Formulari de física

El document consta de 4 pàgines.

- Fórmules 1a part (mecànica): pàgina 2.
- Fórmules 2a part (electromagnetisme): pàgina 3.
- Fórmules 1a part resumida + 2a part sencera: pàgina 4.

Els qui recupereu el parcial imprimiu les pàgines 2 i 3, els que no, podeu portar només la 3 (la pàgina 4 és pels qui no recupereu el parcial, però voleu algunes fórmules del parcial igualment).

Assegura't que tens l'última versió el dia de l'examen!

Última modificació: 21:54, 22 de juny de 2018

1 Cinemàtica

1.1 Descripció del moviment

Arc d'una corba: $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\vec{r}'(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau$.

• $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|\vec{v}(t)\|$.

Vec. unitari tg.:
$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{\vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|} = \vec{t}$.

Vec. unitari normal: $\vec{n} = \frac{\mathrm{d}\vec{t}/\mathrm{d}s}{\|\mathrm{d}\vec{t}/\mathrm{d}s\|}$.

Binormal: $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$.

Curvatura: $\kappa = \|\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}\|$.

Radi de curvatura: $\rho = \frac{1}{\kappa}$.

Centre de curvatura: $P = \vec{r} + \rho\vec{n}$.

Velocitat: $\vec{v} = v\vec{t}$.

Acceleració: $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$.

1.2 Moviment circular

Posició: $\vec{r}(t) = R(\cos\theta, \sin\theta, 0)$.

Celeritat: $v = R\dot{\theta} = R\omega$.

Acceleració: $\vec{a} = (R\alpha)\vec{t} + (R\omega^2)\vec{n}$.

1.3 Sòlid rígid

Moviment fixant origen P del sòlid:
$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$,
$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2\vec{r}$.

Centre instantani de rotació:
$\vec{r}_{\mathrm{CIR}} = \vec{r}_p + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_p}{\omega^2}$.

2 Dinàmica

2.1 $\mathbb{R}$

F. gravitatòria: $\vec{F}_{ab} = -G\frac{m_a m_b}{\|\vec{r}_{ab}\|^3}\vec{r}_{ab}$.

F. elàstica: $\vec{F}_{\mathrm{e}}(x) = -kx$.

Mov. osc. harm.:
$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, $\omega = \sqrt{k/m}$,
$T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

F. fregament estàtica: $|\vec{F}_\mu| \leq \mu|\vec{N}|$

F. fregament dinàmica: $|\vec{F}_\mu| = \mu'|\vec{N}|$

F. fregament viscós: $\vec{F}_{\mathrm{f}} = b\vec{v}$.

E. cinètica: $E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}mv^2$.

E. potencial: $U(x)$ t. q. $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = -F(x)$,
$E_{\mathrm{p}} = -\int_{x_0}^{x} F(z)\,\mathrm{d}z$.

E. mecànica: $E_{\mathrm{mec}} = E_{\mathrm{c}} + E_{\mathrm{p}}$.

E. pot. elàstica: $\frac{1}{2}kx^2$.

2.2 $\mathbb{R}^3$

Treball (J): $W_{1\to 2} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$.

• $\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$.

Potència (W): $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

• $E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$, $\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} = m\vec{v} \cdot \vec{a} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Si F conservativa: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$.

• $E_{\mathrm{c}}(\vec{r}_2) - E_{\mathrm{c}}(\vec{r}_1) = W_{1\to 2}$.

• $\Delta E_{\mathrm{mec}} = W_{\mathrm{n.c.}}$.

3 D. de sistemes puntuals

3.1 Moment lineal

Moment lineal: $\vec{P} = m\vec{v}$.

Impuls mec.:
$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} F\,\mathrm{d}t = \vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1) = \Delta\vec{P}$.

Moment d'una força respecte O:
$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$, $\vec{M}_A = \vec{AO} \times \vec{F} + \vec{M}_O$.

