

---

# ÁLGEBRA MULTILINEAL Y GEOMETRÍA PROYECTIVA

---

APUNTES BASADOS EN EL CURSO IMPARTIDO POR MIGUEL ÁNGEL BARJA

**ApuntsFME**

BARCELONA, ENERO 2018

Autores principales: Òscar Benedito, Ernesto Lanchares, Miquel Ortega.

Otros autores: Jordi Castellví, Èric Sierra.

Revisores: Iñaki Garrido.

La elaboración de este documento no habría sido posible sin los apuntes de Oriol Navarro del curso de Álgebra Multilineal y Geometría Proyectiva, impartido por Miguel Ángel Barja en la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Última modificación: 15 de junio de 2018.

Este documento esta realizado bajo licencia [Creative Commons](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) “Reconocimiento-NoCommercial-CompartirIgual 4.0 Internacional”.



# Contenidos

<b>0. Formas Cuadráticas</b>	<b>1</b>
0.1. Definición, matriz de una forma cuadrática y bases	1
Teorema de Sylvester	2
Teorema del método convergencia-pivote	4
0.2. Clasificación afín y proyectiva	6
Teorema de Sylvester	6
<b>1. Álgebra multilinear</b>	<b>7</b>
1.1. Espacio dual	7
1.2. Tensores	8
1.3. Dimensión y bases de $T_p^q(\mathbb{E})$	10
Teorema de la base de $T_p^q(\mathbb{E})$	10
1.4. Recordatorio de permutaciones	12
1.5. Tensores simétricos y antisimétricos	12
1.6. Producto exterior	17
<b>2. Geometría Proyectiva</b>	<b>21</b>
2.1. Contexto e idea	21
2.1.1. Problema matemático	21
2.2. Definición y caracterizaciones del espacio proyectivo	22
2.3. Variedades lineales proyectivas	25
2.4. Sistemas de referencia proyectivos. Coordenadas proyectivas	28
2.5. Dualidad	32
2.6. Los teoremas de Desargues y Pappus	35
Teorema de Desargues	35
Teorema de Pappus	37
2.7. Coordenadas absolutas. Razón doble	38
Teorema de la invariancia de razón doble	41
2.8. Cuaternas armónicas	41
Teorema de la cuaterna armónica en el cuadrilátero	42
2.9. Relación entre el espacio proyectivo y el afín	42
2.9.1. Completación proyectiva del espacio afín $\mathbb{A}^n$	43
2.9.2. Variedades lineales afines y proyectivas	44
2.9.3. Espacios afines dentro de un espacio proyectivo	46
2.9.4. Relación entre la razón simple y la razón doble	47

<b>3. Proyectividades</b>	<b>49</b>
3.1. Definiciones y propiedades básicas . . . . .	49
3.2. Caracterización geométrica de las proyectividades . . . . .	51
Teorema fundamental de la geometría proyectiva . . . . .	55
3.3. El teorema de Poncelet . . . . .	56
Teorema de Poncelet . . . . .	56
3.4. Clasificación y estudio de homografías . . . . .	58
3.4.1. Clasificación de homografías . . . . .	58
3.4.2. Homografía dual y variedades $f$ -invariantes . . . . .	59
3.4.3. Algunas familias de homografías . . . . .	61
3.4.4. Homografías de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ . . . . .	65
3.5. Relación entre afinidades y proyectividades . . . . .	66
3.5.1. Las afinidades definen proyectividades . . . . .	66
3.5.2. Las proyectividades definen afinidades . . . . .	67
<b>4. Cónicas y cuádricas</b>	<b>71</b>
4.1. Definiciones y propiedades básicas . . . . .	71
4.2. Tangencia y polaridad . . . . .	74
4.2.1. Polaridad . . . . .	77
4.2.2. Cuádrica dual . . . . .	79
4.3. Cuádricas proyectivas y afines . . . . .	79
4.4. Clasificación proyectiva de cuádricas . . . . .	83
<b>Índice alfabético</b>	<b>85</b>

# Tema 0

## Formas Cuadráticas

### 0.1. Definición, matriz de una forma cuadrática y bases

**Definición 0.1.1.** Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -e.v. Diremos que una aplicación

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{E} \times \mathbb{E} &\rightarrow \mathbb{k} \\ (u, v) &\mapsto \phi(u, v)\end{aligned}$$

es una forma bilineal simétrica si

- $\phi(u_1 + u_2, v) = \phi(u_1, v) + \phi(u_2, v)$
- $\phi(\lambda u, v) = \lambda \phi(u, v)$
- $\phi(u, v) = \phi(v, u)$

$\forall u, v, u_1, u_2 \in \mathbb{E}$  y  $\forall \lambda \in \mathbb{k}$ .

**Definición 0.1.2.** Sea  $\phi$  una forma bilineal simétrica sobre un  $\mathbb{k}$ -e.v.  $\mathbb{E}$ . Diremos que la aplicación

$$\begin{aligned}q: \mathbb{E} &\rightarrow \mathbb{k} \\ u &\mapsto q(u) = \phi(u, u)\end{aligned}$$

es la forma cuadrática asociada a  $\phi$ .

**Observación 0.1.3.** Se cumple que  $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$

**Lema 0.1.4.** Sea  $\phi$  una forma bilineal simétrica sobre un  $\mathbb{k}$ -e.v.  $\mathbb{E}$  con  $\text{car } \mathbb{k} \neq 2$  y sea  $q$  la forma cuadrática asociada a  $\phi$ , entonces

$$\phi(u, v) = \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v))$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}q(u + v) - q(u) - q(v) &= \phi(u + v, u + v) - \phi(u, u) - \phi(v, v) = \\ &= \phi(u, u) + \phi(u, v) + \phi(v, u) + \phi(v, v) - \phi(u, u) - \phi(v, v) = 2\phi(u, v)\end{aligned}$$

□

**Definición 0.1.5.** Sea  $\phi$  una forma bilineal simétrica/cuadrática sobre un  $\mathbb{k}$ -e.v.  $\mathbb{E}$  y sea  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  una base. La matriz de  $\phi$  en base  $B$  es

$$M_B(\phi) = (a_{ij}) = (\phi(u_i, u_j))$$

**Observación 0.1.6.** La matriz  $M_B(\phi)$  es simétrica

**Definición 0.1.7.** Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -e.v. y sea  $\phi: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{k}$  una forma bilineal simétrica.

- Diremos que  $\phi$  es definida positiva si

$$\phi(x, x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{E} \quad x \neq \vec{0}$$

- Diremos que  $\phi$  es definida negativa si

$$\phi(x, x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{E} \quad x \neq \vec{0}$$

- Diremos que  $\phi$  es no definida en cualquier otro caso.

**Observación 0.1.8.** Si  $\phi$  es una forma bilineal simétrica y definida positiva entonces define un producto escalar sobre  $\mathbb{E}$ .

**Definición 0.1.9.** Dada una matriz cuadrada  $A$  ( $\dim n$ ) definimos

$$A_k = (a_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq k \quad \text{y} \quad \delta_k(A) = |A_k|$$

**Teorema** de Sylvester (0.1.10)

Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -e.v. de dimension  $n$  y sea  $\phi: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{k}$  una forma bilineal simétrica, entonces

$$\phi \text{ es definida positiva} \iff \delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n \quad \forall B \text{ base de } \mathbb{E}$$

*Demostración.*  $\implies$

Como  $\phi$  es definida positiva, define un producto escalar sobre  $\mathbb{E}$ . Si tomamos una base  $B$  cualquiera, mediante Gramm-Schmidt podemos construir una base ortogonal  $B_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Por tanto

$$i \neq j \implies \phi(v_i, v_j) = 0, \quad \phi(v_i, v_i) > 0 \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Llamamos  $\phi(v_i, v_i) = \lambda_i > 0$ . Por tanto

$$M_{B_2}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \implies |M_{B_2}(\phi)| = \prod_{i=1}^n \lambda_i > 0$$

Entonces, como  $M_B(\phi) = S_{B, B_2}^T M_{B_2}(\phi) S_{B_2, B}$

$$|M_B(\phi)| = |S_{B_2, B}|^2 |M_{B_2}(\phi)| > 0$$

Por lo tanto, la matriz de un producto escalar tiene determinante positivo independientemente de la base tomada. Observamos que  $\phi$  también define un producto escalar en el

subespacio vectorial  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$  cuando lo restringimos a este. Por lo que hemos visto antes se tiene que

$$\left| M_B(\phi)_k \right| = \delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

$\Leftarrow$

Tenemos que  $\delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n$ . Aplicamos la siguiente variación de Gramm-Schmidt. Tomamos la base  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  Y hacemos la siguiente construcción:

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = \alpha_{2,1}u_1 + u_2 \\ v_3 = \alpha_{3,1}u_1 + \alpha_{3,2}u_2 + u_3 \\ \vdots \\ v_n = \alpha_{n,1}u_1 + \dots + \alpha_{n,n-1}u_{n-1} + u_n \end{cases} \quad \alpha_{i,j} \text{ son tales que } \phi(v_k, u_i) = 0 \quad \begin{matrix} 2 \leq k \leq n \\ 1 \leq i \leq k-1 \end{matrix}$$

Propiedades de  $\{v_1, \dots, v_n\}$

- $\forall k, \langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$  En particular,  $B_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$  es base de  $\mathbb{E}$ .
- $\phi(v_k, v_i) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq k-1$  porque  $v_i \in \langle u_1, \dots, u_i \rangle$  y hemos tomado los  $\alpha$  de manera que  $\phi(v_k, u_i) = 0 \implies B_2$  es base ortogonal
- La matriz  $S_{B_2B}$

$$S_{B_2B} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{2,1} & \dots & \alpha_{n,1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{n,n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies |S_{B_2B}| = 1 \text{ y } \delta_k(S_{B_2B}) = 1$$

Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned} M_B(\phi) &= S_{B,B_2}^T M_{B_2}(\phi) S_{B,B_2} \\ \left( \begin{array}{c|c} k & \updownarrow \\ \hline \leftrightarrow & \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c|c} k & \updownarrow \\ \hline \leftrightarrow & \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \phi(v_1, v_1) & \\ \vdots & \vdots \\ \hline & \phi(v_k, v_k) \\ \hline & \vdots \\ & \phi(v_n, v_n) \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} k & \updownarrow \\ \hline \leftrightarrow & \end{array} \right) \\ \implies \delta_k(M_B(\phi)) &= \delta_k(S_{B,B_2}^t) \delta_k(M_{B_2}(\phi)) \delta_k(S_{B,B_2}) = \delta_k(M_{B_2}(\phi)) = \\ &= \prod_{i=1}^k \phi(v_i, v_i) > 0 \text{ (por hipótesis)} \implies \frac{\delta_k(M_B(\phi))}{\delta_{k-1}(M_B(\phi))} = \phi(v_k, v_k) > 0 \end{aligned}$$

Finalmente,  $\forall x \in \mathbb{E}$

$$\phi(x, x) = \phi \left( \sum_{i=1}^k x_i v_i, \sum_{i=1}^k x_i v_i \right) = \sum_{i=1}^k x_i^2 \phi(v_i, v_i) > 0 \text{ si } x \neq \vec{0}$$

□

**Teorema** del método convergencia-pivote (0.1.11)

Dada una forma bilineal simétrica  $\phi$ , queremos encontrar una base de  $\mathbb{E}$ ,  $B_2$ , en la cual  $M_{B_2}(\phi)$  sea una matriz diagonal. Partimos de una base  $B$  i de  $M_B(\phi)$ . El procesos es: operación con filas a las dos matrices y luego la misma operacion pero en las columnas de la primera matriz únicamente (véase ejemplo).

$$(M_B(\phi)|Id) \stackrel{\text{op. filas}}{\sim} (S_1 M_B(\phi)|S_1) \stackrel{\text{misma op. en columnas}}{\sim} (S_1 M_B(\phi) S_1^T | S_1) \sim \dots \sim \\ \sim (S_r \dots S_1 M_B(\phi) S_1^T \dots S_r^T | S_r \dots S_1)$$

Donde la matriz de la izquierda es  $M_{B_2}$  y es diagonal.

**Ejemplo 0.1.12.**

$$q_\phi(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 2yz; \quad A = M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{fila } (1)+(2)]{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{columna } (1)+(2)]{\sim} \\ \xrightarrow[\text{columna } (1)+(2)]{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{fila } (2)+(3)]{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{columna } (2)+(3)]{\sim} \\ \xrightarrow[\text{columna } (2)+(3)]{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{fila } (3)-\frac{1}{2}(2)]{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{columna } (3)-\frac{1}{2}(2)]{\sim} \\ \xrightarrow[\text{columna } (3)-\frac{1}{2}(2)]{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & | & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Entonces, en base  $B$ , los vectores de  $B_2$  son:

- $v_1 = (1, 0, 0); \quad \phi(v_1, v_1) = 2$
- $v_2 = (1, 1, 1); \quad \phi(v_2, v_2) = -2$
- $v_3 = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}); \quad \phi(v_3, v_3) = \frac{1}{2}$

Y  $\phi(v_i, v_j) = 0, i \neq j$ .

**Proposición 0.1.13.** Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -e.v. de dimension  $n$ , sea  $\phi: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{k}$  una forma bilineal simétrica y sea  $q$  su forma cuadrática asociada. Consideremos  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  una base  $q$ -ortogonal de  $\mathbb{E}$ . Sabemos que

$$D = M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$



Consideremos el subespacio vectorial  $\mathbb{E}^\perp \subseteq \mathbb{E}$  definido por  $\mathbb{E}^\perp = \{u \in \mathbb{E} \mid \phi(u, v) = 0 \ \forall v \in \mathbb{E}\}$ . Tenemos que

i)

$$D = M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & \alpha_m & \\ \vdots & & & 0 & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \implies E^\perp = \langle u_{m+1}, \dots, u_n \rangle.$$

ii)

$$\operatorname{rg} q + \dim \mathbb{E}^\perp = n \implies i_0(q) = \dim \mathbb{E}^\perp.$$

iii) Sean  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ , e  $i_+(q)$  el número de elementos estrictamente positivos de la diagonal de  $M_B(\phi)$ .  $i_+(q)$  no depende de la base  $q$ -ortogonal  $B$  elegida.

iv) Sea  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  y sean  $\delta_0 = 1, \delta_1, \dots, \delta_n \neq 0$ . Entonces,  $i_-(q)$  es igual al número de cambios de signo en la secuencia  $\delta_0, \dots, \delta_n$ .

*Demostración.*

i)  $u_i \in \{u_{m+1}, \dots, u_n\}$ ,

$$\phi(u_j, u_i) = (0 \ \cdots \ 1 \ \cdots \ 0) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha_m & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \ \forall 1 \leq j \leq n \implies \langle u_{m+1}, \dots, u_n \rangle \subseteq \mathbb{E}^\perp.$$

Sea  $u \in \mathbb{E}$  tal que  $u \notin \langle u_{m+1}, \dots, u_n \rangle$ . Se tiene que  $\exists 1 \leq i \leq m$  t.q.  $x_i \neq 0$ . Entonces,

$$e_i^t M_B(\phi) u = (0 \ \cdots \ 1_i \ \cdots \ 0) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha_m & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ x_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha_i x_i \neq 0 \implies u \notin \mathbb{E}^\perp.$$

Así pues,  $\mathbb{E}^\perp = \langle u_{m+1}, \dots, u_n \rangle$ .

iii) Sea  $B' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$  una base  $q$ -ortogonal de  $\mathbb{E}$ .

$$M_{B'}(\phi) = D' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha'_n \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$m = i_+(q, B); \quad \mathbb{F}^+ = \langle u_1, \dots, u_m \rangle; \quad \mathbb{E} = \mathbb{F}^+ \oplus \langle u_{m+1}, \dots, u_n \rangle = \mathbb{F}^+ \oplus \mathbb{F}^{\leq 0}.$$

Análogamente,

$$m' = i_+(q, B'); \quad \mathbb{F}'^+ = \langle u'_1, \dots, u'_m \rangle; \quad \mathbb{E} = \mathbb{F}'^+ \oplus \langle u'_{m+1}, \dots, u'_n \rangle = \mathbb{F}'^+ \oplus \mathbb{F}'^{\leq 0}.$$

Consideremos la función que proyecta un vector de  $\mathbb{F}^+$  sobre  $\mathbb{F}'^+$ .

$$\begin{aligned} f: \mathbb{F}^+ &\rightarrow \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}'^+ \\ v &\mapsto f(v). \end{aligned}$$

Sea  $v \in \mathbb{F}^+$  y sean  $v_1$  y  $v_2$  las proyecciones de  $v$  sobre  $\mathbb{F}'^+$  y  $\mathbb{F}'^{\leq 0}$  respectivamente. Tenemos que  $f(v) = v_1$ . Entonces,

$$f(v) = 0 \implies v_1 = 0 \implies v = v_2.$$

Además,  $0 \leq \phi(v, v)$  y  $\phi(v_2, v_2) = \phi(v, v) \leq 0$ , de modo que  $v = 0$  y  $f$  es inyectiva. Considerando la función que proyecta un vector de  $\mathbb{F}'^+$  sobre  $\mathbb{F}^+$ .

$$\begin{aligned} g: \mathbb{F}'^+ &\rightarrow \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}^+ \\ v &\mapsto g(v). \end{aligned}$$

y siguiendo un razonamiento análogo, obtenemos que  $g$  es inyectiva, de modo que  $m = m'$ .

□

## 0.2. Clasificación afín y proyectiva

**Definición 0.2.1.** Sean  $\mathbb{E}$  y  $\mathbb{F}$   $\mathbb{k}$ -espacios vectoriales. Sean

$$\phi: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{k},$$

$$\psi: \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{k}$$

formas bilineales simétricas. Diremos que  $\phi$  y  $\psi$  son afinmente equivalentes, y escribiremos  $\phi \sim \psi$ , si existe un isomorfismo  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  tal que

$$\phi(u, v) = \psi(f(u), f(v)) \quad \forall u, v \in \mathbb{E},$$

$$\phi(f^{-1}(u'), f^{-1}(v')) = \psi(u', v') \quad \forall u', v' \in \mathbb{F}.$$

**Teorema** de Sylvester (0.2.2)

i)  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$

$$\phi \sim \psi \iff \text{rg } \phi = \text{rg } \psi \text{ y } i_+(\phi) = i_+(\psi).$$

ii)  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$

$$\phi \sim \psi \iff \text{rg } \phi = \text{rg } \psi.$$

# Tema 1

## Álgebra multilineal

### 1.1. Espacio dual

**Definición 1.1.1.** Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -ev. Definimos el espacio dual de  $\mathbb{E}$  como  $\mathbb{E}^* = \{\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{k} \text{ lineales}\}$  (también es un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial).

**Observación 1.1.2.** Para definir  $\mathbb{E}^*$  tenemos que usar bases de  $\mathbb{E}$ .

**Definición 1.1.3.** Si  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  es una base de  $\mathbb{E}$  ( $\mathbb{k}$ -ev.) definimos

$$\begin{aligned} u_i^* : \mathbb{E} &\rightarrow \mathbb{k} \\ u_j &\mapsto u_i^*(u_j) = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Y llamaremos base dual de  $B$  a  $B^* = \{u_1^*, \dots, u_n^*\}$  (que efectivamente es una base de  $\mathbb{E}^*$ ).

**Observación 1.1.4.** En particular si  $w \in \mathbb{E}^*$  y  $w = \sum_{i=1}^n a_i u_i^*$ , se cumple que:

$$w(u_j) = \sum_{i=1}^n a_i u_i^*(u_j) = a_j \implies w = \sum_{i=1}^n w(u_i) u_i^*.$$

**Proposición 1.1.5.** *Cambios de base.* Sean  $B_1$  y  $B_2$  bases de  $\mathbb{E}$  ( $\mathbb{k}$ -ev. de  $\dim \mathbb{E} = n$ ) y sean  $B_1^*$  y  $B_2^*$  las bases duales de  $B_1$  y  $B_2$ . Si  $S_{B_1 B_2}$  es la matriz de cambio de base de  $B_1$  a  $B_2$ , entonces

$$S_{B_1^* B_2^*} = (S_{B_1 B_2}^{-1})^T = (S_{B_2 B_1})^T.$$

**Proposición 1.1.6.** *Aplicaciones lineales.* Sean  $\mathbb{E}$  y  $\mathbb{F}$   $\mathbb{k}$ -ev. y sea  $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  una aplicación lineal, entonces  $\phi$  induce la aplicación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \phi^* : \mathbb{F}^* &\rightarrow \mathbb{E}^* \\ w &\mapsto \phi^*(w) = w \circ \phi. \end{aligned}$$

**Observación 1.1.7.** Si  $\mathbb{E}$  y  $\mathbb{F}$  son de dimensión finita,  $\phi$  admite expresión matricial (en coordenadas). En particular:

$$\left. \begin{array}{l} B_1 \text{ base de } \mathbb{E} \\ B_2 \text{ base de } \mathbb{F} \end{array} \right\} \implies \phi \text{ viene dada por } M_{B_1, B_2}(\phi),$$

$$\left. \begin{array}{l} B_1^* \text{ base de } \mathbb{E}^* \\ B_2^* \text{ base de } \mathbb{F}^* \end{array} \right\} \implies \phi^* \text{ viene dada por } M_{B_2^*, B_1^*}(\phi^*) = (M_{B_1, B_2}(\phi))^T.$$

**Proposición 1.1.8.** *Espacio bidual.* Dado  $\mathbb{E}$   $\mathbb{k}$ -ev. podemos definir  $\mathbb{E}^*, \mathbb{E}^{**}, \dots$ . En particular tenemos que  $\mathbb{E}^{**}$  es canónicamente isomorfo a  $\mathbb{E}$  mediante el isomorfismo

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{E} &\rightarrow \mathbb{E}^{**} \\ u &\mapsto \phi(u),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\phi(u): \mathbb{E}^* &\rightarrow \mathbb{k} \\ w &\mapsto (\phi(u))(w) = w(u).\end{aligned}$$

**Observación 1.1.9.** Como este isomorfismo es canónico (no depende de las bases),  $\mathbb{E} \cong \mathbb{E}^{**}$  y no distinguimos entre  $\mathbb{E}$  y  $\mathbb{E}^{**}$ .

## 1.2. Tensores

**Definición 1.2.1.** Sean  $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_r$   $\mathbb{k}$ -ev. Diremos que  $f: \mathbb{E}_1 \times \dots \times \mathbb{E}_r \rightarrow \mathbb{k}$  es un tensor (o una aplicación multilinear) si  $\forall i = 1, \dots, r$  y  $\forall v_j \in \mathbb{E}_j$  ( $i \neq j$ ) se cumple que

$$\begin{aligned}\phi_i: \mathbb{E}_i &\rightarrow \mathbb{k} \\ v &\mapsto \phi(u) = f(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_r)\end{aligned}$$

es una aplicación lineal.

**Definición 1.2.2.** Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -ev. Llamaremos tensor de tipo  $(p, q)$  (o tensor  $p$  veces covariante y  $q$  veces contravariante) (o tensor  $p$ -covariante y  $q$ -contravariante) a un tensor

$$\begin{aligned}f: \overbrace{\mathbb{E} \times \dots \times \mathbb{E}}^p \times \overbrace{\mathbb{E}^* \times \dots \times \mathbb{E}^*}^q &\rightarrow \mathbb{k} \\ (v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) &\mapsto f(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q).\end{aligned}$$

**Observación 1.2.3.** Al conjunto de tensores de este tipo se le denota como  $T_p^q(\mathbb{E})$ .

**Observación 1.2.4.** Por convenio  $T_0(\mathbb{E}) = T^0(\mathbb{E}) = T_0^0(\mathbb{E}) = \mathbb{k}$ .

**Ejemplo 1.2.5.** Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -ev.

- $T_1(\mathbb{E}) = T_1^0(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$ .
- $T^1(\mathbb{E}) = T_0^1 = \mathbb{E}^{**} (\cong \mathbb{E})$ .
- $T_2(\mathbb{E}) = T_2^0(\mathbb{E}) = \{\text{formas bilineales de } \mathbb{E} \text{ en } \mathbb{k}\}$ .

**Proposición 1.2.6.**  $T_p^q(\mathbb{E}) = T_q^p(\mathbb{E}^*)$  (cambiando el orden).

**Proposición 1.2.7.**  $T_p^q(\mathbb{E})$  tiene estructura de  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial. Si  $f, g \in T_p^q(\mathbb{E})$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ ,

$$\begin{aligned}\alpha f + \beta g: \overbrace{\mathbb{E} \times \dots \times \mathbb{E}}^p \times \overbrace{\mathbb{E}^* \times \dots \times \mathbb{E}^*}^q &\rightarrow \mathbb{k} \\ (v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) &\mapsto (\alpha f + \beta g)(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q).\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) &= \alpha f(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) + \\ &\quad \beta g(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q).\end{aligned}$$

**Definición 1.2.8.** Dados  $f \in T_p^q(\mathbb{E})$  y  $g \in T_{p'}^{q'}(\mathbb{E})$ , definimos el producto tensorial de  $f$  y  $g$  como

$$\begin{aligned} f \otimes g: \overbrace{\mathbb{E} \times \cdots \times \mathbb{E}}^{p+p'} \times \overbrace{\mathbb{E}^* \times \cdots \times \mathbb{E}^*}^{q+q'} &\rightarrow \mathbb{K} \\ (v_1, \dots, v_p, \overline{v_1}, \dots, \overline{v_{p'}}, w_1, \dots, w_q, \overline{w_1}, \dots, \overline{w_{q'}}) &\mapsto f(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) * \\ &g(\overline{v_1}, \dots, \overline{v_{p'}}, \overline{w_1}, \dots, \overline{w_{q'}}). \end{aligned}$$

**Observación 1.2.9.** Si  $f$  y  $g$  son tensores, entonces  $f \otimes g$  también lo es. Además  $f \otimes g \in T_{p+p'}^{q+q'}(\mathbb{E})$ .

**Proposición 1.2.10.** Sean  $f \in T_p^q(\mathbb{E})$ ,  $g \in T_{p'}^{q'}(\mathbb{E})$  y  $h \in T_{p''}^{q''}(\mathbb{E})$ .

- $\otimes$  NO es abeliano. En general  $f \otimes g \neq g \otimes f$ .
- $\otimes$  es asociativo.  $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$ . Denotado por  $f \otimes g \otimes h$ .
- $\vec{0} \otimes f = f \otimes \vec{0} = \vec{0}$ .
- $f \otimes (g + h) = f \otimes g + f \otimes h$ ,  $((f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h)$ .
- $\alpha \in \mathbb{K}$ .  $(\alpha f) \otimes g = \alpha(f \otimes g) = f \otimes (\alpha g)$ .

**Ejemplo 1.2.11.** Sea  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ ,  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ . Y consideramos el producto tensorial de los tensores  $e_1^*$  y  $e_2^*$  sobre los vectores  $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$  y  $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ .

$$\left. \begin{aligned} (e_1^* \otimes e_2^*)(v_1, v_2) &= e_1^*(v_1)e_2^*(v_2) = x_1y_2 \\ (e_2^* \otimes e_1^*)(v_1, v_2) &= e_2^*(v_1)e_1^*(v_2) = y_1x_2 \end{aligned} \right\} \implies e_1^* \otimes e_2^* \neq e_2^* \otimes e_1^*.$$

**Ejemplo 1.2.12.** Sea  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ ,  $B = \{e_1, e_2\}$ ,  $B^* = \{e_1^*, e_2^*\}$ , entonces

$$e_1 \otimes e_2 \in T^2(\mathbb{E}) \quad \left\{ \begin{aligned} (e_1 \otimes e_2) &= (e_1^{**} \otimes e_2^{**})(e_1^*, e_1^*) = e_1(e_1)e_2(e_1) = 0, \\ (e_1 \otimes e_2)(e_1^*, e_2^*) &= 1, \\ (e_1 \otimes e_2)(e_2^*, e_1^*) &= 0, \\ (e_1 \otimes e_2)(e_2^*, e_2^*) &= 0. \end{aligned} \right.$$

**Observación 1.2.13.** Si  $\mathbb{E}$  es un  $\mathbb{K}$ -ev de dimensión  $n$  y  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$

$$\underbrace{(e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_p}^*)}_{I=\{i_1, \dots, i_p\}} \otimes \underbrace{(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q})}_{J=\{j_1, \dots, j_q\}} \underbrace{(e_{l_1}, \dots, e_{l_p})}_{L=\{l_1, \dots, l_p\}} \underbrace{(e_{m_1}^*, \dots, e_{m_q}^*)}_{M=\{m_1, \dots, m_q\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } I = L \text{ y } J = M, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Observación 1.2.14.** Sean  $f, g \in T_p^q(\mathbb{E})$ , entonces

$$f = g \iff f(e_{i_1}, \dots, e_{j_q}^*) = g(e_{i_1}, \dots, e_{j_q}^*), \quad \begin{aligned} &\forall e_{i_1}, \dots, e_{i_p} \in B, \\ &\forall e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^* \in B^*. \end{aligned}$$

### 1.3. Dimensión y bases de $T_p^q(\mathbb{E})$

Recordemos que  $T_p^q(\mathbb{E})$  es un  $\mathbb{k}$ -ev.

