
TEORIA DE LA PROBABILITAT

ApuntsFME

BARCELONA, OCTUBRE 2018

Darrera modificació: 4 d'octubre de 2018.

This work is licensed under a [Creative Commons](#)
“[Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International](#)”
license.



Continguts

1	Espai de probabilitat	1
1.1	Definició axiomàtica de probabilitat	1
	Desigualtats de Bonferroni	2
1.2	Probabilitat condicionada	4
1.3	Independència	5
1.4	Espai producte	5
1.5	Lema de Borel-Cantelli	6
	Lema de Borel-Cantelli	7
2	Variables aleatòries	9
2.1	Definició i propietats bàsiques de les variables aleatòries	9
	Teorema de l'existència d'una funció de distribució	12
2.2	Esperança d'una variable aleatòria. Desigualtats de Markov i Chebyshev	13
	Desigualtat de Markov	14
	Índex alfabètic	15

Tema 1

Espai de probabilitat

1.1 Definició axiomàtica de probabilitat

Definició 1.1.1. Un espai de probabilitat és un espai de mesura (Ω, \mathcal{A}, p) tal que $p(\Omega) = 1$. Diem que

- Ω és l'espai mostral,
- \mathcal{A} és el conjunt d'esdeveniments o de successos,
- p és la funció de probabilitat.

Observació 1.1.2. Recordem que (Ω, \mathcal{A}) és un espai mesurable si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ és una σ -àlgebra d' Ω , és a dir,

- i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- ii) $A \in \mathcal{A} \iff \bar{A} \in \mathcal{A}$,
- iii) Si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, aleshores $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

I que $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ és un espai de mesura si μ és una mesura sobre l'espai mesurable (Ω, \mathcal{A}) , és a dir,

- i) $\mu(\emptyset) = 0$,
- ii) $\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) \geq 0$,
- iii) (σ -additivitat) Si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ és tal que $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$, aleshores

$$\mu \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i).$$

Proposició 1.1.3. Sigui (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat. Aleshores,

- i) Si $A_1, \dots, A_r \in \mathcal{A}$ són tals que $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$, aleshores $p \left(\bigcap_{i=1}^r A_i \right) = \sum_{i=1}^r p(A_i)$.

- ii) $A \in \mathcal{A} \implies p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
- iii) $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \implies p(B \setminus A) = p(B) - p(A)$.
- iv) $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \implies p(A) \leq p(B)$.
- v) Successions monòtones:

- a) Si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ són tals que $A_i \subseteq A_{i+1}$, aleshores $p\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} p(A_i)$.
- b) Si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ són tals que $A_i \supseteq A_{i+1}$, aleshores $p\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} p(A_i)$.

Demostració.

1. Conseqüència directa de la σ -additivitat.
2. Conseqüència directa de ii) usant que $\mathcal{A} = A \cup \bar{A}$.
3. Com que $A \subseteq B$, $B = (B \setminus A) \cup A$ i, per tant, $p(B \setminus A) = p(B) - p(A)$.
4. Conseqüència directa de iii) ja que $p(B \setminus A) \geq 0$.
5.
 - a) Sigui $B_0 = A_0$ i per $i > 0$ sigui $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$. Aleshores, es compleix que $\forall i \neq j, B_i \cap B_j = \emptyset$ i que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, de manera que

$$\begin{aligned} p\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) &= p\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} p(B_i) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N p(B_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} p\left(\bigcup_{i=0}^N B_i\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} p(A_N). \end{aligned}$$

- b) Anàleg al cas anterior.

□

Observem que l'apartat v) només es pot aplicar en casos molt particulars. En general, si tenim A_1, \dots, A_r successos, hi ha estimacions per a $p(\bigcup_{i=1}^r A_i)$:

Teorema 1.1.4. *Desigualtats de Bonferroni.*

Siguin $A_1, \dots, A_r \in \mathcal{A}$, i per $I \subseteq \{1, \dots, r\}$ sigui $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$. Definim

$$S_k = \sum_{I \in \{1, \dots, n\}, \#I=k} p(A_I),$$

això és, $S_1 = \sum p(A_i)$, $S_2 = \sum_{i \neq j} p(A_i \cap A_j)$, ... Aleshores:

- i) Si t és parell,

$$p\left(\bigcup_{i=1}^r A_i\right) \geq \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} S_i$$

ii) Si t és senar,

$$p\left(\bigcup_{i=1}^r A_i\right) \leq \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} S_i$$

Observació 1.1.5. Amb els casos $t = 1$ (desigualtat de Boole) i $t = 2$ es poden donar fites inferiors i superiors.