3.2 Moment angular

Moment angular:
$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{P}$,
$\vec{L}_A = \vec{L}_O + \vec{AO} \times \vec{P}$.

• $\vec{M}_O = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$.

Si A en moviment:
$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_A - \vec{v}_A \times \vec{P}$.

Impuls angular: $\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O\,\mathrm{d}t$.

3.3 Sòlid rígid

Moment d'inèrcia: $I = \sum m_i d_i^2$.

• $\vec{L}_e = I_e\vec{\omega}$, $\frac{\mathrm{d}L_e}{\mathrm{d}t} = I_e\alpha = M_e$.

• $I_{\mathrm{CM}} = \int r^2\,\mathrm{d}m$.

Teo. Steiner: $I_O = I_{\mathrm{CM}} + Md^2$.

Eix fix: $E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}I_e\omega^2$

Eix mòbil: $E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}I_{\mathrm{CM}}\omega^2 + \frac{1}{2}M\vec{v}_{\mathrm{CM}}^2$.

E. potencial: $U = U_{\mathrm{CM}}$.

Gravetat: $\vec{M}_{\mathrm{grav}} = \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times (m\vec{g})$.

Moments d'inèrcia

Respecte al CM:

Barra: $\frac{1}{12}mL^2$.

Pla (eix perpendicular):
$\frac{1}{12}m(h^2 + w^2)$.

Pla (eix paral·lel): $\frac{1}{12}mL^2$.

Corona circular/Tub: $\frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$.

	Sòlid	Buit
Disc/Cil.	$1/2\ mr^2$	mr^2
Esfera	$2/5\ mr^2$	$2/3\ mr^2$
Cub	$1/6\ ms^2$	
Con	$3/10\ mr^2$	$1/2\ mr^2$

3.4 Sistema de partícules

Centre de massa: $\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}$.

Moment lineal: $\vec{P} = \sum\vec{P}_i = M\vec{v}_{\mathrm{CM}}$.

1a llei conservació:
$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}^{\mathrm{ext}} = M\vec{a}_{\mathrm{CM}}$.

Moment angular:
$\vec{L}_O = \sum\vec{L}_{O_i} = \sum\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i$.

• $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum\vec{r}_i \times \vec{F} = \vec{M}_O^{\mathrm{ext}}$.

A punt mòbil:
$\vec{L}_A = \vec{L}_O + M(\vec{r}_A - \vec{r}_{\mathrm{CM}}) \times \vec{v}_A - \vec{r}_A \times \vec{P}$.

• $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_A^{\mathrm{ext}} + M(\vec{r}_A - \vec{r}_{\mathrm{CM}}) \times \vec{a}_A$.

A = CM o punt fix:
$\vec{L}_{\mathrm{A}} = \vec{L}_O - \vec{r}_{\mathrm{A}} \times \vec{P}$, $\vec{L}_O = \vec{L}_{\mathrm{A}} + \vec{r}_{\mathrm{A}} \times \vec{P}$.

• $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{ext}}$.

Energia cinètica:
$E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_{\mathrm{CM}})^2 + \frac{1}{2}M\vec{v}_{\mathrm{CM}}^2$.

$W_{F_{int}} = 0$: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \sum\vec{F}_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{ext}} \cdot \vec{v}_i$.

4 Percussions i xocs

Canvi m. lineal percussió: $\Delta\vec{P} = \vec{I}$.

Canvi m. angular percussió: Si A és un punt fix o el CM, $\vec{J}_A = \Delta\vec{L}_A$.

Per un sòlid rígid:
$I_A\Delta\omega = J_A = \vec{r} \times \vec{I}$.

Coeficient de percussió (xoc):
$e = -\frac{v_{1\mathrm{f}} - v_{2\mathrm{f}}}{v_{1\mathrm{i}} - v_{2\mathrm{i}}} = -\frac{v_{\mathrm{rel,f}}}{v_{\mathrm{rel,i}}}$.