**Teorema** de la base de  $T_p^q(\mathbb{E})$  (1.3.1)

Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -ev. de dimensión  $n$  y sea  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ , entonces

- i)  $\dim T_p^q(\mathbb{E}) = n^{p+q}$
- ii) Una base de  $T_p^q(\mathbb{E})$  es

$$B_p^q = \left\{ e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_p}^* \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q} \mid \begin{smallmatrix} i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\} \\ j_1, \dots, j_q \in \{1, \dots, n\} \end{smallmatrix} \right\}$$

- iii) Si  $f \in T_p^q(\mathbb{E})$ , las coordenadas de  $f$  en la base  $B_p^q$  son

$$f_{B_p^q} = (f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^*))$$

*Demostración.*

- i) Es consecuencia directa de ii)
- ii) Primero veamos que  $B_p^q$  es linealmente independiente. Sea

$$w = \sum \alpha_{IJ} (e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_p}^* \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}) = 0$$

Sean  $I_0, J_0$  dos conjuntos de índices cualesquiera, entonces

$$0 = w(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^*) = \alpha_{I_0 J_0}$$

(Por la 1.2.13). Veamos ahora que  $B_p^q$  es generadora. Sea  $f \in T_p^q(\mathbb{E})$ , definimos  $g \in T_p^q(\mathbb{E})$  como

$$g = \sum_{\forall I, J} (f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^*)) (e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_p}^* \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q})$$

Demostrando ahora que  $f = g$  quedan provados ii) y iii). Tenemos ahora que

$$g(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^*) = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^*)$$

Por la 1.2.13 y queda demostrado el teorema. □

**Ejemplo 1.3.2.** Sea  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ ,  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  y  $B^* = \{e_1^* \dots e_n^*\}$

- Sea  $u \in \mathbb{R}^n$

$$u = u(e_1^*) + \dots + u(e_n^*) \quad (B_0^1 = B)$$

- Sea  $w \in T_1^0(\mathbb{E}) (= \mathbb{E}^*)$

$$w = w(e_1)e_1^* + \dots + w(e_n)e_n^* \quad (B_1^0 = B^*)$$

- Sea  $n = 3$  y sea  $f \in T_2(\mathbb{E})$

$$B_2^0 = \{e_1^* \otimes e_1^*, e_1^* \otimes e_2^*, \dots, e_3^* \otimes e_3^*\}$$

$$f = f(e_1, e_1)e_1^* \otimes e_1^* + f(e_1, e_2)e_1^* \otimes e_2^* + \dots + f(e_3, e_3)e_3^* \otimes e_3^*$$

**Proposición 1.3.3.** *Cambio de base.* Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -ev. de dimensión  $n$  y sean  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  y  $\overline{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ . Sea  $S = (s_j^i)$  la matriz de cambio de base de  $\overline{B}$  a  $B$  y sea  $T = (t_j^i)$  su inversa. De manera que tenemos esta relación:

$$B \begin{matrix} \xleftarrow{S} \\ \xrightarrow{T} \end{matrix} \overline{B} \qquad B^* \begin{matrix} \xleftarrow{S^t} \\ \xrightarrow{T^t} \end{matrix} \overline{B}^*$$

Sea  $f \in T_p^q(\mathbb{E})$  y sean

$$f_B = (\alpha_{IJ})_{I,J} = \left( f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^*) \right)_{I,J}$$

$$f_{\overline{B}} = (\overline{\alpha}_{IJ})_{I,J} = \left( f(u_{i_1}, \dots, u_{i_p}, u_{j_1}^*, \dots, u_{j_q}^*) \right)_{I,J}$$

Entonces,  $\forall I, J$

$$\overline{\alpha}_{IJ} = f(u_{i_1}, \dots, u_{i_p}, u_{j_1}^*, \dots, u_{j_q}^*) = \sum_{\forall L, M} s_{i_1}^{l_1} \dots s_{i_p}^{l_p} t_{m_1}^{j_1} \dots t_{m_q}^{j_q} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^*)$$

**Ejemplo 1.3.4.**

- $f \in T^1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^{**} = \mathbb{E}$  por lo tanto  $f = u$  y  $\begin{matrix} u_B = (x_1, \dots, u_n) \\ u_{\overline{B}} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n) \end{matrix}$ , entonces

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- $f \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$  por lo tanto  $f = w$  y  $\begin{matrix} w_B = (x_1, \dots, u_n) \\ w_{\overline{B}} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n) \end{matrix}$ , entonces

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = S^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- $f \in T_2(\mathbb{E})$  por lo tanto  $f$  es una forma bilineal y  $\begin{matrix} f_B = A \in M_{n,n}(k) \\ f_{\overline{B}} = A \in M_{n,n}(k) \end{matrix}$ , entonces

$$\overline{A} = S^t A S$$

## 1.4. Recordatorio de permutaciones

- Denotaremos como  $x_n = \{1, \dots, n\}$
- Denotaremos como  $\mathcal{S}_n = \{\sigma: x_n \rightarrow x_n \text{ biyectivas}\}$
- $\#\mathcal{S}_n = n!$
- $\mathcal{S}_n$  es un grupo por composición. Además denotaremos  $s_1 s_2 = s_1 \circ s_2$
- Fijada  $s_0 \in \mathcal{S}_n$ , la aplicación

$$\begin{aligned} \phi: \mathcal{S}_n &\rightarrow \mathcal{S}_n \\ s &\mapsto s_0 s \end{aligned}$$

es biyectiva.

- Sea  $s \in \mathcal{S}_n$ , denotaremos  $s$  de las siguientes maneras
  - $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}$
  - Si  $s$  es cíclica la denotaremos como  $s = (1, 3, 7, 5)$ . En este caso,  $s(1) = 3$ ,  $s(3) = 7$ ,  $s(7) = 5$  y  $s(5) = 1$ , para el resto de valores  $s(i) = i$ .
- Llamaremos trasposición a una permutación del tipo  $s = (i, j)$  con  $i \neq j$
- $\forall s \in \mathcal{S}_n$ ,  $s$  se puede expresar como composición (o producto) de trasposiciones. Además, la paridad del número de trasposiciones se mantiene, es decir

$$s = t_1 \cdots t_p = l_1 \cdots l_q \implies p \equiv q \pmod{2}$$

- Sea  $s \in \mathcal{S}_n$  y sea  $s = t_1 \cdots t_p$  una descomposición de  $s$  en trasposiciones. Entonces, definimos el signo de  $s$  como  $\varepsilon(s) = (-1)^p$ .

## 1.5. Tensores simétricos y antisimétricos

**Definición 1.5.1.** Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -ev. de dimensión  $n$ , sea  $f \in T_p(\mathbb{E})$  y  $s \in \mathcal{S}_p$ , entonces, definimos  $(\underline{s}f) \in T_p(\mathbb{E})$  como

$$(\underline{s}f)(v_1, \dots, v_p) = f(v_{s(1)}, \dots, v_{s(p)})$$

**Ejemplo 1.5.2.** Sea  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$ ,  $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ,  $f = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^* \in T_3(\mathbb{E})$  y  $s = (1, 2, 3) \in \mathcal{S}_3$ , entonces

$$(\underline{s}f)(v_1, v_2, v_3) = f(v_2, v_3, v_1)$$

**Proposición 1.5.3.** Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -ev. de dimensión  $n$ , sean  $w_1, \dots, w_p \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$ , y  $s \in \mathcal{S}_p$  ( $t = s^{-1}$ ). Entonces

$$\underline{s}(w_1 \otimes \cdots \otimes w_p) = w_{t(1)} \otimes \cdots \otimes w_{t(p)}$$



*Demostración.* Sean  $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{E}$  (obsérvese que  $w_1 \otimes \dots \otimes w_p \in T_p(\mathbb{E})$ )

$$\underline{s}(w_1 \otimes \dots \otimes w_p)(u_1, \dots, u_p) = (w_1 \otimes \dots \otimes w_p)(u_{s(1)}, \dots, u_{s(p)}) = w_1(u_{s(1)}) \cdot w_2(u_{s(2)}) \cdots w_p(u_{s(p)})$$

Dado que  $s(i) = j \iff i = t(j)$ ,  $w_i(u_{s(i)}) = w_i(u_j) = w_{t(j)}(u_j)$ . Con lo que podemos reordenar el último producto como

$$w_{t(1)}(u_1) \cdot w_{t(2)}(u_2) \cdots w_{t(p)}(u_p) = w_{t(1)} \otimes \dots \otimes w_{t(p)}(u_1, \dots, u_p)$$

□

**Ejemplo 1.5.4.** Sea  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ ,  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$  para los dos siguientes ejemplos.

En el primero fijamos  $(1, 2) = s \in \mathcal{S}_2$ . Entonces  $s = (1, 2) = s^{-1} = t$  y para los siguientes elementos de  $T_2(\mathbb{E})$  se cumple:

$$f_1 = e_1^* \otimes e_2^* \quad \underline{s}f_1 = e_2^* \otimes e_1^*$$

$$f_2 = e_1^* \otimes e_1^* \quad \underline{s}f_2 = e_1^* \otimes e_1^*$$

$$f_3 = e_2^* \otimes e_3^* \quad \underline{s}f_3 = e_3^* \otimes e_2^*$$

En el segundo fijamos  $(1, 2, 3) = s \in (S)_3$ . Entonces  $t = s^{-1} = (1, 3, 2)$ , es decir, que  $t(1) = 3, t(2) = 1, t(3) = 2$ , y para el siguiente elemento de  $T_3(\mathbb{E})$  se cumple:

$$f = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^* \quad \underline{s}f = e_3^* \otimes e_1^* \otimes e_2^*$$

**Observación 1.5.5.** Sea  $f_i \in T_p(\mathbb{E})$ . Entonces  $\underline{s}(\sum \alpha_i f_i) = \sum \alpha_i (\underline{s}f_i)$ . Por tanto, la proposición anterior sirve para  $\forall f \in T_p(\mathbb{E})$ .

**Ejemplo 1.5.6.** Con las mismas hipótesis que en el primer caso del ejemplo 1.5.4 se cumple:

$$f = 3e_1^* \otimes e_2^* + 5e_1^* \otimes e_1^* + 5e_2^* \otimes e_3^* \quad \underline{s}f = 3e_2^* \otimes e_1^* + 5e_1^* \otimes e_1^* + 5e_3^* \otimes e_2^*$$

**Definición 1.5.7.** Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -ev. de dim  $n$ . Sea  $f \in T_p(\mathbb{E})$ .  $f$  es simétrica  $\iff \forall s \in \mathcal{S}_p, \underline{s}f = f$  y

$$S_p(\mathbb{E}) = \{f \in T_p(\mathbb{E}) \mid f \text{ simétrica}\} \subseteq T_p(\mathbb{E}).$$

**Definición 1.5.8.** Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -ev. de dim  $n$ . Sea  $f \in T_p(\mathbb{E})$ .  $f$  es antisimétrica  $\iff \forall s \in \mathcal{S}_p, \underline{s}f = \varepsilon(s)f$  y

$$A_p(\mathbb{E}) = \{f \in T_p(\mathbb{E}) \mid f \text{ antisimétrica}\} \subseteq T_p(\mathbb{E}).$$

**Observación 1.5.9.**  $S_p(\mathbb{E}), A_p(\mathbb{E}) \subseteq T_p(\mathbb{E})$  son s.e-v. (ver observación 1.5.5).

**Ejemplo 1.5.10.** Para los dos ejemplos, sea  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ , sean  $B$  y  $B^*$  bases de  $\mathbb{E}$  y de  $\mathbb{E}^*$  correspondientemente.

1. Definimos  $f = e_1^* \otimes e_2^* \in T_2(\mathbb{E})$  y  $s = (1, 2) \in (S)_2$ . Entonces  $\mathcal{S}_2 = \{\text{Id}, s\}$  y  $\varepsilon(\text{Id}) = 1, \varepsilon(s) = -1$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Id}(f) = f = \varepsilon(\text{Id}) \cdot f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* \neq f, \underline{s}(f) \neq -f \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} f \notin S_2(\mathbb{E}) \\ f \notin A_2(\mathbb{E}) \end{array}$$

2. Como anteriormente,  $\mathcal{S}_2 = \{\text{Id}, s = (1, 2)\}$ .

■ Para  $f = e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_1^*$ ,

$$\left. \begin{array}{l} \text{Id}(f) = f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* + e_1^* \otimes e_2^* = f \end{array} \right\} \implies f \in S_2(\mathbb{E})$$

■ Para  $f = e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*$ ,

$$\left. \begin{array}{l} \text{Id}(f) = f = \varepsilon(\text{Id})f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* - e_1^* \otimes e_2^* = -f = \varepsilon(s)f \end{array} \right\} \implies f \in A_2(\mathbb{E})$$

**Observación 1.5.11.** ■  $\varepsilon(s) = (-1)^n$  si  $\varepsilon(s) = t_1 \cdots t_n$ , donde  $t_1, \dots, t_n$  son transposiciones.

■  $\varepsilon(s_1 s_2) = \varepsilon(s_1) \varepsilon(s_2)$ .

■  $s \in \mathcal{S}_p$ . Definimos  $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{p \times p}$ , donde  $a_{i,j} = 1$  si  $i = s(j)$  y  $a_{i,j} = 0$  en otro caso. Entonces  $\det A = \varepsilon(s)$ .

**Proposición 1.5.12.** Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -e.v. de dimensión  $n$ , sea  $f \in T_p(\mathbb{E})$ .

1. Podemos caracterizar los tensores simétricos como:

$$f \text{ simétrica} \iff \forall u_1, \dots, u_p \in \mathbb{E}, \forall i, j \quad f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p)$$

2. Podemos caracterizar los tensores antisimétricos como:

$$\begin{aligned} f \text{ antisimétrica} &\iff \forall u_1, \dots, u_p \in \mathbb{E}, \forall i \neq j \quad f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = \\ &\quad -f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p) \\ &\iff \forall u_1, \dots, u_p \in \mathbb{E}, \forall i \neq j \text{ si } u_i = u_j \text{ entonces } f(u_1, \dots, u_p) = 0. \end{aligned}$$

*Demostración.* 1. La implicación directa es una consecuencia de la definición de simetría.

En el caso de la implicación converso se cumple:

$$\forall t \text{ transposición } \underline{t}f = f \implies \forall t_1, \dots, t_m \text{ transposiciones } \underline{t_1, \dots, t_m}f = \underline{t_1}(\underline{t_2}(\dots(\underline{t_m}f)\dots)) = f$$

Finalmente,

$$\forall s \in \mathcal{S}_p \quad s = t_1 \cdots t_m \implies \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s}f = f \implies f \text{ es simétrica.}$$

2. Veamos primero que la tercera condición implica la segunda.

$$\begin{aligned} \forall u_1, \dots, u_p \in E, \forall i \neq j \quad 0 &= f(u_1, \dots, u_i + u_j, \dots, u_i + u_j, \dots, u_p) = \\ &f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_i, \dots, u_p) + f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) + \\ &f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p) + f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_j, \dots, u_p) = \\ &f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) + f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p) \implies \\ &f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = -f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p) \end{aligned}$$

Veamos ahora que la segunda condición implica la primera. Suponiendo cierta la segunda condición se cumple:

$$\underline{t}f = -f \implies \underline{t_1 \cdots t_m}f = (-1)^m f = \varepsilon(t_1 \cdots t_m)f$$

Y entonces:

$$\forall s \in \mathcal{S}_p \quad s = t_1 \cdots t_m \text{ y } \varepsilon(s) = (-1)^m \implies \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s}f = \varepsilon(s)f \implies f \in A_p(E)$$

Y, finalmente, que la primera implica la tercera. Por ser  $f$  antisimétrica,

$$\forall u_1, \dots, u_p \in E, \forall i \neq j \quad f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = -f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p)$$

Si  $u_i = u_j$ , entonces  $f(u_1, \dots, u_p) = 0$ .

□

**Proposición 1.5.13.** Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -ev. con  $\text{car } \mathbb{k} \neq 2$  y sea  $f \in T_p(\mathbb{E})$ , entonces  $\forall v_i, v_j \in \mathbb{E}$

$$f(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots) = -f(\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots) \iff f(\cdots, w, \cdots, w, \cdots) = 0$$

*Demostración.*  $\implies$

$$\begin{aligned} f(\cdots, w, \cdots, w, \cdots) &= -f(\cdots, w, \cdots, w, \cdots) \implies \\ 2f(\cdots, w, \cdots, w, \cdots) &= 0 \implies f(\cdots, w, \cdots, w, \cdots) = 0 \end{aligned}$$

$\longleftarrow$

$$\begin{aligned} f(\cdots, v_i + v_j, \cdots, v_i + v_j, \cdots) &= 0 \implies \\ f(\cdots, v_i, \cdots, v_i, \cdots) + f(\cdots, v_j, \cdots, v_j, \cdots) + f(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots) + f(\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots) &= 0 \\ \implies f(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots) &= -f(\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots) \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 1.5.14.** Sea  $f \in T_2(\mathbb{E})$  (forma bilineal) y sea  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  una base, llamamos  $M_B(f) = A = (f(e_i, e_j))$  y sea  $\mathcal{S}_2 = \{\text{Id}, s = (1, 2)\}$ . Entonces

$$\text{Id}f = f \quad M_b(\underline{s}f) = (\underline{s}f(e_i, e_j)) = (f(e_j, e_i)) = A^t$$

Es decir,  $f$  es simétrico si y solo si  $A^t = A \iff A$  simétrica y  $f$  es antisimétrico si y solo si  $A = -A^t \iff A$  antisimétrica

**Ejemplo 1.5.15.** Sea  $\dim \mathbb{E} = n$  y  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base de  $\mathbb{E}$ , entonces

$$\begin{aligned} f: \overbrace{E \times \cdots \times E}^n &\rightarrow \mathbb{k} \\ (u_1, \dots, u_n) &\mapsto \det_B(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

Como  $f$  es multilineal ( $\implies f \in T_n(\mathbb{E})$ ),  $f$  es antisimétrico por la proposición 1.5.12.

**Definición 1.5.16.** Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -ev. con  $\text{car } \mathbb{k} = 0$  y  $f \in T_p(\mathbb{E})$ . Llamamos simetrizado de  $f$  a

$$S(f) = \frac{1}{p!} \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \underline{s}f$$

y antisimetrizado de  $f$  a

$$A(f) = \frac{1}{p!} \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(s) \underline{s}f$$

**Ejemplo 1.5.17.** Sea  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$  y  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$  base de  $\mathbb{E}$

- Sea  $f = e_1^* \otimes e_2^* \in T_2(\mathbb{E})$  y  $\mathcal{S}_p = \{\text{Id}, s = (1, 2)\}$ , entonces

$$S(f) = \frac{1}{2}(e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_1^*)$$

$$A(f) = \frac{1}{2}(e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*)$$

- Sea  $g = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^*$  y  $\mathcal{S}_p = \{\text{Id}, (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$ , entonces

$$S(g) = \frac{1}{6}(e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^* + e_2^* \otimes e_1^* \otimes e_3^* + e_3^* \otimes e_2^* \otimes e_1^* + e_1^* \otimes e_3^* \otimes e_2^* + e_3^* \otimes e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_3^* \otimes e_1^*)$$

**Observación 1.5.18.**  $s^{-1} \in \mathcal{S}_p$ , por lo tanto no hace falta calcular  $s^{-1}$

**Ejemplo 1.5.19.** Sea  $f \in T_2(\mathbb{E})$  (forma bilineal) y sea  $M_B(f) = A = (f(e_i, e_j))$ , entonces

$$M_B(S(f)) = \frac{1}{2}(M_B(f) + M_B(f)^t) = \frac{1}{2}(A + A^t)$$

$$M_B(A(f)) = \frac{1}{2}(M_B(f) - M_B(f)^t) = \frac{1}{2}(A - A^t)$$

**Observación 1.5.20.** Si  $f \in T_2(\mathbb{E}) \implies f = S(f) + A(f)$

**Proposición 1.5.21.** Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -ev. Consideramos  $A, S: T_p(\mathbb{E}) \rightarrow T_p(\mathbb{E})$ , entonces

- i)  $A, S$  son lineales
- ii)  $f \in S_p(\mathbb{E}) \implies S(f) = f$  y  $f \in A_p(\mathbb{E}) \implies A(f) = f$
- iii)  $\text{Im}(S) = S_p(\mathbb{E})$  y  $\text{Im}(A) = A_p(\mathbb{E})$

*Demostración.*

- i) Queda como ejercicio. (pista: Consideramos  $S(f + g)$ )
- ii)  $f \in S_p(\mathbb{E}) \implies S(f) = f$  queda como ejercicio. Suponemos que  $f \in A_p(\mathbb{E})$ , entonces

$$A(f) = \frac{1}{p!} \left( \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(s) \underline{s}f \right) = \frac{1}{p!} \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(s) (\varepsilon(s)f) = \frac{p!f}{p!} = f$$

- iii)  $\text{Im}(S) = S_p(\mathbb{E})$  queda como ejercicio. Demostraremos que  $\text{Im}(A) = A_p(\mathbb{E})$ . Por ii) sabemos que  $A_p(\mathbb{E}) \subseteq \text{Im}(A)$ , por lo tanto, resta ver que  $A(h) \in A_p(\mathbb{E})$ ,  $\forall h \in T_p(\mathbb{E})$ . Sea  $s \in \mathcal{S}_p$

$$\begin{aligned} \underline{s}A(h) &= \underline{s} \left( \frac{1}{p!} \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r) \underline{r}h \right) = \frac{1}{p!} \left( \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r) \underline{s}(\underline{r}h) \right) = \\ &= \varepsilon(s) \frac{1}{p!} \left( \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(sr) \underline{s}r h \right) \stackrel{1,4}{=} \varepsilon(s) \frac{1}{p!} \left( \sum_{t \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(t) \underline{t}h \right) = \varepsilon(s) A(h) \end{aligned}$$

□

**Observación 1.5.22.** Las mismas construcciones funcionan para tensores  $(0, q)$ ,  $T^q(\mathbb{E}) = T_q(\mathbb{E}^*)$ , pero no funcionan para tensores  $(p, q)$  donde  $p, q \neq 0$  porque las construcciones implican permutaciones.

## 1.6. Producto exterior

**Observación 1.6.1.**  $S_p(\mathbb{E}) \subseteq T_p(\mathbb{E})$ ,  $A_p(\mathbb{E}) \subseteq T_p(\mathbb{E})$  y  $S_p, A_p$  s.e.v..

- $f \in S_p(\mathbb{E})$ ,  $g \in S_{p'}(\mathbb{E})$  en general  $f \otimes g \notin S_{p+p'}(\mathbb{E})$
- $f \in A_p(\mathbb{E})$ ,  $g \in A_{p'}(\mathbb{E})$  en general  $f \otimes g \notin A_{p+p'}(\mathbb{E})$

**Ejemplo 1.6.2.** Sean  $\omega_1, \omega_2 \in T_1(\mathbb{E})$ :

- $T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^* = S_1(\mathbb{E}) = A_1(\mathbb{E})$ , porque  $S_1 = \{\text{Id}\}$ .
- $\omega_1 \otimes \omega_2 \notin S_2(\mathbb{E}), A_2(\mathbb{E})$ .

**Observación 1.6.3.** El producto exterior (que definiremos) manda tensores antisimétricos a antisimétricos.

**Observación 1.6.4.** Lo haremos en  $T_p(\mathbb{E})$ , análogamente se hará en  $T^q(\mathbb{E})$ .

**Definición 1.6.5.** Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -e.v.;  $\omega_1, \dots, \omega_p \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$ , el producto exterior de orden 1 es:

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p = p!A(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_p)$$

**Observación 1.6.6.**

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p &= p! \left( \frac{1}{p!} \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(s) \underline{s} (\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_p) \right) = \\ &= \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(s) (\omega_{s^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{s^{-1}(p)}) \stackrel{\varepsilon(s)=\varepsilon(s^{-1})}{=} \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r) (\omega_{r(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{r(p)}) \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.6.7.** Sea  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ ,  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ .

- $e_1^* \wedge e_2^* = e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*$
- $e_2^* \wedge e_1^* = \dots = -e_1^* \wedge e_2^*$
- $e_1^* \wedge e_1^* = e_1^* \otimes e_1^* - e_1^* \otimes e_1^* = 0$

**Proposición 1.6.8.** Sean  $\omega_1, \dots, \omega_p \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$

- i)  $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p \in A_p(\mathbb{E})$
- ii)  $\omega_1 \wedge \dots \wedge (\alpha_i \overline{\omega_i} + \beta_i \overline{\overline{\omega_i}}) \wedge \dots \wedge \omega_p = \alpha_i (\omega_1 \wedge \dots \wedge \overline{\omega_i} \wedge \dots \wedge \omega_p) + \beta_i (\omega_1 \wedge \dots \wedge \overline{\overline{\omega_i}} \wedge \dots \wedge \omega_p)$
- iii) Sea  $s \in \mathcal{S}_p$ ,  $t = s^{-1}$ ,  $\omega_{s(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{s(p)} = \underline{t} (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p) = \varepsilon(s) (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p)$ .
- iv) Si  $u_1, \dots, u_p \in \mathbb{E}$ ,  $(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p) (u_1, \dots, u_p) = \det (\omega_j(u_i))$ .
- v) Si  $\omega_i = \omega_j$ ,  $(i \neq j) \implies \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p = 0$ .
- vi)  $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p \neq 0 \iff \{\omega_1, \dots, \omega_p\}$  son linealmente independientes.

*Demostración.*

- i)  $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p = p!A(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_p) \implies \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p \in \text{Im}(A) \stackrel{\text{visto}}{=} A_p(\mathbb{E})$ .

ii) Ejercicio (misma proposición que  $\otimes$ ).

iii)  $\omega_{s(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{s(p)} = \underline{t}(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)$  (Ejercicio, misma proposición que  $\otimes$ ).

$$\begin{aligned} \omega_{s(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{s(p)} &\stackrel{\text{1,6,5}+\text{1,6,6}}{=} \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r) (\omega_{rs(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{rs(p)}) = \\ &\stackrel{\varepsilon^2(s)=1}{=} \varepsilon(s) \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \overbrace{\varepsilon(r) \varepsilon(s)}^{\varepsilon(rs)} (\omega_{rs(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{rs(p)}) \stackrel{rs=m \in \mathcal{S}_p}{=} \varepsilon(s) \sum \varepsilon(m) (\omega_{m(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{m(p)}) = \\ &= \varepsilon(s) (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p). \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} \overbrace{(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)}^{T_p(\mathbb{E})} (u_1, \dots, u_p) &= \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r) (\omega_{r(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{r(p)}) (u_1, \dots, u_p) = \\ &= \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r) (\omega_{r(1)}(u_1) \cdots \omega_{r(p)}(u_p)) \stackrel{\text{def det}}{=} \det(\omega_j(u_i))_{i,j}. \end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_p &\stackrel{\text{iii)}}{=} (-1) \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_p \implies \\ \implies 2 (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p) &= 0 \stackrel{\text{car } \mathbb{K} \neq 2}{\implies} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0. \end{aligned}$$

vi)  $\implies$

Suponemos que son l.d. y que  $\omega_p = \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j \omega_j$ :

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{p-1} \wedge \left( \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j \omega_j \right) \stackrel{\text{ii)}}{=} \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{p-1} \wedge \omega_j) \stackrel{\text{v)}}{=} 0 !!$$

$\Longleftarrow$

Sea  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ ,  $B^* = \{\omega_1, \dots, \omega_p, \overbrace{\omega_{p+1}, \dots, \omega_n}^{\text{Steinitz}}\}$  la base dual de  $B$ , tenemos que:

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p) (u_1, \dots, u_p) \stackrel{\text{iv)}}{=} \det(\omega_j(u_i)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

□

**Observación 1.6.9.** En el caso particular de  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  base de  $\mathbb{E}$ ,

$$\begin{aligned} I &= \{i_1, \dots, i_p\}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n; \\ J &= \{j_1, \dots, j_p\}, \quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n. \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{IJ} = \left( e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^* \right) (e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \begin{cases} 1 & \text{si } I = J \\ 0 & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

En efecto, si  $\exists j_k \in J$ ,  $j_k \notin I$ , entonces en virtud del cálculo dado por [iv\)](#) (1.6.8), en la posición  $k$  hay una fila de ceros.

Por otro lado, si  $I = J$  entonces tenemos el determinante de la matriz identidad.

Observemos también que si  $I = J$  pero no están ordenadas crecientemente,  $\varepsilon_{IJ} = \pm 1$  en función de las permutaciones que ordenan estos conjuntos.

**Teorema 1.6.10.**

Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -e.v. de dim  $n$ , sea  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  y sea  $p \leq n$ .

- i)  $\dim A_p(\mathbb{E}) = \binom{n}{p}$ .
- ii) Una base de  $A_p$  es  $\tilde{B} = \{e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^*\}$ ,  $i_1 \leq i_2 < \cdots < i_p \leq n$ .
- iii) Si  $w \in A_p(\mathbb{E})$ , las coordenadas de  $w$  en la base anterior son:

$$\left( w(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \right)_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}$$

*Demostración.*

i) [ii\)](#)  $\implies$  [i\)](#) trivialmente.

ii) **L.I.:** Sea

$$w = \sum_{\substack{I=\{i_1, \dots, i_p\} \\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}} \alpha_I e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^* = 0.$$

Sea  $I_0 = \{i_1^0, \dots, i_p^0\}$  con  $1 \leq i_1^0 < \cdots < i_p^0 \leq n$  cualesquiera. Entonces,

$$0 = w(e_{i_1^0}, \dots, e_{i_p^0}) = \sum_{\substack{I=\{i_1, \dots, i_p\} \\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}} \alpha_I e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^* (e_{i_1^0}, \dots, e_{i_p^0}) \stackrel{1.6.9}{=} \alpha_{I_0}.$$

**Generadores:**

$$\begin{aligned} A_p(\mathbb{E}) &= A(T_p(\mathbb{E})) = A_p([e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}]_I) = [\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}\}_I] = \\ &\stackrel{ii)}{=} [\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}\}_{I \text{ ordenado}}]. \end{aligned}$$

iii) Sea  $w \in A_p(\mathbb{E})$ . Consideremos

$$\tilde{w} = \sum_{\substack{I=\{i_1, \dots, i_p\} \\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}} \left( w(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \right) e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^*.$$

Veremos que  $\tilde{w} = w$ .

Como tensores, basta ver que coinciden sobre vectores  $(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$ . Como ambos son alternados, podemos suponer  $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$ . Entonces,

$$\tilde{w}(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = w(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}).$$

□

**Ejemplo 1.6.11.** Sea  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$  y  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$

Espacio	dim	base	coordenadas
$A_1(\mathbb{E}) = T_1(\mathbb{E})$	3	$\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$	$w = (a_1, b_1, c_1)$
$A_2(\mathbb{E}) \subseteq T_2(\mathbb{E})$	3	$\{e_1^* \wedge e_2^*, e_1^* \wedge e_3^*, e_2^* \wedge e_3^*\}$	$w_1 \wedge w_2 = (w_1 \wedge w_2)(e_1, e_2)e_1^* \wedge e_2^* +$ $(w_1 \wedge w_2)(e_1, e_3)e_1^* \wedge e_3^* +$ $(w_1 \wedge w_2)(e_2, e_3)e_2^* \wedge e_3^*$
$A_3(\mathbb{E}) \subseteq T_3(\mathbb{E})$	1	$\{e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*\}$	$t = (w_1 \wedge w_2 \wedge w_3) = (t(e_1, e_2, e_3))$

Además, si  $w_1 = (a_1, b_1, c_1)_{B^*}$ ,  $w_2 = (a_2, b_2, c_2)_{B^*}$  y  $w_3 = (a_3, b_3, c_3)_{B^*}$

$$\begin{aligned}
 w_1 \wedge w_2 &= \begin{vmatrix} w_1(e_1) & w_1(e_2) \\ w_2(e_1) & w_2(e_2) \end{vmatrix} (e_1^* \wedge e_2^*) + \begin{vmatrix} w_1(e_1) & w_1(e_3) \\ w_2(e_1) & w_2(e_3) \end{vmatrix} (e_1^* \wedge e_3^*) + \begin{vmatrix} w_1(e_2) & w_1(e_3) \\ w_2(e_2) & w_2(e_3) \end{vmatrix} (e_2^* \wedge e_3^*) = \\
 &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (e_1^* \wedge e_2^*) + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} (e_1^* \wedge e_3^*) + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} (e_2^* \wedge e_3^*) \\
 w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 &= (w_1 \wedge w_2 \wedge w_3)(e_1, e_2, e_3)(e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} (e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*)
 \end{aligned}$$

**Observación 1.6.12.** De forma análoga, podemos hacer el producto exterior de tensores 1-contravariantes ( $T^1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$ ) y obtendremos  $A^p(\mathbb{E})$  con dimensión  $\binom{n}{p}$  y base  $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}\}_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}$  si  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  es base de  $\mathbb{E}$ .

**Definición 1.6.13.** Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -ev. y sean  $f \in A_p(\mathbb{E})$  y  $g \in A_q(\mathbb{E})$ . Definimos el producto exterior de  $f$  y  $g$  como

$$f \wedge g = \frac{(p+q)!}{p!q!} A(f \otimes g).$$

**Proposición 1.6.14.** Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -ev. y sean  $f \in A_p(\mathbb{E})$ ,  $g \in A_q(\mathbb{E})$  y  $h \in A_r(\mathbb{E})$ .

- i)  $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h) = f \wedge g \wedge h$
- ii)  $f \wedge g = (-1)^{pq} g \wedge f$
- iii)  $\wedge$  es lineal en cada factor.

**Observación 1.6.15.**  $w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_r = w_1 \wedge (w_2 \wedge (\cdots w_{r-1} \wedge (w_r)))$ .