Exemple 1.1.6.

1. Espais de probabilitat numerables.

Prenem Ω un conjunt numerable $\Omega = \{a_i\}_{i \geq 1}$. Prenem $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (que és una σ -àlgebra). Per a definir la probabilitat sobre (Ω, \mathcal{A}) prenem una successió $\{p_i\}_{i \geq 1}$ t. q. $0 \leq p_i \leq 1$ que compleix que $\forall i, p(a_i) = p_i$ i $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$. Per tant, per a qualsevol element $A \in \mathcal{A}$, tenim que

$$p\left(\bigcup_{a \in A} \{a\}\right) = p(A) = \sum_{i \geq 1} p(\{a_i\}).$$

Si, a més, $|\Omega| < +\infty$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ té $2^{|\Omega|}$ elements i si prenem $\Omega = \{a_i\}_{i=1}^N$ i $p_1 = p_2 = \dots = p_N = \frac{1}{N}$ obtenim un espai clàssic de probabilitat.

2. Espai de probabilitat en $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Segui $\Omega = [a, b]$ i prenem $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap [a, b]$ amb \mathcal{B} un borelià i com a funció de probabilitat $p = \frac{\lambda}{b-a}$, on λ és la mesura de Lebesgue. Observem que no podem prendre tot \mathbb{R} perquè no podem normalitzar $\lambda(\mathbb{R})$. Malgrat això, usant λ construirem més endavant funcions de probabilitat sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

3. Tirada indefinida d'una moneda.

En aquest cas tenim que $\Omega = \{a_i\}_{i \geq 1}$, $a_i \in \{0, 1\}$ de la forma

$$\begin{array}{l} 00010001110110\dots \\ 01001110101101\dots \\ 10010111110010\dots \end{array}$$

sent 0 creu i 1 cara. Aquest conjunt és no numerable fàcilment demostrable amb l'argument de la diagonal de Cantor. Per a construir una σ -àlgebra sobre Ω trobem una "bijecció" amb $[0, 1]$ de la forma

$$\begin{aligned} \varphi: \Omega &\rightarrow [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \\ a = a_1 a_2 \dots a_n &\mapsto 0.a_1 a_2 \dots a_n \end{aligned}$$

No és una bijecció completa ja que hi ha elements diferents que van a la mateixa imatge degut als nombres que acaben en 1 periòdic, però al ser tots racionals, el conjunt d'aquests nombres és numerable i per tant té mesura nul·la. És per això que podem definir una σ -àlgebra sobre Ω prenent $\{\varphi^{-1}(A)\}_{A \subseteq \mathcal{B} \cup [0, 1]}$. Similarment ho fem amb la mesura.

1.2 Probabilitat condicionada

Definició 1.2.1. Sigui (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat i siguin $A, B \in \mathcal{A}$. Definim la probabilitat d' A condicionada a B com

$$p(A | B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Observació 1.2.2. Sigui (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat i sigui $B \in \mathcal{A}$ tal que $p(B) > 0$. Aleshores, l'aplicació

$$\begin{aligned} p_B: \mathcal{A} &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto p_B(A) := p(A | B) \end{aligned}$$

defineix un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{A}, p_B)$.

Proposició 1.2.3. Sigui I un conjunt numerable o finit i siguin $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{A}$ tals que

- i) $p(A_i) > 0$,
- ii) $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$,
- iii) $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Aleshores,

- 1) Probabilitat total:

$$p(B) = \sum_{i \in I} p(B | A_i) p(A_i), \quad \forall B \in \mathcal{A}.$$

- 2) Fórmula de Bayes:

$$p(A_i | B) = \frac{p(B | A_i) p(A_i)}{\sum_{j \in I} p(B | A_j) p(A_j)}, \quad \forall B \in \mathcal{A} \text{ amb } p(B) > 0.$$

Demostració.