Energia xoc partícules:
$\Delta E_{\mathrm{c}} = -\frac{1}{2}\mu\left(1 - e^2\right)v_{\mathrm{rel,i}}^2$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

5 Canvis de s. de ref.

• $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right)_S = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{u}$.

• $\vec{r}_P = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'_P$.

• $\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \vec{\omega} \times \vec{r}'_P$.

• $\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'_P +$
$\underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'_P}_{\text{acc. Coriolis}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'_P\right)}_{\text{acc. centrípeta}} + \vec{\alpha} \times \vec{r}'_P$.

• $m\vec{a}'_P =$
$\underbrace{m\vec{a}_P}_{\text{f. real}} - [\underbrace{m\vec{a}_{O'}}_{\text{f. translació}} + \underbrace{m2\vec{\omega} \times \vec{v}'_P}_{\text{f. Coriolis}} +$
$+ \underbrace{m\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'_P\right)}_{\text{f. centrífuga}} + \underbrace{m\vec{\alpha} \times \vec{r}'_P}_{\text{f. Euler}}]$.

6 Gravitació

Camp: $\vec{g} = -G\frac{M}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r}$.

Força: $\vec{F}_{ab} = -G\frac{m_a m_b}{\|\vec{r}_{ab}\|^3}\vec{r}_{ab} = m\vec{g}$.

Potencial: $V = -G\frac{M}{\|\vec{r}\|}$,

$V_a - V_b = \int_a^b \vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$.

Energia potencial: $U = -G\frac{Mm}{\|\vec{r}\|} = mV$. $U_a - U_b = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$.

Potencial efectiu: $U_{\mathrm{ef}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$.

Energia mecànica:
$E_{\mathrm{mec}} = \frac{1}{2}mr'^2 + U_{\mathrm{ef}}(r)$.

Tma. de Gauss:
$\oiint_{\mathrm{d}V} g \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -4\pi GM_{int}$.

6.1 Lleis de Kepler

2a: El radi vector escombra àrees iguals en temps iguals.

3a: $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}R^3$ (R radi mitjà).

6.2 Problema de Kepler

Excentricitat: $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$.

Posició: $\frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2}(1 + e\cos\theta)$.

6.3 Problema dels dos cossos

Substitucions a Kepler: $m = \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $k = Gm_1m_2$, $L = L_{\mathrm{CM}}$.

$x(t) \sim \theta(t)$, $v \sim \omega$, $a \sim \alpha$, $m \sim I$, $F = ma \sim M = I\alpha$,

$W = \int F\,\mathrm{d}x \sim W = \int M\,\mathrm{d}\theta$, $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \sim E_c = \frac{1}{2}I\omega^2$,

$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,\mathrm{d}x \sim U(\theta) = -\int_{\theta_0}^{\theta} M\,\mathrm{d}\theta$,

$\vec{P} = mv \sim \vec{L} = I\omega$.

7 Electrostàtica

Constants: $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$.
Camp e.: $\vec{E} = k\frac{q_\mathrm{A}}{\|\vec{r}_\mathrm{AB}\|^3}\vec{r}_\mathrm{AB}$,
$\vec{E}(\vec{r}) = \int_\nu \frac{k\rho(\vec{r'})}{\|\vec{r}-\vec{r'}\|^3}(\vec{r}-\vec{r'})\,\mathrm{d}V'$.
Força (Coulomb): $\vec{F}_\mathrm{AB} = k\frac{q_\mathrm{A}q_\mathrm{B}}{\|\vec{r}_\mathrm{AB}\|^3}\vec{r}_\mathrm{AB} = q_\mathrm{B}\vec{E_\mathrm{A}}$.
E. potencial: $U = k\frac{q_1q_2}{\|\vec{r}\|}$, $U = \frac{1}{2}\int_\nu \rho(\vec{r})V(\vec{r})\,\mathrm{d}V$.
Potencial: $V = k\frac{q}{r}$, $V(\vec{r}) = \int_\nu \frac{k\rho(\vec{r'})}{\|\vec{r}-\vec{r'}\|}\,\mathrm{d}V'$;
$V = -\int_\infty^r \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r}$, $V_\infty = 0$, $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r}$.
- $\vec{E} = -\nabla V$.
- $\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0}$.