**Ejemplo 1.6.16.** Sea  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$ ,  $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  y  $f, g \in A_2(\mathbb{E})$

- $f = e_1^* \wedge e_2^* + e_2^* \wedge e_3^* + e_3^* \wedge e_4^*$
- $g = e_1^* \wedge e_2^* + e_1^* \wedge e_3^*$

$$\begin{aligned}
 f \wedge g &= (e_1^* \wedge e_2^* + e_2^* \wedge e_3^* + e_3^* \wedge e_4^*) \wedge (e_1^* \wedge e_2^* + e_1^* \wedge e_3^*) = \\
 &= \cancel{e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_1^* \wedge e_2^*} + \cancel{e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*} + \cancel{e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^*} + \cancel{e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*} + \\
 &\quad + e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + \cancel{e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*} = e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_1^* \wedge e_2^*
 \end{aligned}$$



## Tema 2

# Geometría Projectiva

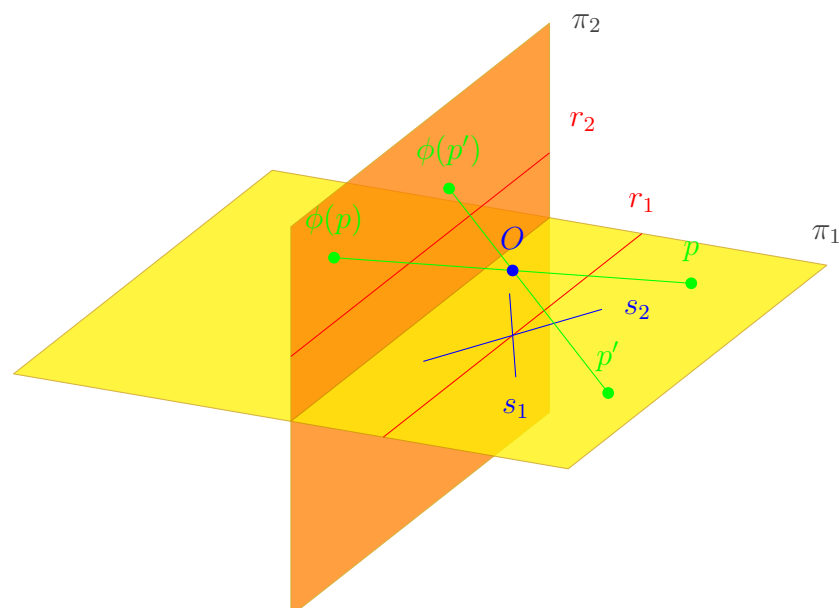
### 2.1. Contexto e idea

Segun el programa de Erlangen, una geometría se basa en el estudio de invariantes al aplicar unas ciertas transformaciones. Así tenemos que las geometrías están “incluidas” en las superiores.

Así, la geometría euclídea, que estudia las transformaciones ortogonales, estaría “incluida” en la geometría afín, que estudia las transformaciones lineales. Aquí se muestra una tabla con las distintas geometrías en la cual cada una esta “incluida” en la anterior

Geometría	Transformaciones de estudio
G. euclídea	transformaciones ortogonales
G. afín	transformaciones lineales
G. proyectiva	proyectividades
G. Algebraica	transformaciones por polinomios
G. Analítica	transformaciones por funciones analíticas
G. Diferencial	transformaciones por funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$
Topología	transformaciones por funciones de clase $\mathcal{C}^0$

#### 2.1.1. Problema matemático



La idea básica del problema es enviar los puntos de  $\pi_1$  a  $\pi_2$  mediante la siguiente aplicación

$$\begin{aligned}\phi: \pi_1 &\rightarrow \pi_2 \\ p &\mapsto \bar{p}_0 \cap \pi_2\end{aligned}$$

**Observación 2.1.1.**

- i)  $\phi$  manda rectas a rectas
- ii)  $\phi$  no está definida en  $r_1$
- iii)  $r_2$  no está en la imagen de  $\phi$
- iv)  $\phi(s_1)$  y  $\phi(s_2)$  son paralelas, por lo tanto,  $\phi$  no mantiene el paralelismo
- v)  $\phi$  no mantiene el tipo de cónica afín

Veremos que la solución para ii) y iii) consistirá en añadir puntos en el  $\infty$ .

## 2.2. Definición y caracterizaciones del espacio proyectivo

**Definición 2.2.1.** Sea  $\mathbb{k}$  un cuerpo,  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -e.v. de  $\dim n + 1$ . El espacio proyectivo asociado a  $\mathbb{E}$  es

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}) = \{\text{s.e.v. de dim 1 de } \mathbb{E}\}$$

Diremos que  $\mathbb{P}(\mathbb{E})$  tiene dimensión  $n$ .

**Observación 2.2.2.** Se cumple  $\mathbb{P}(\mathbb{E}) = (\mathbb{E} \setminus \{0\}) / \sim$ , donde  $v \sim v' \iff \exists \lambda \neq 0, v' = \lambda v$  para  $v, v' \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ .

**Definición 2.2.3.** Tenemos la siguiente aplicación  $\pi$  dada por el paso al cociente.

$$\begin{aligned}\pi: \mathbb{E} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{E}) \\ v &\mapsto \pi(v) = [v] \\ \{\text{s.e.v. de dim 1 de } \mathbb{E}\} &\leftrightarrow [v]\end{aligned}$$

**Definición 2.2.4.** A los elementos de  $\mathbb{P}(\mathbb{E})$  los llamaremos puntos de  $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ .

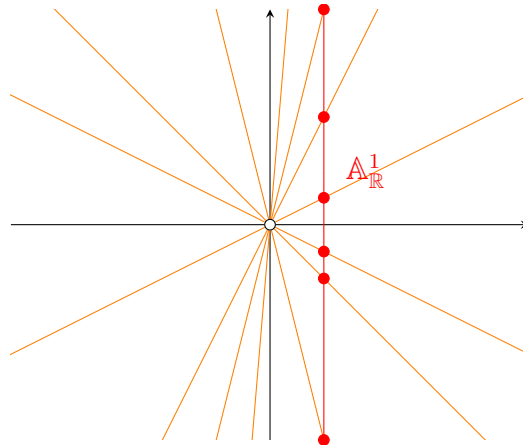
$$p = \pi(v) = [v]$$

**Observación 2.2.5.**

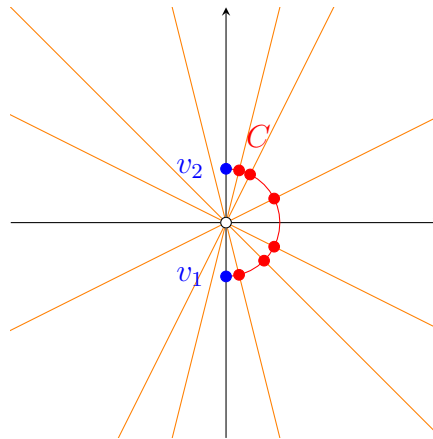
- Si  $\mathbb{E}$  no es relevante,  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$ .
- Si queremos remarcar  $\mathbb{k}$ ,  $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$ .
- Normalmente  $\mathbb{P}^n + \mathbb{k}^n = \mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1}) = (\mathbb{k}^{n+1} \setminus 0) / \sim$ .

**Ejemplo 2.2.6.**

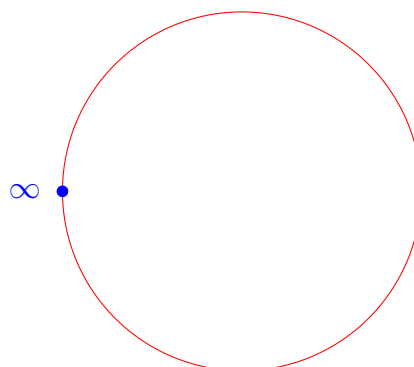
1.  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ .



Cada objeto de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  (rectas en naranja) tiene su equivalente en  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$  (puntos en rojo), a excepción de la recta  $x = 0$ . Para solucionar este problema, podemos usar la siguiente representación



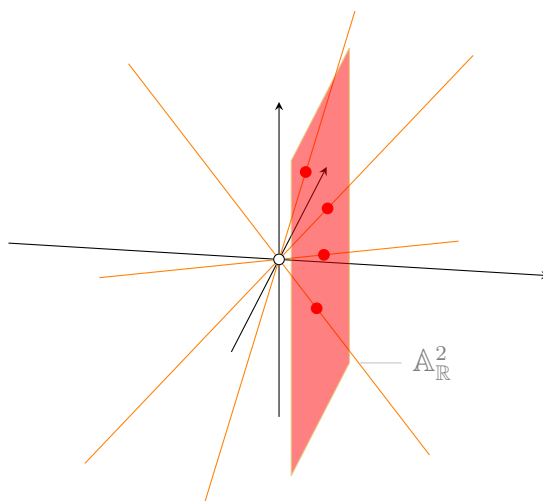
Pero el problema ahora viene por que  $v_1$  y  $v_2$  corresponden al mismo elemento de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ . Lo podemos solucionar de la siguiente forma:



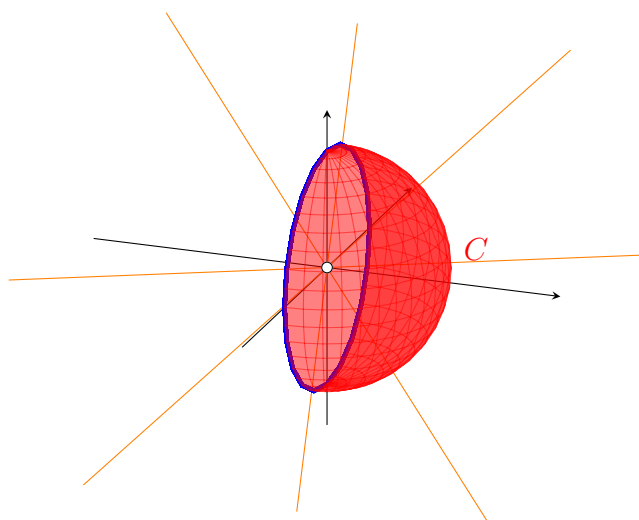
De tal forma que

$$\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1 \cup \{\infty\} = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 = C/(v_1 \sim v_2)$$

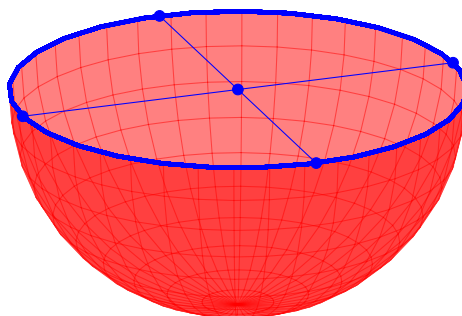
2.  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ .



Cada objeto de  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$  (rectas en naranja) tiene su equivalente en  $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$  (puntos en rojo), a excepción de las rectas del plano  $x = 0$ . Para solucionar este problema, procedemos de manera análoga a [1](#)

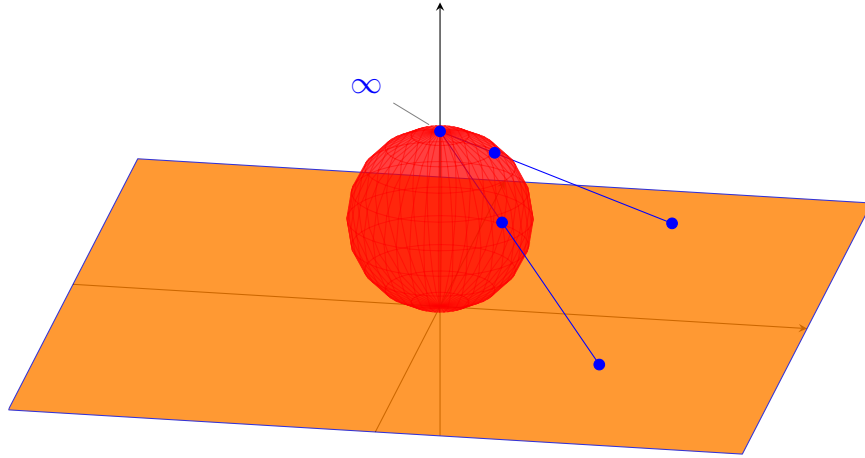


De nuevo, nos encontramos con el problema de que hay elementos de  $C$  (en azul) que se corresponden con el mismo elemento de  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ . No obstante, podemos visualizarlo como



Y unir los puntos azules antipolares. Aunque, si lo tratamos de imaginar, este objeto no cabe en  $\mathbb{R}^3$ .

3.  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus 0) / \sim = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$ . Las igualdades por el momento son por analogía o intuición, más adelante se demostrarán. Aunque nos podemos hacer una idea basándonos en la proyección estereográfica



4.  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}/2}^2$  contiene 7 puntos pues las rectas de  $\mathbb{Z}^3$  solo contienen el 0 y un punto.

**Observación 2.2.7.** Hemos enunciado la definición algebraica de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ . Existe una definición axiomática que no es igual en algunos casos patológicos.

## 2.3. Variedades lineales proyectivas

**Definición 2.3.1.** Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$ -e.v. de dimensión  $n + 1$ , sea  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$ . Llamaremos variedad lineal (proyectiva) de dimensión  $r$  a cualquier conjunto de la forma:

$$V = \pi(H \setminus \{0\})$$

donde  $H \subseteq \mathbb{E}$  es un subespacio vectorial de dimensión  $r + 1$ .

Por convención definimos la siguiente notación:

$$V = \pi(H \setminus \{0\}) = \pi(H)$$

**Ejemplo 2.3.2.**

- $\mathbb{P}^n = \pi(\mathbb{E})$  es una variedad lineal de dimensión  $n$ .
- $p \in \mathbb{P}^n$ ,  $p = \pi(v) = \pi([v])$  es una variedad lineal de dimensión 0.
- $\emptyset = \pi(\emptyset_{\mathbb{E}})$  es una variedad lineal de dimensión  $-1$ .

**Definición 2.3.3.**

- $\dim V = 1 \longrightarrow$  Recta
- $\dim V = 2 \longrightarrow$  Plano
- $\dim V = n - 1 \longrightarrow$  Hiperplano

**Lema 2.3.4.**  $V = \pi(H \setminus \{0\}) \iff H \setminus \{0\} = \pi^{-1}(V)$

**Ejercicio 2.3.5.** Demostrar el lema anterior.

**Observación 2.3.6.** Hay una biyección

$$\{\text{s.e.v. de } \mathbb{E}\} \xrightleftharpoons[\pi^{-1}]{\pi} \{\text{variedades lineales de } \mathbb{P}(\mathbb{E})\}$$

- con dimension  $r + 1 \leftrightarrow r$
- $H_1 \subseteq H_2 \iff V_1 \subseteq V_2$  con  $V_i = \pi(H_i)$
- Las operaciones  $+$  y  $\cap$  definidas para subespacios, se definen a traves de esta biyección a variedades.

**Proposición 2.3.7.** Sean  $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{P}^n$  variedades lineales  $\implies V_1 \cap V_2$  variedad lineal que verifica:

- $V_1 \cap V_2 \subseteq V_1, V_2$
- Si  $W$  variedad lineal,  $W \subseteq V_1, V_2 \implies W \subseteq V_1 \cap V_2$

*Demostración.* Veamos que:  $V_1 \cap V_2 = \pi(H_1 \cap H_2)$  si  $V_i = \pi(H_i)$   
 $\supseteq$

$$\text{Si } v \in H_1 \cap H_2, p = [v] \in \pi(H_1), \pi(H_2) \implies p \in V_1 \cap V_2$$

$\subseteq$

$$\begin{aligned} \text{Sea } p \in V_1 \cap V_2, \left. \begin{array}{l} p = [v_1], v_1 \in H_1 \\ p = [v_2], v_2 \in H_2 \end{array} \right\} &\implies [v_1] = [v_2] \implies \exists \lambda \neq 0 \text{ t.q. } v_2 = \lambda v_1 \implies \\ &\implies v_2 \in H_1 \implies v_2 \in H_1 \cap H_2 \implies p = [v_2] \in \pi(H_1 \cap H_2) \end{aligned}$$

El resto sigue de lo que sabemos de s.e.v.s. □

**Definición 2.3.8.** Sean  $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{P}^n$  variedades lineales,  $V_i = \pi(H_i)$ , definimos *join* o variedad lineal generada como:

$$V_1 \vee V_2 = \pi(H_1 + H_2)$$

**Proposición 2.3.9.**

- $V_1, V_2 \subseteq V_1 \vee V_2$
- Sea  $W$  una variedad lineal,  $V_1, V_2 \subseteq W \implies V_1 \vee V_2 \subseteq W$

*Demostración.* Propiedades de la suma de s.e.v. □

**Proposición 2.3.10.** Sean  $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{P}^n$  variedades lineales:

- $V_1 \subseteq V_2 \implies \dim(V_1) \leq \dim(V_2)$
- Si  $V_1 \subseteq V_2$  y  $\dim(V_1) = \dim(V_2) \implies V_1 = V_2$

**Proposición 2.3.11.** *Fórmula de Grassmann.*

$$\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \vee V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

*Demostración.* Propiedades s.e.v. □

**Ejemplo 2.3.12.**

1.  $\mathbb{P}^2$   $V_1, V_2$  rectas, tenemos que  $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \vee V_2) = 2$  (Grassmann).

$\dim(V_1 \cap V_2)$	$1 \leq \dim(V_1 \vee V_2) \leq 2$	Posición relativa
0	2	Se cortan en un punto
1	1	Son la misma recta

Por tanto, dos rectas en un plano, o se cruzan o son la misma.

2.  $\mathbb{P}^3$   $V_1, V_2$  rectas, tenemos que  $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \vee V_2) = 2$  (Grassmann).

$\dim(V_1 \cap V_2)$	$1 \leq \dim(V_1 \vee V_2) \leq 3$	Posición relativa
-1	3	Se cruzan
0	2	Se cortan en un punto ( $V_1 \vee V_2 \cong \mathbb{P}^2$ )
1	1	Son la misma recta

3.  $\mathbb{P}^3$   $V_1, V_2$  planos, tenemos que  $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \vee V_2) = 4$  (Grassmann).

$\dim(V_1 \cap V_2)$	$2 \leq \dim(V_1 \vee V_2) \leq 3$	Posición relativa
1	3	Se cortan en una recta
2	2	Son el mismo plano

4.  $\mathbb{P}^3$   $V_1$  plano,  $V_2$  recta, tenemos que  $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \vee V_2) = 3$  (Grassmann).

$\dim(V_1 \cap V_2)$	$2 \leq \dim(V_1 \vee V_2) \leq 3$	Posición relativa
0	3	Se cortan en un punto
1	2	$V_2 \subseteq V_1$

**Proposición 2.3.13.** Sean  $p \in \mathbb{P}^n, r, V, H \subseteq \mathbb{P}^n$  (recta, variedad lineal, hiperplano, respectivamente).

$$1. \dim(V \vee p) = \begin{cases} \dim V & (\iff p \in V) \\ \dim V + 1 & (\iff p \notin V) \end{cases}$$

$$2. \dim(r \cap H) = \begin{cases} 1 & (\iff r \subseteq H) \\ 0 & (\iff r \not\subseteq H) \end{cases}$$

*Demostración.* Fórmula de Grassmann. □

**Definición 2.3.14.** Sean  $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{P}^n, (V_i = \pi(H_i))$  variedades lineales,  $V_1$  y  $V_2$  son suplementarias  $\iff H_1$  y  $H_2$  son complementarios.

**Observación 2.3.15.**

$$\begin{aligned} V_1, V_2 \text{ suplementarias} &\iff H_1 \oplus H_2 = \mathbb{E} \iff \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad H_1 + H_2 = \mathbb{E} \\ (2) \quad H_1 \cap H_2 = \emptyset \end{array} \right\} \iff \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad V_1 \vee V_2 = \mathbb{P}^n \\ (2) \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset \end{array} \right\} \end{aligned}$$

**Proposición 2.3.16.** Sean  $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{P}^n$  variedades lineales:

1.  $V_1, V_2$  son suplementarias  $\implies \dim V_1 + \dim V_2 = n - 1$
2. Si  $\dim V_1 + \dim V_2 = n - 1$

$$V_1, V_2 \text{ suplementarias} \iff V_1 \vee V_2 = \mathbb{P}^n \iff V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

*Demostración.*

1.  $V_1, V_2$  suplementarias  $\iff H_1, H_2$  complementarios  $\implies \overbrace{\dim H_1}^{\dim V_1+1} + \overbrace{\dim H_2}^{\dim V_2+1} = \dim \mathbb{E} = n + 1$
2. Fórmula de Grassmann.

□

**Definición 2.3.17.** Sea  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$ , y sean  $p_0, \dots, p_m \in \mathbb{P}^n$  tal que  $p_i = [v_i], v_i \in \mathbb{E}$ , decimos que  $p_0, \dots, p_m$  son linealmente independientes (l.i.)  $\iff v_0, \dots, v_m \in \mathbb{E}$  son linealmente independientes.

**Observación 2.3.18.** La independencia lineal no depende de los representantes elegidos.

**Ejemplo 2.3.19.**  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ . Sean  $p_0 = [(1, 1, 0)], p_1 = [(0, 1, 1)], p_2 = [(2, 3, 1)]$ . Entonces  $p_0$  y  $p_1$  son linealmente independientes, pero  $p_0, p_1, p_2$  son linealmente dependientes.

**Proposición 2.3.20.** Sean  $p_0, \dots, p_m \in \mathbb{P}^n$  puntos y  $V \subseteq \mathbb{P}^n$  una variedad lineal:

1.  $\dim(p_0 \vee \dots \vee p_m) \leq m$ .
2.  $\dim(p_0 \vee \dots \vee p_m) = m \iff p_0, \dots, p_m$  son linealmente independientes.
3.  $\dim V = m \iff \exists p_0, \dots, p_m \in V$  linealmente independientes tales que  $V = p_0 \vee \dots \vee p_m \iff \forall p_0, \dots, p_m \in V$  linealmente independientes,  $V = p_0 \vee \dots \vee p_m$ .

*Demostración.* Inmediata a partir de propiedades de s.e.v..

□

**Definición 2.3.21.**  $p_0, \dots, p_r \in \mathbb{P}^n (r \geq n)$  están en posición general  $\iff n + 1$  puntos cualesquiera de ellos son l.i..

## 2.4. Sistemas de referencia proyectivos. Coordenadas proyectivas

**Observación 2.4.1.**  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$ . Sea  $B = \{v_0, \dots, v_n\}$  base de  $\mathbb{E}$ :

$$p = [v] = [\lambda v] \quad (v)_B = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (\lambda v)_B = \begin{pmatrix} \lambda x_0 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Vemos que las coordenadas estarían definidas salvo por multiplicar por  $\lambda$ .



**Definición 2.4.2.** Sea  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$ . Un sistema de referencia proyectivo en  $\mathbb{P}^n$  es:

$$R = \{p_0, \dots, p_n; \bar{p}\}$$

Donde  $p_0, \dots, p_n, \bar{p}$  están en posición general.

- $\{p_0, \dots, p_n\}$  son los vertices de  $R$
- $\bar{p}$  es el punto unidad

**Definición 2.4.3.** Sea  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$ . Fijado un sistema de referencia  $R$ . Sea  $B = \{u_0, \dots, u_n\}$  base de  $\mathbb{E}$ . Diremos que  $B$  está adaptada a  $R$  si y solo si:

$$\begin{cases} p_i = [u_i], \forall i = 0, \dots, n \\ \bar{p} = [u_0 + \dots + u_n] \end{cases}$$

*Asignación de coordenadas proyectivas*

$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$ , Sea  $R = \{p_0, \dots, p_n; \bar{p}\}$ , y  $B = \{u_0, \dots, u_n\}$  una base adaptada. Sea  $q \in \mathbb{P}^n$ ,  $q = [v]$ , entonces  $q_R = v_B$ . (Hace falta ver que la definición es consistente)

**Proposición 2.4.4.** Sea  $R$  un sistema de referencia en  $\mathbb{P}^n$ . Sean  $B_1 = \{u_0, \dots, u_n\}$ ,  $B_2 = \{u'_0, \dots, u'_n\}$  bases adaptadas a  $R$ . Sea  $q = [v] \in \mathbb{P}^n$ , entonces  $\exists \lambda \neq 0$  tal que  $v_{B_2} = \lambda v_{B_1}$ .

*Demostración.*  $p_i = [u_i] = [u'_i], \forall i = 0, \dots, n$ . Por tanto,  $\exists \lambda \neq 0$  tal que  $u'_i = \lambda_i u_i, \forall i = 1, \dots, n$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned} \bar{p} = [u_0 + \dots + u_n] &= [u'_0 + \dots + u'_n] \implies \exists \lambda \neq 0 \text{ tal que } u'_0 + \dots + u'_n = \\ &= \lambda_0 u_0 + \dots + \lambda_n u_n = \lambda(u_0 + \dots + u_n) \xrightarrow{B_1 \text{ base}} \lambda_i = \lambda \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

□

**Observación 2.4.5.**  $R = \{p_0, \dots, p_n; \bar{p}\}$  en  $\mathbb{P}^n$

1.  $q \in \mathbb{P}^n, q_R = (a_0, \dots, a_n) = \lambda(a_0, \dots, a_n) \stackrel{\text{notación}}{=} (a_0 : \dots : a_n) \forall \lambda \neq 0$
2. Ejemplos:
 
$$(p_0)_R = (1 : 0 : \dots : 0)$$

$$\vdots$$

$$(p_n)_R = (0 : \dots : 0 : 1)$$
3.  $q_R = (0 : \dots : 0)$  no existe.
4. Sea  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ ,  $R = \{p_0, p_1, p_2; \bar{p}\} = \{[(1, 1, 0)], [(1, 0, 1)], [(0, 1, 1)]; [(3, 3, 2)]\}$ , entonces  $B = \{[(1, 1, 0)], [(1, 0, 1)], [(0, 1, 1)]\}$  no es una base adaptada, para que lo sea, debemos multiplicar  $v_0, v_1, v_2$  por  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  tales que  $\bar{p} = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ . En este caso:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 = 3 \\ \lambda_0 + \lambda_2 = 3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_0 = 2 \\ \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Y el sistema de referencia con la base  $B$  adaptada es:

$$R' = \{[(2, 2, 0)], [(1, 0, 1)], [(0, 1, 1)]; [(3, 3, 2)]\}$$

**Ejemplo 2.4.6.** Consideremos el espacio  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ , un sistema de referencia  $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, p_2; \bar{p}\}$ , con  $p_0 = [(1, 1, 0)]$ ,  $p_1 = [(1, 0, 1)]$ ,  $p_2 = [(0, 1, 1)]$  y  $\bar{p} = [(3, 3, 2)]$ . Queremos encontrar  $B = \{u_0, u_1, u_2\}$  una base adaptada, es decir, que cumpla  $\bar{p} = [u_0 + u_1 + u_2]$  y que  $p_i = [u_i]$ . Comprobamos que para la base  $B = \{(2, 2, 0)^t, (1, 0, 1)^t, (0, 1, 1)^t\}$ , se cumple

$$(p_0)_{\mathcal{R}} = (1 : 0 : 0) \quad (p_1)_{\mathcal{R}} = (0 : 1 : 0)$$

$$(p_2)_{\mathcal{R}} = (0 : 0 : 1) \quad (\bar{p})_{\mathcal{R}} = (1 : 1 : 1)$$

El punto  $q = [(3, 2, 1)]$  tiene las coordenadas  $q_{\mathcal{R}} = w_B = (1 : 1 : 0)$ , que, en un abuso de notación, escribiremos como  $(1, 1, 0)$ .

**Proposición 2.4.7.** Sean  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$  sistemas de referencia de  $\mathbb{P}^n$ . Sea  $q \in \mathbb{P}^n$ .

- i)  $\exists S \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$  invertible tal que  $q_{\mathcal{R}_1} = Sq_{\mathcal{R}_2}$  (matriz del cambio de sistema de referencia).
- ii) Sean  $B_1, B_2$  bases adaptadas a  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$  respectivamente. Podemos coger  $S = S_{B_2, B_1}$ .
- iii) Cualquier matriz de cambio de referencia es de la forma  $S = \lambda S_{B_2, B_1}$  ( $\lambda \neq 0$ ).

*Demostración.* Cambio de base en  $\mathbb{E}$ . □

**Observación 2.4.8.** Sea  $\mathcal{R}$  sistema de referencia en  $\mathbb{P}^n$ , y  $B$  una base adaptada a éste. Las variedades lineales se pueden describir con

- Ecuaciones paramétricas: Sea  $V \subseteq \mathbb{P}^n$  una variedad lineal de dim  $m$ . Entonces  $\exists p_0, \dots, p_m \in V$  linealmente independientes tales que  $V = p_0 \vee \dots \vee p_m$  y para  $q \in \mathbb{P}^n$

$$\begin{aligned} q \in V &\iff w \in F \iff \begin{cases} \exists \alpha_0, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K} \\ w_B = \alpha_0(v_0)_B + \dots + \alpha_m(v_m)_B \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} \exists \alpha_0, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K} \\ q_R = \alpha_0(p_0)_R + \dots + \alpha_m(p_m)_R \end{cases} \end{aligned}$$

Donde  $V = \pi(F)$ ,  $p_i = \pi(v_i)$ , y  $q = \pi(w)$ .

- Ecuaciones implícitas: Las ecuaciones implícitas de  $V$  en  $\mathcal{R}$  coinciden con las ecuaciones implícitas de  $F$  en  $B$ . Es decir, existe una matriz  $A$  tal que los vectores

$$w_B = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ que cumplen } A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ son todos los pertenecientes a } F \text{ y los}$$

$$\text{puntos } q_R = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ que cumplen } A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ son todos los pertenecientes a } V.$$

**Observación 2.4.9.** Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensión  $n+1$ ,  $F$  un subespacio vectorial de dimensión  $m+1$ ,  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$  y  $V = \pi(F)$  una variedad lineal. Entonces

$$\dim V = \dim F - 1 = \dim E - \text{rg } A - 1 = n + 1 - \text{rg } A - 1 \implies m = \dim V = n - \text{rg } A$$

**Observación 2.4.10.**

- Para convertir de ecuaciones implícitas a paramétricas se debe resolver el sistema de ecuaciones homogéneo.
- Para convertir de ecuaciones paramétricas a implícitas se debe imponer

$$\operatorname{rg} \left( \begin{array}{ccc|c} (p_0)_R & \dots & (p_m)_R & x_0 \\ & & & \vdots \\ & & & x_n \end{array} \right) = \operatorname{rg} \left( \begin{array}{ccc} (p_0)_R & \dots & (p_m)_R \end{array} \right)$$

**Ejemplo 2.4.11.** Consideremos el espacio  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  con un sistema de referencia  $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, p_2, \bar{p}\}$ , y los puntos  $(q_0)_{\mathcal{R}} = (1, 1, 1)$  y  $(q_1)_{\mathcal{R}} = (1, 2, 0)$ . Encontremos las ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta  $V = q_0 \vee q_1$ .

- Dado que los puntos son dados directamente y se hace su join, las ecuaciones paramétricas son tan solo las combinaciones lineales de  $q_0$  y  $q_1$ . Más formalmente, si

$$(q)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ se cumple}$$

$$q \in V \iff \exists \alpha_0, \alpha_1 \text{ t.q. } \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Para encontrar las ecuaciones implícitas de esta variedad, imponemos que  $(x_0, x_1, x_2)$  sea combinación lineal de  $q_0$  y  $q_1$ , es decir,

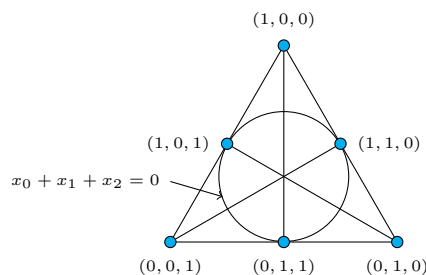
$$q \in V \iff \operatorname{rg} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_0 \\ 1 & 2 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \end{array} \right) = \operatorname{rg} \left( \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{array} \right) = 2 \iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_0 \\ 1 & 2 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \end{vmatrix} = 0$$

Consideremos ahora la recta  $V'$  dada por  $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ . Para encontrar su expresión paramétrica, debemos resolver este sistema de ecuaciones. En este caso, podemos encontrar dos soluciones linealmente independientes y expresar todas las soluciones como combinaciones lineales de estas.