- 1) Com que els A_i són disjunts i $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$, $\forall B \in \mathcal{A}$, $B = \bigcup_{i \in I} B \cap A_i$, i la unió és disjunta. Es té

$$p(B) = p\left(\bigcup_{i \in I} B \cap A_i\right) \stackrel{\sigma\text{-add.}}{=} \sum_{i \in I} p(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} p(B | A_i) p(A_i).$$

- 2)

$$\begin{aligned} p(A_i | B) \sum_{j \in I} p(B | A_j) p(A_j) &\stackrel{i)}{=} p(A_i | B) p(B) = \\ \frac{p(B \cap A_i)}{p(B)} p(B) &= p(B \cap A_i) = p(B | A_i) p(A_i). \end{aligned}$$

□

Problema 1.2.4. *Ruïna del jugador.* Partim d'un capital de k unitats i, en cada jugada (sense memòria) augmenta o disminueix el capital en una unitat, amb probabilitats $1/2$ i $1/2$. El joc acaba si ens quedem sense capital o si assolim un objectiu N ($N > k$). Quina és la probabilitat de perdre tot el capital?

Solució. Sigui A_k el succés “el jugador, començant amb capital k , perd”. Condicionem A_k a la primera tirada de la moneda, definim B : “la primera tirada surt cara”.

$$\begin{aligned} p(A_k) &= p(A_k|B)p(B) + p(A_k|\overline{B})p(\overline{B}) = p(A_k|B)\frac{1}{2} + p(A_k|\overline{B})\frac{1}{2} \\ \implies 2p(A_k) &= p(A_{k-1}) + p(A_{k+1}) \implies p(A_k) - p(A_{k-1}) = p(A_{k+1}) - p(A_k) = C, \end{aligned}$$

el que ens diu que la diferència entre nivells és constant. Per tant $p(A_k) = p(A_0) + kC$. Sabent que $p(A_0) = 1$ i $p(A_N) = 0$ ens queda que

$$0 = 1 + CN \implies C = -\frac{1}{N} \implies p(A_k) = 1 - \frac{k}{N}.$$

1.3 Independència

Definició 1.3.1. Sigui (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat, sigui I un conjunt finit o numerable i sigui $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{A}$. Diem que els esdeveniments A_i són independents si per tot $J \subseteq I$ amb $|J| \in \mathbb{N}$ es té que

$$p\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} p(A_j).$$

Exemple 1.3.2.

1. \emptyset, Ω són independents entre si.
2. A és independent amb si mateix si i només si $p(A) = 1$ o $p(A) = 0$.

1.4 Espai producte

Donats dos espais de probabilitat $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, p_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, p_2)$, volem construir un nou espai de probabilitat $(\Omega_3, \mathcal{A}_3, p_3)$ que codifiqui els dos espais de probabilitat inicials. A aquest espai de probabilitat l'anomenarem espai de probabilitat producte.

Definició 1.4.1. Siguin $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, p_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, p_2)$ dos espais de probabilitat. Anomenem espai de probabilitat producte a la terna $(\Omega_3, \mathcal{A}_3, p_3)$ tal que

- i) $\Omega_3 = \Omega_1 \times \Omega_2$
- ii) $\mathcal{A}_3 = \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ (σ -àlgebra generada per $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$)
- iii) p_3 és una funció de probabilitat que compleix que $\forall A_1, A_2$ t.q. $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ aleshores $p_3(A_1 \times A_2) = p_1(A_1)p_2(A_2)$.

Observació 1.4.2. p_3 està ben definida ja que pel Teorema d'extensió de Carathéodory podem construir una σ -àlgebra sobre $\Omega_1 \times \Omega_2$ a partir d'una extensió de $\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ i restringir p_3 segons [iii](#)).

Observació 1.4.3. Podem estendre λ (la mesura de Lebesgue) a \mathbb{R}^2 de la següent forma. Sabem que $([0, 1], \mathcal{B} \cap [0, 1], \lambda_{[0,1]})$ és un espai de probabilitat. Aleshores

$$([0, 1] \times [0, 1], \sigma(\mathcal{B} \cap [0, 1] \times \mathcal{B} \cap [0, 1]), \lambda_{[0,1] \times [0,1]})$$

defineix un espai de probabilitat a \mathbb{R}^2 .

