RESUM DE PROGRAMACIÓ MATEMÀTICA

Oscar Benedito
Paolo Lammens

ApuntsFME
Barcelona, Octubre 2018

Índex

1 Introducció a la programació lineal no entera i símplex primal

El fet que hi hagi solucions òptimes que siguin punts extrems no és de gran ajuda computacional per sí sol. Per tenir una caracterització computacionalment assequible cal el concepte de solució bàsica factible, que es defineix a continuació.

Definició 1.1. *Solució bàsica.* Donat un poliedre en forma estàndard P_e associat a un problema de programació lineal, una solució bàsica és un vector $\vec{x} \in P_e$ del qual es pot fer la partició $\vec{x}\,' = \left[\vec{x}_{\mathcal{B}}\,' \mid \vec{x}_{\mathcal{N}}\,'\right]$ tal que

i) $\mathcal{B}, \mathcal{N} \subseteq \{1, \dots, m\}$ són conjunts d'índexos (i són complementaris). $\mathcal{B}$ s'anomena el conjunt d'índexos de variables bàsiques o **base**, i $\mathcal{N}$ s'anomena el conjunt d'índexos de variables no bàsiques.

ii) $\vec{x}_{\mathcal{B}}{}' \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_{\mathcal{B}(1)} & x_{\mathcal{B}(2)} & \cdots & x_{\mathcal{B}(m)} \end{bmatrix}$ i $\vec{x}_{\mathcal{N}}{}' \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_{\mathcal{N}(1)} & x_{\mathcal{N}(2)} & \cdots & x_{\mathcal{N}(n-m)} \end{bmatrix}$, on $\mathcal{B}(i)$ i $\mathcal{N}(i)$ denoten, respectivament, l'i-èsim índex de $\mathcal{B}$ i $\mathcal{N}$.

iii) La matriu bàsica es defineix com

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A_{\mathcal{B}(1)} & A_{\mathcal{B}(1)} & \cdots & A_{\mathcal{B}(m)} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Aquesta definició no és gaire intuïtiva; a continuació es presenta una versió alternativa basada en el poliedre general.

Definició 1.2. *Solució bàsica (definició alternativa).* Donat un poliedre (general) $P \subseteq \mathbb{R}^n$ associat a un problema de programació lineal, direm que $\vec{x}\,' \in P$ és una solució bàsica si és la intersecció de n restriccions linealment independents.

Definició 1.3. Una DBF sobre la SBF $x \in P_e$ associada a $q \in \mathcal{N}$ és $d = \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tal que:

- $d_{N(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & N(i) = q \\ 0 & N(i) \neq q \end{cases}$, $\forall i \in \{1, \ldots, n-m\}$,
- $A(x + \theta d) = b$ per algun $\theta \in \mathbb{R}^+ \implies d_B \stackrel{\text{def}}{=} -B^{-1} A_q$.

Proposició 1.4. *Càlcul de θ^*.* Calculem $\theta^* \stackrel{\text{def}}{=} \max \{\theta > 0 \,|\, y = x + \theta d \in P_e\}$:

1. $A(x + \theta d) = b$, $\forall \theta$ és cert.
2. $y = x + \theta d \geq 0$:

$$x_{B(i)} + \theta d_{B(i)} \geq 0 \iff \theta \geq -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}},$$

$$\theta^* = \min_{i \in \{1,\ldots,m\} \,|\, d_{B(i)} < 0} \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\}.$$

Proposició 1.5. Sigui d una DBF sobre x, una SBF de P_e,

1. Si P_e és no degenerat, d és factible:
   a) $d_B \ngeq 0 \implies \theta^* > 0$.
   b) $d_B \geq 0 \implies \theta^*$ no definida, $\forall \theta > 0, x + \theta d \in P_e$, d és un raig extrem.
2. Si P_e degenerat ($\exists i \in \mathcal{B}$ tal que $x_{B(i)} = 0$) d pot no ser factible:

$$\min \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\} = 0 \implies \nexists \theta > 0 \text{ t. q. } y = x + \theta d \implies d \text{ infactible.}$$

