
RESUM DE PROGRAMACIÓ MATEMÀTICA

OSCAR BENEDITO

ApuntsFME

BARCELONA, OCTUBRE 2018

Índex

1	Introducció a la programació lineal no entera i símplex primal	1
	Algorisme del símplex primal	2
	Regla de Bland	3
2	Teoria de dualitat	4
	Teorema feble de dualitat	4
	Teorema fort de dualitat	4
	Teorema de folga complementària	4
	Algorisme del símplex dual	4
3	Programació lineal entera	5
4	Programació no lineal sense restriccions	5
	Mètode del Gradient	5
	Mètode de Newton	6
5	Programació no lineal amb restriccions	6

1 Introducció a la programació lineal no entera i símplex primal

Definició 1.1. Una DBF sobre la SBF $x \in P_e$ associada a $q \in \mathcal{N}$ és $d = \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tal que:

- $d_{N(i)} \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1 & N(i) = q \\ 0 & N(i) \neq q \end{cases}, \forall i \in \{1, \dots, n-m\},$
- $A(x + \theta d) = b$ per algun $\theta \in \mathbb{R}^+ \implies d_B \stackrel{\text{def.}}{=} -B^{-1}A_q.$

Proposició 1.2. Càlcul de θ^* . Calculem $\theta^* \stackrel{\text{def.}}{=} \max \{ \theta > 0 \mid y = x + \theta d \in P_e \}$:

1. $A(x + \theta d) = b, \forall \theta$ és cert.

2. $y = x + \theta d \geq 0$:

$$x_{B(i)} + \theta d_{B(i)} \geq 0 \iff \theta \geq -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}},$$

$$\theta^* = \min_{i \in \{1, \dots, m\} \mid d_{B(i)} < 0} \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\}.$$

Proposició 1.3. Sigui d una DBF sobre x , una SBF de P_e ,

1. Si P_e és no degenerat, d és factible:

a) $d_B \not\geq 0 \implies \theta^* > 0$.

b) $d_B \geq 0 \implies \theta^*$ no definida, $\forall \theta > 0, x + \theta d \in P_e$, d és un raig extrem.

2. Si P_e degenerat ($\exists i \in \mathcal{B}$ tal que $x_{B(i)} = 0$) d pot no ser factible:

$$\min \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\} = 0 \implies \nexists \theta > 0 \text{ t. q. } y = x + \theta d \implies d \text{ infactible.}$$

Proposició 1.4. Siguin q i $B(p)$ les variables que entren i surten de la base, respectivament,

$$\bar{B} := \{\bar{B}(1), \dots, \bar{B}(m)\}, \text{ on } \bar{B}(i) = \begin{cases} B(i) & i \neq p \\ q & i = p \end{cases},$$

i la nova base és

$$\bar{B} = [A_{B(1)}, \dots, A_{B(p-1)}, A_q, A_{B(p+1)}, \dots, A_{B(m)}].$$

Definició 1.5.

- d és una DBF de descens si $\forall \theta > 0, c'(x + \theta d) < c'x \iff c'd < 0$.
- Si d és DBF sobre x (SBF), $c'x + \theta^* c'd = c'x + \theta^* r_q$ i
 - $r_q = c'd$.
 - Si P_e no degenerat, llavors la DBF d associada a $q \in \mathcal{N}$ és de descens $\iff r_q < 0$.

Teorema 1.6. *Condicions d'optimalitat de SBF.*

- a) $r \geq [0] \implies x$ és SBF òptima.
- b) x SBF i no degenerada $\implies r \geq [0]$.

Algorisme 1.7. *Algorisme del símplex primal.*

1. **Inicialització:** Trobem una SBF $(\mathcal{B}, \mathcal{N}, x_B, z)$.
2. **Identificació de la SBF òptima i selecció VNB entrant:**
 - Calculem els costos reduïts: $r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N$.

- Si $r' \geq [0]$, llavors és la SBF òptima. **STOP!**

Altrament seleccionem una q tal que $r_q < 0$ (VNB entrant).

3. Càlcul de DBF de descens:

- $d_B = -B^{-1}A_q$
- Si $d_B \geq [0]$, DBF de descens il·limitat \implies (PL) il·limitat. **STOP!**

4. Càlcul de θ^* i $B(p)$:

- Càlcul de θ^* :

$$\theta^* = \min_{i \in \{1, \dots, m\} \mid d_{B(i)} < 0} \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\}.$$

- Variable bàsica de sortida: $B(p)$ tal que $\theta^* = -\frac{x_{B(p)}}{d_{B(p)}}$.

5. Actualitzacions i canvi de base:

- $x_B := x_B + \theta^* d_B$,
 $x_q := \theta^*$,
 $z := z + \theta^* r_q$.
- $\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{B(p)\} \cup \{q\}$,
 $\mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{q\} \cup \{B(p)\}$.