Problema 1.4.4. *Agulla de Buffon.* Considerem el pla \mathbb{R}^2 tesel·lat amb línies paral·leles indefinides separades per una distància L . Llancem una agulla de longitud $l \leq L$ sobre el pla. Trobar quina és la probabilitat que l'agulla toqui una de les línies.

Solució. Considerarem dues variables: x com la distància del centre de l'agulla a la línia més propera i θ com l'angle de l'agulla amb la direcció de les línies. Tenim que $x \in [0, \frac{L}{2}]$ i $\theta \in [0, \pi)$ i per tant, $\Omega = [0, \frac{L}{2}] \times [0, \pi)$, \mathcal{A} són els borelians del conjunt i p la mesura de Lebesgue normalitzada en \mathcal{A} . Sigui $A \in \mathcal{A}$ l'esdeveniment “l'agulla talla una recta” i $\omega \in \Omega$ una tirada. Aleshores $\omega \in A \iff x \leq \frac{l}{2} \sin \theta$. Per tant,

$$p(A) = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2} \sin \theta d\theta}{\frac{L\pi}{2}} = \frac{2l}{L\pi}.$$

1.5 Lema de Borel-Cantelli

Siguin (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat i $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$. Volem donar-li un sentit a “límit de $\{A_n\}_{n \geq 1}$ ”. Farem com a \mathbb{R} i definirem els límits superior i inferior (que sempre existiran) i, si coincideixen, aquest serà el límit.

Definició 1.5.1. Sigui (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat. Donats $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$, definim els límits superior i inferior de la successió de successos $\{A_n\}_{n \geq 1}$ com

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \end{aligned}$$

Observació 1.5.2. Els dos límits pertanyen a \mathcal{A} ja que son unió i intersecció numerable de successos.

Proposició 1.5.3. Sigui (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat i siguin $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$. Aleshores,

- i) $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \exists m \equiv m(\omega) \text{ amb } \omega \in A_r \ \forall r \geq m(\omega)\},$
- ii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ pertany a un nombre infinit dels } A_n\},$
- iii) $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n.$

Demostració.

$$\begin{aligned} \text{i) } \omega \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &\iff \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \iff \exists m \equiv m(\omega) \text{ t. q. } \omega \in \bigcap_{k=m(\omega)}^{\infty} A_k \iff \\ &\omega \in A_r \quad \forall r \geq m(\omega). \end{aligned}$$

ii) $\omega \in \limsup A_n \iff \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \iff \omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \forall n \iff \forall n, \exists n_0 \geq n \text{ t. q. } \omega \in A_{n_0} \iff \omega \text{ pertany a un nombre infinit dels } A_n.$

iii) Si $\omega \in \liminf A_n$, aleshores $\omega \in A_r, \forall r \geq m(\omega)$, de manera que pertany a un nombre infinit dels A_n i, en conseqüència, pertany a $\limsup A_n$. □

Proposició 1.5.4. Sigui (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat i siguin $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$, amb $\lim A_n = A$. Aleshores, $p(A) = p(\lim A_n) = \lim p(A_n)$ i aquest límit existeix.

Demostració. Definim $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$ i $C_n = \bigcap_{k \geq n} A_k$. Observem que $\{B_n\}_{n \geq 1}$ és decreixent i que $\{B_n\}_{n \geq 1}$ és creixent. Naturalment, $C_n \subseteq A_n \subseteq B_n$, $\limsup A_n = \bigcap_{n \geq 1} B_n$ i $\liminf A_n = \bigcup_{n \geq 1} C_n$.