Proposició 1.6. Siguin q i $B(p)$ les variables que entren i surten de la base, respectivament,

$$\bar{\mathcal{B}} := \left\{\bar{B}(1), \ldots, \bar{B}(m)\right\}, \text{ on } \bar{B}(i) = \begin{cases} B(i) & i \neq p \\ q & i = p \end{cases},$$

i la nova base és

$$\bar{B} = \left[A_{B(1)}, \ldots, A_{B(p-1)}, A_q, A_{B(p+1)}, \ldots, A_{B(m)}\right].$$

Definició 1.7.

- d és una DBF de descens si $\forall \theta > 0, c'(x + \theta d) < c'x \iff c'd < 0$.
- Si d és DBF sobre x (SBF), $c'x + \theta^* c'd = c'x + \theta^* r_q$ i
  - $r_q = c'd$.
  - Si P_e no degenerat, llavors la DBF d associada a $q \in \mathcal{N}$ és de descens $\iff$ $r_q < 0$.

Teorema 1.8. *Condicions d'optimalitat de SBF.*

a) $r \geq [0] \implies x$ és SBF òptima.

b) x SBF i no degenerada $\implies r \geq [0]$.

Algorisme 1.9. *Algorisme del símplex primal.*

1. **Inicialització**: Trobem una SBF $(\mathcal{B}, \mathcal{N}, x_B, z)$.
2. **Identificació de la SBF òptima i selecció VNB entrant**:
   - Calculem els costos reduïts: $r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_n$.
   - Si $r' \geq [0]$, llavors és la SBF òptima. **STOP!**

   Altrament seleccionem una q tal que $r_q < 0$ (VNB entrant).
3. **Càlcul de DBF de descens**:
   - $d_B = -B^{-1} A_q$
   - Si $d_B \geq [0]$, DBF de descens il · limitat $\implies (PL)$ il · limitat. **STOP!**
4. **Càlcul de θ^* i $B(p)$**:
   - Càlcul de θ^*:

   $$\theta^* = \min_{i \in \{1, \ldots, m\} \,|\, d_{B(i)} < 0} \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\}.$$

   - Variable bàsica de sortida: $B(p)$ tal que $\theta^* = -\frac{x_{B(p)}}{d_{B(p)}}$.

5. **Actualitzacions i canvi de base**:
   - $x_B := x_B + \theta^* d_B$,
     $x_q := \theta^*$,
     $z := z + \theta^* r_q$.
   - $\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{B(p)\} \cup \{q\}$,
     $\mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{q\} \cup \{B(p)\}$.
6. **Anar** a 2.

Observació 1.10. *Fase 1 del símplex.* A la fase 1 del símplex resolem el problema:

$$(P_I) \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \text{s.a.:} \\ \quad (1) \quad Ax + Iy = b \\ \quad (2) \quad x, y \geq 0 \end{cases}$$

El resultat pot ésser:

- $z_I^* > 0 \implies (P)$ infactible.
- $z_I^* = 0 \implies (P)$ factible. Dos casos:
  - $\mathcal{B}_I^*$ no conté variables $y \implies \mathcal{B}_I^*$ és SBF de (P).
  - $\mathcal{B}_I^*$ conté alguna variable y. Tenim que $y_B^* = [0] \implies \mathcal{B}_I^*$ és SBF degenerada de (P_I) i per tant podem obtenir una SBF de (P) a partir de $\mathcal{B}_I^*$.

Proposició 1.11. *Regla de Bland.* Usem la regla de Bland per a no entrar en bucle al utilitzar el símplex per a resoldre un problema degenerat.

1. Seleccionem com VNB d'entrada la VNB d'índex menor que compleix $r_q < 0$.
2. Si al seleccionar la variable de sortida hi ha empat, seleccionem la VB amb índex menor.