Camp conservatiu: $\oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = 0$.
L. Gauss: $\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\nu \rho\,\mathrm{d}V = \frac{Q_\mathrm{int}}{\varepsilon_0}$.
Discont. superf.: $\boldsymbol{n}\cdot(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

7.1 Dipols

Moment dipolar: $\vec{p} = 2aq\vec{u}$.
Potencial: $V(\vec{r}) = k\frac{\cos\theta}{r^2}\cdot\vec{p} \approx \frac{k\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}(a \ll r)$.
Camp e.: $\vec{E} = \frac{3k\cdot(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{k\vec{p}}{r^3}$.
Força: $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p}\cdot\vec{E})$.
Moment: $\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E}$.

7.2 Condensadors

Capacitat: $C = \frac{Q}{|V_1 - V_2|}$.
Intensitat: $I = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$.
Energia: $U = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2$.
Càrrega RC: $V(t) = \varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$, $I = \frac{\varepsilon}{R}e^{\frac{-t}{RC}}$.

8 Electrocinètica

Conserv. càrrega: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\nu \rho\,\mathrm{d}V + \oint_{\partial V}\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$,
$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\vec{j} = 0$.
Intensitat $I = \int_S \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$
L. Ohm: $V = IR$, $\vec{j} = \gamma\vec{E}$
Conductors: $R = \int_a^b \frac{\mathrm{d}l}{S\gamma} = \frac{l}{S\gamma} = \frac{rl}{S}$.
Conductivitat-Resistivitat: $\gamma = \frac{1}{r}$.
Potència: $P = \frac{E}{t} = VI$, $P = \int_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V$.
Treball: $W = \int_{r_1}^{r_2} F(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r}$.

9 Magnetostàtica

Camp m.: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\cdot\vec{v}\times(\vec{r}-\vec{r'})}{\|\vec{r}-\vec{r'}\|^3}$, $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$.
Camp m. vol.: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r'})\times(\vec{r}-\vec{r'})}{\|\vec{r}-\vec{r'}\|^3}\,\mathrm{d}V$.
Camp m. fil.: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{\mathrm{d}\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r'})}{\|\vec{r}-\vec{r'}\|^3}$.
F. Lorentz: $\vec{F} = q\cdot\vec{v}\times\vec{B} = I\vec{l}\times\vec{B}$.
F. sobre corrent: $\vec{F} = \int_V \vec{j}\times\vec{B}\,\mathrm{d}V$.
Moment sobre corrent: $\vec{N_0} = \int_V \vec{r}\times(\vec{j}\times\vec{B})\,\mathrm{d}V$.
Camp Solenoidal: $\oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$, $\nabla\cdot\vec{B} = 0$.
L. Ampère: $\oint_C \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = I_\mathrm{int}\mu_0$, $\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}$.

10 Inductància

Flux: $\Phi = \int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$.
L. Faraday: $\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = \oint_{\partial S}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$.

10.1 Bobines

Camp m.: $B = \mu_0 nI$, $n = N/l$.
Autoinductància: $L = \frac{\phi}{I} = \mu_0 n^2 V$.
Potencial: $\varepsilon = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$.
Càrrega RL: $I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$.
Energia RL: $U = \frac{1}{2}LI^2$.

11 Maxwell

Gauss: $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\oint_{\partial V}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\nu \rho\,\mathrm{d}V$.
Faraday: $\nabla\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$,
$\oint_{\partial S}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$.
Gauss m.: $\nabla\cdot\vec{B} = 0$, $\oint_{\partial V}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$.
Ampère-Maxwell: $\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$,
$\oint_{\partial S}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\int_S \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$.