Vegem que $p(\liminf A_n) \leq \liminf p(A_n)$.

$$p(\liminf A_n) = p\left(\bigcup_{n \geq 1} C_n\right) = \lim p(C_n) = \lim p\left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right) \leq \liminf p(A_n).$$

Al darrer pas hem utilitzat el fet que $p(\bigcap_{k \geq n} A_k) \leq p(A_n)$. Anàlogament, $\limsup p(A_n) \leq p(\limsup A_n)$. Així doncs, tenim que

$$p(\liminf A_n) \leq \liminf p(A_n) \leq \limsup p(A_n) \leq p(\limsup A_n).$$

Atès que $p(\liminf A_n) = p(\limsup A_n) = p(A)$, concloem que

$$\liminf p(A_n) = \limsup p(A_n) = \lim p(A_n) = p(A).$$

□

Teorema 1.5.5. *Lema de Borel-Cantelli.*

Sigui (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat i siguin $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$. Aleshores,

i) $\sum_{n \geq 1} p(A_n) < \infty \implies p(\limsup A_n) = 0.$

ii) Si $\{A_n\}_{n \geq 1}$ és independent, $\sum_{n \geq 1} p(A_n) = \infty \implies p(\limsup A_n) = 1.$

Demostració. Posem $A = \limsup A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$.

i) Sabem que

$$0 \leq p(A) \leq p\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \sum_{k \geq n} p(A_k), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

i que $\sum_{n \geq 1} p(A_n) < \infty$, de manera que $\lim \sum_{k \geq n} p(A_k) = 0$ i immediatament deduïm que $p(A) = 0$.

ii) Observem primer que $\overline{A} = \overline{\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k} = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \overline{A_k} = \liminf \overline{A_n}$. Veurem que

$$p(\overline{A}) = 0. \text{ Calculem } p\left(\bigcap_{m \geq n} \overline{A_m}\right).$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq p\left(\bigcap_{m \geq n} \overline{A_m}\right) = \lim_{r \rightarrow \infty} p\left(\bigcap_{m=n}^r \overline{A_m}\right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{m=n}^r \left(p(\overline{A_m})\right) = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{m=n}^r (1 - p(A_m)) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{m=n}^r \left(e^{-p(A_m)}\right) = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-\sum_{m=n}^r p(A_m)} = 0, \end{aligned}$$

de manera que $p\left(\bigcap_{m \geq n} \overline{A_m}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Finalment,

$$0 \leq p(\overline{A}) = p\left(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} \overline{A_m}\right) \leq \sum_{n \geq 1} p\left(\bigcap_{m \geq n} \overline{A_m}\right) = 0 + 0 + \dots = 0,$$

i concloem que $p(A) = 1$.

□

Tema 2

Variables aleatòries

2.1 Definició i propietats bàsiques de les variables aleatòries

Definició 2.1.1. Siguin $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ espais mesurables. Diem que $X: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ és una variable aleatòria si

$$X^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1, \forall A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

En aquest curs, sempre prendrem $(\Omega_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Per tant, quan parlem de variable aleatòria ens estarem referint a una aplicació $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ amb $B \in \mathcal{B} \implies X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, on (Ω, \mathcal{A}) és un espai de mesura.

Exemple 2.1.2.

1. Sigui (Ω, \mathcal{A}) un espai de mesura. Aleshores, $\forall c \in \mathbb{R}$, l'aplicació

$$\begin{aligned} X: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto c \end{aligned}$$

és una variable aleatòria, atès que, $\forall B \in \mathcal{B}$, es té que

$$X^{-1}(B) = \begin{cases} \Omega, & \text{si } c \in B, \\ \emptyset, & \text{si } c \notin B. \end{cases}$$

2. Siguin X i Y variables aleatòries. Aleshores, també son variables aleatòries les següents funcions.

- $X + Y$
- $X - Y$
- $aX, \forall a \in \mathbb{R}$
- XY
- $|X|$
- $\max\{X, Y\}$
- $\min\{X, Y\}$

- X^+
 - X^-
 - $g(X, Y)$, on $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ és ua funció mesurable.
3. Sigui (Ω, \mathcal{A}) un espai de mesura i sigui $A \in \mathcal{A}$. Definim la variable aleatòria indicadora d' A com

$$\mathbb{I}_A \equiv \mathbb{1}_A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \mapsto \mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } \omega \notin A, \\ 1, & \text{si } \omega \in A. \end{cases}$$

Vegem que, efectivament, es tracta d'una variable aleatòria. Sigui $B \in \mathcal{B}$. Aleshores,

$$\mathbb{I}_A(B) = \begin{cases} \Omega, & \text{si } 0 \in B, 1 \in B, \\ \overline{A}, & \text{si } 0 \in B, 1 \notin B, \\ A, & \text{si } 0 \notin B, 1 \in B, \\ \emptyset, & \text{si } 0 \notin B, 1 \notin B. \end{cases}$$

Observació 2.1.3. A partir d'ara, emprem la notació següent. Sigui (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat i sigui $B \in \mathcal{B}$, escrivim

$$p(X \in B) := p\left(\{\omega \in \Omega \mid \omega \in X^{-1}(B)\}\right).$$

Exemple 2.1.4. $p(X \leq 2) = p\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 2\}\right)$.