2 Dualitat

Teorema 2.1. *Teorema feble de dualitat.*
Per tota solució factible $\boldsymbol{x}$ d'un problema primal (P) i tota solució factible $\boldsymbol{\lambda}$ del dual (D) associat

$$\boldsymbol{\lambda}' \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{c}' \boldsymbol{x} \,.$$

Demostració. Sigui $m \times n$ l'ordre de la matriu de restriccions A al problema primal. Definim, per cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ (per cada restricció de (P)) i per cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ (per cada variable de (P)), respectivament,

$$u_i \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_i(\boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x} - b_i)$$
$$v_j \stackrel{\text{def}}{=} (c_j - \boldsymbol{\lambda}'A_j)x_j \,.$$

Primerament, veiem que u_i i v_j sempre són positius. Si $\boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x} - b_i \geq 0$, llavors la i-èsima restricció de (P) serà de la forma

$$\boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x} \geq b_i \,,$$

i per tant la corresponent variable dual λ_i complirà $\lambda_i \geq 0$. D'altra banda, si $\boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x}_i - b_i \leq 0$ la variable dual λ_i serà negativa. Finalment, si $\boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x} - b_i = 0$, es té que $u_i = 0$ independentment de λ_i. Per tant $u_i \geq 0$ per tot i. Es pot fer un raonament similar per v_j.

Ara, observem que

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x} - \lambda_i b_i = \boldsymbol{\lambda}'A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \,, \tag{1}$$
$$\sum_{j=1}^{n} v_j = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \boldsymbol{\lambda}'A_j x_j = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}'A\boldsymbol{x} \,. \tag{2}$$

Si sumem (1) i (2) i tenim en compte que $u_i \geq 0$ i $v_j \geq 0$ per tot i i j, obtenim

$$\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_i = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \geq 0 \tag{3}$$

i per tant

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \,.$$

$\square$

Corol · lari 2.2. *Corol · laris del teorema feble de dualitat (2.1).* Per qualsevol problema primal (P) i el seu dual (D):

i) (P) il · limitat $\implies$ (D) infactible.

ii) (D) il · limitat $\implies$ (P) infactible.

iii) Siguin $\boldsymbol{x}^* \in P$ i $\boldsymbol{\lambda}^* \in D$ solucions factibles del primal i del dual respectivament. Si $\boldsymbol{\lambda}^{*\prime}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^*$ llavors $\boldsymbol{\lambda}^*$ i $\boldsymbol{x}^*$ són solucions òptimes pel problema dual i primal respectivament.

Demostració.

i) Sigui $\boldsymbol{x}$ solució factible de (P) i $\boldsymbol{\lambda}$ solució factible de (D). Per hipòtesi (P) és il · limitat i per tant

$$\forall k \in \mathbb{R} \; \exists \boldsymbol{x} \in P : \quad \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} < k \,.$$

Suposem que existís una solució dual $\boldsymbol{\lambda}$ factible. Llavors, pel teorema feble de dualitat, $\forall \boldsymbol{x} \in P\colon \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$. D'altra banda, per la proposició anterior, tenim que $\exists \boldsymbol{x} \in P\colon \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} > \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$—prenent el valor $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b}$ per $k \in \mathbb{R}$; contradicció. Per tant (D) és infactible.

ii) Sigui $\boldsymbol{\lambda}$ solució factible de (D) i $\boldsymbol{x}$ solució factible de (P). Per hipòtesi (D) és il · limitat i per tant
$$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists \boldsymbol{x} \in P: \quad \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} > k\,.$$
Suposem que existís una solució primal $\boldsymbol{x}$ factible. Llavors, pel teorema feble de dualitat, $\forall \boldsymbol{\lambda} \in D\colon \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$. D'altra banda, per la proposició anterior, tenim que $\exists \boldsymbol{\lambda} \in D\colon \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} > \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$; contradicció. Per tant (P) és infactible.

iii) Pel teorema feble de dualitat, tenim que $\forall \boldsymbol{\lambda} \in D : \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^*$, i per tant, aplicant la hipòtesi,
$$\forall \boldsymbol{\lambda} \in D : \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{\lambda}^{*\prime}\boldsymbol{b}\,;$$
ergo, $\boldsymbol{\lambda}^*$ és l'òptim del dual (ja que és un problema de maximització). D'altra banda, novament pel teorema anterior, $\forall \boldsymbol{x} \in P : \boldsymbol{\lambda}^{*\prime}\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$, cosa que implica per hipòtesi que
$$\forall \boldsymbol{x} \in D : \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^* \leq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$$
i per tant $\boldsymbol{x}^*$ és un òptim.