12.1 Integrals

- $\int \frac{1}{\sqrt{a+x^2}}\,\mathrm{d}x = \log(\sqrt{a+x^2} + x)$.
- $\int \frac{x}{\sqrt{a+x^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{a+x^2}$.
- $\int \frac{1}{\sqrt{a+x^2}^3}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a\sqrt{a+x^2}}$.
- $\int \frac{x}{\sqrt{a+x^2}^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}$.
- $\int \sec\mathrm{d}x = \ln\big(|\tan + \sec|\big)$.

12.2 Canvis de variables

Polars a $\mathbb{R}^2$:
$\int_U f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$.
Cilíndriques a $\mathbb{R}^3$: $\int_U f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$
$\int_V f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$.
Esfèriques a $\mathbb{R}^3$: $\int_U f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$
$\int_V f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$
$r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$.

12.3 EDOs

- $\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\ln v)}{\mathrm{d}t}$.

Fórmules: $a\dot{v} + bv + c = 0$; $\frac{a}{b}\dot{v} + v + \frac{c}{b} = 0$;
$(w = v + \frac{c}{b})$, $\frac{a}{b}\dot{w} + w = 0$; $\frac{a}{b}x + 1 = 0$; $x = \frac{-b}{a}$;
$w = ke^{\frac{-b}{a}t} = v + \frac{c}{b}$; $v = ke^{\frac{-b}{a}t} - \frac{c}{b}$.

12.4 Altres

Esfera: $S = 4\pi r^2$, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Nom: ____________________

1 Cinemàtica

1.1 Descripció del moviment

Arc d'una corba: $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\vec{r}'(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau$.

- $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|\vec{v}(t)\|$.

Vec. unitari tg.:
$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{\vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|} = \vec{t}$.

Vec. unitari normal: $\vec{n} = \frac{\mathrm{d}\vec{t}/\mathrm{d}s}{\|\mathrm{d}\vec{t}/\mathrm{d}s\|}$.

Binormal: $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$.

Curvatura: $\kappa = \|\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}\|$.

Radi de curvatura: $\rho = \frac{1}{\kappa}$.

Centre de curvatura: $P = \vec{r} + \rho\vec{n}$.

Velocitat: $\vec{v} = v\vec{t}$.

Acceleració: $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$.

1.2 Moviment circular

Posició: $\vec{r}(t) = R(\cos\theta, \sin\theta, 0)$.

Celeritat: $v = R\dot{\theta} = R\omega$.

Acceleració: $\vec{a} = (R\alpha)\vec{t} + (R\omega^2)\vec{n}$.

1.3 Sòlid rígid

Moviment fixant origen P del sòlid:
$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$,
$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2\vec{r}$.

Centre instantani de rotació:
$\vec{r}_{\mathrm{CIR}} = \vec{r}_p + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_p}{\omega^2}$.

2 Dinàmica

2.1 $\mathbb{R}$

F. gravitatòria: $\vec{F}_{ab} = -G\frac{m_a m_b}{\|\vec{r}_{ab}\|^3}\vec{r}_{ab}$.

F. elàstica: $\vec{F}_{\mathrm{e}}(x) = -kx$.

Mov. osc. harm.:
$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, $\omega = \sqrt{k/m}$,
$T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

F. fregament estàtica: $|\vec{F}_\mu| \le \mu|\vec{N}|$

F. fregament dinàmica: $|\vec{F}_\mu| = \mu'|\vec{N}|$

F. fregament viscós: $\vec{F}_{\mathrm{f}} = b\vec{v}$.

E. cinètica: $E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}mv^2$.

E. potencial: $U(x)$ t. q. $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = -F(x)$,
$E_{\mathrm{p}} = -\int_{x_0}^{x} F(z)\,\mathrm{d}z$.