Observació 2.1.5. Sigui (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat i sigui X una variable aleatòria. X induïx una funció de probabilitat P_X sobre l'espai de mesura $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

$$P_X(B) := p(X \in B).$$

És a dir, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ és un espai de probabilitat. Comprovem, primer, que és un espai de mesura.

- i) $P_X(\emptyset) = p\left(\{\omega \in \Omega \mid \omega \in X^{-1}(\emptyset)\}\right) = p(\emptyset) = 0$, atès que p és una funció de probabilitat.
- ii) $0 \leq p\left(\{\omega \in \Omega \mid \omega \in X^{-1}(B)\}\right) = P_X(B)$, atès que p és una funció de probabilitat.
- iii) Si $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ són disjunts dos a dos, aleshores $\{X^{-1}(B_i)\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ també són disjunts dos a dos. I, per ser p una funció de probabilitat, es té que

$$\begin{aligned} P_X\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) &= p\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \omega \in X^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right)\right\}\right) = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} p\left(\{\omega \in \Omega \mid \omega \in X^{-1}(B_i)\}\right) = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} P_X(B_i). \end{aligned}$$

A més a més, per ser p una funció de probabilitat,

$$P_X(\mathbb{R}) = p\left(\{\omega \in \Omega \mid \omega \in X^{-1}(\mathbb{R})\}\right) = p(\Omega) = 1$$

i $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_x)$ és un espai de probabilitat.

Observació 2.1.6. Sigui (Ω, \mathcal{A}) un espai mesurable. Recordem que $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció mesurable si i només si $X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{A}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Definició 2.1.7. Sigui (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat i sigui X una variable aleatòria. Anomenem funció de distribució de probabilitat d' X a l'aplicació

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto F_X(x) = p(X \leq x) = P_X((-\infty, x]).$$

Proposició 2.1.8. Sigui (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat i sigui F_X la funció de distribució de probabilitat d'una variable aleatòria X sobre (Ω, \mathcal{A}, p) . Aleshores,

- i) $x_1 \leq x_2 \implies F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.
- ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$.
- iii) F_X és contínua per la dreta, és a dir, $\lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$.

Demostració.

- i) $F_X(x_1) = p\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_1\}\right) \leq p\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_2\}\right) = F_X(x_2)$, atès que $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_1\} \subseteq \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_2\}$ i que p és una funció mesurable.
- ii) Vegem que $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, es té que $\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n) = 0$. Definim $A_n = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_n\}$. Tenim que $\emptyset \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n$. A més, $\limsup A_n = \emptyset$ perquè, altrament, hi hauria un nombre infinit de conjunts A_n contenint un $\omega \in \Omega$ determinat. Per tant,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(A_n) = p\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = p(\emptyset) = 0.$$

Anàlogament, es demostra que $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$.

- iii) Fixat x , volem veure que $\lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$.

Prenem $C_n = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x + h_n\}$, on $\{h_n\}$ és una successió de reals no negatius amb límit zero. Aleshores, $\liminf C_n = \limsup C_n = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$. Això ens diu que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x + h_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(C_n) = p\left(\lim_{n \rightarrow \infty} C_n\right) = p(C) = F_X(x).$$

Com això és cert $\forall h$ t. q. $\{h_n\} \rightarrow 0$, tenim que $\lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$.

□

Observació 2.1.9. En general no podem assegurar que sigui contínua per l'esquerra. Fent la mateixa prova prenent $x - h_n$ amb $h_n \rightarrow 0^+$ en comptes de $x + h_n$, obtenim que $C = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}$ i, per tant

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} F_X(x + h) = p(X < x) = F_X(x) - p(X = x).$$

Lema 2.1.10. Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció creixent i fitada. Aleshores f és mesurable Lebesgue.