$\square$

Teorema 2.3. *Teorema fort de dualitat.*
Sigui (P) un problema primal i (D) el seu dual. Llavors (D) té òptim si i només si (P) té òptim. A més, si en tenen, el valor de la funció objectiu en l'òptim coincideix.

Demostració. Considerem la forma estàndard del problema primal (P),
$$(P)_e \begin{cases} \min & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ \text{s.a.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{cases},$$
on la matriu A és d'ordre $m \times n$, i el dual corresponent (a P_e):
$$(D_e) \begin{cases} \max & \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \\ \text{s.a.} & \boldsymbol{\lambda}'A \leq \boldsymbol{c}' \end{cases},$$

Primer demostrarem que si $(P)_e$ té òptim, (D_e) també. Si $(P)_e$ té òptim, l'algorisme del símplex primal aplicat a $(P)_e$ terminarà amb una SBF òptima $\boldsymbol{x}^*$ de $(P)_e$, amb matriu bàsica B, tal que el vector de costos reduïts sigui no negatiu:
$$\mathbf{r}' = c'_{\mathcal{N}} - c'_{\mathcal{B}}B^{-1}A_{\mathcal{N}} \geq 0\,.$$
Sigui $\boldsymbol{\lambda}^*$ el vector definit per $\boldsymbol{\lambda}^{*\prime} \stackrel{\text{def}}{=} c'_{\mathcal{B}}B^{-1}$. Demostrarem que $\boldsymbol{\lambda}^*$ és solució òptima de (D_e).

Primer hem de comprovar si és factible. Efectivament,
$$\boldsymbol{\lambda}^{*\prime}A = c'_{\mathcal{B}}B^{-1}\left[B|A_{\mathcal{N}}\right] = \left[c'_{\mathcal{B}}\,\mathrm{Id} \quad c_{\mathcal{B}}B^{-1}A_{\mathcal{N}}\right] \leq \left[c'_{\mathcal{B}} \quad c'_{\mathcal{N}}\right] = \boldsymbol{c}'\,.$$
D'altra banda,
$$\boldsymbol{\lambda}^{*\prime}\boldsymbol{b} = c'_{\mathcal{B}}B^{-1}\boldsymbol{b} = c'_{\mathcal{B}}\boldsymbol{x}^*{}_{\mathcal{B}} = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^*\,.$$
Aplicant el corol · lari 2.2, deduïm que $\boldsymbol{\lambda}^*$ és solució òptima de (D_e). Queda demostrat que si $(P)_e$ té solució òptima existeix una solució òptima de (D_e) (i pel corol · lari mencionat produeixen el mateix valor de la f.o.).

Finalment, podem afirmar que aquest resultat és vàlid per els problemes que no estan en forma estàndard, ja que el problema (P) i el seu estàndard són equivalents—sempre es pot passar d'una solució de l'un a una solució de l'altre, i el valor de la f.o. en l'òptim és el mateix—, i el dual de l'estàndard (D_e) és equivalent al dual de (P). □

Corol · lari 2.4. *Corol · lari del teorema fort de dualitat (2.3).* Si $(P)_e$ és un problema factible i amb matriu de restriccions A de rang complet, i té una SBF òptima $\boldsymbol{x}^*$ amb matriu bàsica B, llavors (D) té solució factible òptima a $\boldsymbol{\lambda}' = c'_{\mathcal{B}}B^{-1}$.