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \beta_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En este mismo ejemplo,  $p_0 \vee p_1 : x_2 = 0$ ,  $p_2 \vee \bar{p} : x_1 - x_0 = 0$  y  $(p_0 \vee p_1) \cap (p_2 \vee \bar{p}) = (1, 1, 0)$ . Análogamente para los demás índices.

**Ejemplo 2.4.12.** Consideremos  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}/2}^2$ . Sus puntos se pueden expresar como  $(a, b, c)$   $a, b, c \in \mathbb{Z}/2$ . Podemos representarlo como



Como se puede observar, contiene siete puntos y siete rectas. Se denomina plano de Fano.

**Observación 2.4.13.** En  $\mathbb{P}^2$ , sean  $(p_0)_R = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$  y  $(p_1)_R = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ . Entonces,  $V =$

$p_0 \vee p_1: \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ . Es decir, aunque no haya operación suma definida entre puntos, está bien definido el conjunto de combinaciones lineales de ellos.

**Observación 2.4.14.**

i)

$$\left. \begin{array}{l} V = p_0 \vee \cdots \vee p_m \\ W = q_0 \vee \cdots \vee q_r \end{array} \right\} V \vee W = p_0 \vee \cdots \vee p_m \vee q_0 \vee \cdots \vee q_r.$$

*Demostración.* Directa de espacios vectoriales. □

ii)

$$\left. \begin{array}{l} V: A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \\ W: B \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right\} V \cap W: \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

*Demostración.* Directa de espacios vectoriales. □

## 2.5. Dualidad

La **dualidad** es una diferencia fundamental respecto de la geometría afín.

**Ejercicio 2.5.1.** *Problema 3, Lista T1.* Consideremos  $\mathbb{E}$  un espacio vectorial y su dual  $\mathbb{E}^*$ . Sea  $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$  un subespacio vectorial. Entonces,  $\mathbb{F}^\perp = \{w \in \mathbb{E}^* | w(u) = 0 \ \forall u \in \mathbb{F}\}$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{E}^*$  y se satisface que  $\dim \mathbb{F}^\perp = \dim \mathbb{E} - \dim \mathbb{F}$ . Además, se tiene que

$$\blacksquare \mathbb{F}_1 \subseteq \mathbb{F}_2 \iff \mathbb{F}_2^\perp \subseteq \mathbb{F}_1^\perp,$$

- $(\mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2)^\perp = \mathbb{F}_1^\perp + \mathbb{F}_2^\perp,$
- $(\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2)^\perp = \mathbb{F}_1^\perp \cap \mathbb{F}_2^\perp,$
- $(\mathbb{F}^\perp)^\perp = \mathbb{F}.$

Por tanto,

$$\boxed{\mathbb{E} = \mathbb{E}^{**}} \quad \boxed{\mathbb{E}^*} \\ \{\text{s.e.v. de dim} = d\} \xrightleftharpoons[\perp]{\perp} \{\text{s.e.v. de dim} = \dim \mathbb{E} - d\}$$

de manera que la operación  $\perp$  define una biyección entre  $\mathbb{E}$  y  $\mathbb{E}^*$  que invierte el orden de las inclusiones e intercambia  $+$  y  $\cap$ .

**Definición 2.5.2.** Sea  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$ . Llamaremos espacio proyectivo dual de  $\mathbb{P}(\mathbb{E})$  a

$$(\mathbb{P}^n)^* \equiv \mathbb{P}(\mathbb{E}^*).$$

**Observación 2.5.3.**

- i)  $\dim(\mathbb{P}^n)^* = n.$
- ii)  $((\mathbb{P}^n)^*)^* = \mathbb{P}^n.$

**Definición 2.5.4.** Sea  $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$  y sea  $V = \pi(\mathbb{F}) \subseteq \mathbb{P}^n$  una variedad lineal de dim  $m$ . Entonces, se define la variedad lineal dual de  $V$  como

$$V^* \equiv \pi(\mathbb{F}^\perp) \subseteq (\mathbb{P}^n)^*.$$

**Observación 2.5.5.**

- i)  $\dim V^* = n - m - 1,$
- ii)  $(V^*)^* = V,$
- iii)  $V_1 \subseteq V_2 \iff V_2^* \subseteq V_1^*,$
- iv)  $(V_1 \vee V_2)^* = V_1^* \cap V_2^*,$
- v)  $(V_1 \cap V_2)^* = V_1^* \vee V_2^*.$

En conclusión,

$$\boxed{\mathbb{P}^n = (\mathbb{P}^n)^{**}} \quad \boxed{(\mathbb{P}^n)^*} \\ \{\text{vars. lins. de dim} = m\} \xrightleftharpoons[*]{*} \{\text{vars. lins. de dim} = n - m - 1\}$$

de manera que la operación  $*$  define una biyección entre  $\mathbb{P}^n$  y  $(\mathbb{P}^n)^*$  que invierte el orden de las inclusiones e intercambia  $\vee$  y  $\cap$ .

**Observación 2.5.6.** *Caso particular de los hiperplanos.*

$$\boxed{\mathbb{P}^n} \quad \boxed{(\mathbb{P}^n)^*} \\ H \text{ hiperplano} \quad \longmapsto \quad H^* \text{ punto} \\ \dim m = n - 1 \quad \quad \dim n - (n - 1) - 1 = 0$$

Recíprocamente,

$$H_p \equiv p^* \text{ hiperplano} \longleftrightarrow p \in (\mathbb{P}^n)^*$$

En ecuaciones,

$$H_p: a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0 \longleftrightarrow p = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Conclusión: los hiperplanos de  $\mathbb{P}^n$  son (*están en biyección con*) un espacio proyectivo de dim  $n$ .

**Definición 2.5.7.** Sean  $H_0, \dots, H_m$  hiperplanos de  $\mathbb{P}^n$ .  $H_0, \dots, H_m$  son linealmente independientes  $\iff H_0^*, \dots, H_m^*$  son linealmente independientes.

**Definición 2.5.8.** Sean  $H_0, \dots, H_m$  hiperplanos de  $\mathbb{P}^n$ .  $H_0, \dots, H_m$  están en posición general  $\iff H_0^*, \dots, H_m^*$  están en posición general.

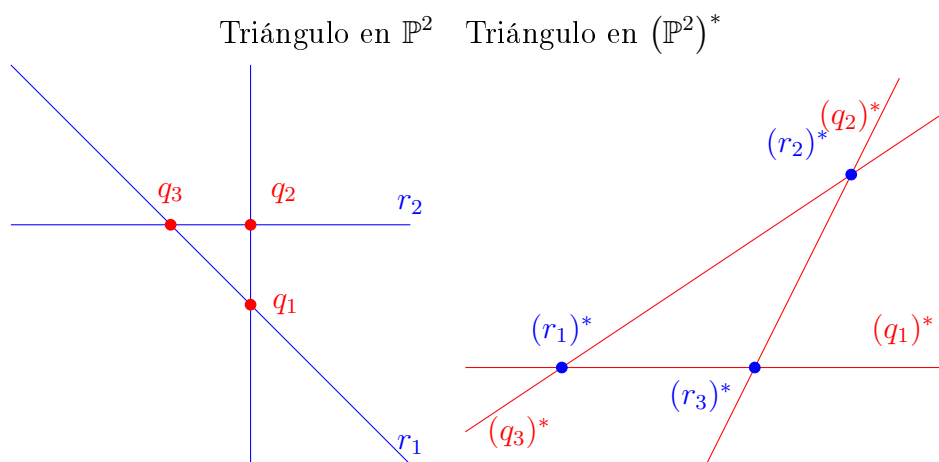
**Proposición 2.5.9.** Sean  $H_0, \dots, H_m \subseteq \mathbb{P}^n$  hiperplanos, entonces

$$H_0, \dots, H_m \text{ l.i.} \iff \dim(H_0 \cap \cdots \cap H_m) = n - m - 1$$

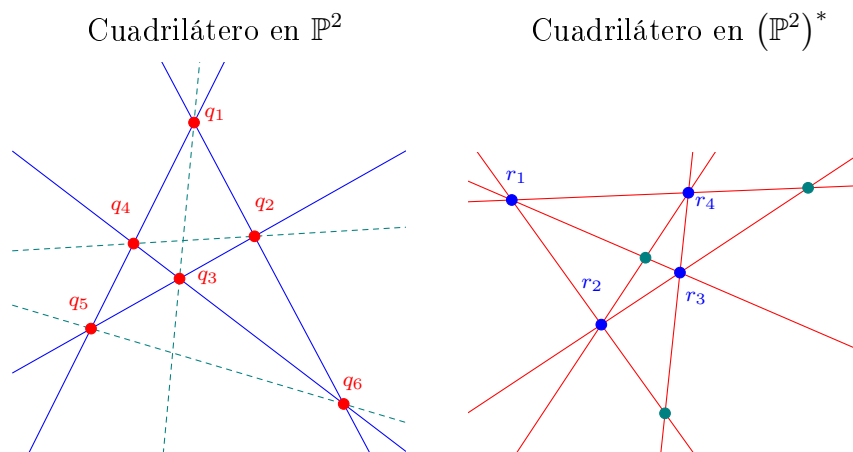
*Demostración.*  $H_0, \dots, H_m$  l.i.  $\stackrel{\text{def}}{\iff} H_0^*, \dots, H_m^* \in (\mathbb{P}^n)^*$  son l.i.  $\iff \dim(H_0^* \vee \cdots \vee H_m^*) = m \iff \dim(H_0^* \vee \cdots \vee H_m^*)^* = n - m - 1 = \dim(H_0 \cap \cdots \cap H_m)$   $\square$

**Definición 2.5.10.** Una recta (o haz) de hiperplanos en  $\mathbb{P}^n$  es la colección de hiperplanos que contienen a una variedad fijada  $V$  de dimensión  $n - 2$ .

**Ejemplo 2.5.11.** Dualización del triángulo.



**Ejemplo 2.5.12.**



**Definición 2.5.13.** Sea  $\mathcal{R} = \{p_0, \dots, p_n; \bar{p}\}$  una referencia de  $\mathbb{P}^n$ , sea  $B = \{u_0, \dots, u_n\}$  una base adaptada y sea  $B^* = \{u_0^*, \dots, u_n^*\}$  su base dual. Entonces, llamamos referencia dual de  $\mathcal{R}$  a

$$\mathcal{R}^* = \{p'_0 = [u_0^*], \dots, p'_n = [u_n^*]; \bar{p}' = [u_0^* + \dots + u_n^*]\}$$

**Observación 2.5.14.**  $\mathcal{R}^*$  no depende de la base  $B$  escogida.

**Ejemplo 2.5.15.** En coordenadas, sea  $p \in \mathbb{P}^n$  y sea  $p_{\mathcal{R}} = (a_0, \dots, a_n)$ , entonces  $p^*$  es un hiperplano de  $(\mathbb{P}^n)^*$  y, en referencia  $\mathcal{R}^*$  se tiene

$$p^* \equiv a_0 x'_0 + \dots + a_n x'_n = 0$$

Y si  $H \subseteq \mathbb{P}^n$  en referencia  $\mathcal{R}$

$$\mathbb{P}^n \supseteq H \equiv b_0 x_0 + \dots + b_n x_n = 0$$

entonces  $(H^*)_{\mathcal{R}^*} = (b_0, \dots, b_n)$

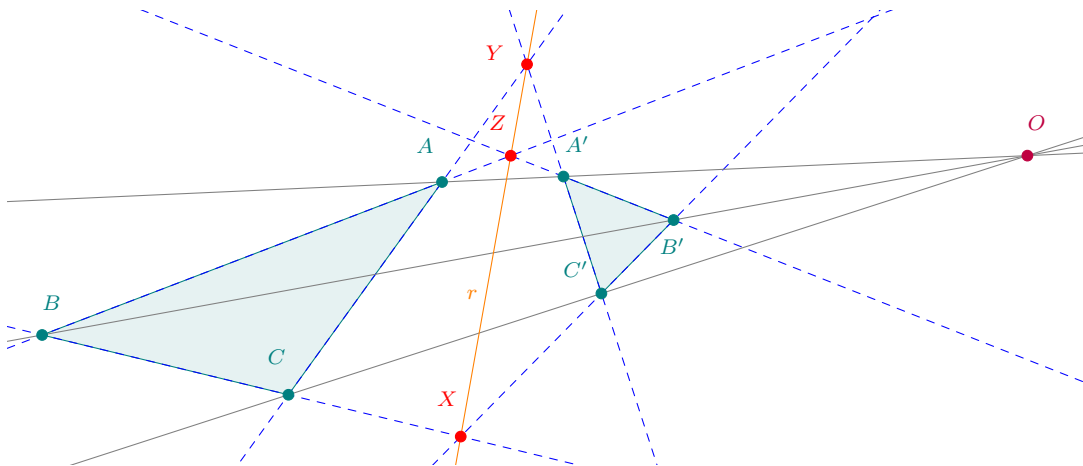
**Observación 2.5.16.** En general, si tenemos  $\mathcal{R}$  una referencia de  $\mathbb{P}^n$  y una referencia de  $(\mathbb{P}^n)^*$ ,  $\mathcal{R}^* = \{p'_0, \dots, p'_n; \bar{p}'\}$ . Entonces  $(p_i')^*$  es un hiperplano tal que  $p_i \notin (p_i')^*$  y  $p_j \in (p_i')^* \forall i \neq j$ .

## 2.6. Los teoremas de Desargues y Pappus

**Teorema de Desargues (2.6.1)**

Sean  $ABC, A'B'C'$  dos triángulos en  $\mathbb{P}^2$  (sin vértices ni lados en común). Entonces,

$$AA' \cap BB' \cap CC' \neq \emptyset \iff \begin{cases} AB \cap A'B' = Z \\ AC \cap A'C' = Y \\ BC \cap B'C' = X \end{cases} \text{ están alineados.}$$



*Demostración.*  $\implies$  Analítica

$R = \{A, B, C; O\}$ , es un sistema de referencia porque todos los puntos son linealmente independientes.

- $A, B, C$  linealmente independientes ( $ABC$  triángulo)

- $A, B, O$  linealmente independientes (si no,  $AB = A'B'$ )
- $B, C, O$  linealmente independientes (si no,  $BC = B'C'$ )
- $C, A, O$  linealmente independientes (si no,  $AC = A'C'$ )

Tenemos que

- $A' \in AO : x_1 - x_2 = 0$  i  $A \neq A' \implies A' = (a : 1 : 1)$
- $B' \in BO : x_0 - x_2 = 0$  i  $B \neq B' \implies B' = (1 : b : 1)$
- $C' \in CO : x_0 - x_1 = 0$  i  $C \neq C' \implies C' = (1 : 1 : c)$

$$Z : \left\{ \begin{array}{l} AB : x_2 = 0 \\ A'B' : 0 = \begin{vmatrix} a & 1 & x_0 \\ 1 & b & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \end{vmatrix} \end{array} \right\} x_0(1-b) - x_1(a-1) = x_0(1-b) + x_1(1-a) = 0 \implies \\ \implies Z = (a-1 : 1-b : 0).$$

Análogamente,  $X = (0 : b-1 : 1-c)$ ,  $Y = (a-1 : 0 : 1-c)$ . Vemos que  $Z - X = Z \implies X, Y, Z$  no son linealmente independientes  $\iff X, Y, Z$  están alineados.

$\implies$  Sintética  
 $\pi$  plano en  $\mathbb{P}^3$

$$\overbrace{\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{E})} \subset \mathbb{P}(\overline{\mathbb{E}}) = \mathbb{P}^3, \overline{\mathbb{E}} = \mathbb{E} \times \mathbb{k}$$

Sea  $r$  una recta en  $\mathbb{P}^3$ ,  $r \not\subset \pi$ , tal que  $r \cap \pi = O$ . Sean  $p, p' \in r, p \neq p', p, p' \neq O$ .  $r$  y  $AA'$  son coplanarias  $\implies pA \cap p'A' = A_0$  (intersección de rectas en un plano). Análogamente,

$$\begin{cases} pB \cap p'B' = B_0 \\ pC \cap p'C' = C_0 \end{cases}.$$

Por construcción,

$$\begin{array}{lll} pA_0 \cap \pi = A, & pB_0 \cap \pi = B, & pC_0 \cap \pi = C \\ p'A_0 \cap \pi = A', & p'B_0 \cap \pi = B', & p'C_0 \cap \pi = C' \end{array}$$

$A_0, B_0, C_0$  son linealmente independientes (forman un triángulo). Si estuvieran alineados,  $T = A_0 \vee B_0 \vee C_0 \implies A, B, C \in \pi \cap (p \vee t)$  estarían alineados.

Finalmente,

$$Z = AB \cap A'B' = \pi \cap \left( (A_0 \vee B_0 \vee p) \cap (A_0 \vee B_0 \vee p') \right) \overset{\text{intersección de planos distintos}}{=} \pi \cap (A_0 \vee B_0)$$

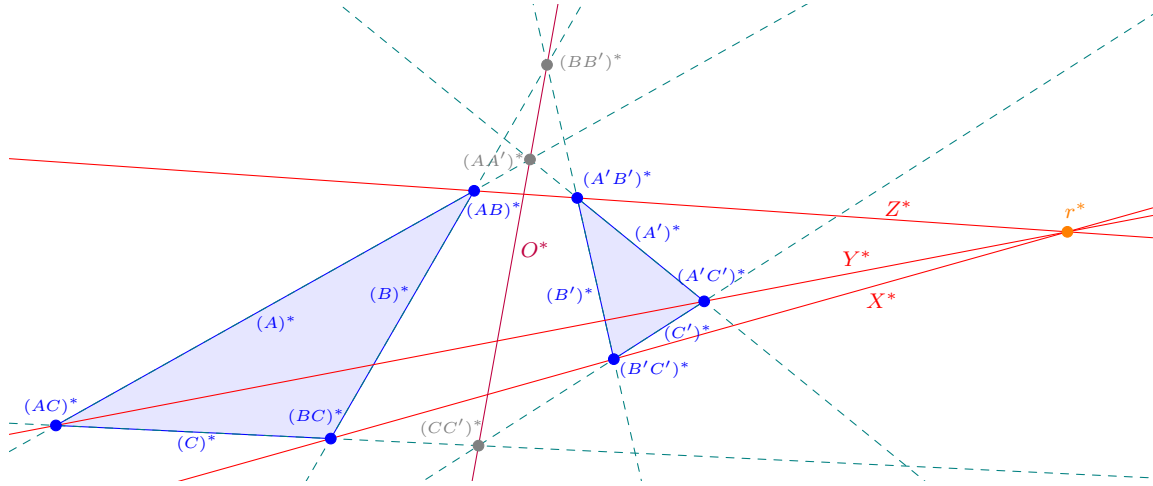
Análogamente,  $Y = \pi \cap (A_0 \vee C_0)$  y  $X = \pi \cap (B_0 \vee C_0)$ . Entonces,  $X, Y, Z \in \pi \cap (A_0 \vee B_0 \vee C_0)$  (que es una recta porque es la intersección de dos planos distintos).

$\Leftarrow$  Dualidad

Hipótesis:  $X, Y, Z$  están alineados.

Consideramos el espacio proyectivo dual y dualizamos las hipótesis:





Queremos ver que, en efecto,  $(AA')^*$ ,  $(BB')^*$ ,  $(CC')^*$  están alineados. Por la primera implicación,  $\exists s \subset (\mathbb{P}^2)^*$  recta tal que:

$$\begin{aligned}
 s &= \left[ [(AB)^* \vee (AC)^*] \cap [(A'B')^* \vee (A'C')^*] \right] \vee [\dots] \vee [\dots] \\
 &= [(AB \cap AC)^* \cap (A'B' \cap A'C')^*] \vee [\dots] \vee [\dots] \\
 &= (A^* \cap (A')^*) \vee (B^* \cap (B')^*) \vee (C^* \cap (C')^*) \\
 &= (AA')^* \vee (BB')^* \vee (CC')^*
 \end{aligned}$$

$$s = (AA' \cap BB' \cap CC')^* \implies AA' \cap BB' \cap CC' = s^* \text{ (un punto)} \quad \square$$

**Observación 2.6.2.** El teorema de Desargues es su propio dual:  $(\implies) \iff (\impliedby)$ .

**Observación 2.6.3.** Definición axiomática de  $\mathbb{P}^2$

- $X \rightarrow$  puntos
- $Y \rightarrow$  rectas

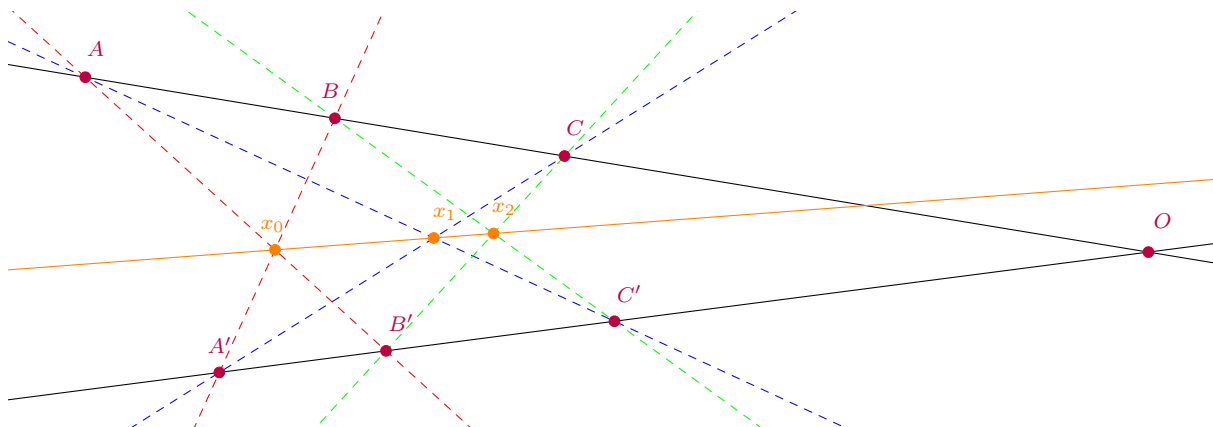
Hay una relación de pertenencia entre puntos y rectas (los puntos pertenecen a rectas). Axiomas:

- $\forall p_1, p_2, \exists! r$  tal que  $p_1, p_2 \in r$
- $\forall r_1, r_2, \exists! p$  tal que  $p \in r_1, r_2$
- $\exists 4$  puntos no alineados

**Teorema** de Pappus (2.6.4)

Sean  $r, s \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$  rectas diferentes ( $r \neq s$ ), sean  $A, B, C \in r$  tal que  $A \neq B$ ,  $B \neq C$  y  $C \neq A$  y sean también  $A', B', C' \in s$  tal que  $A' \neq B'$ ,  $B' \neq C'$  y  $C' \neq A'$ . Entonces  $x_0 \equiv AB' \cap A'B$ ,  $x_1 \equiv AC' \cap A'C$  y  $x_2 \equiv BC' \cap B'C$  están alineados.

*Demostración.*



Tomamos la referencia  $\mathcal{R} = \{A, B, A'; B'\}$ . Entonces

$$\begin{aligned} A &= (1, 0, 0) & A' &= (0, 0, 1) \\ B &= (0, 1, 0) & B' &= (1, 1, 1) \\ C &= (1, a, 0) & C' &= (1, 1, b) \end{aligned}$$

con  $a, b \neq 0$ . Calculamos ahora  $x_0$ ,  $x_1$  y  $x_2$  y vemos que

$$\begin{vmatrix} \text{---} & x_0 & \text{---} \\ \text{---} & x_1 & \text{---} \\ \text{---} & x_2 & \text{---} \end{vmatrix} = 0$$

□

## 2.7. Coordenadas absolutas. Razón doble

**Definición 2.7.1.** Sea  $\mathcal{R} = \{p_0, p_1; \bar{p}\}$  un sistema de referencia de  $\mathbb{P}_k^1$  y sea  $q \in \mathbb{P}_k^1$  con  $q_{\mathcal{R}} = (x_0, x_1)$  las coordenadas de  $q$  en la referencia  $\mathcal{R}$ . Definimos las coordenadas absolutas de  $q$  como

$$\alpha = \frac{x_0}{x_1} \in k \cup \{\infty\}$$

**Observación 2.7.2.** A diferencia de las coordenadas normales, **NO** está definido salvo constantes.

**Observación 2.7.3.** Al trabajar con coordenadas absolutas, trabajaremos con aritmética normal de  $0/\infty$ .

**Observación 2.7.4.**

$$\begin{aligned} (p_0)_{\mathcal{R}} &= (1, 0) & \alpha_0 &= \infty \\ (p_1)_{\mathcal{R}} &= (0, 1) & \alpha_1 &= 0 \\ (p_2)_{\mathcal{R}} &= (1, 1) & \alpha_2 &= 1 \end{aligned}$$

**Definición 2.7.5.** Sean  $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{P}_k^1$  con al menos 3 de ellos diferentes. Sea  $\mathcal{R}$  un sistema de referencia y sean  $(q_i)_{\mathcal{R}} = (x_i : y_i) \forall i = 1, 2, 3, 4$ . Definimos la razón doble de

$q_1, q_2, q_3, q_4$  como

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} \in k \cup \{\infty\}$$

**Observación 2.7.6.** La razón doble no depende del sistema de referencia ni del representante de cada punto. De hecho, sean  $\mathcal{R}$  y  $\overline{\mathcal{R}}$  dos sistemas de referencia y  $q_i = (x_i, y_i)_{\mathcal{R}} = (\overline{x}_i, \overline{y}_i)_{\overline{\mathcal{R}}}$ , por lo tanto

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_i \\ \overline{y}_i \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

y se tiene que

$$\frac{\begin{vmatrix} \overline{x}_3 & \overline{y}_3 \\ \overline{x}_1 & \overline{y}_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \overline{x}_3 & \overline{y}_3 \\ \overline{x}_2 & \overline{y}_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \overline{x}_4 & \overline{y}_4 \\ \overline{x}_1 & \overline{y}_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \overline{x}_4 & \overline{y}_4 \\ \overline{x}_2 & \overline{y}_2 \end{vmatrix}} = \frac{\det S \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\det S \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} : \frac{\det S \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\det S \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}$$

**Observación 2.7.7.** La razón doble es cociente de razones simples

**Observación 2.7.8.** En coordenadas absolutas, si

$$\begin{array}{lll} q_1 & \alpha_1 & (\alpha_1 : 1) \\ q_2 & \alpha_2 & (\alpha_2 : 1) \\ q_3 & \alpha_3 & (\alpha_3 : 1) \\ q_4 & \alpha_4 & (\alpha_4 : 1) \end{array}$$

teniendo en cuenta que  $(\infty, 1) = (1, 0)$ . entonces,

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_3 & 1 \\ \alpha_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_3 & 1 \\ \alpha_2 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \alpha_4 & 1 \\ \alpha_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_4 & 1 \\ \alpha_2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2} : \frac{\alpha_4 - \alpha_1}{\alpha_4 - \alpha_2}$$

**Observación 2.7.9.** Sean  $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$  tal que  $\{q_1, q_2, q_3\}$  son diferentes dos a dos. Tomamos  $\mathcal{R} = \{q_1, q_2, q_3\}$  como nuestro sistema de referencia y sean  $(x, y)_{\mathcal{R}} = q_4$  las coordenadas de  $q_4$  en el sistema de referencia  $\mathcal{R}$ , entonces

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{1} : \frac{-y}{x} = \frac{x}{y}$$

es decir, la coordenada absoluta de  $q_4$  en la referencia  $\mathcal{R} = \{q_1, q_2, q_3\}$ .

**Observación 2.7.10.** Sea  $V \subseteq \mathbb{P}^n$  una variedad de dimensión  $n - 2$ , por lo tanto  $V^*$  es una recta de  $(\mathbb{P}^n)^*$  y si  $V \subseteq H_1, H_2, H_3, H_4 \subseteq \mathbb{P}^n$ , la razón doble de  $H_1, H_2, H_3, H_4$  queda definida considerando los hiperplanos como puntos del espacio dual, es decir,

$$(H_1, H_2, H_3, H_4) = (H_1^*, H_2^*, H_3^*, H_4^*)$$

**Ejemplo 2.7.11.** Consideramos  $V \subseteq \mathbb{P}^4$

$$V : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Podemos identificar  $V^* = \{H^* \in (\mathbb{P}^4)^* \text{ hiperplano } | V \subseteq H\}$ . Tomamos ahora

$$H_1 \rightarrow x_0 = 0 \quad \leftrightarrow (1, 0, 0, 0)$$

$$H_2 \rightarrow x_1 = 0 \quad \leftrightarrow (0, 1, 0, 0)$$

$$H_3 \rightarrow 2x_0 + x_1 = 0 \quad \leftrightarrow (2, 1, 0, 0)$$

$$H_4 \rightarrow 3x_0 + 2x_1 = 0 \quad \leftrightarrow (3, 2, 0, 0)$$

Para calcular la razón doble, aplicamos la observación 2.7.9, y tomamos el sistema de referencia  $\mathcal{R} = \{H_1, H_2; H_3\}$  y  $B = \{(2, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$  una base adaptada. Entonces se tiene que  $(H_4)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{3}{2}, 2\right) = (3, 4)$ . Por lo tanto,

$$(H_1, H_2, H_3, H_4) = \frac{3}{4}$$

**Proposición 2.7.12.** Sean  $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{P}^n$  y sea  $\rho = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ . Si permutamos los cuatro puntos, (con  $4! = 24$  posibilidades), obtendremos uno de los siguientes valores para la razón doble

$$A_p = \left\{ \rho, \frac{\rho}{1}, 1 - \rho, \frac{1}{1 - \rho}, \frac{\rho}{\rho - 1}, \frac{\rho - 1}{\rho} \right\}$$

**Definición 2.7.13.** Sean  $V, r \subseteq \mathbb{P}^n$  dos variedades suplementarias con  $\dim r = 1$  ( $\implies \dim V = n - 2$ ). Entonces, definimos la proyección desde  $V$  como

$$\begin{aligned} \Phi: r &\rightarrow V^* \\ p &\mapsto V \vee p \end{aligned}$$

De nuevo identificando los hiperplanos de  $\mathbb{P}^n$  con puntos de  $(\mathbb{P}^n)^*$ . Asimismo, definimos la sección con  $r$  como

$$\begin{aligned} \Psi: V^* &\rightarrow r \\ H &\mapsto H \cap r \end{aligned}$$

**Observación 2.7.14.**  $p \notin V \implies V \vee p$  es un hiperplano que contiene a  $V$ .

**Observación 2.7.15.**  $\Psi$  está bien definido y  $r \cap H$  es un punto. En efecto, si  $r \cap H$  no es un punto,  $r \subseteq H$ , pero si nos miramos ahora  $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ , entonces  $V$  es un hiperplano de  $H$ ,  $\implies r \cap V \neq \emptyset$ , lo cual es una contradicción ya que hemos supuesto que  $V$  y  $r$  son suplementarias.

**Observación 2.7.16.**  $\Phi(\Psi(H)) = H$  y  $\Psi(\Phi(p)) = p$ , es decir,  $\Phi$  y  $\Psi$  son inversas mutuas.

