , el interior de  $H^m$  y su frontera  $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$ .

**Definición 5.8.2.** Una subvariedad con borde de dimensión  $m$  en  $\mathbb{R}^n$  es un subconjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  que satisface la propiedad:

para cada  $p \in M$  existe un conjunto abierto  $V \subset \mathbb{R}^n$ , con  $p \in V$ , y un difeomorfismo  $\Phi: V \rightarrow U$  entre abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , tal que

$$\Phi(V \cap M) = U \cap (H^m \times \{0\}).$$

**Definición 5.8.3.** Para un punto  $p \in M$  de una subvariedad, y un difeomorfismo  $\Phi$  como el de antes, hay dos posibilidades,

- $\Phi(p) \in \text{Int}(H^m) \times \{0\}$ .
- $\Phi(p) \in \text{Fr}(H^m) \times \{0\}$ .

Que ocurra una o la otra, no depende del difeomorfismo utilizado. A los puntos del primer tipo los llamaremos “puntos interiores” de  $M$ . Los puntos del segundo tipo, forman el borde de  $M$ , que se representa por  $\partial M$ .

**Proposición 5.8.4.** Si  $M$  es una subvariedad con borde,  $(M \setminus \partial M)$  es una subvariedad de dimensión  $m$  y  $\partial M$  es una subvariedad de dimensión  $m - 1$ .

Es tanto interesante como recomendable, consultar los apuntes del profesor de la parte que falta.

**Proposición 5.8.8.** Si una subvariedad  $M$   $m$ -dimensional está orientada, entonces  $\partial M$  tiene una orientación canónica (“hacia el exterior”), definida de la manera siguiente:

Si  $(x^1, \dots, x^n)$  es una carta positiva de  $M$ , definida alrededor de un punto  $p$  del borde según la definición del principio (es decir,  $x^1 \leq 0$ ), entonces  $(x^2, \dots, x^m)$  es una carta positiva del borde.

**Teorema de Stokes (5.8.9)**

Sean  $M \subset \mathbb{R}^n$  una variedad con borde, orientada y de dimensión  $m$ , y  $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$  una forma diferencial de grado  $m - 1$  en  $M$  de soporte compacto. Entonces, se satisface la fórmula de Stokes

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

donde el borde tiene la orientación inducida por  $M$ .

Es interesante, aunque no se ha hecho en clase, consultar los apuntes del profesor para ver cómo se aplican las diversas fórmulas y teoremas vistas durante los temas anteriores a subvariedades con bordes.

# Índice alfabético

- aplicación lipschitziana, 42
- area de una superficie regular, 57
- camino, 49
  - cerrado, 68
  - equivalente, 50
  - homótopo, 68
  - rectificable, 49
- campo vectorial
  - conservativo, 62
  - solenoidal, 63
- casi para todo, 30
- circulación de una función
  - a lo largo de un camino, 54
  - a lo largo de una curva orientada, 55
- componente
  - normal de un campo vectorial, 59
  - tangencial de una función, 55
- composición
  - camino y homeomorfismo, 50
- conjunto
  - admisible Jordan, 31
  - simplemente conexo, 68
- contenido nulo, 25
- cuadrado, 27
- curva
  - orientada, 54
  - parametrizada, 49
- diámetro de una función, 27
- discontinuidad de una función, 29
- divergencia, 61
  - de un campo escalar, 70
- dominio de convergencia, 11
- exhaustión de una sucesión, 46
- extensión de una función a todo  $\mathbb{R}$ , 32
- función
  - característica de un subespacio, 31
  - integrable, 22
    - localmente acotada, 47
    - localmente integrable, 15
    - localmente integrable Riemann, 47
- gradiente, 61
  - de un campo escalar, 70
- integral
  - de Riemann impropia, 46
  - doble, 22
  - impropia, 15
    - absolutamente convergente, 17
    - condicionalmente convergente, 18
    - convergente, 15
    - divergente, 15
  - inferior, 22
  - superior, 22
  - triple, 22
- integral de línea de una función
  - a lo largo de un camino, 53
  - a lo largo de una curva regular, 54
- integral de superficie
  - (orientada) de un campo vectorial, 59
  - (parametrizada) de una función, 56
  - (regular) de un campo vectorial, 58
  - (regular) de una función, 57
- laplaciano, 63
- longitud
  - de un camino, 52
  - de una curva, 49
  - de una curva regular de clase  $\mathcal{C}^1$ , 53
- medida nula, 24
- norma de una matriz, 42
- operador nabla, 62
- orientación
  - de una curva regular, 54

- de una superficie regular, 58
- oscilación de una función, 27
- en un punto, 27
- parte
  - negativa de un real, 8
  - positiva de un real, 8
- partición
  - de un rectángulo, 21
  - más fina, 21
- poligonal de longitud, 49
- radio de convergencia, 11
- rectángulo de  $\mathbb{R}^n$ , 21
- región elemental, 38
- rotacional, 61
- serie
  - absolutamente convergente, 8
  - alternada, 10
  - analítica, 12
  - condicionalmente convergente, 8
  - convergente, 1
- de números reales, 1
  - divergente, 1
  - oscilante, 1
- de potencias, 11
- de Riemann, 3
- de Taylor, 13
- geométrica, 2
- armónica, 3
- subconjunto estrellado, 68
- suma
  - de una serie, 1
  - inferior, 22
  - superior, 22
- superficie
  - orientable, 58
  - orientada, 58
  - regular, 56
- vértices de una poligonal, 49
- valor medio de una función, 33
- vector normal a una superficie, 59
- volumen  $n$ -dimensional, 21