Teorema 2.5. *Teorema de folga complementària.*
Siguin $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}$ solucions factibles de (P) i (D), respectivament. Llavors $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{\lambda}$ són solucions òptimes si i només si

$$\begin{aligned} u_i &\overset{\text{def}}{=} \lambda_i \left(\boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x} - b_i\right) = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \\ v_j &\overset{\text{def}}{=} \left(c_j - \boldsymbol{\lambda}' A_j\right) x_j = 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}\ . \end{aligned}$$

Demostració. Demostrem primer que si $u_i = 0 \wedge v_j = 0$ per tot i i tot j, llavors $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{\lambda}$ són òptimes. Com hem vist a la demostració del teorema feble de dualitat—l'equació (3)—,

$$\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b}\,.$$

Sabent que $u_i = 0$ per tot i i $v_j = 0$ per tot j, tenim que

$$\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = 0 = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b}\,,$$

i pel corol · lari 2.2 del teorema feble, $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{\lambda}$ són solucions òptimes per al problema respectiu.

Per demostrar la implicació recíproca, només cal notar que, com hem demostrat a la demostració del corol · lari 2.2, u_i i v_j sempre són no negatius, i per tant l'única manera de que es compleixi

$$\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = 0$$

és que $u_i = 0$ per tot i i $v_j = 0$ per tot j. Per tant només cal recórrer en sentit recíproc totes les implicacions de la demostració que acabem de fer. □

Noteu que el teorema 2.5 s'anomena de "folga complementària" perquè les expressions

$$(\boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x} - b_i) \quad \text{i} \quad (c_j - \boldsymbol{\lambda}' A_j)$$

es poden interpretar com les "folgues" associades a les restriccions primals i duals

$$A\boldsymbol{x} \lesseqgtr \boldsymbol{b} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{\lambda}' A \lesseqgtr \boldsymbol{c}\,,$$

respectivament; "complementària" perquè la "folga" d'un problema està associada amb una component del vector variable de l'altre problema—$(\boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x} - b_i)$ amb λ_i i $(c_j - \boldsymbol{\lambda}' A_j)$ amb x_j.

Definició 2.6. *Solució bàsica factible dual.* Sigui (P) un problema de PL i sigui $(P)_e$ la seva forma estàndard. Llavors, direm que tota solució bàsica $\boldsymbol{x}$ de $(P)_e$ tal que $\mathbf{r} \geq [0]$ és una solució bàsica factible dual (SBFD).

Noteu que la definició 2.6 deriva directament dels resultats que hem obtingut durant la demostració del teorema fort de dualitat (2.3): extrapolant l'argument que vam utilitzar, per tota solució bàsica $\boldsymbol{x}$—d'una forma estàndard $(P)_e$—amb matriu bàsica B i un vector de costos reduïts no negatius, el vector $\boldsymbol{\lambda}' \overset{\text{def}}{=} c'_{\mathcal{B}}B^{-1}$ és una solució factible del problema dual corresponent.

Observeu també que l'adjectiu "factible" en la definició de SBFD es refereix a una solució bàsica de $(P)_e$, que **pot no ser factible** per a aquest (és a dir, que $\boldsymbol{x} \notin P_e$), que es *correspon*, però, a una **solució factible del problema dual** (D^e) corresponent: $\boldsymbol{\lambda} \overset{\text{def}}{=} (c'_{\mathcal{B}}B^{-1})' \in D^e$. Potser ajuda pensar en "Solució bàsica factible dual" en dos blocs: "Solució bàsica" i "factible dual".

Per últim, noteu que si una solució bàsica $\boldsymbol{x}$ de $(P)_e$ és factible dual (per tant és SBFD) i és alhora factible primal ($\boldsymbol{x} \in P_e \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$), llavors és solució òptima de $(P)_e$, ja que és una solució factible amb $\boldsymbol{r} \geq \mathbf{0}$.

Algorisme 2.7. *Algorisme del símplex dual.*

1. **Inicialització**: Trobem una SBFD $(\mathcal{B}, \mathcal{N}, \boldsymbol{x}_{\mathcal{B}}, z)$.