**Teorema** de la invariancia de razón doble (2.7.17)

Sean  $V, r \subseteq \mathbb{P}^n$  dos variedades suplementarias con  $\dim r = 1$  ( $\implies \dim V = n - 2$ ) y sean  $\Phi$  y  $\Psi$  la proyección desde  $V$  y la sección con  $r$  respectivamente. Entonces,

i)  $\forall p_1, p_2, p_3, p_4 \in r$  con  $p_1, p_2, p_3$  distintos dos a dos

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (\Phi(p_1), \Phi(p_2), \Phi(p_3), \Phi(p_4))$$

ii)  $\forall H_1, H_2, H_3, H_4 \in V^*$  (identificando hiperplanos con elementos del dual) con  $H_1, H_2, H_3$  distintos dos a dos. Entonces

$$(H_1, H_2, H_3, H_4) = (\Psi(H_1), \Psi(H_2), \Psi(H_3), \Psi(H_4))$$

*Demostración.* Primero vemos que  $i) \iff ii)$  porque  $\Psi^{-1} = \Phi$ . Pasamos ahora a demostrar  $i)$ . Sea  $\rho = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ , entonces podemos elegir  $u_1, u_2 \in \mathbb{E}$  tal que  $p_1 = [u_1]$ ,  $p_2 = [u_2]$  y  $p_3 = [u_1 + u_2]$ . Por lo tanto  $p_4 = [\rho u_1 + u_2]$ , de la misma forma,  $\bar{\rho} = (H_1, H_2, H_3, H_4)$  y podemos escoger  $w_1, w_2 \in \mathbb{E}^*$  tal que  $H_1 = [w_1]$ ,  $H_2 = [w_2]$  y  $H_3 = [w_1 + w_2]$ . Lo que implica que  $H_4 = [\bar{\rho} w_1 + w_2]$ . Ahora trabajamos con que  $p_i \in H_i$ . Entonces

$$\begin{cases} p_1 \in H_1 \implies w_1(u_1) = 0 \\ p_2 \in H_2 \implies w_2(u_2) = 0 \\ p_3 \in H_3 \implies (w_1 + w_2)(u_1 + u_2) = 0 \implies \cancel{w_1(u_1)}^0 + w_1(u_2) + w_2(u_1) + \cancel{w_2(u_2)}^0 = 0 \\ p_4 \in H_4 \implies (\bar{\rho} w_1 + w_2)(\rho u_1 + u_2) = 0 \implies \cancel{\bar{\rho} w_1(u_1)}^0 + \bar{\rho} w_1(u_2) + \rho w_2(u_1) + \cancel{w_2(u_2)}^0 = 0 \end{cases}$$

trabajando ahora con la cuarta ecuación

$$\bar{\rho} w_1(u_2) + \rho w_2(u_1) = w_1(u_2)(\bar{\rho} - \rho) = 0 \xrightarrow{(1)} \bar{\rho} = \rho$$

La cancelación en (1) ocurre ya que  $w_1(u_2) \neq 0$ . Y  $w_1(u_2) \neq 0$  ya que, si lo fuera,

$$w_1(u_2) = 0 \implies p_2 \in H_1 \implies \{p_1, p_2\} \subseteq r \cap H_1 \implies r \subseteq H_1 \implies r \cap V \neq \emptyset$$

pero como sabemos  $r \cap V = \emptyset$  ya que son variedades suplementarias.  $\square$

## 2.8. Cuaternas armónicas

**Observación 2.8.1.** Sean  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}^n$  diferentes dos a dos. y sea

$$A_p = \left\{ \rho, \frac{1}{\rho}, 1 - \rho, \frac{1}{1 - \rho}, \frac{\rho}{\rho - 1}, \frac{\rho - 1}{\rho} \right\}$$

Entonces, los valores de  $A_p$  son diferentes, salvo el caso en que

$$A_p = \left\{ -1, \frac{1}{2}, 2 \right\} \quad \text{con } \mathbb{k} = \mathbb{R}$$

**Definición 2.8.2.** Sean  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}^n$  diferentes dos a dos. Entonces  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  forman una cuaterna armónica si y solo si

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = -1$$

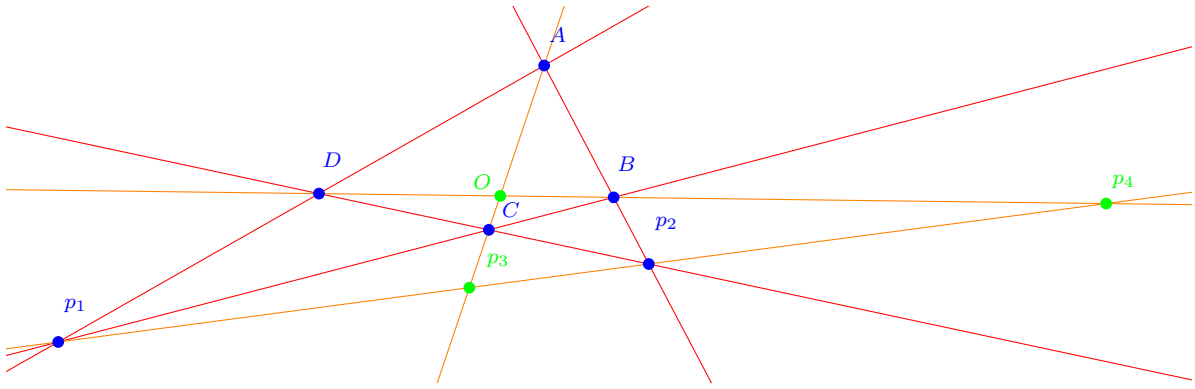
**Proposición 2.8.3.** Sean  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}^n$  diferentes dos a dos. Entonces, son equivalentes

- i)  $\rho = (p_1, p_2, p_3, p_4) = -1$
- ii)  $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_2, p_1, p_3, p_4)$
- iii)  $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_1, p_2, p_4, p_3)$
- iv)  $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_3, p_4, p_1, p_2)$

*Demostración.* La demostración se hará en clase de problemas □

**Teorema** de la cuaterna armónica en el cuadrilátero (2.8.4)

Sean  $A, B, C, D, p_1, p_2 \in \mathbb{P}^2$  los vértices de un cuadrilátero, sea  $p_1 p_2 = r \subseteq \mathbb{P}^2$ ,  $AC = s \subseteq \mathbb{P}^2$ ,  $s \cap BD = O \in \mathbb{P}^2$ ,  $s \cap r = p_3 \in \mathbb{P}^2$  y  $DB \cap r = p_4 \in \mathbb{P}^2$ . Entonces,  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  son una cuaterna armónica. Dicho de otra forma, en un cuadrilátero, la intersección de una diagonal con las otras dos y los vértices de la diagonal forman una cuaterna armónica.



*Demostración.* Podemos poner coordenadas y operar y nos saldrá el resultado. Aunque aquí detallamos una demostración sintética. Para esta demostración nos valdremos de las proyecciones y secciones definidas anteriormente, por ello, recordamos que si  $h \subseteq \mathbb{P}^2$  es una recta, una variedad complementaria de  $h$  es un punto. Ahora definimos  $\Phi_B$  la proyección desde  $B$ ,  $\Phi_D$  la proyección desde  $D$  y  $\Psi_s$  y  $\Psi_r$  la sección con  $r$  y con  $s$  respectivamente. entonces

$$\begin{array}{ccccc}
 r & \xrightarrow{\Psi_s \circ \Phi_B} & s & \xrightarrow{\Psi_r \circ \Phi_D} & r \\
 p_1 & \mapsto & C & \mapsto & p_2 \\
 p_2 & \mapsto & A & \mapsto & p_1 \\
 p_3 & \mapsto & p_3 & \mapsto & p_3 \\
 p_4 & \mapsto & O & \mapsto & p_4
 \end{array}$$

Por el teorema 2.7.17, tenemos que, si  $f = \Psi_r \circ \Phi_D \circ \Psi_s \circ \Phi_B$ ,

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (f(p_1), f(p_2), f(p_3), f(p_4)) = (p_2, p_1, p_3, p_4)$$

Y por la proposición 2.8.3, tenemos que  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  es una cuaterna armónica. □

## 2.9. Relación entre el espacio proyectivo y el afín

**Observación 2.9.1.** Sea  $\mathbb{F}$  un  $\mathbb{k}$ -e.v. de dim  $n$ . Llamamos espacio afín de dimensión  $n$  a  $\mathbb{A}^n = (\mathbb{A}, \mathbb{F}, \delta)$  donde  $\delta$  es una aplicación de la forma

$$\begin{aligned}
 \delta: \mathbb{A} \times \mathbb{A} &\rightarrow \mathbb{F} \\
 p, q &\mapsto \delta(p, q) = q - p = \overrightarrow{pq}
 \end{aligned}$$

que cumple

i)

$$\begin{aligned} \delta_p: \mathbb{A} &\rightarrow \mathbb{F} \\ q &\mapsto \delta(p, q) \end{aligned} \text{ es biyectiva } \forall p \in \mathbb{A}.$$

ii)

$$\delta(p, q) + \delta(q, r) = \delta(p, r) \quad \forall p, q, r \in \mathbb{A}.$$

### 2.9.1. Completación proyectiva del espacio afín $\mathbb{A}^n$

**Definición 2.9.2.** Sea  $\mathbb{F}$  un  $k$ -e.v. de dim  $n$  asociado a  $\mathbb{A}^n$  un espacio afín. Consideramos el espacio vectorial  $\mathbb{E} = \mathbb{k} \times \mathbb{F}$ , de manera que todo  $v \in \mathbb{E}$  se puede escribir como  $v = (\alpha, \vec{w})$ , con  $\alpha \in \mathbb{k}$ ,  $\vec{w} \in \mathbb{F}$ . Entonces decimos que

i)  $e_0 = (1, \vec{0})$ .

ii) Si  $u \in \mathbb{F}$ ,  $u = (0, u) \in \mathbb{E}$ .

**Observación 2.9.3.** En el espacio vectorial  $\mathbb{E}$  construido en la definición anterior, podemos considerar 2 s.e.v., la recta  $[e_0] \subseteq \mathbb{E}$  y el hiperplano  $\{0\} \times \mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ . Con la notación definida anteriormente, tenemos  $E = [e_0] \oplus \mathbb{F}$ .

**Definición 2.9.4.** Con las mismas hipótesis y con el mismo espacio  $\mathbb{E}$  que en la última definición,

i)  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E}) = \overline{\mathbb{A}^n}$  es la completación proyectiva de  $\mathbb{A}^n$ .

ii)  $\mathbb{A}_\infty^n = \pi(\mathbb{F})$  son los puntos del infinito de  $\mathbb{A}^n$ .

**Definición 2.9.5.** Fijado  $p_0 \in \mathbb{A}^n$ , definimos

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{A}^n &\rightarrow \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E}) \\ p &\mapsto \varphi(p) := [e_0 + \overrightarrow{p_0 p}] \end{aligned}$$

**Observación 2.9.6.** La idea detrás de esta función es asociar a todo punto en el afín una dirección en un espacio vectorial, situando el plano afín como un hiperplano en un espacio vectorial de una dimensión más sin contener el origen, y asignando a un punto afín la dirección que representa el vector entre el origen y el punto (considerados en el espacio vectorial).

**Proposición 2.9.7.**

i)  $\varphi$  es inyectiva.

ii)  $\text{Im } \varphi = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{A}_\infty^n$

*Demostración.*

i) Supongamos  $\varphi(p_1) = \varphi(p_2)$ . Entonces

$$[e_0 + \overrightarrow{p_0 p_1}] = [e_0 + \overrightarrow{p_0 p_2}] \implies \exists \lambda \neq 0 \text{ t.q. } e_0 + \overrightarrow{p_0 p_1} = \lambda e_0 + \lambda \overrightarrow{p_0 p_2}$$

Como  $\mathbb{E} = [e_0] \oplus \mathbb{F}$

$$e_0 = \lambda e_0 \implies \lambda = 1 \implies \overrightarrow{p_0 p_1} = \lambda \overrightarrow{p_0 p_2} = \overrightarrow{p_0 p_2} \implies p_1 = p_2.$$

Es decir,  $\varphi$  es inyectiva.

ii) Veamos que  $\text{Im } \varphi \subseteq \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{A}_\infty^n$ . Sea  $q \in \text{Im } \varphi$ . Entonces

$$q = \varphi(p) = [e_0 + \overrightarrow{p_0 p}], \mathbb{E} = [e_0] \oplus \mathbb{F} \implies e_0 + \overrightarrow{p_0 p} \notin \mathbb{F} \implies \varphi(p) \notin \pi(\mathbb{F}) = \mathbb{A}_\infty^n$$

Como  $q \in \mathbb{P}^n$  por construcción,  $q \in \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{A}_\infty^n$ .

La inclusión restante por demostrar se deja como ejercicio para el lector.  $\square$

Veamos ahora como se comporta la completación proyectiva de un espaci afín al usar coordenadas.

**Definición 2.9.8.** Sea  $\mathcal{R} = \{p; u_1, \dots, u_n\}$  un sistema de referencia en  $\mathbb{A}^n$ . Llamaremos el proyectivizado de  $\mathcal{R}$  a

$$\overline{\mathcal{R}} = \left\{ \varphi(p), [u_1], \dots, [u_n]; [e_0 + \overrightarrow{p_0 p} + u_1 + \dots + u_n] \right\}$$

que es un sistema de referencia en  $\mathbb{P}^n$ .

**Proposición 2.9.9.**

$$(\mathbb{A}^n, \mathcal{R}) \hookrightarrow (\overline{\mathbb{A}^n}, \overline{\mathcal{R}})$$

$$q_{\mathcal{R}} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \varphi(q)_{\overline{\mathcal{R}}} = (1 : x_1 : x_2 : \dots : x_n)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{R}} = (x_1, \dots, x_n) &\implies q = p + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n \implies \\ \implies \varphi(q) &= [e_0 + \overrightarrow{p_0 q}] = [e_0 + \overrightarrow{p_0 p} + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n] \implies \\ &\implies \varphi(q)_{\overline{\mathcal{R}}} = (1 : x_1 : x_2 : \dots : x_n) \end{aligned}$$

$\square$

**Observación 2.9.10.**

i) Para  $q \in \mathbb{P}^n$ , si  $\overline{x}_0 \neq 0$ ,  $q = (\overline{x}_0 : \dots : \overline{x}_n) = (1 : \frac{\overline{x}_1}{\overline{x}_0} : \dots : \frac{\overline{x}_n}{\overline{x}_0}) = \varphi\left(\frac{\overline{x}_1}{\overline{x}_0}, \dots, \frac{\overline{x}_n}{\overline{x}_0}\right) \in \mathbb{A}^n$ .

ii) Para  $q \in \mathbb{P}^n$ ,  $q \in \mathbb{A}_\infty^n \iff \overline{x}_0 = 0$ .

## 2.9.2. Variedades lineales afines y proyectivas

En lo que concierne a este apartado, diremos que  $V \subseteq \mathbb{A}^n$  es una variedad lineal afín  $V = p + G$ ,  $G \subseteq \mathbb{F}$  s.e.v de  $\mathbb{F}$ , siendo  $\mathbb{F}$  el espacio vectorial asociado a  $\mathbb{A}^n$ .

**Definición 2.9.11.**

i)  $V_\infty = \pi(G) \subseteq \mathbb{P}^n = \overline{\mathbb{A}^n}$

ii) Llamamos a  $\overline{V} = \varphi(V) \cup V_\infty$  variedad lineal proyectiva completada de  $V$ .

**Proposición 2.9.12.**  $\overline{V} = \pi([e_0 + \overrightarrow{p_0 p}] \oplus G) = \varphi(p) \vee V_\infty$ . En particular,  $\overline{V}$  es una variedad lineal proyectiva.



*Demostración.* Veamos primero que  $\bar{V} \subseteq \varphi(p) \vee V_\infty$ . Por definición,  $\bar{V} = \varphi(V) \cup V_\infty$ . Separaremos la prueba en dos casos.

- i) Si  $q \in \varphi(V)$ ,  $q = \varphi(q_0) = [e_0 + \overrightarrow{p_0 q_0}] = [e_0 + \overrightarrow{p_0 p} + u]$ , donde  $u \in G$ . Por lo tanto,  $q \in \pi([e_0 + \overrightarrow{p_0 p}] \oplus G)$ .
- ii) Si  $q \in V_\infty = \pi(G) \subseteq \pi([e_0 + \overrightarrow{p_0 p}] \oplus G)$ .

La prueba de la segunda inclusión resta como ejercicio para el lector.  $\square$

**Observación 2.9.13.** Sean  $V_1 = p_1 + G_1$  y  $V_2 = p_2 + G_2$  dos variedades lineales en el espacio afín. Decimos que  $V_1$  y  $V_2$  son paralelas si

$$V_1 \parallel V_2 \iff G_1 \subseteq G_2 \text{ o } G_2 \subseteq G_1 \iff (V_1)_\infty \subseteq (V_2)_\infty \text{ o } (V_2)_\infty \subseteq (V_1)_\infty.$$

Es decir, dos variedades son paralelas si los puntos del infinito de una están contenidos dentro de los de la otra.

**Proposición 2.9.14.** Si tenemos  $V \subseteq \mathbb{A}^n$  una variedad lineal afín expresada en un sistema de referencia  $\mathcal{R}$  mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

podemos expresar la variedad completada  $\bar{V}$  en el proyectivizado de  $\mathcal{R}$  ( $\bar{\mathcal{R}}$ ) con el siguiente sistema:

$$\left( \begin{array}{c|c} b_1 & \\ \vdots & A \\ b_n & \end{array} \right) \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

*Demostración.* Sea  $q \in \bar{V} = \varphi(V) \cup V_\infty$ . Consideramos  $q_{\bar{\mathcal{R}}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$ . Separaremos la prueba en dos casos.

- i) Si  $\bar{x}_0 = 0$ ,  $q = (0 : \bar{x}_1 : \dots : \bar{x}_n)$ , con lo que

$$u = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in G \text{ s.e.v director de } V \iff Au = 0 \iff \left( \begin{array}{c|c} b & A \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = 0.$$

- ii) Si  $\bar{x}_0 \neq 0$ ,  $q = \left( 1 : \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0} : \dots : \frac{\bar{x}_n}{\bar{x}_0} \right)$ , con lo que  $q \in \varphi(V)$ , es decir,  $\exists q_0 = \left( \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0} : \dots : \frac{\bar{x}_n}{\bar{x}_0} \right) \in V$  t.q.  $q = \varphi(q_0)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & \begin{array}{c} \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0} \\ \vdots \\ \frac{\bar{x}_n}{\bar{x}_0} \end{array} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \bar{x}_0 + \begin{pmatrix} A & \begin{array}{c} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{array} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \\ &\iff \left( \begin{array}{c|c} b & A \end{array} \right) \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.9.15.** Consideremos la recta  $V \subseteq \mathbb{A}^3$  definida por  $V : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

Queremos encontrar la recta  $\overline{V} \subseteq \overline{\mathbb{A}^3}$ . Podemos expresar las condiciones anteriores como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Y, aplicando la proposición anterior, obtenemos las siguientes ecuaciones que nos describen  $\overline{V}$ :

$$\left( \begin{array}{c|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \overline{x}_0 \\ \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 2.9.16.** Consideremos la variedad lineal afín  $V \subseteq \mathbb{A}^3$  definida por

$$-5 + x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0.$$

Esta variedad da lugar a la siguiente variedad completada

$$\overline{V}: -5\overline{x}_0 + \overline{x}_1 + 2\overline{x}_2 + 4\overline{x}_3 = 0$$

### 2.9.3. Espacios afines dentro de un espacio proyectivo

**Proposición 2.9.17.** Sea  $H \subseteq \mathbb{P}^n$  un hiperplano.  $\mathbb{P}^n \setminus H$  tiene estructura de espacio afín  $\mathbb{A}^n$  y cumple  $\mathbb{P}^n = \overline{\mathbb{A}^n}$  y  $H = \overline{\mathbb{A}^n}_\infty$ .

*Demostración.* Sea  $\mathbb{F}$  el subespacio vectorial tal que  $H = \mathbb{P}(\mathbb{F})$ . Sabemos que  $\dim \mathbb{F} = n$  y  $\mathbb{E} = [w_0] \oplus \mathbb{F}$ . Consideramos ahora el espacio afín determinado por la tripleta  $\mathbb{A}^n = (\mathbb{F}, \mathbb{F}, \delta)$ . Hacemos notar que los vectores de  $\mathbb{F}$  juegan el papel tanto de puntos como de vectores en este espacio, y  $\delta$  es la aplicación natural inducida por la resta entre dos vectores. Si tomamos  $e_0 = w_0$  en la completación proyectiva del afín que se acaba de definir se puede comprobar, y se dejará como ejercicio para el lector, que  $\mathbb{P}^n = \overline{\mathbb{A}^n}$ , y que  $H = \overline{\mathbb{A}^n}_\infty$ , y por eso podemos decir que  $\mathbb{P}^n \setminus H = \mathbb{A}^n$ . □

**Ejemplo 2.9.18.** Consideremos el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$ , y los hiperplanos  $H_1: \overline{x}_0 = 0$ ,  $H_1: \overline{x}_1 = 0$  y  $H_2: \overline{x}_2 = 0$ . Entonces los puntos en el afín nos determinan puntos en el proyectivo de la siguiente manera:

- i)  $(x_1, x_2) \in \mathbb{P}^2 \setminus H_0 = \mathbb{A}^2 \longrightarrow (1 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2$
- ii)  $(a, b) \in \mathbb{P}^2 \setminus H_1 = \mathbb{A}^2 \longrightarrow (a : 1 : b) \in \mathbb{P}^2$
- iii)  $(c, d) \in \mathbb{P}^2 \setminus H_2 = \mathbb{A}^2 \longrightarrow (c : d : 1) \in \mathbb{P}^2$

### 2.9.4. Relación entre la razón simple y la razón doble

**Definición 2.9.19.** Sean  $p_1, p_2, p_3$  puntos alineados en un espacio afín  $\mathbb{A}$ . Entonces llamamos razón simple de estos puntos a

$$(p_1, p_2, p_3) = \lambda \iff \overrightarrow{p_1 p_3} = \lambda \overrightarrow{p_2 p_3}$$

**Proposición 2.9.20.** Sean  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{A}$  tres puntos contenidos en una recta  $L$ . Entonces, los puntos  $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$  y  $p_\infty$  el punto en el infinito de  $L$  cumplen

$$(p_1, p_2, p_3) = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, p_\infty)$$

*Demostración.* Cojamos la referencia  $\mathcal{R} = \{p_3; p_2 - p_3\}$  en  $L$ , que induce a la referencia  $\overline{\mathcal{R}} = \{\bar{p}_3, p_\infty; \bar{p}_2\}$  en su variedad completada. Tenemos entonces que

$$\begin{cases} (p_1)_{\mathcal{R}} = \lambda \longrightarrow (\bar{p}_1)_{\overline{\mathcal{R}}} = (1, \lambda) \\ (p_2)_{\mathcal{R}} = 1 \longrightarrow (\bar{p}_2)_{\overline{\mathcal{R}}} = (1, 1) \\ (p_3)_{\mathcal{R}} = 0 \longrightarrow (\bar{p}_3)_{\overline{\mathcal{R}}} = (1, 0) \end{cases}$$

Podemos entonces calcular la razón doble a partir de su fórmula:

$$(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, p_\infty) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \lambda = (p_1, p_2, p_3)$$

□

**Proposición 2.9.21.** Sean  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in L \subseteq \mathbb{A}$  puntos alineados. Entonces

$$(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{p}_4) = \frac{(p_1, p_2, p_3)}{(p_1, p_2, p_4)}$$

*Demostración.* Consideramos  $\mathcal{R} = \{p_0; u\}$  referencia en  $L$  y la referencia proyectivizada en su variedad completada  $\overline{\mathcal{R}}$ . Si  $p_1, p_2, p_3, p_4$  tienen coordenadas  $a_1, a_2, a_3, a_4$  correspondientemente, entonces  $\bar{p}_i$  tiene coordenadas  $(1, a_i)$ . Consecuentemente,

$$\begin{aligned} (p_1, p_2, p_3) &= \frac{(a_1 - a_3)}{(a_2 - a_3)}, (p_1, p_2, p_4) = \frac{(a_1 - a_4)}{(a_2 - a_4)} \implies \\ \implies (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{p}_4) &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_3 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_4 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_4 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{(a_1 - a_3)(a_2 - a_4)}{(a_2 - a_3)(a_1 - a_4)} \end{aligned}$$

□



# Tema 3

## Proyectividades

### 3.1. Definiciones y propiedades básicas

#### Definición 3.1.1.

1. Sean  $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathbb{E})$ ,  $\bar{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(\bar{\mathbb{E}})$  espacios proyectivos de dimensión  $n$ . Sea  $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \bar{\mathbb{E}}$  una aplicación lineal biyectiva. Una proyectividad, definida por  $\varphi$ , es una aplicación

$$f := [\varphi] : \mathbb{P} \rightarrow \bar{\mathbb{P}} \\ p = [v] \mapsto f(p) = [\varphi(v)]$$

Diremos que  $\varphi$  es un representante de  $f$ .

2. Si  $\mathbb{P} = \bar{\mathbb{P}}$ , llamaremos homografías a las proyectividades.

**Observación 3.1.2.**  $\varphi$  no inyectiva  $\implies [\varphi]$  no es una aplicación de  $\mathbb{P}(\mathbb{E})$  en  $\mathbb{P}(\bar{\mathbb{E}})$ .

**Observación 3.1.3.**  $[\varphi] = [\psi] \iff \exists \lambda \neq 0$  tal que  $\psi = \lambda\varphi$ .

*Demostración.*  $\boxed{\Leftarrow}$

$\exists \lambda \neq 0$  tal que  $\psi = \lambda\varphi$ , sea  $p = [v]$ ,  $[\psi](p) = [\psi(v)] = [\lambda\varphi(v)] = [\varphi(v)] = [\varphi](p)$ ,  $\forall p \implies [\psi] = [\varphi]$ .

$\boxed{\Rightarrow}$

Sean  $u, v \in \mathbb{E}$  linealmente independientes, y sean  $p = [u], q = [v]$ . Entonces, como  $[\varphi(u)] = [\psi(u)]$  y  $[\varphi(v)] = [\psi(v)]$ ,

$$\exists \lambda_1 \neq 0 \text{ tal que } \psi(u) = \lambda_1 \varphi(u)$$

$$\exists \lambda_2 \neq 0 \text{ tal que } \psi(v) = \lambda_2 \varphi(v).$$

Por otro lado,

$$[\psi(u+v)] = [\varphi(u+v)] \implies \exists \lambda_3 \neq 0 \text{ tal que } \psi(u) + \psi(v) = \psi(u+v) = \lambda_3 \varphi(u+v) = \\ \lambda_3 \varphi(u) + \lambda_3 \varphi(v) \implies (\lambda_1 - \lambda_3) \varphi(u) + (\lambda_2 - \lambda_3) \varphi(v) = 0$$

Ahora bien,  $\varphi(u)$  y  $\varphi(v)$  son linealmente independientes puesto que  $u$  y  $v$  lo son y  $\varphi$  preserva la independencia lineal por ser biyectiva. Con lo cual podemos afirmar que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 =: \lambda \neq 0$ . Entonces,

$$\psi(u) = \lambda \varphi(u), \forall u \in \mathbb{E} \implies \exists \lambda \neq 0 \text{ tal que } \psi = \lambda \varphi.$$

□

**Proposición 3.1.4.**

## 1. Operaciones

- $\text{Id}_{\mathbb{P}} = [\text{Id}_{\mathbb{E}}]$  es una proyectividad.
- $f, g$  proyectividades  $\implies g \circ f$  proyectividad y  $[\psi] \circ [\varphi] = [\psi \circ \varphi]$ .
- $f = [\varphi]$  proyectividad  $\implies f^{-1}$  proyectividad y  $[\varphi]^{-1} = [\varphi^{-1}]$ .

## 2. Relación con variedades lineales

Sea  $f = [\varphi] : \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{P}}$ ,

- $V = \pi(F)$  variedad lineal de  $\mathbb{P}$  de dimensión  $d \implies f(V) = \pi(\varphi(F))$  es una variedad lineal de  $\overline{\mathbb{P}}$  de dimensión  $d$ .
- $V_1 \subseteq V_2 \iff f(V_1) \subseteq f(V_2)$ .
- $f(V_1 \vee V_2) = f(V_1) \vee f(V_2)$ .
- $f(V_1 \cap V_2) = f(V_1) \cap f(V_2)$ .
- En particular,  $p_0, \dots, p_d$  linealmente independientes  $\iff f(p_0), \dots, f(p_d)$  linealmente independientes.

*Demostración.* Inmediata a partir de las propiedades de  $\varphi$  (biyectiva).  $\square$

**Corolario 3.1.5.** Toda proyectividad es una colineación (mantiene la alineación de puntos).

**Corolario 3.1.6.** Toda proyectividad mantiene las razones dobles.

*Demostración.*  $\rho = (p_1, p_2, p_3, p_4) \implies \exists u, v \in \mathbb{E}$  tales que  $p_1 = [u], p_2 = [v], p_3 = [u + v], p_4 = [\rho u + v] \implies f(p_1) = [\varphi(u)], f(p_2) = [\varphi(v)], f(p_3) = [\varphi(u) + \varphi(v)], f(p_4) = [\rho\varphi(u) + \varphi(v)] \implies \rho = (f(p_1), f(p_2), f(p_3), f(p_4))$ .  $\square$

**Definición 3.1.7.** Sean  $\mathbb{P}(\mathbb{E})$  y  $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{E}})$  espacios proyectivos, sea  $f : \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{P}}$  una proyectividad y sean  $B$  y  $\overline{B}$  bases de  $\mathbb{E}$  y  $\overline{\mathbb{E}}$  asociadas a  $\mathcal{R}$  y a  $\overline{\mathcal{R}}$  respectivamente. Definimos la matriz de una  $f$  como  $M_{\mathcal{R}, \overline{\mathcal{R}}}(f) := M_{B, \overline{B}}(\varphi)$ .

**Observación 3.1.8.**  $M_{\mathcal{R}, \overline{\mathcal{R}}}(f)$  está definida salvo multiplicar por  $\lambda \neq 0$  (por la indeterminación de  $B$  y  $\overline{B}$ ).

**Observación 3.1.9.** Si  $p_{\mathcal{R}} = (x_0 : \dots : x_n), f(p)_{\overline{\mathcal{R}}} = (y_0 : \dots : y_n)$ , entonces,

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M_{\mathcal{R}, \overline{\mathcal{R}}}(f) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

**Proposición 3.1.10.** *Propiedades.*

1.  $M_{\mathcal{R}, \mathcal{R}}(\text{Id}) = \text{Id}$ .
2. Si

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P} & \xrightarrow{f} & \overline{\mathbb{P}} & \xrightarrow{g} & \overline{\overline{\mathbb{P}}} \\ \mathcal{R}_1 & & \mathcal{R}_2 & & \mathcal{R}_3 \end{array}$$

Entonces,  $M_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3}(g \circ f) = M_{\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3}(g) \times M_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2}(f)$

3.  $f: \mathbb{P}_{\mathcal{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{P}}_{\overline{\mathcal{R}}}$  proyectividad, entonces  $M_{\overline{\mathcal{R}}, \mathcal{R}}(f^{-1}) = (M_{\mathcal{R}, \overline{\mathcal{R}}}(f))^{-1}$ .

*Demostración.* Trivial a partir de las propiedades de las matrices de aplicaciones lineales biyectivas.  $\square$

**Proposición 3.1.11.**  $f: \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{P}}$  proyectividad.

- Si  $\mathcal{R} = \{p_0, \dots, p_n; \overline{p}\}$  es un sistema de referencia en  $\mathbb{P} \implies f(\mathcal{R}) := \{f(p_0), \dots, f(p_n); f(\overline{p})\}$  es un sistema de referencia en  $\overline{\mathbb{P}}$  y  $M_{\mathcal{R}, f(\mathcal{R})}(f) = \text{Id}$ .
- $g: \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{P}}$  proyectividad,  $\mathcal{R}$  un sistema de referencia en  $\mathbb{P}$ ,

$$f = g \iff f(\mathcal{R}) = g(\mathcal{R})$$

- $\mathbb{P}, \overline{\mathbb{P}}$  espacios proyectivos de dimensión  $n$ ,  $\mathcal{R}, \overline{\mathcal{R}}$  sistemas de referencia. Entonces  $\exists! f: \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{P}}$  proyectividad tal que  $\overline{\mathcal{R}} = f(\mathcal{R})$ .