6. Anar a 2.

Observació 1.8. *Fase 1 del símplex.* A la fase 1 del símplex resollem el problema:

$$(P_I) \begin{cases} \min \sum_{i=1}^m y_i \\ \text{s.a.:} \\ (1) \quad Ax + Iy = b \\ (2) \quad x, y \geq 0 \end{cases}$$

El resultat pot ésser:

- $z_I^* > 0 \implies (P)$ infactible.
- $z_I^* = 0 \implies (P)$ factible. Dos casos:
 - \mathcal{B}_I^* no conté variables $y \implies \mathcal{B}_I^*$ és SBF de (P) .
 - \mathcal{B}_I^* conté alguna variable y . Tenim que $y_B^* = [0] \implies \mathcal{B}_I^*$ és SBF degenerada de (P_I) i per tant podem obtenir una SBF de (P) a partir de \mathcal{B}_I^* .

Proposició 1.9. *Regla de Bland.* Usem la regla de Bland per a no entrar en bucle al utilitzar el símplex per a resoldre un problema degenerat.

1. Seleccionem com VNB d'entrada la VNB d'índex menor que compleix $r_q < 0$.
2. Si al seleccionar la variable de sortida hi ha empat, seleccionem la VB amb índex menor.

2 Teoria de dualitat

Teorema 2.1. *Teorema feble de dualitat.*

Sigui x SBF de (P) i λ SBF del (D) associat, llavors

$$\lambda' b \leq c' x.$$

Corol·lari 2.2.

- (P) il·limitat $\implies (D)$ infactible.
- (D) il·limitat $\implies (P)$ infactible.

Teorema 2.3. *Teorema fort de dualitat.*

Siguin x^*, λ^* solucions òptimes de (P) i el seu dual (D) , respectivament, llavors

$$(\lambda^*)' b = c' x^*.$$

Corol·lari 2.4. Si $(P)_e$ de rang complet amb solució, llavors (D) té solució i òptim a $\lambda' = c'_B B^{-1}$.

Teorema 2.5. *Teorema de folga complementària.*

Siguin x, λ solucions factibles de (P) i (D) , respectivament. x, λ són solucions òptimes si i només si

$$\begin{aligned} \lambda_j (a'_j x - b_j) &= 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}, \\ (c_i - \lambda' A_i) x_i &= 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Definició 2.6. Sigui $(P)_e$, una SBFD és tota SB de $(P)_e$ tal que $r \geq [0]$.

Algorisme 2.7. *Algorisme del símplex dual.*

1. **Inicialització:** Trobem una SBFD $(\mathcal{B}, \mathcal{N}, x_B, z)$.
2. **Identificació de la SBF òptima i selecció VB sortint:**
 - Si $x_B \geq [0]$, llavors és la SBF òptima. **STOP!**

Altrament seleccionem VB p amb $x_{B(p)} < 0$ (VB sortint).

3. **Càlcul de DBF de $(D)_e$:**
 - $d_{r_N} = (\beta_p A_N)'$ (β_p és la fila p -èssima de B^{-1}).
 - Si $d_{r_N} \geq [0]$, $(D)_e$ il·limitat. **STOP!**

4. **Càlcul de θ^* i selecció de la VNB entrant:**

- Càlcul de θ_D^* :

$$\theta_D^* = \min_{j \in \mathcal{N} \mid d_{r_{N_j}} < 0} \left\{ -\frac{r_j}{d_{r_{N_j}}} \right\}.$$

- Variable no bàsica entrant: q tal que $\theta^* = -\frac{x_q}{d_{r_{N_q}}}$.

5. **Actualitzacions i canvi de base:**

- $r_N := r_N + \theta_D^* d_{r_N}$,
 $\lambda := \lambda - \theta_D^* \beta'_p$,
 $r_{B(p)} := \theta_D^*$,
 $z := z - \theta^* x_{B(p)}$.
- $\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{B(p)\} \cup \{q\}$,
 $\mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{q\} \cup \{B(p)\}$.

6. Anar a 2.

Proposició 2.8. Una SBFD òptima és degenerada ($\exists j \in \mathcal{N}$ tal que $r_j = 0$) si i només si $(P)_e$ té òptims alternatius.

Proposició 2.9. Si $(P)_e$ no té cap SBFD degenerada, el simpleix dual convergeix amb un nombre finit d'iteracions. Altrament, podem usar la regla de Bland (1.9) per a que convergeixi amb un nombre finit d'iteracions.

3 Programació lineal entera

Observació 3.1. La següent taula explica les relacions possibles entre un (PLE) i la seva relaxació lineal (RL) .

$(PLE) \setminus (RL)$	Solució òptima	Infactible	Il·limitat
Solució òptima	Sí	No	Sí ($A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$) No ($A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{Q})$)
Infactible	Sí	Sí	Sí
Il·limitat	No	No	Sí

En aquest resum falta una part important de programació lineal entera, per a més informació, consulteu els apunts de classe!