2. **Identificació de la SBF òptima i selecció VB sortint**:

   - Si $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}} \geq [0]$, llavors és la SBF òptima. **STOP!**

   Altrament seleccionem VB p amb $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}(p)} < 0$ (VB sortint).

3. **Càlcul de DBF de** $(D)_e$:

   - $d_{r_{\mathcal{N}}} = \left(\beta_p A_{\mathcal{N}}\right)'$ (β_p és la fila p-èsima de B^{-1}).
   - Si $d_{r_{\mathcal{N}}} \geq [0]$, $(D)_e$ il · limitat. **STOP!**

4. **Càlcul de θ^* i selecció de la VNB entrant**:

   - Càlcul de θ^*_D:
   $$\theta^*_D = \min_{\{i \in \mathcal{N} \,|\, d_{r_{\mathcal{N}_j}} < 0\}} \left\{ -\frac{r_j}{d_{r_{\mathcal{N}_j}}} \right\}.$$
   - Variable no bàsica entrant: q tal que $\theta^* = -\frac{x_q}{d_{r_{\mathcal{N}_q}}}$.

5. **Actualitzacions i canvi de base**:

   - $\boldsymbol{r}_{\mathcal{N}} := \boldsymbol{r}_{\mathcal{N}} + \theta^*_D d_{r_{\mathcal{N}}}$,
   $\boldsymbol{\lambda} := \boldsymbol{\lambda} - \theta^*_D \beta'_p$,
   $\boldsymbol{r}_{B(p)} := \theta^*_D$,
   $z := z - \theta^* \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B(p)}}$.
   - $\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{B(p)\} \cup \{q\}$,
   $\mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{q\} \cup \{B(p)\}$.

6. **Anar** a 2.

Proposició 2.8. Una SBFD òptima és degenerada ($\exists j \in \mathcal{N}$ tal que $r_j = 0$) si i només si $(P)_e$ té òptims alternatius.

Proposició 2.9. Si $(P)_e$ no té cap SBFD degenerada, el símplex dual terminarà amb un nombre finit d'iteracions. Altrament, podem usar la regla de Bland (1.11) per a que convergeixi amb un nombre finit d'iteracions.

3 Programació lineal entera

Observació 3.1. La següent taula explica les relacions possibles entre un (PLE) i la seva relaxació lineal (RL).

$(PLE) \setminus (RL)$	Solució òptima	Infactible	Il · limitat
Solució òptima	Sí	No	Sí ($A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$) No ($A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{Q})$)
Infactible	Sí	Sí	Sí
Il · limitat	No	No	Sí

En aquest resum falta una part important de programació lineal entera, per a més informació, consulteu els apunts de classe!

4 Programació no lineal sense restriccions

Teorema 4.1. *Condicions necessàries d'optimalitat.*
Sigui $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un problema d'optimització no lineal $\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$. Si x^* és un mínim local de f i $f \in \mathscr{C}^2$ en un entorn de x^*, llavors:

i) $\nabla f(x^*) = 0$. (Condició de 1r ordre)

ii) $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$. (Condició de 2n ordre)

Teorema 4.2. *Condicions suficients d'optimalitat.*
Si $f \in \mathscr{C}^2$ en un entorn obert de x^*, $\nabla f(x^*) = 0$ i $\nabla^2 f(x^*)$ és definida positiva, llavors x^* és mínim local estricte de f.

Teorema 4.3. *Condicions d'optimalitat en problemes convexos.*
Si f és convexa i diferenciable, llavors $\nabla f(x^*) = 0 \iff x^*$ és mínim global de f.

Mètode 4.4. *Mètode del Gradient.*

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k,$$
$$d^k = -\nabla f\left(x^k\right).$$

α^k ha de complir les condicions d'Armijo-Wolfe (4.6).

Mètode 4.5. *Mètode de Newton.*

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha^k d^k, \\ d^k &= -\left(\nabla^2 f\left(x^k\right)\right)^{-1} \nabla f\left(x^k\right). \end{aligned}$$

α^k ha de complir les condicions d'Armijo-Wolfe (4.6), normalment $\alpha^k = 1$.