*Demostración.* Inmediata si  $\mathbb{P} \leftrightarrow \mathbb{E}, f \leftrightarrow \varphi, \mathcal{R} \leftrightarrow B$ .  $\square$

## 3.2. Caracterización geométrica de las proyectividades

**Definición 3.2.1.**  $h: \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{P}}$  (no necesariamente  $\dim \mathbb{P} = \dim \overline{\mathbb{P}}$ )

1.  $h$  es colineación  $\iff \forall p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}$  diferentes dos a dos y alineados,  $h(p_1), h(p_2), h(p_3) \in \overline{\mathbb{P}}$  son diferentes dos a dos y están alineados.
2.  $h$  conserva las razones dobles  $\iff h$  es colineación y  $\forall p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}$  alineados, al menos tres diferentes,  $(h(p_1), h(p_2), h(p_3), h(p_4)) = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ .

**Observación 3.2.2.**  $h$  colineación  $\implies h$  inyectiva.

**Proposición 3.2.3.**  $f$  proyectividad  $\implies \begin{cases} f \text{ colineación} & (1) \\ f \text{ conserva razones dobles} & (2) \end{cases}$

*Demostración.*  $f: \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{P}}, f = [\varphi]$ ,

- (1)  $f$  biyectiva  $\implies f(p) \neq f(q), \forall p \neq q$ .  
 $f$  proyectividad  $\implies f(V)$  es una variedad lineal de misma dimensión.  
 $\left. \begin{array}{l} L = p_1 \vee p_2 \vee p_3 \\ p_1, p_2, p_3 \text{ alineados} \end{array} \right\} \implies f(L) = f(p_1) \vee f(p_2) \vee f(p_3) \text{ es una recta.}$
- (2) Supongamos  $p_1, p_2, p_3, p_4$ , al menos 3 diferentes y alineados,  $\rho = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ ,  $\mathcal{R} = \{p_1, p_2; p_3\}$  sistema de referencia en  $L = p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \implies$  la coordenada absoluta de  $p_4$  en  $\mathcal{R}$  es  $\rho \implies \exists u_1, u_2 \in \mathbb{E}$  tales que  $p_1 = [u_1], p_2 = [u_2], p_3 = [u_1 + u_2], p_4 = [\rho u_1 + u_2]$ .  
Entonces,  $f(p_1) = [\varphi(u_1)], f(p_2) = [\varphi(u_2)], f(p_3) = [\varphi(u_1 + u_2)], f(p_4) = [\varphi(\rho u_1 + u_2)] = [\rho \varphi(u_1) + \varphi(u_2)]$  están alineados, al menos 3 son diferentes y

$$\rho = (f(p_1), f(p_2), f(p_3), f(p_4)).$$

$\square$

**Teorema 3.2.4.**

Sea  $f : \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{P}}$  una aplicación entre dos espacios proyectivos de dimensión 1. Supongamos que:

1.  $f$  es inyectiva
2.  $f$  mantiene las razones dobles

Entonces  $f$  es una proyectividad.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{R} = \{p_1, p_2, \bar{p}\}$  una referencia en  $\mathbb{P}$ . Por ser  $f$  inyectiva,  $f(p_1), f(p_2), f(\bar{p})$  son distintos entre sí, con lo cual forman una referencia  $\overline{\mathcal{R}} = f(\mathcal{R})$  en  $\overline{\mathbb{P}}$ .

Por las propiedades de las proyectividades existe una única  $g : \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{P}}$  proyectividad tal que  $g(\mathcal{R}) = \overline{\mathcal{R}}$ . Veremos que  $f = g$ . Sea  $q \in \mathbb{P}$ , sea  $\rho = (p_1, p_2, \bar{p}, q)$ . Entonces, por mantener  $f$  razones dobles y por ser  $g$  proyectividad,

$$\begin{aligned} (f(p_1), f(p_2), f(\bar{p}), f(q)) = \rho &= (g(p_1), g(p_2), g(\bar{p}), g(q)) \implies \\ \implies f(q) \text{ y } g(q) \text{ tienen la misma coordenada absoluta en la referencia } \overline{\mathcal{R}} \\ \implies f(q) = g(q) \quad \forall q \in \mathbb{P} \implies f = g \end{aligned}$$

□

**Observación 3.2.5.**

1.  $f$  proyectividad  $\implies f$  biyectiva
2. Fijada una referencia  $\mathcal{R}$ , mediante su coordenada absoluta existe una biyección  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \leftrightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ . En particular,  $(p_1, p_2, p_3, q) = (p_1, p_2, p_3, \bar{q}) \implies q = \bar{q}$ .

**Corolario 3.2.6.** Las funciones *proyección* y *sección* son proyectividades.

*Demostración.* Sea  $r \in \mathbb{P}^n$  una recta y  $V \in \mathbb{P}^n$  una variedad suplementaria a ésta (de dimensión  $n - 2$ ).

$$\left. \begin{array}{l} \Phi: \mathbb{P}^1 \cong r \rightarrow V^* \cong \overline{\mathbb{P}^1} \quad \Psi: \overline{\mathbb{P}^1} \cong V^* \rightarrow r \cong \mathbb{P}^1 \\ p \mapsto V \vee p = H_p \quad H \mapsto H \cap r \\ \Phi, \Psi \text{ son inyectivas (de hecho biyectivas, } \Phi^{-1} = \Psi) \\ \Phi, \Psi \text{ mantienen razones dobles (visto en 2.7.17)} \end{array} \right\} \implies \Phi, \Psi \text{ proyectividades.}$$

□

**Observación 3.2.7.** Las composiciones de funciones *proyección* y *sección* también son proyectividades.

**Proposición 3.2.8.** Sea  $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \overline{\mathbb{P}^m}$  t. q. :

- $f$  es colineación
- $f$  mantiene las razones dobles

Entonces  $V = f(\mathbb{P}^n)$  es una variedad lineal de  $\overline{\mathbb{P}^m}$  de dim  $n$  y  $f : \mathbb{P}^n \rightarrow V = f(\mathbb{P}^n)$  es una proyectividad.



*Demostración.*  $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \overline{\mathbb{P}^m}$ . Sea  $\mathcal{R} = \{p_0, \dots, p_n; \bar{p}\}$  un sistema de referencia de  $\mathbb{P}^n$ ,  $W := f(p_0) \vee \dots \vee f(p_n)$  variedad lineal de  $\overline{\mathbb{P}^m}$  de  $\dim \leq n$ .

Inducción sobre  $n$  (fijamos  $m$ ):

- $n = 1, f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \overline{\mathbb{P}^m}$ 

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ colineación} \\ f \text{ inyectiva} \\ f \text{ mantiene las razones dobles} \end{array} \right\} \implies f : \mathbb{P}^1 \rightarrow L \cong \overline{\mathbb{P}^1} \xRightarrow{3.2.4} f \text{ es una proyectividad (en particular } V = f(\mathbb{P}^1) = L).$$

- $n > 1$ , supongamos el resultado cierto para  $n - 1$  (hipótesis de inducción). Probemoslo para  $n$ .  
 Definimos  $H_i := p_0 \vee \dots \vee \widehat{p_i} \vee \dots \vee p_n, i = 0, \dots, n$  (hiperplano sin  $p_i$ ). Demostremos que  $p \notin H_i \implies f(p) \notin f(H_i)$ :  

$$\left. \begin{array}{l} f : \mathbb{P}^n \rightarrow \overline{\mathbb{P}^m} \\ f|_{H_i} : \mathbb{P}^{n-1} \cong H_i \subseteq \mathbb{P}^n \rightarrow \overline{\mathbb{P}^m} \end{array} \right\} \implies g_i = f|_{H_i} : H_i \rightarrow \overline{\mathbb{P}^m} \text{ es una proyectividad} \\ \implies g_i : H_i \rightarrow f(H_i) = V_i \text{ es biyectiva. Supongamos } f(p) \in f(H_i) = V_i,$$

$$\exists q_i \in H_i \text{ t.q. } f(q_i) = f(p) \xRightarrow[f \text{ inyectiva}]{f \text{ colineación}} p = q_i \in H_i. \text{ Contradicción.}$$

Por tanto queda demostrado. Una consecuencia es que la imagen de  $\mathcal{R}$  por  $f$  son puntos en posición general en  $\overline{\mathbb{P}^m}$ . Sea  $T := f(p_0) \vee \dots \vee f(p_n) \vee f(\bar{p})$ . Entonces  $\overline{\mathcal{R}} = f(\mathcal{R})$  es un sistema de referencia en  $T$ .

Entonces  $\exists! g : \mathbb{P}^n \rightarrow T, g(\mathcal{R}) = \overline{\mathcal{R}}, g$  proyectividad. Veremos que  $f = g$ . De momento sabemos que:

- (1)  $\begin{cases} f(p_i) = g(p_i) \\ f(\bar{p}) = g(\bar{p}) \end{cases}$
- (2)  $f|_{H_i} = g_i = g|_{H_i}$  (porque mandan un sistema de referencia al mismo sitio y son proyectividades)

Hemos de ver que  $\forall p \in \mathbb{P}^n, f(p) = g(p)$ :

- Si  $p = \bar{p}$  o  $p \in \bigcup_{i=0}^n H_i$  ya lo sabemos por (1) y (2).
- Si  $p \neq \bar{p}$  y  $p \notin \bigcup_{i=0}^n H_i$

Sean  $L := p \vee \bar{p}$  y sean  $q_n := L \cap H_n, q_0 := L \cap H_0$ . Como  $f$  es una colineación,  $f(L)$  es una recta,  $f(L) = f(p) \vee f(\bar{p})$ . Entonces:

$$(f(q_0), f(q_1), f(\bar{p}), f(p)) \stackrel{\substack{f \text{ mantiene} \\ \text{razón doble}}}{=} (q_0, q_1, \bar{p}, p) \stackrel{g \text{ proyec.}}{=} (g(q_0), g(q_1), g(\bar{p}), g(p)) = \\ \stackrel{(1)+(2)}{=} (f(p_0), f(p_1), f(\bar{p}), g(p)) \implies f(p) = g(p).$$

□

### Teorema 3.2.9.

Sea  $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \overline{\mathbb{P}^n}$  t.q. :

- $f$  es colineación

- $f$  mantiene las razones dobles

Entonces  $f$  es una proyectividad.

*Demostración.* Es un caso particular ( $n = m$ ) la proposición 3.2.8.  $\square$

**Definición 3.2.10.** Sean  $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{P}^n$  variedades proyectivas de dimensión  $d$ . Sea  $W$  una variedad suplementaria de  $V_1$  y  $V_2$ . La perspectividad de centro  $W$  de  $V_1$  a  $V_2$  es:

$$\begin{aligned} f : V_1 &\rightarrow V_2 \\ p &\mapsto f(p) = (W \vee p) \cap V_2 \end{aligned}$$

**Observación 3.2.11.** Esta bien definido:

$$\begin{aligned} \dim((W \vee p) \cap V_2) &= \overbrace{\dim(W \vee p)}^{n-d-1+1} + \overbrace{\dim V_2}^d - \overbrace{\dim((W \vee p) \vee V_2)}^n \\ &= n - d - 1 + 1 + d - n = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $W \vee p \cap V_2$  es un punto ( $f(p)$ ).

**Observación 3.2.12.** En  $d = 1$ ,  $f$  perspectividad = proyección y sección.

**Corolario 3.2.13.** (del teorema 3.2.9). Toda perspectividad es una proyectividad.

*Demostración.*

- (1) En primer lugar, veamos que  $L \subseteq V_1$  recta  $\implies f(L) \subseteq V_2$  recta.  $f(L) = (W \vee L) \cap V_2$ ,

$$\begin{aligned} \dim f(L) &= \dim((W \vee L) \cap V_2) = \overbrace{\dim(W \vee L)}^{n-d+1} + \overbrace{\dim V_2}^d - \overbrace{\dim(W \vee L \vee V_2)}^{n \text{ (} W \vee V_2 = \mathbb{P}^n \text{)}} \\ &= n - d + 1 + d - n = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f(L)$  es una recta.

- (2) Veamos ahora que  $f$  es inyectiva. Sean  $p_1, p_2 \in V_1, p_1 \neq p_2$ , t. q.  $f(p_1) = f(p_2)$  y sean

- $L_1 := f(p_1) \vee p_1$ ,
- $L_2 := f(p_2) \vee p_2$ ,
- $q_1 = L_1 \cap W$ ,
- $q_2 = L_2 \cap W$ .

Si  $p_1 \neq p_2 \implies q_1 \neq q_2$ . Sean  $r = p_1 \vee p_2, s = q_1 \vee q_2, \pi = L_1 \vee L_2$  (es un plano porque  $L_1 \cap L_2 = f(p_1) = f(p_2)$ ).

$$\left. \begin{aligned} \{p_1, p_2\} &\subseteq r \cap \pi \implies r \subseteq \pi \\ \{q_1, q_2\} &\subseteq s \cap \pi \implies s \subseteq \pi \end{aligned} \right\} \implies \emptyset \neq r \cap s \stackrel{r \subseteq V_1}{\subseteq} V_1 \cap W \stackrel{\text{supl.}}{=} \emptyset. \text{ Contradicción.}$$

- (3) Ahora veamos que  $f$  mantiene las razones dobles. Sea  $\widetilde{W} = W \vee L$ . Observamos que  $f(L) \subseteq \widetilde{W}$  y que  $\dim \widetilde{W} = n - d - 1 + 1 + 1 = n - d + 1$ . En  $\widetilde{W}$  ( $\widetilde{W} \cong \mathbb{P}^{n-d+1}$ ) tenemos que  $f|_L = (\text{sección con } f(L)) \circ (\text{proyección desde } W)$ . Como la razón doble se conserva por proyección y sección,

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (f(p_1), f(p_2), f(p_3), f(p_4)) \implies f \text{ conserva razones dobles.}$$

Los puntos (1) y (2) implican que  $f$  es una colineación. Los puntos (1), (2) y (3) implican (por el teorema 3.2.9) que  $f$  es una proyectividad  $\square$

**Teorema** fundamental de la geometría proyectiva (3.2.14)

$$f : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n \text{ colineación, } n \geq 2 \implies f = [\varphi], \varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, \varphi \text{ aplicación semilineal.}$$

En particular, si  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ,  $f$  colineación  $\implies f$  proyectividad.

**Ejemplo 3.2.15.**

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ v = (z_1, z_2) &\mapsto \varphi(v) = (\overline{z_1}, \overline{z_2}) \end{aligned}$$

$\varphi(\lambda v) = \overline{\lambda} \varphi(v)$  no es lineal. Sea

$$f = [\varphi] : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1,$$

$f$  no es una proyectividad, pero  $f$  es una colineación.

**Definición 3.2.16.** Sea  $\mathbb{k}$  un cuerpo. Un automorfismo de  $\mathbb{k}$  es:

$$\sigma : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k} \text{ biyectiva}$$

tal que:

- $\sigma(0) = 0$
- $\sigma(1) = 1$
- $\sigma(a_1 + a_2) = \sigma(a_1) + \sigma(a_2)$
- $\sigma(a_1 \times a_2) = \sigma(a_1) \times \sigma(a_2)$

**Ejemplo 3.2.17.** Sea

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sigma(z) = \overline{z}, \end{aligned}$$

$\sigma$  es un automorfismo.

**Ejercicio 3.2.18.**  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  automorfismo  $\implies \sigma = \text{Id}$ .

**Definición 3.2.19.** Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{k}$  espacio vectorial,  $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  es semilineal si y solo si

- (1)  $\forall u_1, u_2, \varphi(v_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$
- (2)  $\exists \sigma : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$  automorfismo t.q.  $\varphi(\lambda u) = \sigma(\lambda) \varphi(u), \forall \lambda \in \mathbb{k}$ .

**Observación 3.2.20.** En  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi$  semilineal  $\implies \varphi$  lineal.

### 3.3. El teorema de Poncelet

**Teorema** de Poncelet (3.3.1)

Sean  $V_1, V_2$  variedades proyectivas de dim  $d$  en  $\mathbb{P}^n$ . Toda proyectividad  $f: V_1 \rightarrow V_2$  es composición de perspectividades.

Demostraremos el teorema tan solo para  $d = 1$ . Empezamos demostrando el siguiente lema.

**Lema 3.3.2.** Sean  $r_1, r_2 \subseteq \mathbb{P}^2$ ,  $f: r_1 \rightarrow r_2$  proyectividad.

$$f \text{ perspectividad} \iff f(O) = O,$$

donde  $O = r_1 \cap r_2$ .

*Demostración.* Veamos primero la implicación directa. Sea  $W = q$  el centro de  $f$ . Entonces

$$\begin{aligned} f: r_1 &\rightarrow r_2 \\ p &\mapsto pq \cap r_2 \end{aligned}$$

Entonces  $f(O) = Oq \cap r_2 = O$ .

Veamos ahora la implicación recíproca. Sean  $A_1, A_2 \in r_1 \setminus \{O\}$ , tales que  $A_1 \neq A_2$ . Sean  $B_1 = f(A_1), B_2 = f(A_2)$ . Entonces  $\mathcal{R} = \{A_1, A_2, O\}, \mathcal{R}' = \{B_1, B_2, O\}$  son referencias en  $r_1$  y  $r_2$  respectivamente. La segunda es una referencia ya que  $B_1, B_2 \neq O$  porque  $f(O) = O$  y  $f$  es inyectiva por ser proyectividad, y por el mismo motivo  $B_1 \neq B_2$ .

Sea  $q = A_1B_1 \cap A_2B_2$ , que no es vacío pues en el plano dos rectas se cortan. Sea  $g: r_1 \rightarrow r_2$  perspectividad de centro  $W = \{q\}$ . Por construcción:

$$\left. \begin{aligned} g(O) &= O = f(O) \\ g(A_1) &= B_1 = f(A_1) \\ g(A_2) &= B_2 = f(A_2) \end{aligned} \right\} \implies g(\mathcal{R}) = f(\mathcal{R}) \implies g = f,$$

por ser  $g$  y  $f$  proyectividades. □

**Teorema 3.3.3.**

Sean  $r_1, r_2 \in \mathbb{P}^2$  rectas diferentes. Sea  $f: r_1 \rightarrow r_2$  proyectividad. Entonces  $f$  es composición de 1 o 2 perspectividades.

*Demostración.* Sea  $O = r_1 \cap r_2$ . Consideraremos dos casos.

1. Suponemos  $f(O) = O$ . Por 3.3.2,  $f$  es perspectividad.
2. Suponemos  $f(O) \neq O$ . Sean  $A_1, A_2, A_3 \in r_1$  (diferentes dos a dos,  $A_i \neq O$ ). En consecuencia,  $\mathcal{R} = \{A_1, A_2, A_3\}$  forma una referencia en  $r_1$ . Sea  $B_i = f(A_i)$ . Podemos asegurar que  $B_i \neq O$  si tomamos  $A_i$  adecuadas. Sea  $s \ni B_1$  ( $s \not\ni B_j, A_i$ ), y  $q \in A_1B_1$ ,  $q \notin r_1, r_2$ . Postulamos que podemos encontrar dos perspectividades  $g_1, g_2$  que cumplan

$$\begin{array}{ccccc} r_1 & \xrightarrow{g_1} & s & \xrightarrow{g_2} & r_2 \\ A_1 & \mapsto & B_1 = C_1 & \mapsto & B_1 \\ A_2 & \mapsto & C_2 & \mapsto & B_2 \\ A_3 & \mapsto & C_3 & \mapsto & B_3. \end{array}$$

$g_1$  es una perspectividad desde  $q$ , concretamente  $g_1 = \psi(s) \circ \varphi(q)$ . Para ver que existe una perspectividad  $g_2$  adecuada, consideramos la proyectividad que envía la referencia de  $s$   $\{C_1, C_2; C_3\}$  a la referencia de  $r_2$   $\{B_1, B_2; B_3\}$ . Dado que  $f(C_1) = B_1 = C_1$ , y  $C_1 = s \cap r_2$ , podemos aplicar el primer para ver que esta proyectividad es también una perspectividad.

Finalmente,  $(g_2 \circ g_1)(A_i) = B_i = f(A_i) \implies f = g_2 \circ g_1$ , por ser ambas proyectividades.

□

Antes de proceder con el siguiente teorema, demostraremos el siguiente lema que resultará de utilidad.

**Lema 3.3.4.** Sean  $l_1, l_2 \subseteq \mathbb{P}^3$  rectas disjuntas. Sea  $p \notin l_1, l_2$ . Entonces  $\exists!$   $s$  recta tal que  $p \in s$ ,  $s \cap l_1 \neq \emptyset$ ,  $s \cap l_2 \neq \emptyset$ . Además,  $s = (l_1 \vee p) \cap (l_2 \vee p)$ .

*Demostración.* Veamos primero que  $s = (l_1 \vee p) \cap (l_2 \vee p)$  es una recta. Por ser  $l_1, l_2$  rectas disjuntas, tenemos que  $\dim(l_1 \vee l_2) = \dim l_1 + \dim l_2 - \dim(l_1 \cap l_2) = 1 + 1 - (-1) = 3$ . Sabiendo esto, se cumple  $\dim((l_1 \vee p) \cap (l_2 \vee p)) = \dim(l_1 \vee p) + \dim(l_2 \vee p) - \dim((l_1 \vee p) \vee (l_2 \vee p)) = 2 + 2 - 3 = 1$ . Veamos ahora que  $s$  cumple las propiedades necesarias:

- $p \in (p \vee l_1), p \in (p \vee l_2) \implies p \in s$
- $l_1, s \subseteq (p \vee l_1)$ , con lo que  $l_1$  y  $s$  están en un mismo plano y se intersecan necesariamente.
- Análogamente,  $s \cap l_2 \neq \emptyset$ .

Supongamos ahora una recta  $r$  que cumple estas mismas propiedades. Como  $p \notin l_1$ , los puntos  $p, (r \cap l_1)$  son distintos y  $p \vee (r \cap l_1) = r$ . Tenemos que  $p, (r \cap l_1) \in (p \vee l_1) \implies r = p \vee (r \cap l_1) \subseteq (p \vee l_1)$ . Análogamente,  $r \subseteq (p \vee l_2)$ , con lo que  $r \subseteq s$  y por ser ambas rectas  $r = s$ .

□

### Teorema 3.3.5.

Sean  $r_1, r_2 \subseteq \mathbb{P}^n$  ( $n \geq 3$ ) rectas disjuntas. Sea  $f: r_1 \rightarrow r_2$  proyectividad, entonces  $f$  es una perspectividad.

*Demostración.* Consideraremos dos casos.

1. Supongamos  $n = 3$ . Consideramos  $A_1, A_2, A_3 \in r_1$  diferentes dos a dos, de manera que forman una referencia. Consideramos  $B_1 = f(A_1), B_2 = f(A_2), B_3 = f(A_3)$ , que forman una referencia en  $r_2$ . Sean  $l_i = A_i \vee B_i$ .

Veamos que  $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ , y análogamente para las demás parejas de índices. Para ello, operamos por reducción al absurdo:

$$l_1 \cap l_2 \neq \emptyset \implies l_1 \vee l_2 = \pi \implies \begin{cases} A_1, A_2 \in \pi \implies r_1 = A_1 \vee A_2 \subseteq \pi \\ B_1, B_2 \in \pi \implies r_2 = B_1 \vee B_2 \subseteq \pi \end{cases}$$

De lo que  $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$ , una contradicción.

Cojamos  $p \in A_1 B_1$ ,  $p \notin r_1, r_2$ . Consideramos la recta  $s$  dada por 3.3.4 que cumple  $p \in s, s \cap l_2 \neq \emptyset, s \cap l_3 \neq \emptyset$ . Veamos que  $s \cap r_1 = \emptyset$ . Si suponemos lo contrario,

$$s \cap r_1 \neq \emptyset \implies s \vee r_1 = \pi \implies \begin{cases} A_1, p \in \pi \\ A_2, s \cap l_2 \in \pi \\ A_3, s \cap l_3 \in \pi \end{cases}$$

Como  $s \neq r_1$ , o bien  $A_2 \neq s \cap l_2$ , o bien  $A_3 \neq s \cap l_3$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $A_3 \neq s \cap l_3$ . En ese caso,  $B_1 \in A_1 \vee p \subseteq \pi$  y  $B_3 \in A_3 \vee s \cap l_3 \subseteq \pi$ . Si  $B_1, B_3 \in \pi$ , entonces  $r_2 \in \pi$ . Si  $r_1, r_2 \subseteq \pi$ ,  $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$ , una contradicción.

Podemos ver análogamente que  $s \cap r_2 = \emptyset$ . Por lo tanto, podemos considerar la perspectividad  $g : r_1 \rightarrow r_2$  desde  $s$ . En esta,  $g(A_1) = (A_1 \vee s) \cap r_2 \ni B_1$ . Como sabemos que la perspectividad está bien definida,  $g(A_1) = B_1$ . Análogamente,  $g(A_2) = B_2$ ,  $g(A_3) = B_3$ . Por ser  $f$  y  $g$  proyectividades y cumplir  $g(A_i) = B_i = f(A_i)$ , formando  $A_i$  y  $B_i$  referencias en sus respectivas rectas,  $f = g$ .

2. Supongamos  $n \geq 4$ . Sea  $V = r_1 \vee r_2$ , con  $\dim V = 3$  por Grassman ( $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ ). Aplicamos el caso 1 en la variedad  $V$ , con lo que obtenemos  $s \subseteq V$  tal que  $f$  es perspectividad desde  $s$  en  $V$ . Veamos que también es una perspectividad en  $\mathbb{P}^n$ . Sea  $W_0$  una variedad suplementaria a  $V$ . Sea  $W = W_0 \vee s$ . Consideramos  $h : r_1 \rightarrow r_2$  la perspectividad de centro  $W$ . Esta cumple  $h = f$ .

□

**Observación 3.3.6.** Si  $r_1 \neq r_2$  pero  $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$ , entonces  $r_1 \vee r_2 = V \subseteq \mathbb{P}^n$ , donde  $V$  tiene dimensión 2 por Grassman y por lo tanto se puede aplicar 3.3.3.

## 3.4. Clasificación y estudio de homografías

### 3.4.1. Clasificación de homografías

**Definición 3.4.1.** Sean  $f, g : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  homografías ( $f = [\varphi], g = [\psi], \varphi, \psi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  endomorfismos). Decimos que  $f \sim g$  si y solo si (son equivalentes):

- (i)  $\exists h$  homografía t. q.  $g = h^{-1} f h$
- (ii)  $\exists \eta : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  endomorfismo,  $\exists \lambda \in \mathbb{k}, \lambda \neq 0$  t. q.  $\psi = \lambda \eta^{-1} \varphi \eta$
- (iii)  $\exists S \in \mathcal{M}_{m+1, n+1}(\mathbb{k}), \exists \lambda \in \mathbb{k}, \lambda \neq 0$  t. q.  $B = \lambda S^{-1} A S$ , donde

- $A = M_{\mathcal{R}}(f) = M_{\mathcal{R}, \mathcal{R}}(f)$
- $B = M_{\mathcal{R}}(g) = M_{\mathcal{R}, \mathcal{R}}(g)$

- (iv)  $\exists \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$  t. q.  $M_{\mathcal{R}_1}(f) = M_{\mathcal{R}_2}(g)$

**Observación 3.4.2.**  $B = \lambda S^{-1} A S = S^{-1}(\lambda A) S \iff B$  y  $\lambda A$  son equivalentes como matrices de endomorfismos  $\iff$

$$Q_A(t) \underset{\text{totalmente}}{\overset{\text{descompone}}{\iff}} \begin{cases} \{\text{vaps } B\} = \lambda \overbrace{\{\text{vaps } A\}}^{\mu_i} \\ \forall i, \dim \left( \text{Nuc}(B - \lambda \mu_i I)^k \right) = \dim \left( \text{Nuc}(A - \mu_i I)^k \right), \forall k \end{cases}$$

Es la misma estructura que en las cajas de Jordan.

**Ejemplo 3.4.3.**

- $f \rightarrow A = M_{\mathcal{R}}(f) \rightarrow Q_A(t) = (t-2)^2(t-4)(t-6)^3$
- $g \rightarrow B = M_{\mathcal{R}}(g) \rightarrow Q_B(t) = (t-1)^2(t-2)(t-3)^3$

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ & & 4 & & & \\ & & & 6 & 0 & \\ & & & 1 & 6 & \\ & & & & & 6 \end{pmatrix}; \quad J_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 3 & 0 & \\ & & & 1 & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

**3.4.2. Homografía dual y variedades  $f$ -invariantes**

**Definición 3.4.4.** En  $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathbb{E})$ , sea  $f = [\varphi] : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  una homografía, la homografía dual de  $f$  es

$$f^* := [\varphi^*] : \mathbb{P}^* \rightarrow \mathbb{P}^*.$$

**Observación 3.4.5.**  $\mathbb{P}, \mathcal{R}$  referencia  $\rightarrow (\mathbb{P}^*, \mathcal{R}^*)$

1.  $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}, A = M_{\mathcal{R}}(f)$  mueve puntos de  $\mathbb{P}$ .  $f^* : \mathbb{P}^* \rightarrow \mathbb{P}^*, A^t = M_{\mathcal{R}^*}(f^*)$  mueve puntos de  $\mathbb{P}^*$  (hiperplanos de  $\mathbb{P}$ ).
2.  $J_A = J_{A^t}$ , ya que
  - $Q_A(t) = \det(A - t \text{Id}) = \det((A - t \text{Id})^t) = \det(A^t - t \text{Id}) = Q_{A^t}(t) \implies$   
vaps de  $A = \text{vaps de } A^t$
  - $\dim(\text{Nuc}(A - \lambda_i \text{Id})^k) = \dim(\text{Nuc}(A^t - \lambda_i \text{Id})^k)$

**Definición 3.4.6.** Sea  $f = [\varphi] : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  homografía,

1.  $p \in \mathbb{P}$  es un punto fijo de  $f \iff f(p) = p$ .
2. Sea  $V \subseteq \mathbb{P}$  una variedad lineal,  $V$  es una variedad lineal de puntos fijos  $\iff \forall p \in V, f(p) = p$ .
3. Sea  $V \subseteq \mathbb{P}$  una variedad lineal,  $V$  es una variedad fija de  $f$  (o es  $f$ -invariante)  
 $\iff f(V) \subseteq V \xrightarrow{f \text{ biyectiva}} f(V) = V$ .

**Observación 3.4.7.**

1.  $p = [v]$  es un punto fijo de  $f \iff f(p) = [\varphi(v)] = [v] = p \iff \exists \lambda \neq 0$  t.q.  $\varphi(v) = \lambda v \iff v$  es vep de  $\varphi$ .
2.  $V = [F]$  variedad de puntos fijos  $\iff \forall v \in F, v$  es vep de  $\varphi \iff \exists \lambda \neq 0$  t.q.  $\forall v \in F, \varphi(v) = \lambda v \iff \exists \lambda \neq 0$  t.q.  $F \subseteq \text{Nuc}(f - \lambda \text{Id})$ .
3.  $V = [F]$  es  $f$ -invariante  $\iff F$  es  $\varphi$ -invariante.