E. mecànica: $E_{\mathrm{mec}} = E_{\mathrm{c}} + E_{\mathrm{p}}$.

E. pot. elàstica: $\frac{1}{2}kx^2$.

2.2 $\mathbb{R}^3$

Treball (J): $W_{1\to 2} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$.

- $\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$.

Potència (W):
$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

- $E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$, $\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} = m\vec{v} \cdot \vec{a} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Si F conservativa: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$.

- $E_{\mathrm{c}}(\vec{r}_2) - E_{\mathrm{c}}(\vec{r}_1) = W_{1\to 2}$.
- $\Delta E_{\mathrm{mec}} = W_{\mathrm{n.c.}}$.

3 D. de sistemes puntuals

3.1 Moment lineal

Moment lineal: $\vec{P} = m\vec{v}$.

Impuls mec.:
$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} F\,\mathrm{d}t = \vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1) = \Delta\vec{P}$.

Moment d'una força respecte O:
$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$, $\vec{M}_A = \vec{AO} \times \vec{F} + \vec{M}_O$.

3.2 Moment angular

Moment angular:
$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{P}$,
$\vec{L}_A = \vec{L}_O + \vec{AO} \times \vec{P}$.

- $\vec{M}_O = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$.

Si A en moviment:
$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_A - \vec{v}_A \times \vec{P}$.

Impuls angular: $\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O\,\mathrm{d}t$.

3.3 Sòlid rígid

Moment d'inèrcia: $I = \sum m_i d_i^2$.

- $\vec{L}_e = I_e\vec{\omega}$, $\frac{\mathrm{d}L_e}{\mathrm{d}t} = I_e\alpha = M_e$.
- $I_{\mathrm{CM}} = \int r^2\,\mathrm{d}m$.

Teo. Steiner: $I_O = I_{\mathrm{CM}} + Md^2$.

Eix fix: $E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}I_e\omega^2$

Eix mòbil: $E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}I_{\mathrm{CM}}\omega^2 + \frac{1}{2}M\vec{v}_{\mathrm{CM}}^2$.

E. potencial: $U = U_{\mathrm{CM}}$.

Gravetat: $\vec{M}_{\mathrm{grav}} = \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times (m\vec{g})$.

Moments d'inèrcia

Respecte al CM:

Barra: $\frac{1}{12}mL^2$.

Pla (eix perpendicular):
$\frac{1}{12}m(h^2 + w^2)$.

Pla (eix paral·lel): $\frac{1}{12}mL^2$.

Corona circular/Tub: $\frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$.

	Sòlid	Buit
Disc/Cil.	$1/2\ mr^2$	mr^2
Esfera	$2/5\ mr^2$	$2/3\ mr^2$
Cub	$1/6\ ms^2$	
Con	$3/10\ mr^2$	$1/2\ mr^2$

3.4 Sistema de partícules

Centre de massa: $\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$.

Moment lineal: $\vec{P} = \sum \vec{P}_i = M\vec{v}_{\mathrm{CM}}$.

1a llei conservació:
$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}^{\mathrm{ext}} = M\vec{a}_{\mathrm{CM}}$.

Moment angular:
$\vec{L}_O = \sum \vec{L}_{O_i} = \sum \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i$.

- $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F} = \vec{M}_O^{\mathrm{ext}}$.

A punt mòbil:
$\vec{L}_A = \vec{L}_O + M(\vec{r}_A - \vec{r}_{\mathrm{CM}}) \times \vec{v}_A - \vec{r}_A \times \vec{P}$.

- $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_A^{\mathrm{ext}} + M(\vec{r}_A - \vec{r}_{\mathrm{CM}}) \times \vec{a}_A$.

A = CM o punt fix:
$\vec{L}_{\mathrm{A}} = \vec{L}_O - \vec{r}_{\mathrm{A}} \times \vec{P}$,
$\vec{L}_O = \vec{L}_{\mathrm{A}} + \vec{r}_{\mathrm{A}} \times \vec{P}$.