Proposició 4.6. *Condicions d'Armijo-Wolfe.*

i) Condició de descens suficient (AW-1):
$g\left(\alpha\right) \leq g\left(0\right) + \alpha c_1 g'\left(0\right)$, $c_1 \in (0,1)$.
$f\left(x^k + \alpha d^k\right) \leq f\left(x^k\right) + \alpha c_1 \nabla f\left(x^k\right)^t d^k$, $c_1 \in (0,1)$.

ii) Condició de corbatura (AW-2):
$g'\left(\alpha\right) \geq c_2 g'\left(0\right)$, $0 < c_1 < c_2 < 1$.
$\nabla f\left(x^k + \alpha d^k\right)^t d^k \geq c_2 \nabla f\left(x^k\right) d^k$, $0 < c_1 < c_2 < 1$.

5 Programació no lineal amb restriccions

Donat el problema:

$$(P) \begin{cases} \min f\left(x\right) \\ \text{s.a.:} \\ \quad (1) \quad h\left(x\right) = 0 \\ \quad (2) \quad g\left(x\right) \leq 0 \end{cases}$$

amb $\mathcal{L}\left(x, \lambda, \mu\right) = f\left(x\right) + \lambda^t h\left(x\right) + \mu^t g\left(x\right)$.

Proposició 5.1. *Condicions necessàries.* Sigui x^* òptim local. Si és punt regular, llavors $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}^m$ i $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ tals que:

i) $h\left(x^*\right) = 0,\ g\left(x^*\right) \leq 0$.

ii) $\nabla_x \mathcal{L}\left(x^*, \lambda^*, \mu^*\right) = \nabla f\left(x^*\right) + \nabla h\left(x^*\right) \lambda^* + \nabla g\left(x^*\right) \mu^* = 0$.

iii) $\mu^* \geq 0$ i $\left(\mu^*\right)^t g\left(x^*\right) = 0$ (si $g_i\left(x^*\right)$ és inactiva, llavors $\mu_j^* = 0$).

iv) $d^t \nabla^2_{x_i x_j} \mathcal{L}\left(x^*, \lambda^*, \mu^*\right) d \geq 0, \forall d \in M = \begin{cases} \left(\nabla h_i\left(x^*\right)\right)^t d = 0 & i \in \{1, \ldots, m\} \\ \left(\nabla g_j\left(x^*\right)\right)^t d = 0 & j \in \mathcal{A}\left(x^*\right) \end{cases}$

Els punts i), ii) i iii) són les condicions de 1r ordre del KKT i el punt iv) és la condició de 2n ordre.

Nota: $\mathcal{A}\left(x^*\right) = \left\{ j \in \{1, \ldots, p\} \mid g_j\left(x\right) = 0 \right\}$ és el conjunt d'índex de desigualtats actives a x.

Proposició 5.2. *Condicions suficients.* Sigui x^*, és òptim local si satisfà:

i) $h(x^*) = 0,\ g(x^*) \leq 0$.

ii) $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda^* + \nabla g(x^*)\mu^* = 0$.

iii) $\mu^* \geq 0$ i $(\mu^*)^t g(x^*) = 0$ $(g_i(x^*) < 0 \implies \mu_j^* = 0)$.

iv) $d^t \nabla^2_{x_i x_j} \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*)\, d > 0, d \in M' = \begin{cases} (\nabla h_i(x^*))^t d = 0 & i \in \{1, \ldots, m\} \\ \left(\nabla g_j(x^*)\right)^t d = 0 & j \in \mathcal{A}(x^*) \cap \{j \mid \mu^* > 0\} \end{cases}$

Els punts i), ii) i iii) són les condicions de 1r ordre del KKT i el punt iv) és la condició de 2n ordre.

Nota: $\mathcal{A}(x^*) = \left\{j \in \{1, \ldots, p\} \mid g_j(x) = 0\right\}$ és el conjunt d'índex de desigualtats actives a x.