Demostració. Suposem que f té un nombre no numerable de discontinuïtats. Observem que totes les discontinuïtats són de salt. Sigui $D \subseteq \mathbb{R}$ el conjunt de punts on f és discontinua. Aleshores, tenim que, per tots els punts $x_d \in D$, existeixen els límits $\lim_{x \rightarrow x_d^+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow x_d^-} f(x)$. Definim, per tot $n \in \mathbb{N}$, els conjunts

$$A_n = \left\{ x_d \in D \mid \frac{1}{n+1} \leq \lim_{x \rightarrow x_d^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_d^-} f(x) < \frac{1}{n} \right\},$$

on cometem l'abús de notació $\frac{1}{0} = \infty$. Com que D és no numerable, hi ha un nombre numerable de conjunts A_n i $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = D$, necessàriament $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $|A_n| \notin \mathbb{N}$. Per tant, hi ha un nombre infinit de salts de, com a mínim $\frac{1}{n+1}$, la qual cosa contradueix la hipòtesi que f és fitada. Per tant, f té un nombre numerable de discontinuïtats i és, doncs, mesurable. \square

Teorema de l'existència d'una funció de distribució (2.1.11)

Sigui $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ una funció de probabilitat tal que

- i) $x_1 \leq x_2 \implies F_X(x_1) \leq F(x_2)$.
- ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.
- iii) F és contínua per la dreta, és a dir, $\lim_{h \rightarrow 0^+} F(x + h) = F(x)$.

Aleshores, existeixen un espai de probabilitat (Ω, \mathcal{A}, p) i una variable aleatòria $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tals que $F_X(x) = F(x)$.

Demostració. Prenem $(\Omega, \mathcal{A}, p) = ([0, 1], \mathcal{B} \cap [0, 1], \lambda_{[0, 1]})$ i definim

$$X: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ \omega \mapsto X(\omega) = \sup \{y \in \mathbb{R} \mid F(y) \leq \omega\}.$$

Observem que a tots els punts on F és contínua X també ho és, de manera que X és una funció mesurable. Vegem que $F_X(x) = F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Donat $x \in \mathbb{R}$, definim els conjunts

$$A = \{\omega \in [0, 1] \mid X(\omega) \leq x\}, \\ B = \{\omega \in [0, 1] \mid \omega \leq F(x)\}$$

i observem que

$$P(A) = P(X \leq x) = F_X(x), \\ P(B) = \lambda([0, F(x)]) = F(x).$$

Si demostrem que $A = B$, haurem acabat.

- $\omega \in B \implies \omega \leq F(x) \implies x \notin \{y \in \mathbb{R} \mid F(y) < \omega\} \implies x \geq X(\omega) \implies \omega \in A.$
- $\omega \notin B \implies \omega > F(x) \implies \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } \omega > F(x + \varepsilon) \implies x(\omega) \geq x + \varepsilon > x \implies X(\omega) > x \implies \omega \notin A.$

□

2.2 Esperança d'una variable aleatòria. Desigualtats de Markov i Chebyshev

Definició 2.2.1. Sigui (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat i sigui $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatòria. Com ja sabem, X induïx una probabilitat P_X sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Definim l'esperança de la variable aleatòria d' X , $\mathbb{E}[X]$ com

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X \, dp = \int_{\mathbb{R}} x \, dP_X,$$

si existeix aquesta integral.

Observació 2.2.2. La demostració que aquestes dues integrals són iguals resulta de l'aplicació de la definició de la integral de Lebesgue, però escapa dels objectius d'aquest curs i no l'escriurem.

Observació 2.2.3. Igual que es va veure al curs de teoria de la mesura, pot ser que $\mathbb{E}[X]$ no existeixi o que sigui infinita. No obstant això, atès que $|\int_{\Omega} f \, dp| \leq \int_{\Omega} |f| \, dp$, sovint demanarem que $\mathbb{E}[|X|] \leq +\infty$ per poder afirmar que $\mathbb{E}[X] \leq +\infty$.