**Ejemplo 3.4.8.** Queremos encontrar las variedades  $f$ -invariantes (o los subespacios  $\varphi$ -invariantes).

Sea  $f : \mathbb{P}^4 \rightarrow \mathbb{P}^4$  y sea  $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4; \bar{p}\}$  y sea

$$A = M(f; \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & & & \\ 1 & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & 0 \\ & & & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

- Puntos fijos:  $p_1, p_2 \vee p_4$  (recta de puntos fijos).
- Rectas invariantes:  $p_2 \vee p_4, p_0 \vee p_1, p_3 \vee p_4$ .
- Planos invariantes:  $p_0 \vee p_1 \vee p_2, p_2 \vee p_3 \vee p_4, p_1 \vee p_3 \vee p_4, p_0 \vee p_1 \vee p_4$ .

Veamos ahora los hiperplanos fijos:  $f(H) = H \iff f^*(H^*) = H^*$

$$H : a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0 \iff H^* = (a_0 : \dots : a_n)^t$$

$$A^t = M_{\mathcal{R}^*}(f^*) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 0 & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} \mathcal{R}^* &= \{p_0^*, p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*, \bar{p}\} \\ B^* &= \{\omega_0, \dots, \omega_4\}, \omega_i = v_i^* \end{aligned}$$

Encontramos los veps de  $A^t$ :

$$\begin{aligned} \omega_0 \lambda_1 = 2 &\rightarrow \omega_0 = (2 : 0 : \dots : 0)^t, \\ \left. \begin{matrix} \omega_2 \\ \omega_3 \end{matrix} \right\} \lambda_2 = 3 &\implies [\omega_2, \omega_3] \text{ veps de } \text{vap } 3, a(0 : 1 : 0 : 0 : 0)^t + b(0 : 0 : 1 : 0 : 0)^t = \\ &(0 : a : b : 0 : 0)^t. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

- Hiperplanos invariantes:
  - $H_0 : x_0 = 0$
  - $H_{a,b} : ax_1 + bx_2 = 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$

**Proposición 3.4.9.** Sea  $f : \bar{\mathbb{P}} \rightarrow \bar{\mathbb{P}}$  homografía,

- (1)  $p = [v]$  es un punto fijo de  $f \iff v$  vep de  $f$ , es decir, de  $A$ ,
- (2)  $H$  es un hiperplano  $f$ -invariante  $\iff H^*$  vep de  $f^*$ , es decir, de  $A^t$ ,
- (3) Hay una biyección entre puntos fijos e hiperplanos  $f$ -invariantes,
- (4)  $V_1, V_2$   $f$ -invariantes  $\implies V_1 \cap V_2, V_1 \vee V_2$  son  $f$ -invariantes,
- (5)  $V$  es  $f$ -invariante  $\iff V^*$  es  $f^*$ -invariante,



- (6) Si  $Q_\varphi(t)$  descompone totalmente,  $V$   $f$ -invariante  $\implies \exists p \in \overline{\mathbb{P}}$  punto fijo,  $\exists H \subseteq \overline{\mathbb{P}}$  hiperplano  $f$ -invariante t.q.  $p \in V \subseteq H$ .

*Demostración.*

(1) Visto.

(2) Por dualidad de (1) y (5).

$$(3) \left. \begin{array}{l} Q_A(t) = Q_A \in (t) \\ J_A = J_{A^t} \end{array} \right\} \implies \dim(\text{Nuc}(A - \lambda \text{Id})) = \dim(\text{Nuc}(A^t - \lambda \text{Id})).$$

(4)  $F_1, F_2$  son  $\varphi$ -invariantes  $\implies F_1 \cap F_2, F_1 + F_2$  son  $\varphi$ -invariantes.

(5) Veamos cada implicación por separado

$\implies$

$V^* = \{H \subseteq \mathbb{P} \mid V \subseteq H\}$ . Sea  $H_0 \in V^* \implies V \subseteq H_0 \implies f(V) \subseteq f(H_0) \implies f^*(H_0^*) = f(H_0) \in V^* \implies V^*$  es  $f^*$ -invariante.

$\impliedby$

Dual de la otra implicación:  $(f^*)^* = f, (V^*)^* = V$ .

(6)  $\exists p \in \mathbb{P}$  punto fijo t.q.  $p \in V, V = [F] \subseteq \mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathbb{E}), f = [\varphi]. V$   $f$ -invariante  $\iff F$   $\varphi$ -invariante.

$F \subseteq \mathbb{E}$   $\varphi$ -invariante  $\implies Q_{\varphi|_F}(t)$  divide a  $Q_\varphi(t)$ . En este caso,

$$\begin{aligned} Q_\varphi(t) &= (-1)^n (t - \lambda_1)^{\delta_1} \dots (t - \lambda_r)^{\delta_r} \implies \\ Q_{\varphi|_F}(t) &= (-1)^d (t - \lambda_1)^{\mu_1} \dots (t - \lambda_r)^{\mu_r}, 0 \leq \mu_i \leq \delta_i. \end{aligned}$$

Por tanto  $\exists \lambda_i$  vap de  $\varphi|_F$  y por tanto  $\exists \omega_i \in F, \varphi(\omega_i) = \lambda_i \omega_i \implies f(p) = p$  ( $p = [\omega_i] \in V$ ).

Veamos que  $\exists H \subseteq \mathbb{P}$  hiperplano  $f$ -invariante t.q.  $V \subseteq H$ ,

$$V \subseteq H \iff \underbrace{V^*}_{f\text{-inv. por (5)}} \supseteq \underbrace{H^*}_{f\text{-inv. por (2)}}$$

□

### 3.4.3. Algunas familias de homografías

#### 3.4.3.1. Involuciones

**Definición 3.4.10.** Sea  $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  una homografía,

$$f \text{ es una involución} \iff f \neq \text{Id}, f^2 = \text{Id}$$

**Observación 3.4.11.**

$$f = [\varphi] \text{ es involución} \iff \begin{cases} \varphi \neq \text{Id} \\ \exists \lambda \text{ t.q. } \varphi^2 = \lambda \text{Id} \quad (\lambda \neq 0) \end{cases}$$

**Observación 3.4.12.** Sea  $\mathbb{k} = \mathbb{R}, m_\varphi(t) \mid (t^2 - \lambda)$

- Caso 1:  $\lambda < 0 \rightarrow$  no podemos deducir nada más

$$\text{▪ Caso 2: } \lambda = a^2 > 0 \rightarrow m_\varphi(t) = \begin{cases} (t-a) \rightarrow \varphi - a \text{Id} = 0 \implies \varphi = a \text{Id} \rightarrow \text{No} \\ (t+a) \rightarrow \varphi + a \text{Id} = 0 \implies \varphi = -a \text{Id} \rightarrow \text{No} \\ (t^2 - a^2) = (t-a)(t+a) \end{cases}$$

Conclusión:  $\varphi$  diagonaliza. Por tanto,  $\exists B$  t.q.:

$$M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} a & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a & & \\ & & & -a & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -a \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{R}}(f) \stackrel{\text{Matriz de } \varphi}{=} \stackrel{\text{salvo const.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{R} = \{q_0 = [v_0], \dots, q_r = [v_r], q_{r+1} = [v_{r+1}], \dots, q_n = [v_n]; \bar{q}\}$ .

Sean  $V = q_0 \vee \dots \vee q_r$ ,  $W = q_{r+1} \vee \dots \vee q_n$  variedades de puntos fijos,  $V$  y  $W$  suplementarias. Sea  $q \in \mathbb{P}$ .

- $q \in V$  o  $q \in W \implies f(q) = q$ .
- $q \notin V, W$ . Como  $V, W$  son suplementarias,  $\exists! L$  recta t.q.  $q \in L, L \cap V = \{q_0\}, L \cap W = \{q_1\}$ . Como  $q_0 \in V, q_1 \in W \implies q_0, q_1$  puntos fijos  $\implies l = q_0 \vee q_1$  es  $f$ -invariante.  
 $q \in L \implies f(q) \in L$ ,

$$\begin{aligned} (q_0, q_1, q, f(q)) &= (f(q_0), f(q_1), f(q), q) = (q_0, q_1, f(q), q) \implies \\ &\implies (q_0, q_1, q, f(q)) = -1. \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.4.13.** Sea  $f: \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$

$$A = M(f; \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mathcal{R} &= \{p_0, p_1, p_2, p_3; \bar{p}\} \\ B &= \{v_0, v_1, v_2, v_3\} \end{aligned}$$

$Q_A = (t+1)^2(t-1)^2$ ,  $\lambda_1 = -1, \delta_1 = 2$  (multiplicidad algebraica),  $\lambda_2 = 1, \delta_2 = 2$ . Veps:  $[(0:0:1:0)^t, (0:0:0:1)^t], [(1:-1:0:0)^t]$ .

- Puntos fijos:  $p_2 \vee p_3$  (recta),  $q = (1:-1:0:0)$ .
- Planos fijos:  
 $\mathcal{R}^\alpha = \{[\omega_0], [\omega_1], [\omega_2], [\omega_3]; [\bar{\omega}]\}, \omega_i = v_i^\alpha$ .

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 2 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -1 & [\omega_2, \omega_3] &= \left\{ \omega \in E^\alpha \mid \omega = (0:0:A:B)^t \right\} \\ \lambda_2 &= 1 & & [(1:1:0:0)^t] \end{aligned}$$

$$H_1: x_0 + x_1 = 0$$

$$H_{A,B}: Ax_2 + Bx_3 = 0$$

Por tanto, vemos que hay una biyección entre puntos e hiperplanos fijos.

- Rectas fijas:

$L = p_2 \vee p_3$  (de puntos fijos).

Usaremos que  $v_1, v_2$  fijas  $\implies v_1 \vee v_2$  fijas:  $L_{\alpha, \beta} = \left[ (1 : -1 : 0 : 0)^t \right] \vee \left[ (0 : 0 : \alpha : \beta)^t \right]$ .

Usaremos que  $v_1, v_2$  fijas  $\implies v_1 \cap v_2$  fijas:

$$H_{A=1, B=0} \cap H_{A=0, B=1} = \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right\} = p_0 \vee p_1$$

$$H \cap H_{A, B} = \left\{ \begin{array}{l} x_0 + x_1 = 0 \\ Ax_2 + Bx_3 = 0 \end{array} \right\} \implies \left[ (1 : -1 : 0 : 0)^t \right] \vee \left[ (0 : 0 : B : -A)^t \right] = L_{B, -A}.$$

**Observación 3.4.14.** *Método para encontrar todas las rectas  $f$ -invariantes.* (También variedades invariantes de dim  $n - 2$ )

- Opción 1 (sistemática):  $L$   $f$ -invariante  $\implies \exists p, \pi$ , un punto y un hiperplano, respectivamente,  $f$ -invariantes t.q.  $p \in L \subseteq \pi$ . Nos dice que todas las variedades invariantes de dim  $n - 2$  viven dentro de hiperplanos fijos. Por tanto,  $\forall \pi$   $f$ -invariante, consideramos  $f|_{\pi}$  y, como  $L$  son hiperplanos dentro de  $\pi$ , encontramos  $L$   $f$ -invariantes como los veps de  $(f|_{\pi})^*$ .
- Opción 2: En todo hiperplano  $f$ -invariante  $\pi$ , tiene que haber el mismo número de puntos fijos que de variedades de dim  $n - 2$   $f$ -invariantes (hay una biyección entre puntos e hiperplanos fijos de  $\pi$ ).

**Ejemplo 3.4.15.**

$$\pi = H: x_0 + x_1 = 0 \equiv \left[ (1 : -1 : 0 : 0)^t \right] \vee \left[ (0 : 0 : 1 : 0)^t \right] \vee \left[ (0 : 0 : 0 : 1)^t \right]$$

$$C = M(f|_H) = M(\varphi|_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$L \subseteq \pi$   $f$ -invariante  $\iff$  su ecuación en  $\pi$  es un vep de  $C^t$  (hiperplano en  $\pi$ ).

Inductivamente podríamos encontrar variedades de dim  $< n - 2$  considerándolas dentro de variedades fijas de dim 1. Además, siendo así hiperplanos que serán fijos  $\iff$  son veps de la aplicación dual de la restricción.

**Ejemplo 3.4.16.** *Involuciones.*

1.  $\mathbb{P}^1$

$$A = M(f; \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{ll} \lambda_1 = 4 & v_1 = (1 : 1) \\ \lambda_2 = -4 & v_2 = (1 : -7) \end{array} \implies$$

$$\exists \overline{\mathcal{R}} A = M(f; \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = 16 \text{Id} \implies f^2 = \text{Id}.$$

$$2. A = M(f; \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\text{Id} \implies f^2 = \text{Id} \implies f \text{ involución}$$

A no diagonaliza,  $Q_A(t) = t^2 + 1$ .

**Observación 3.4.17.** Si  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ ,  $f^2 = \text{Id} \implies f$  siempre diagonaliza:

$$\begin{pmatrix} a & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a & & \\ & & & -a & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -a \end{pmatrix}.$$

Es un caso diagonalizable de  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ .

### 3.4.3.2. Homologías

**Definición 3.4.18.** Sea  $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  una homografía ( $f \neq \text{Id}$ )

- $f$  es una homología  $\iff f$  tiene un hiperplano de puntos fijos.
- $f$  es una homología general  $\iff f$  es una homología y tiene, además, otro punto fijo.
- $f$  es una homología especial  $\iff f$  es una homología y no es una homología general.

**Proposición 3.4.19.** Sea  $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  una homología. Entonces,  $\exists \mathcal{R}$  referencia tal que  $A = M(f; \mathcal{R})$ .

- $f$  es una homología general  $\iff A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & a \end{pmatrix}, a \neq 1$ .
- $f$  es una homología especial  $\iff A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ .

*Demostración.*  $f = [\varphi]$ .  $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathbb{E})$ ;  $\dim \mathbb{P} = n$ ,  $\dim \mathbb{E} = n + 1$ .

$$Q_\varphi(t) = (-1)^{n+1} \underbrace{(t - \lambda)^n}_{\text{hay un hiperplano de puntos fijos}} (t - \mu), \lambda \neq 0, \text{gr}(Q_\varphi(t)) = n + 1.$$

- Si  $\mu \neq \lambda$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \rightarrow m_a = n \\ \mu \rightarrow m_a = 1 \end{array} \quad \overbrace{m_g \geq n}^{\dim \text{Nuc}(\varphi - \lambda \text{Id}) \geq n} \quad m_g = 1 \quad \Rightarrow \quad m_g = n \right\} \xrightarrow{\text{Teorema de diagonalización}}$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ diagonaliza} \Rightarrow \exists B \text{ t.q. } A = M(\varphi; B) = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \\ & & & \mu \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}, a \neq 1 \text{ (otro punto fijo)} \Rightarrow f \text{ es una homología general.}$$

- Si  $\mu = \lambda$ ,  $Q_\varphi(t) = (-1)^{n+1}(t - \lambda)^{n+1}$ . Entonces,  $n + 1 \geq \dim(\varphi - \lambda \text{Id}) \geq n$ .

- $\dim(\varphi - \lambda \text{Id}) = n + 1$

$$\varphi \text{ diagonaliza} \Rightarrow \exists B \text{ t.q. } A = \lambda \text{Id} \Rightarrow f = \text{Id} \rightarrow \text{contradicción.}$$

- $\dim(\varphi - \lambda \text{Id}) = n$

$$\exists B \text{ t.q. } M(\varphi, B) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & & \\ 1 & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \mathcal{R} \text{ t.q. } M(\varphi, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

no hay más puntos fijos  $\Rightarrow f$  es una homología especial

□

### 3.4.4. Homografías de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$

Posibles formas de Jordan:

(1)  $f = \text{Id}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A$  diagonaliza y tiene un solo valor propio. Todos los puntos son fijos.

(2)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \neq 1$

$A$  diagonaliza y tiene dos valores propios distintos. Hay dos puntos fijos,  $f$  es una homología general. Para  $a = -1$ ,  $f$  es una involución.

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A$  no diagonaliza y tiene un solo valor propio. Hay un punto fijo,  $f$  es una homología especial.

$$(4) \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$Q_A(t) = t^2 - (\text{tr } A)t + \det A \implies \Delta = (\text{tr } A)^2 - 4\det A < 0$ .  $A$  no tiene forma de Jordan. No hay ningún punto fijo.

**Observación 3.4.20.** Las homografías en  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  pueden clasificarse en siete categorías.

### 3.5. Relación entre afinidades y proyectividades

$$\begin{aligned} f: \mathbb{A}^n &\rightarrow \overline{\mathbb{A}^n} = \mathbb{P}^n \\ \mathcal{R} &\mapsto \overline{\mathcal{R}} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n) \\ \left(\frac{\tilde{x}_1}{x_0}, \dots, \frac{\tilde{x}_n}{x_0}\right) &\leftarrow (\tilde{x}_0 : \dots : \tilde{x}_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f: \mathbb{A}^n &\rightarrow \overline{\mathbb{A}^n} \text{ afinidad (biyectiva)} \\ f(x_1, \dots, x_n) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \\ &= \underbrace{\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ a_n & & & \end{array} \right)}_A \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### 3.5.1. Las afinidades definen proyectividades

$$f \text{ biyectiva} \leftrightarrow \det A \neq 0 \leftrightarrow \det \overline{A} \neq 0 \leftrightarrow \overline{A} \text{ invertible}$$

**Definición 3.5.1.** Llamaremos proyectividad asociada a  $f$  a una  $\overline{f}$  t. q. :

$$\begin{aligned} \overline{f}: \overline{\mathbb{A}^n} = \mathbb{P}^n &\mapsto \overline{\mathbb{A}^n} = \mathbb{P}^n \\ M_{\overline{\mathcal{R}}}(\overline{f}) = \overline{A} &= \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ a_1 & \\ \vdots & A \\ a_n & \end{array} \right) \end{aligned}$$

**Proposición 3.5.2.**

1.  $\mathbb{A}_{\infty}$  es  $\overline{f}$ -invariante

2.  $\mathbb{A}^n = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{A}_\infty^n$  es  $\bar{f}$ -invariante y  $\bar{f}|_{\mathbb{A}^n} = f$
3.  $M_{\bar{\mathcal{R}}_\infty}(\bar{f}|_{\mathbb{A}^\infty}) = A$

*Demostración.*

1.  $\mathbb{A}_\infty^n: x_0 = 0 \rightarrow \bar{f}$ -invariante porque  $(1, 0, \dots, 0)$  es vector propio de  $\bar{A}^t$
2. Sea  $p \in \mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{P}^n$ ,  $p = (1 : b_1 : \dots : b_n)$ . Entonces:

$$\bar{f}(p) = \bar{A} \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a_1 & \\ \vdots & A \\ a_n & \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = f(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{A}^n$$

3. Como que en  $\mathbb{A}_\infty^n$ ,  $x_0 = 0$ , y mientras que  $\bar{\mathcal{R}} = \{p_0, p_1, \dots, p_n; \bar{p}\}$ , tenemos que para  $\bar{\mathcal{R}}_\infty = \{p_1, \dots, p_n, \bar{p}_\infty\}$  hay una coordenada menos debido a que se elimina  $x_0$ , y por lo tanto:

$$\bar{\mathbb{A}} = M_{\bar{\mathcal{R}}}(\bar{f}) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a_1 & \\ \vdots & A \\ a_n & \end{array} \right) \Rightarrow M_{\bar{\mathcal{R}}_\infty}(\bar{f}|_{\mathbb{A}^\infty}) = A$$

□

### 3.5.2. Las proyectividades definen afinidades

Sea  $g : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  una proyectividad, sea  $\bar{A} = M_{\bar{\mathcal{R}}}(g)$  y supongamos  $H$  un hiperplano  $g$ -invariante.

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{P}^n \setminus H \rightarrow \mathbb{P}^n = \bar{\mathbb{A}}^n \quad \left| \quad \bar{\mathbb{A}} = \left( \begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline \tilde{a}_1 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ \tilde{a}_n & & & \end{array} \right) \stackrel{1/\lambda}{\sim}_{\lambda \neq 0} \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ a_n & & & \end{array} \right)$$

$$\mathcal{R} \mapsto \bar{\mathcal{R}} = \underbrace{\left\{ \overbrace{p_0}^{\notin H}, \overbrace{p_1, \dots, p_n}^{\in H} \right\}}_{H: x_0=0}, \bar{p}$$

**Definición 3.5.3.** Llamaremos  $g_{\text{af}} : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$  a la afinidad inducida por  $g$  en  $\mathbb{A}^n = \mathbb{P}^n \setminus H$  y tenemos que:

$$M_{\mathcal{R}}(g_{\text{af}}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ a_n & & & \end{array} \right)$$

### Ejemplo 3.5.4.

1. Consideramos la proyectividad  $g : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  y una referencia  $\bar{\mathcal{R}}$  t. q. :

$$M_{\bar{\mathcal{R}}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

que tiene como valores y vectores propios:

$$\begin{aligned}\lambda_1 = 1 &\implies v_1 = (1, 0, 0) \implies H_1: x_0 = 0 \\ \lambda_2 = 1 &\implies v_2 = (0, 0, 1) \implies H_2: x_2 = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos dos posibles casos para el hiperplano:

a)  $H_1: x_0 = 0$

Si restringimos todo a  $\mathbb{P}^2 \setminus H_1$ , como  $M_{\mathcal{R}}(g_{\text{af}}) = M_{\overline{\mathcal{R}}}(g)$ , tenemos que:

$$g_{\text{af}}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

que es una translación en  $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus H_1$ .

b)  $H_2: x_2 = 0$

Si  $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, p_2; \bar{p}\}$ , definimos  $\tilde{\mathcal{R}} = \{p_2, p_0, p_1; \bar{p}\}$  y por lo tanto en esta referencia tenemos:

$$M_{\overline{\mathcal{R}}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{ y } H_3: \tilde{x}_0 = 0$$

Y por lo tanto tenemos que  $M_{\tilde{\mathcal{R}}}(g) = M_{\tilde{\mathcal{R}}}(g_{\text{af}})$ , lo que nos dice que en  $\mathbb{P}^2 \setminus H_3$ ,

$$g_{\text{af}}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

que es una homología especial.

2. Sea  $g: \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  una proyectividad t. q.

$$M_{\mathcal{R}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

es una Homografía con un punto fijo  $O = (1 : 0 : 0 : 0)$  y un hiperplano de puntos fijos  $H = p_1 \vee p_2 \vee p_3$  (en concreto es una Homología general). Por lo tanto tenemos dos posibles casos para el hiperplano:

a)  $H: x_0 = 0$

Equivalentemente al ejemplo 1 tenemos que:

$$g_{\text{af}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

que es una Homotecia de razón  $\mu = -1$ .



b)  $H: x_1 = 0$

Si  $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, p_2, p_3; \bar{p}\}$ , definimos  $\tilde{\mathcal{R}} = \{p_1, p_0, p_2, p_3; \bar{p}\}$  y por lo tanto en esta referencia tenemos:

$$M_{\tilde{\mathcal{R}}} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = M_{\tilde{\mathcal{R}}} (g|_{\mathbb{A}^3 = \mathbb{P}^3 \setminus H}) \text{ y } H: \tilde{x}_0 = 0$$

y por lo tanto, en  $\mathbb{P}^3 \setminus H$ ,

$$g_{\text{af}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

que es una simetría especular.



# Tema 4

## Cónicas y cuádricas

### 4.1. Definiciones y propiedades básicas

#### Definición 4.1.1.

1. Una cuádrica  $Q$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$  es la clase de equivalencia de una forma cuadrática  $q: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{k}, q \sim q' \iff \exists \lambda \neq 0$  t. q.  $q' = \lambda q$ . Notación:  $Q = [q]$ .
2. Si  $n = 2$ , las llamamos cónicas.
3.  $p = [u] \in \mathbb{P}^n, p \in Q \iff q(u) = 0$  ( $p$  es un punto de  $Q$ ).
4. También notaremos por  $Q$ , el conjunto de todos los puntos de  $Q$ :

$$Q = \{p = [u] \mid q(u) = 0\}$$

#### Ejemplo 4.1.2.

1. A  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ , sigui  $Q: x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$  una cónica.
  - $p = \left[(1, 0, 1)^t\right] \in Q$  : verifica  $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ .
  - $p' = \left[(0, 1, 1)^t\right] \in Q$ .
  - $p'' = \left[\left(1, 1, \sqrt{2}\right)^t\right] \in Q$ .
2. A  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ , sigui  $Q: x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 \implies$  puntos  $= \emptyset$ .
  - $Q_1: x_0^2 + 2x_1^2 = 0 \implies p = (0 : 0 : 1)$  punto único.
  - $Q_1: 3x_0^2 + 5x_1^2 = 0 \implies p = (0 : 0 : 1)$  punto único.

**Observación 4.1.3.** Sean  $Q, q: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{k}$  ( $\text{car} \mathbb{k} \neq 2$ ) asociada a  $\varphi: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{k}, Q = [q]$ , entonces  $q \leftrightarrow \varphi$  de la siguiente forma:

$$q(u) \rightarrow \varphi(u, v) = \frac{1}{2} [q(u+v) - q(u) - q(v)]$$
$$q(u) = \varphi(u, u) \leftarrow \varphi(u, v)$$

**Definición 4.1.4.**  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$ , sea  $q: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{k}$  asociada a  $\varphi: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{k}$ ,  $Q = [q]$ . Sean  $\mathcal{R}$  una referencia de  $\mathbb{P}^n$ ,  $B$  una base de  $\mathbb{E}$  adaptada a  $\mathcal{R}$ .

$$M_{\mathcal{R}}(Q) := M_B(q) \stackrel{\text{por def.}}{=} M_B(\varphi)$$

$M_{\mathcal{R}}(Q)$  está definida salvo multiplicar por una constante.

**Ejemplo 4.1.5.** En  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ , sean  $\mathcal{R}$  (de  $\mathbb{P}^2$ ),  $B$  (de  $\mathbb{R}^3$ ). Sea  $Q: x_0^2 + x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_0x_1 + 4x_0x_2 + 6x_1x_2 = 0$ .

$$M_{\mathcal{R}}(Q) = M_B(q) = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$p \in Q \iff \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

**Observación 4.1.6.** Si  $A = M_{\mathcal{R}}(Q)$ ,  $p_{\mathcal{R}} = (x_0 : \dots : x_n) = x$ , entonces tenemos que  $p \in Q \iff x^t A x = 0$ .

**Ejemplo 4.1.7.** Sean  $Q = [q]$ ,  $\mathcal{R}$ ,  $A = M_{\mathcal{R}}(Q)$ . Sea  $\mathcal{R}'$  otro sistema de referencia en  $\mathbb{P}^n$  y sea  $S_{\mathcal{R}, \mathcal{R}'}$  la matriz de cambio de sistema de referencia de  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{R}'$ . Entonces  $A' = M_{\mathcal{R}'}(Q) = S^t A S$ .

**Definición 4.1.8.** Sea  $Q = [q] \subseteq \mathbb{P}^n$  una cuádrica y sea  $V = [F] \subseteq \mathbb{P}^n$  una variedad lineal. Definimos su intersección como

$$Q|_V := [q|_F].$$

Si  $q|_F \neq 0$ , entonces  $Q|_V$  es una cuádrica en  $V$ .

**Ejemplo 4.1.9.** En  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ , sea  $q = x_0^2 + x_2^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_0x_1 - 2x_1x_2 = 0$  y sea  $V = [F]: x_0 + x_1 = 0$  (un plano). Tenemos que  $F = [(1, -1, 0, 0)^t, (0, 0, 1, 0)^t, (0, 0, 0, 1)^t]$ .

$$A = M_B(q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies M_B(q|_F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz  $M_B(q|_F)$  es, como se puede observar, la matriz de una cuádrica en  $V$ .

**Proposición 4.1.10.** Sea  $Q = [q] \subseteq \mathbb{P}^n$  una cuádrica y sea  $V = [F] \subseteq \mathbb{P}^n$  una variedad lineal. Se satisface que

- (1)  $q|_F = 0 \iff V \subseteq Q$ .
- (2)  $q|_F \neq 0 \implies Q|_V = Q \cap V$ .

*Demostración.*

- (1)  $q|_F = 0 \iff \forall v \in F, q(v) = 0 \iff \forall p = [v] \in V, p \in Q$ .
- (2) Sea  $p = [v]$ . Entonces,

$$p \in Q|_V \iff \left\{ \begin{array}{l} q(v) = 0 \\ v \in F \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} p \in Q \\ p \in V \end{array} \right\} \iff p \in Q \cap V.$$

□

**Proposición 4.1.11.** Sea  $Q = [q]$  y sea  $f: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  una homografía.

- (1)  $f(Q)$  es una cuádrica.
- (2) Sea  $\mathcal{R}$  una referencia en  $\mathbb{P}^n$  y sean  $A = M_{\mathcal{R}}(Q)$ ,  $P = M_{\mathcal{R}}(f)$ . Entonces,

$$M_{\mathcal{R}}(f(Q)) = (P^{-1})^t A (P^{-1}).$$

*Demostración.*

- (1) Sea  $p \in f(Q)$  y sea  $y = p_{\mathcal{R}} = (y_0, \dots, y_n)^t$ . Por ser  $f$  una homografía, es biyectiva y  $(f^{-1}(p))_{\mathcal{R}} = P^{-1}y$ .

$$\begin{aligned} p \in f(Q) &\iff f^{-1}(p) \in Q \iff (P^{-1}y)^t A (P^{-1}y) = 0 \iff \\ &\iff y^t \left( (P^{-1})^t A P^{-1} \right) y = 0, \end{aligned}$$

y como que  $\left( (P^{-1})^t A P^{-1} \right)$  es una matriz simétrica,  $f(Q)$  es una cuádrica.

- (2)  $y^t \left( (P^{-1})^t A P^{-1} \right) y = 0 \iff p \in f(Q) \iff y^t M_{\mathcal{R}}(f(Q)) y = 0$ , de lo que concluimos que  $M_{\mathcal{R}}(f(Q)) = (P^{-1})^t A (P^{-1})$ .

□

**Definición 4.1.12.** Sea  $Q = [q] \subseteq \mathbb{P}^n$ , sea  $p = [v] \in Q$  y sea  $\varphi$  la forma bilineal simétrica asociada a  $q$ . Entonces,

- (1) Decimos que  $p$  es un *punto singular* de  $Q \iff \varphi(v, \cdot) = 0$ .
- (2) Decimos que  $p$  es un *punto liso* de  $Q$  si no es un *punto singular*.
- (3) Decimos que  $Q$  es *no degenerada*  $\iff Q$  no tiene *puntos singulares*.

**Observación 4.1.13.** Sea  $A = M_{\mathcal{R}}(Q)$ , sea  $p \in Q$  y sea  $p_{\mathcal{R}} = (a_0, \dots, a_n)^t$ .

- (1)  $p \in Q$  es un punto singular  $\iff (x_0, \dots, x_n) A (a_0, \dots, a_n)^t = 0, \forall (x_0, \dots, x_n) \iff (a_0, \dots, a_n) \in \text{Nuc } A$ .
- (2)  $Q$  es no degenerada  $\iff \text{rg}(A) = n + 1 \iff \det A \neq 0$ .

## 4.2. Tangencia y polaridad

### Ejemplo 4.2.1.

1. Cuádricas de  $\mathbb{P}^1$

a)  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$

Sea  $q : ax_0^2 + cx_1^2 + 2bx_0x_1 = 0$  una cuádrlica. Tenemos:

$$Q \iff q \xleftrightarrow{\mathcal{R}} A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Y por lo tanto podemos considerar dos casos:

1)  $a = 0$  Tenemos entonces que:

$$0 = cx_1^2 + 2bx_0x_1 = x_1(cx_1 + 2bx_0)$$

Lo que nos da dos casos:

$$x_1 = 0 \implies p_1 = (1, 0) \text{ y } p_2 \text{ cualquiera}$$

o bien

$$p_2 = (-c, 2b) \text{ y } p_1 \text{ cualquiera}$$

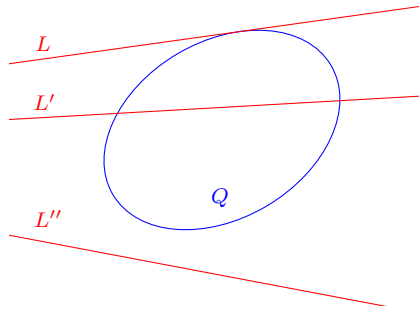
Notemos que si  $a = 0$  y  $b = 0$  tenemos que  $p_1 = p_2$ .