4 Programació no lineal sense restriccions

Teorema 4.1. *Condicions necessàries d'optimalitat.*

Sigui $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un problema d'optimització no lineal $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$. Si x^* és un mínim local de f i $f \in \mathcal{C}^2$ en un entorn de x^* , llavors:

- $\nabla f(x^*) = 0$. (Condicció de 1r ordre)
- $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$. (Condicció de 2n ordre)

Teorema 4.2. *Condicions suficients d'optimalitat.*

Si $f \in \mathcal{C}^2$ en un entorn obert de x^* , $\nabla f(x^*) = 0$ i $\nabla^2 f(x^*)$ és definida positiva, llavors x^* és mínim local estricte de f .

Teorema 4.3. *Condicions d'optimalitat en problemes convexos.*

Si f és convexa i diferenciable, llavors $\nabla f(x^*) = 0 \iff x^*$ és mínim global de f .

Mètode 4.4. *Mètode del Gradient.*

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k,$$

$$d^k = -\nabla f(x^k).$$

α^k ha de complir les condicions d'Armijo-Wolfe (4.6).

Mètode 4.5. *Mètode de Newton.*

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k,$$

$$d^k = - \left(\nabla^2 f(x^k) \right)^{-1} \nabla f(x^k).$$

α^k ha de complir les condicions d'Armijo-Wolfe (4.6), normalment $\alpha^k = 1$.

Proposició 4.6. *Condicions d'Armijo-Wolfe.*

- i) Condició de descens suficient (AW-1):
 $g(\alpha) \leq g(0) + \alpha c_1 g'(0)$, $c_1 \in (0, 1)$.
 $f(x^k + \alpha d^k) \leq f(x^k) + \alpha c_1 \nabla f(x^k)^t d^k$, $c_1 \in (0, 1)$.
- ii) Condició de corbatura (AW-2):
 $g'(\alpha) \geq c_2 g'(0)$, $0 < c_1 < c_2 < 1$.
 $\nabla f(x^k + \alpha d^k)^t d^k \geq c_2 \nabla f(x^k)^t d^k$, $0 < c_1 < c_2 < 1$.

5 Programació no lineal amb restriccions

Donat el problema:

$$(P) \begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.a.:} \\ (1) \quad h(x) = 0 \\ (2) \quad g(x) \leq 0 \end{cases}$$

amb $\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^t h(x) + \mu^t g(x)$.

Proposició 5.1. *Condicions necessàries.* Sigui x^* òptim local. Si és punt regular, llavors $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}^m$ i $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ tals que:

- i) $h(x^*) = 0$, $g(x^*) \leq 0$.
- ii) $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) + \nabla h(x^*) \lambda^* + \nabla g(x^*) \mu^* = 0$.
- iii) $\mu^* \geq 0$ i $(\mu^*)^t g(x^*) = 0$ (si $g_i(x^*)$ és inactiva, llavors $\mu_j^* = 0$).
- iv) $d^t \nabla_{x_i x_j}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) d \geq 0, \forall d \in M = \begin{cases} (\nabla h_i(x^*))^t d = 0 & i \in \{1, \dots, m\} \\ (\nabla g_j(x^*))^t d = 0 & j \in \mathcal{A}(x^*) \end{cases}$

Els punts i), ii) i iii) són les condicions de 1r ordre del KKT i el punt iv) és la condició de 2n ordre.

Nota: $\mathcal{A}(x^*) = \{j \in \{1, \dots, p\} \mid g_j(x) = 0\}$ és el conjunt d'índex de desigualtats actives a x .

Proposició 5.2. *Condicions suficients.* Sigui x^* , és òptim local si satisfà:

- i) $h(x^*) = 0$, $g(x^*) \leq 0$.
- ii) $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) + \nabla h(x^*) \lambda^* + \nabla g(x^*) \mu^* = 0$.

iii) $\mu^* \geq 0$ i $(\mu^*)^t g(x^*) = 0$ ($g_i(x^*) < 0 \implies \mu_j^* = 0$).

iv) $d^t \nabla_{x_i x_j}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) d > 0, d \in M' = \begin{cases} (\nabla h_i(x^*))^t d = 0 & i \in \{1, \dots, m\} \\ (\nabla g_j(x^*))^t d = 0 & j \in \mathcal{A}(x^*) \cap \{j \mid \mu^* > 0\} \end{cases}$

Els punts i), ii) i iii) són les condicions de 1r ordre del KKT i el punt iv) és la condició de 2n ordre.

Nota: $\mathcal{A}(x^*) = \{j \in \{1, \dots, p\} \mid g_j(x) = 0\}$ és el conjunt d'índex de desigualtats actives a x .

This work is licensed under a [Creative Commons](#) “Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International” license.