- $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{ext}}$.

Energia cinètica:
$E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_{\mathrm{CM}})^2 + \frac{1}{2}M\vec{v}_{\mathrm{CM}}^2$.

$W_{F_{int}} = 0$: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{ext}} \cdot \vec{v}_i$.

4 Percussions i xocs

Canvi m. lineal percussió: $\Delta\vec{P} = \vec{I}$.

Canvi m. angular percussió: Si A és un punt fix o el CM, $\vec{J}_A = \Delta\vec{L}_A$.

Per un sòlid rígid:
$I_A\Delta\omega = J_A = \vec{r} \times \vec{I}$.

Coeficient de percussió (xoc):
$e = -\frac{v_{1\mathrm{f}} - v_{2\mathrm{f}}}{v_{1\mathrm{i}} - v_{2\mathrm{i}}} = -\frac{v_{\mathrm{rel,f}}}{v_{\mathrm{rel,i}}}$.

Energia xoc partícules:
$\Delta E_{\mathrm{c}} = -\frac{1}{2}\mu\left(1 - e^2\right)v_{\mathrm{rel,i}}^2$,
$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

5 Canvis de s. de ref.

- $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right)_S = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{u}$.
- $\vec{r}_P = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'_P$.
- $\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \vec{\omega} \times \vec{r}'_P$.
- $\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'_P + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'_P}_{\text{acc. Coriolis}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_P)}_{\text{acc. centrípeta}} + \vec{\alpha} \times \vec{r}'_P$.
- $m\vec{a}'_P = \underbrace{m\vec{a}_P}_{\text{f. real}} - [\underbrace{m\vec{a}_{O'}}_{\text{f. translació}} + \underbrace{m2\vec{\omega} \times \vec{v}'_P}_{\text{f. Coriolis}} + \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_P)}_{\text{f. centrífuga}} + \underbrace{m\vec{\alpha} \times \vec{r}'_P}_{\text{f. Euler}}]$.

6 Electrostàtica

Constants: $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$,
$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$.

Camp e.: $\vec{E} = k\frac{q_{\mathrm{A}}}{\|\vec{r}_{\mathrm{AB}}\|^3}\vec{r}_{\mathrm{AB}}$,
$\vec{E}(\vec{r}) = \int_\nu \frac{k\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}(\vec{r} - \vec{r}')\,\mathrm{d}V'$.

Força (Coulomb):
$\vec{F}_{\mathrm{AB}} = k\frac{q_{\mathrm{A}}q_{\mathrm{B}}}{\|\vec{r}_{\mathrm{AB}}\|^3}\vec{r}_{\mathrm{AB}} = q_{\mathrm{B}}\vec{E}_{\mathrm{A}}$.

E. potencial: $U = k\frac{q_1 q_2}{\|\vec{r}\|}$,
$U = \frac{1}{2}\int_\nu \rho(\vec{r})V(\vec{r})\,\mathrm{d}V$.

Potencial: $V = k\frac{q}{r}$,
$V(\vec{r}) = \int_\nu \frac{k\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}\,\mathrm{d}V'$; $V = -\int_\infty^r \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r}$,
$V_\infty = 0$, $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r}$.

- $\vec{E} = -\nabla V$.
- $\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0}$.

Camp conservatiu: $\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$.

L. Gauss:
$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\nu \rho\,\mathrm{d}V = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$.

Discont. superf.: $\boldsymbol{n} \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

6.1 Dipols

Moment dipolar: $\vec{p} = 2aq\vec{u}$.

Potencial:
$V(\vec{r}) = k\frac{\cos\theta}{r^2} \cdot \vec{p} \approx \frac{k\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}(a \ll r)$.

Camp e.: $\vec{E} = \frac{3k\cdot(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{k\vec{p}}{r^3}$.

Força: $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E})$.

Moment: $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$.