Proposició 2.2.4. Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció mesurable i sigui X una variable aleatòria. Aleshores, $f(X)$ és una variable aleatòria i

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\Omega} f(X) \, dp = \int_{\mathbb{R}} x \, dP_{f(X)}.$$

Demostració. Si f és mesurable, aleshores $f(X)$ també, de manera que $f(X)$ és una variable aleatòria i la resta segueix de la definició. □

Definició 2.2.5. Sigui (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat i sigui $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatòria. Aleshores, definim

- Moment d'ordre r d' X :

$$\mathbb{E}[X^r],$$

on $r \in \mathbb{R}$ i hem suposat que $\mathbb{E}[|X|^r] < +\infty$.

- Moment factorial d'ordre r d' X :

$$\mathbb{E}[(X)_r] = X(X-1) \cdots (X-r+1),$$

on $r \in \mathbb{N}$.

- Variància d' X :

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

- Desviació típica d' X :

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}.$$

Proposició 2.2.6. Siguin X, Y variables aleatòries, siguin $a, b \in \mathbb{R}$ i sigui $A \in \mathcal{A}$. Es tenen les següents propietats de l'esperança.

- $\mathbb{E}[a] = a$,
- $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$,
- $\mathbb{E}[\mathbb{I}_A] = p(A)$,
- $|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|]$.

Es tenen les següents propietats de la variància.

- $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2 + \mathbb{E}[X]^2 - 2X\mathbb{E}[X]] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[X]^2 - 2\mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$,
- $\text{Var}[a] = 0$,
- $\text{Var}[a + X] = \text{Var}[X]$,
- $\text{Var}[aX] = a^2 \text{Var}[X]$.

Proposició 2.2.7. *Desigualtat de Holder.* Siguin X, Y variables aleatòries i siguin $p, q \in \mathbb{R}$ tals que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $\mathbb{E}[|X|^p], \mathbb{E}[|Y|^q] < +\infty$, aleshores

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}[|Y|^q]^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Desigualtat de Cauchy-Schwartz. Siguin X, Y variables aleatòries. Si $\mathbb{E}[|X|^2], \mathbb{E}[|Y|^2] < +\infty$, aleshores

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^2]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}[|Y|^2]^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Desigualtat de Minkowsky. Siguin X, Y variables aleatòries i sigui $p \in \mathbb{R}$. Si $\mathbb{E}[|X|^p], \mathbb{E}[|Y|^p] < +\infty$, aleshores

$$\mathbb{E}[|X + Y|^p]^{\frac{1}{p}} \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}} + \mathbb{E}[|Y|^p]^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Demostració. Tots aquests resultats són l'aplicació de les desigualtats corresponents demostrades al curs de teoria de la mesura. \square

Observació 2.2.8. La desigualtat de Cauchy-Schwartz és el cas particular $p = q = 2$ de la desigualtat de Holder.

Teorema 2.2.9. *Desigualtat de Markov.*

Sigui (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat, sigui $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatòria amb $X > 0$ i sigui $a \in \mathbb{R}^+$. Aleshores,

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

Demostració. Sigui $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq a\}$. Com que X és mesurable, A és un succés. Observem que

$$a\mathbb{I}_A(\omega) \leq X(\omega), \forall \omega \in \Omega.$$

Aleshores,

$$ap(X \geq a) = \mathbb{E}[a\mathbb{I}_A(\omega)] \leq \mathbb{E}[X(\omega)] = \mathbb{E}[X].$$

\square

Índex alfabètic

- conjunt
 - d'esdeveniments, [1](#)
 - de successos, [1](#)
- desviació típica, [13](#)
- esdeveniments independents, [5](#)
- espai
 - de probabilitat, [1](#)
 - producte, [5](#)
 - mostral, [1](#)
- esperança d'una variable aleatòria, [13](#)
- funció
 - de distribució de probabilitat, [11](#)
 - de probabilitat, [1](#)
- límit
 - inferior d'esdeveniments, [6](#)
 - superior d'esdeveniments, [6](#)
- moment
 - d'ordre r , [13](#)
 - factorial d'ordre r , [13](#)
- probabilitat condicionada, [4](#)
- variància, [13](#)
- variable
 - aleatòria, [9](#)