6.2 Condensadors

Capacitat: $C = \frac{Q}{|V_1 - V_2|}$.

Intensitat: $I = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$.

Energia: $U = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2$.

Càrrega RC: $V(t) = \varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$,
$I = \frac{\varepsilon}{R}e^{\frac{-t}{RC}}$.

7 Electrocinètica

Conserv. càrrega:
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\nu \rho\,\mathrm{d}V + \oint_{\partial V} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$,
$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\vec{j} = 0$.

Intensitat $I = \int_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

L. Ohm: $V = IR$, $\vec{j} = \gamma\vec{E}$

Conductors: $R = \int_a^b \frac{\mathrm{d}l}{S\gamma} = \frac{l}{S\gamma} = \frac{rl}{S}$.

Conductivitat-Resistivitat: $\gamma = \frac{1}{r}$.

Potència: $P = \frac{E}{t} = VI$,
$P = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E}\,\mathrm{d}V$.

Treball: $W = \int_{r_1}^{r_2} F(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$.

8 Magnetostàtica

Camp m.: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\cdot\vec{v}\times(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$,
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$.

Camp m. vol.:
$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')\times(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}\,\mathrm{d}V$.

Camp m. fil.: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{\mathrm{d}\vec{l}\times(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$.

F. Lorentz: $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = \vec{I}l \times \vec{B}$.

F. sobre corrent: $\vec{F} = \int_V \vec{j} \times \vec{B}\,\mathrm{d}V$.

Moment sobre corrent:
$\vec{N}_0 = \int_V \vec{r} \times (\vec{j} \times \vec{B})\,\mathrm{d}V$.

Camp Solenoidal: $\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$,
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$.

L. Ampère: $\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_{\mathrm{int}}\mu_0$,
$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{j}$.

9 Inductància

Flux: $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$.

L. Faraday:
$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$.

9.1 Bobines

Camp m.: $B = \mu_0 nI$, $n = N/l$.

Autoinductància: $L = \frac{\phi}{I} = \mu_0 n^2 V$.

Potencial: $\varepsilon = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$.

Càrrega RL: $I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$.

Energia RL: $U = \frac{1}{2}LI^2$.

10 Maxwell

Gauss: $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$,
$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\nu \rho\,\mathrm{d}V$.

Faraday: $\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$,
$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$.

Gauss m.: $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$.

Ampère-Maxwell:
$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, $\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\int_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$.

11.1 Integrals

- $\int \frac{1}{\sqrt{a + x^2}}\,\mathrm{d}x = \log(\sqrt{a + x^2} + x)$.
- $\int \frac{x}{\sqrt{a + x^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{a + x^2}$.
- $\int \frac{1}{\sqrt{a + x^2}^3}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a\sqrt{a + x^2}}$.
- $\int \frac{x}{\sqrt{a + x^2}^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{a + x^2}}$.
- $\int \sec\mathrm{d}x = \ln\left(|\tan + \sec|\right)$.

11.2 Canvis de variables

Polars a $\mathbb{R}^2$: $\int_U f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$.

Cilíndriques a $\mathbb{R}^3$:
$\int_U f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_V f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$.

Esfèriques a $\mathbb{R}^3$:
$\int_U f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_V f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$.

11.3 EDOs

- $\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\ln v)}{\mathrm{d}t}$.

Fórmules: $a\dot{v} + bv + c = 0$;
$\frac{a}{b}\dot{v} + v + \frac{c}{b} = 0$; $(w = v + \frac{c}{b})$,
$\frac{a}{b}\dot{w} + w = 0$; $\frac{a}{b}x + 1 = 0$; $x = \frac{-b}{a}$;
$w = ke^{\frac{-b}{a}t} = v + \frac{c}{b}$; $v = ke^{\frac{-b}{a}t} - \frac{c}{b}$.

11.4 Altres

Esfera: $S = 4\pi r^2$, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Nom: ____________