2)  $a \neq 0 \implies (1, 0)$  no es solución  $\implies a\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^2 + 2b\left(\frac{x_0}{x_1}\right) + c = 0$ , y si definimos  $x = \frac{x_0}{x_1}$  tenemos  $ax^2 + 2bx + c = 0 \implies x = \frac{-2b \pm \sqrt{-4 \det A}}{2a}$

Y por lo tanto, si  $\det A = 0$ ,  $q$  es un punto doble en  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ , si  $\det A > 0$  no hay ningún punto que pertenezca a la cuádrlica y si  $\det A < 0$   $q$  son dos puntos distintos.

b)  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . Usando el mismo analisis que antes llegamos a que si  $\det A = 0$ , la cuádrlica es un punto doble y si  $\det A \neq 0$  la cuádrlica son dos puntos distintos.

2.  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$



**Observación 4.2.2.** Sea  $Q \subseteq \mathbb{P}^n$  una cuádrlica y  $L \subseteq \mathbb{P}^n$  una recta y  $F$  un subespacio vectorial de dimensión 2 t.q.  $[F] = L$ . Podemos estudiar las posiciones relativas de la cuádrlica y la recta:

- $Q|_L = [q|_F \equiv 0] \iff L \subseteq Q$  (ver ejemplo 4.2.3)
- $L \not\subseteq Q \implies Q|_L$  es una cuádrica de  $L \implies L \cap Q = \emptyset$ ,  $L \cap Q \equiv 1$  punto doble,  $L \cap Q \equiv 2$  puntos distintos.

**Ejemplo 4.2.3.** Sea  $Q \subseteq \mathbb{P}^3$  t. q.  $Q : x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ , sean  $p_1 = (0 : 1 : 1 : 0)$  y  $p_2 = (1 : 0 : 0 : 1)$  puntos del proyectivo y  $L = p_1 \vee p_2$  una recta. Entonces tenemos que:

$$Q|_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \emptyset$$

**Definición 4.2.4.** Sean  $L$  una recta y  $Q$  una cuádrica:

- (1) Si  $L \subseteq Q$  diremos que  $L$  es una generatriz de  $Q$ .
- (2) Si  $L \cap Q \equiv 2$  puntos diremos que  $L$  es secante a  $Q$ .
- (3) Si  $L \cap Q \equiv 1$  punto (doble) o  $L \subseteq Q$  diremos que  $L$  es tangente a  $Q$ .

**Proposición 4.2.5.** Sean  $\phi$  una forma bilineal y  $q$  y  $Q$  una cuádrica t. q.  $[\phi] = [q] = Q \subseteq \mathbb{P}^2$ . Entonces tenemos los siguientes resultados para cuádricas:

- (1) Sea  $L = p_1 \vee p_2$  t. q.  $p_1 = [v_1]$  y  $p_2 = [v_2]$ . Entonces:
  - $L$  es generatriz de  $Q \iff \phi(v_1, v_1) = \phi(v_2, v_2) = \phi(v_1, v_2) = 0$ .
  - $L$  es tangente a  $Q \iff \phi(v_1, v_1)\phi(v_2, v_2) - \phi(v_1, v_2)^2 = 0$ .
- (2) Si  $p \in Q$  y  $p$  singular, entonces toda recta  $L$  t. q.  $p \in L$  es tangente a  $Q$ .
- (3) si  $p \in Q$  y  $p$  liso, entonces  $\{p' \subseteq \mathbb{P}^n | L = p \vee p' \text{ es tangente a } Q\}$  es el hiperplano  $T_p(Q)$  (el hiperplano tangente a  $Q$  en  $p$ ) y tiene de ecuación

$$(a_0, \dots, a_n) A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Donde  $p_{\mathcal{R}} = (a_0 : \dots : a_n)$ ,  $p'_{\mathcal{R}} = (x_0 : \dots : x_n)$  y  $A = M_{\mathcal{R}}(Q)$ .

*Demostración.*

- (1) Sea  $F$  un subespacio vectorial t. q.  $L = [F] = [v_1, v_2]$ . Entonces

$$M_{\mathcal{R}}(Q|_L) = M_{\mathcal{R}}(q|_F) = \begin{pmatrix} \phi(v_1, v_1) & \phi(v_1, v_2) \\ \phi(v_2, v_1) & \phi(v_2, v_2) \end{pmatrix} = B$$

Y por lo tanto:

- $L$  generatriz  $\overset{\text{por definición}}{\iff} q|_F \equiv 0 \iff \phi(v_1, v_1) = \phi(v_1, v_2) = \phi(v_2, v_2) = 0$ .

$$\blacksquare L \text{ es tangente a } Q \iff \left\{ \begin{array}{l} L \text{ generatriz} \iff B = 0 \\ L \cap Q \equiv 1 \text{ punto doble} \iff \det B = 0 \end{array} \right\} \iff \phi(v_1, v_1) \phi(v_2, v_2) - \phi(v_1, v_2)^2 = 0$$

- (2) Recordemos que  $p = [v]$  singular  $\iff \phi(v, v) = 0$ . Ahora sea  $L = p \vee p'$ . Entonces tenemos:

$$B = M_{\mathcal{R}}(Q|_F) = \begin{pmatrix} \phi(v_1, v_1) & \phi(v_1, v_2) \\ \phi(v_2, v_1) & \phi(v_2, v_2) \end{pmatrix} \implies \det B = 0 \xrightarrow{(1)} L \text{ es tangente a } Q$$

- (3) Recordemos que  $p = [v]$  es punto liso de  $q$   $\iff \phi(v, v) = q(v) = 0$ . Sea  $L = p \vee p' = [v] \vee [v']$  y sea :

$$B = M_{\mathcal{R}}(q|_F) = \begin{pmatrix} \phi(v, v) & \phi(v, v') \\ \phi(v', v) & \phi(v', v') \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos que  $L$  es tangente a  $Q$   $\iff \det B = 0 \iff \phi(v, v) \phi(v', v') - \phi(v, v')^2 \iff \phi(v, v') = 0$ . Pero además, como

$$\phi(v, v') = 0 \implies (a_0, \dots, a_n) A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Y por lo tanto, como  $(a_0, \dots, a_n) A \neq 0$  porque  $A$  es simétrica y  $A \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0$  (ya

que  $p$  no es singular), el conjunto de puntos  $p'$  t.q.  $L$  es tangente a  $Q$  cumplen la ecuación anterior y son un hiperplano.

□

### Ejemplo 4.2.6.

1. Sea  $Q \subseteq \mathbb{P}^3$  una cuádrica t.q.  $Q : x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ ,  $A$  la matriz asociada y  $p = (1 : 0 : 0 : 1)$  un punto de  $Q$ . Como  $p \notin \text{Nuc}(A)$ ,  $p$  es un punto liso y por lo tanto, aplicando el apartado 3 de la proposición anterior tenemos que  $T_p(Q)$  tiene como ecuación:

$$(1, 0, 0, 1) A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \implies (1, 0, 0, -1) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \implies x_0 - x_3 = 0$$

2. Sea  $Q : -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$  y  $p = (1 : 0 : 0 : 1) \in Q$ , igual que en el ejemplo anterior tenemos que  $p$  es liso, y siguiendo el procedimiento del ejemplo anterior llegamos a que  $T_p(Q)$  tiene como ecuación  $-x_0 + x_3 = 0$ .



### 4.2.1. Polaridad

**Definición 4.2.7.** Sea  $Q = [q] = [\phi]$  una cuádrica y sea  $A = M_{\mathcal{R}}(Q)$  su matriz. Entonces diremos que  $Q$  es no degenerada  $\iff \det A \neq 0$ . Es decir, las cuádricas no degeneradas son aquellas que no tienen puntos singulares.

**Definición 4.2.8.** Sea  $Q$  una cuádrica no degenerada t. q.  $Q = [q] = [\phi]$  y  $A = M_{\mathcal{R}}(Q)$ . Sean  $p_1 = [v_1]$  y  $p_2 = [v_2]$  dos puntos  $\in \mathbb{P}^n$ . Entonces diremos que  $p_1$  y  $p_2$  son polares respecto a  $Q \iff \phi(v_1, v_2) = 0$  y lo notaremos con  $p_1 \overset{Q}{\sim} p_2$ .

**Proposición 4.2.9.** Sea  $Q \subseteq \mathbb{P}^n$  una cuádrica y  $p_1, p_2 \in \mathbb{P}^n$  dos puntos. Entonces:

- (1)  $p_1 \overset{Q}{\sim} p_1 \iff p \in Q$ .
- (2) Si  $p_1, p_2 \in Q$ , entonces  $p_1 \overset{Q}{\sim} p_2 \iff L = p_1 \vee p_2 \subseteq Q$ .
- (3) Si  $p_1 \in Q, p_2 \notin Q$ , entonces  $p_1 \overset{Q}{\sim} p_2 \iff L = p_1 \vee p_2 \subseteq T_{p_1}(Q)$ .
- (4) Si  $p_1, p_2 \notin Q, L = p_1 \vee p_2$  y  $L \cap Q \neq \emptyset$ , entonces  $p_1 \overset{Q}{\sim} p_2 \iff L$  es secante a  $Q$  y  $(p_1, p_2, p_3, p_4) = -1$ , donde  $p_3, p_4$  son los puntos de  $L \cap Q$ .
- (5) Fijado  $p = [v]$ , entonces  $\left\{ p' \in \mathbb{P}^n \mid p' \overset{Q}{\sim} p \right\} = H_p(Q)$  es un hiperplano (hiperplano polar a  $p$ ) de ecuación  $vA \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ .

*Demostración.* Sea  $B$  una matriz t. q.  $B = M_{\mathcal{R}}(Q \cap L) = \begin{pmatrix} \phi(v_1, v_1) & \phi(v_1, v_2) \\ \phi(v_2, v_1) & \phi(v_2, v_2) \end{pmatrix}$ . Entonces:

- (1) Por definición,  $p_1 \overset{Q}{\sim} p_1 \iff \phi(v, v) = 0 \iff q(v) = 0 \iff p \in Q$ .
- (2) Por definición,  $p_1 \overset{Q}{\sim} p_2 \iff \phi(v_1, v_2) = \phi(v_2, v_1) = 0$ , y como  $p_1, p_2 \in Q \implies \phi(v_1, v_1) = \phi(v_2, v_2) = 0$ , entonces  $\phi(v_1, v_2) = \phi(v_2, v_1) = 0 \iff B = \emptyset \iff L \subseteq Q$ .
- (3) Por definición,  $p_1 \overset{Q}{\sim} p_2 \iff \phi(v_1, v_2) = \phi(v_2, v_1) = 0$ , y como  $p_1 \in Q \implies \phi(v_1, v_1) = 0$ , entonces  $\phi(v_1, v_2) = \phi(v_2, v_1) = 0 \iff B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$  con  $c \neq 0$  porque  $p_2 \notin Q$  y por lo tanto  $\det B \neq 0$  lo que nos dice que  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \iff L \subseteq T_{p_1}(Q)$ .
- (4) Por definición, equivalentemente a el prodecimiento de los apartados anteriores llegamos a que  $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$  con  $a, b \neq 0$ . Cojamos una referencia  $\mathcal{R}$  t. q.  $p_1 = (1 : 0)$  y  $p_2(0 : 1)$  y consideremos la ecuación dada por  $L \cap Q$ :

$$(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \implies \alpha^2 a + \beta^2 b = 0$$

que como  $p_1 \notin Q \implies \beta \neq 0$  y por lo tanto si  $z = \frac{\alpha}{\beta}$  tenemos:

$$a \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 + b = 0 \implies az^2 + b = 0 \implies z = \pm \sqrt{\frac{-b}{a}}$$

que tiene dos soluciones porque tenemos como hipótesis que  $L \cap Q \neq \emptyset$  y por lo tanto  $L$  es secante a  $Q$ . Además tenemos que  $p_3 = \left( \sqrt{\frac{-b}{a}} : 1 \right)$  y  $p_4 = \left( -\sqrt{\frac{-b}{a}} : 1 \right)$ . Finalmente es fácil comprobar que  $(p_1, p_2, p_3, p_4) = -1$ .

(5) Por definición,  $p \stackrel{Q}{\sim} p' \iff \phi(v, v') = 0 \iff vA \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$  y como  $vA \neq 0$ ,

$H_p(Q)$  es un hiperplano.

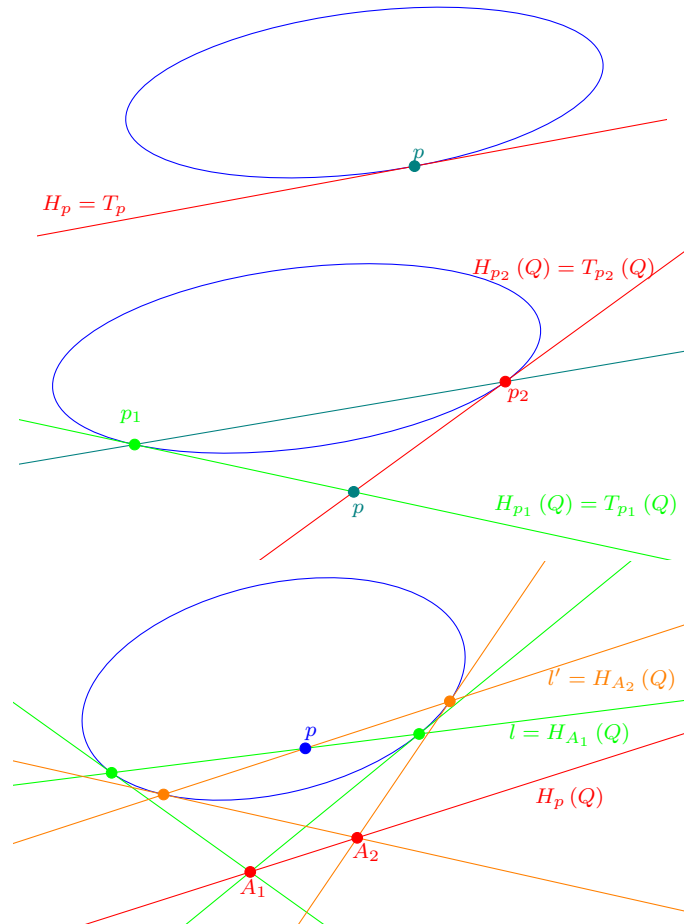
□

#### Observación 4.2.10.

(1) Si  $p \in Q$  entonces  $H_p(Q) = T_p(Q)$ .

(2) Como  $p_1 \stackrel{Q}{\sim} p_2 \iff p_2 \stackrel{Q}{\sim} p_1$ , tenemos que  $p_1 \in H_{p_2}(Q) \iff p_2 \in H_{p_1}(Q)$ .

**Ejemplo 4.2.11.** En  $\mathbb{P}^2$ :



### 4.2.2. Cuádrica dual

**Definición 4.2.12.** Sea  $Q \subseteq \mathbb{P}^n$  una cuádrica,  $A = M_{\mathcal{R}}(Q)$  su matriz asociada y sea

$$F_Q(= F) : \mathbb{P}^n \rightarrow (\mathbb{P}^n)^*$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

una proyectividad t. q. si  $p \in \mathbb{P}^n$ ,  $F(p) = (H_p(Q))^*$ . Entonces definimos  $Q^* := F(Q)$  la cuádrica dual de  $Q$ .

**Proposición 4.2.13.** Sea  $Q \in \mathbb{P}^n$  una cuádrica,  $A = M_{\mathcal{R}}(Q)$  su matriz asociada y  $Q^* = F(Q)$  su cuádrica dual. Entonces  $M_{\mathcal{R}^*}(Q^*) = A^{-1}$

*Demostración.* Sea  $\tilde{p}_{\mathcal{R}^*} = (b_0 : \dots : b_n) \in (\mathbb{P}^n)^*$  t. q.  $\tilde{p} \in Q^* = F(Q) \xLeftrightarrow{F \text{ biyectiva}} A^{-1} \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$

$F^{-1}(\tilde{p}) \in Q$ . Entonces por definición tenemos que

$$\begin{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} = 0 \iff (b_0, \dots, b_n) (A^{-1})^T \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff (b_0, \dots, b_n) A^{-1} \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = 0$$

□

## 4.3. Cuádricas proyectivas y afines

$$\mathbb{A}^n \hookleftrightarrow \overline{\mathbb{A}^n} = \mathbb{P}^n$$

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)$$

$$\left( \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0}, \dots, \frac{\bar{x}_n}{\bar{x}_0} \right) \hookleftarrow (\bar{x}_0 : \dots : \bar{x}_n), \bar{x}_0 \neq 0.$$

**Observación 4.3.1.**  $Q$  proyectiva  $\implies Q_0$  afín:  $M_{\overline{\mathcal{R}}}(Q) = A$ .

$$Q_0 = Q \cap \mathbb{A}^n = \{p \in \mathbb{A}^n \mid p \in Q\} \rightarrow \text{Ecuaciones: } (1, x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

**Ejemplo 4.3.2.**  $\mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$

$$Q_0 = Q \cap \mathbb{A}^2 \quad , \quad \begin{cases} Q: x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + 4x_0x_1 + 6x_0x_2 + 8x_1x_2 = 0 \\ x_0 = 1 \end{cases} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1 + x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + 4x_0x_1 + 6x_0x_2 + 8x_1x_2 = 0 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

**Definición 4.3.3.** Dada una cuádrica afín  $Q$  que cumple

$$A = M_{\mathcal{R}}(Q) = \left( \begin{array}{c|ccc} c & b_1 & \dots & b_n \\ \hline b_1 & & & \\ \vdots & & & \\ b_n & & & A_{\infty} \end{array} \right)$$

Llamamos completación proyectiva de  $Q$  a la cuádrica proyectiva  $\overline{Q}$  que cumple  $A = M_{\mathcal{R}}(\overline{Q})$ .

**Observación 4.3.4.** Dada una cuádrica afín  $Q$ , su completación proyectiva  $\overline{Q}$  es tal que  $\overline{Q} \cap \mathbb{A}^n = Q$ .

**Ejemplo 4.3.5.**  $Q \subseteq \mathbb{A}^2$

$$Q: 1 + 2x + 4y + x^2 + -5y^2 + 4xy = 0$$

$$\left( \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \end{array} \right)$$

$$\overline{Q}: M_{\mathcal{R}}(Q) = A, \quad x_0^2 + x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_0x_1 + 4x_0x_2 + 4x_1x_2 = 0.$$

**Observación 4.3.6.**  $Q \subseteq \mathbb{A}^n$ ,

$$A = M_{\mathcal{R}}(Q) = \left( \begin{array}{c|ccc} c & b_1 & \dots & b_n \\ \hline b_1 & & & \\ \vdots & & & \\ b_n & & & A_{\infty} \end{array} \right) \xrightarrow{\overline{x}_0=0} \overline{Q} \cap \overline{\mathbb{A}}_{\infty}^n: A_{\infty}$$

**Ejemplo 4.3.7.**  $\mathbb{P}^2, Q: x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ .

1. Sea  $L_1: x_0 = 0$ ,  $Q \cap (\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus L_1) = C_1$ , tenemos que

$$x_0 = 1 \implies 1 + x_1^2 - x_2^2 = 0 \implies C_1 \text{ hipérbola,}$$

$$Q \cap L_1: x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0, p_1 = (0, 1, 1)^t, p_2 = (0, -1, 1)^t.$$

2. Sea  $L_2: x_2 = 0$ ,  $Q \cap (\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus L_2) = C_2$ , tenemos que

$$x_0 = 1 \implies x_0^2 + x_1^2 - 1 = 0 \implies C_2 \text{ elipse,}$$

$$\emptyset = Q \cap L_1: x_0^2 - x_1^2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0, p_1 = (0, 1, 1)^t, p_2 = (0, -1, 1)^t.$$

$$3. p_1 = (0, 1, 1), H_{p_1}Q = T_{p_1}Q: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x_1 - x_2 = 0.$$

Sea  $L_3 = T_{p_1}Q: x_1 - x_2 = 0$ ,  $Q \cap (\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus L_3) = C_3$ ,

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x}_0 = x_0 \\ \bar{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \bar{x}_2 = x_1 + x_2 \end{array} \right\} \implies \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{S^{-1}} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$Q \text{ en } \bar{\mathcal{R}}: 0 = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = x_0^2 + (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \implies 0 = \bar{x}_0^2 + \bar{x}_1\bar{x}_2 \xrightarrow{\bar{x}_1=1} 0 = \bar{x}_0^2 + \bar{x}_2$$

$$L_3 \text{ en } \bar{\mathcal{R}}: \bar{x}_1 = 0$$

**Definición 4.3.8.** Sea  $Q$  una cuádrica afín y  $\bar{Q}$  su completación proyectiva ( $\bar{\mathbb{A}}^n = \mathbb{P}^n$ ).

Sea  $p = [v] \in \mathbb{A}^n$ ,  $p$  es un centro de  $Q \iff \varphi(v, \omega) = 0, \forall [\omega] \in \bar{\mathbb{A}}^n_\infty$ . Si  $Q$  no es degenerada,

$$p \text{ es un centro de } Q \iff H_p(\bar{Q}) = \bar{\mathbb{A}}^n_\infty$$

**Observación 4.3.9.** Cálculo del centro para  $Q$  no degenerada ( $\det A \neq 0$ ).

$$\mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{P}^n = \bar{\mathbb{A}}^n$$

$$Q \mapsto \bar{Q}$$

$$A = M_{\mathcal{R}}(Q) = M_{\bar{\mathcal{R}}}(\bar{Q}) = \left( \begin{array}{c|ccc} c & b_1 & \dots & b_n \\ \hline b_1 & & & \\ \vdots & & & \\ b_n & & & A_\infty \end{array} \right)$$

Supongamos que queremos encontrar un centro de  $Q$ ,  $p = (1, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ . Sabemos que  $\bar{\mathbb{A}}^n_\infty = H_p(\bar{Q})$ . Por lo tanto, tiene que cumplir

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \quad \forall \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \bar{\mathbb{A}}^n_\infty.$$

Esto se satisface si y solo si, para  $\alpha \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \iff \\ & \iff \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \left( \begin{array}{c|ccc} c & b_1 & \dots & b_n \\ \hline b_1 & & & \\ \vdots & & & \\ b_n & & & A_\infty \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Que, finalmente, podemos desarrollar para obtener la siguiente condición para calcular los centros de una cuádrica:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + A_\infty \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Observación 4.3.10.**  $Q$  no tiene centro  $\iff \overline{\mathbb{A}_\infty^n}$  es tangente a  $\overline{Q}$

**Observación 4.3.11.**  $p \in \mathbb{A}^n$  es un centro de  $Q \iff p$  es un centro de simetría (es decir,  $\forall L \ni p$  (recta), si  $L \cap Q \neq \emptyset$ , entonces,  $L \cap Q = \{p_1, p_2\}$  y  $p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ ).

*Demostración.* Sea  $p'$  el punto de corte entre la recta  $L$  completada y el hiperplano del infinito.

- $p \stackrel{\overline{Q}}{\sim} p'$
- $p \notin \overline{Q}$ , de lo contrario  $\overline{\mathbb{A}_\infty^n} = H_p(\overline{Q}) = T_p(\overline{Q})$ , cosa que contradice el hecho de que  $p$  es del afín.
- $p' \notin \overline{Q}$ , de lo contrario, como  $p \notin \overline{Q}$  pero  $p \stackrel{\overline{Q}}{\sim} p'$ , 4.2.9 nos dice que  $L$  tiene un único punto de corte con  $\overline{Q}$ , es decir,  $L \cap Q = \emptyset$ .

Por tanto, como hemos visto en 4.2.9

$$\begin{cases} L \cap \overline{Q} = \{p_1, p_2\} \\ (p_1, p_2, p, p') = -1 = (p_1, p_2, p) \end{cases} \iff p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2).$$

□

**Definición 4.3.12.** Sea  $Q$  una cuádrica con centro  $p \in \mathbb{A}^n$ . Una asíntota de  $Q$  es una recta  $L \ni p$  t.q.  $\overline{L}$  es tangente a  $\overline{Q}$  en un punto de  $\overline{\mathbb{A}_\infty^n}$ .

**Ejemplo 4.3.13.**  $\mathbb{A}^2 \rightarrow Q: 2xy + 4x + 4y + 2 = 0$ ,  $A = \left( \begin{array}{c|cc} 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$ ,  $\det A \neq 0$  (no degenerada).

$$\mathbb{P}^2 \rightarrow Q: 2x_1x_2 + 4x_1x_0 + 4x_2x_0 + 2x_0^2 = 0, A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{Q} \cap r_\infty \\ r_\infty: x_0 = 0 \end{array} \right\} \implies x_1x_2 = 0 \implies \begin{cases} p_1 = (0, 0, 1) \\ p_2 = (0, 1, 0) \end{cases}$$

Asíntotas:

$$\text{▪ } \bar{r}_1 = T_{p_1}(\overline{Q})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \implies 2x_0 + x_1 = 0 \xrightarrow[x_0=1]{\text{afin}} r_1: 2 + x = 0$$

$$\blacksquare \bar{r}_2 = T_{p_2}(\bar{Q})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \implies 2x_0 + x_2 = 0 \xrightarrow[x_0=1]{\text{afin}} r_2: 2 + y = 0$$

#### 4.4. Clasificación proyectiva de cuádricas

**Definición 4.4.1.**  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$ . Sean  $Q_1 = [q_1], Q_2 = [q_2], q_1, q_2: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{k}$  (formas cuadráticas).

$$Q_1 \sim Q_2 \iff \exists \lambda \neq 0 \text{ t.q. } q_1 \sim \lambda q_2 \text{ (como formas cuadráticas)}$$

**Observación 4.4.2.** Son equivalentes:

- $Q_1 \sim Q_2$
- $\exists \lambda \neq 0, \exists S (\det S \neq 0) \text{ t.q. } A_1 = \lambda S^t A_2 S$
- $\exists f: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n \text{ homografía t.q. } f(Q_1) = Q_2$
- $\exists \tilde{\mathcal{R}} \text{ t.q. } M_{\tilde{\mathcal{R}}}(Q_2) = M_{\mathcal{R}}(Q_1)$

**Observación 4.4.3.** Con el método convergencia-pivote:

$$\left( A \mid \text{Id} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{cccc|c} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_r & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{array} \middle| S^t \right)$$

- Si  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ :  $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 1 \rightarrow |\{\lambda_i \neq 0\}| = r = \text{rg}(A)$ .
- Si  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ :  $\lambda_i = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \rightarrow |\{\lambda_i \neq 0\}| = i_+ + i_- = \text{rg}(A)$

**Proposición 4.4.4.**  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n, Q_1, Q_2$ ,

$$Q_1 \sim Q_2 \iff \text{rg}(Q_1) = \text{rg}(Q_2), \text{ donde } \text{rg}(Q) = \text{rg}(M_{\mathcal{R}}|Q).$$

*Demostración.*

$$q_1 \sim q_2 \iff \text{rg}(q_1) = \text{rg}(q_2)$$

□

**Observación 4.4.5.** Cuando trabajamos sobre  $\mathbb{R}$ , podemos tener dos formas bilineales que no son equivalentes y cuyas cuádricas sí lo son. Por ejemplo, las formas

$$q_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, q_2 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

no cumplen  $q_1 \sim q_2$  (en particular, porque  $i_{+1} \neq i_{+2}$ ) pero sin embargo  $Q_1 = [q_1], Q_2 = [q_2]$  sí cumplen  $Q_1 \sim Q_2$ , pues  $\exists \lambda = -1$  t.q.  $q_1 \sim q_2$ .

Lo importante para clasificar  $Q$  es la pareja  $\{i_+, i_-\}$ .

**Definición 4.4.6.** Definimos, para una cuádrica  $Q$ , los valores  $r = i_+ + i_-$  y  $m = \min\{i_+, i_-\}$ .

**Proposición 4.4.7.** Sean  $Q_1, Q_2 \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  cuádricas.

$$Q_1 \sim Q_2 \iff r_1 = r_2, m_1 = m_2$$

Hacemos notar que  $r = \text{rg}(Q)$ .

**Ejemplo 4.4.8.**

i) Clasificación en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ .

$r$	Ecuación reducida	Aspecto o nombre
3	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	Cónica no degenerada
2	$x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$	Par de rectas
1	$x_0^2 = 0$	Recta doble

ii) Clasificación en  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ .

$r$	$m$	Ecuación reducida	Aspecto o nombre
3	0	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	Cónica no degenerada (imaginaria)
3	1	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	Cónica no degenerada (real)
2	0	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	Par de rectas que se cortan en un punto real
2	1	$x_0^2 - x_1^2 = 0$	Par de rectas reales
1	0	$x_0^2 = 0$	Recta doble

iii) Clasificación en  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ .

$r$	$m$	Ecuación reducida	Aspecto o nombre
4	0	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	Cuádrica no degenerada imaginaria
4	1	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	Cuádrica no degenerada real, no reglada
4	2	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$	Cuádrica no degenerada real, reglada
3	0	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	Cono de base cónica no degenerada imaginaria
3	1	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	Cono de base cónica no degenerada real
2	0	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	Dos planos imaginarios con intersección real
2	1	$x_0^2 - x_1^2 = 0$	Dos planos reales
1	0	$x_0^2 = 0$	Plano doble



# Índice alfabético

- afinidad inducida por una proyectividad, [67](#)
- asíntota de una cuádrica, [82](#)
- automorfismo, [55](#)
- base dual, [7](#)
  - adaptada, [29](#)
- centro de una cuádrica, [81](#)
- colineación, [51](#)
- completación proyectiva
  - de un espacio afín, [43](#)
  - de una cuádrica, [80](#)
- coordenadas absolutas, [38](#)
- cuádrica, [71](#)
  - dual, [79](#)
  - no degenerada, [77](#)
- cuaterna armónica, [41](#)
- endomorfismo
  - semilineal, [55](#)
- espacio
  - dual, [7](#)
  - proyectivo, [22](#)
    - dual, [33](#)
- forma
  - bilineal simétrica, [1](#)
    - afínmente equivalente, [6](#)
    - definida negativa, [2](#)
    - definida positiva, [2](#)
    - no definida, [2](#)
  - cuadrática, [1](#)
    - equivalente, [83](#)
- generatriz de una cuádrica, [75](#)
- haz de hiperplanos, [34](#)
- hiperplano
  - en posición general, [34](#)
  - linealmente independiente, [34](#)
- homografía
  - dual, [59](#)
  - equivalente, [58](#)
- homología, [64](#)
  - especial, [64](#)
  - general, [64](#)
- intersección de una cuádrica y una variedad lineal, [72](#)
- join, [26](#)
- matriz
  - de una forma bilineal simétrica, [2](#)
  - de una proyectividad, [50](#)
- perspectividad, [54](#)
- producto
  - exterior, [20](#)
  - exterior de orden 1, [17](#)
  - tensorial, [9](#)
- proyección, [40](#)
- proyectividad, [49](#)
  - asociada a una afinidad, [66](#)
- proyectivizado de un sistema de referencia, [44](#)
- punto
  - de un espacio proyectivo, [22](#)
  - del infinito de un espacio afín, [43](#)
  - en posición general, [28](#)
  - fijo de una homografía, [59](#)
  - linealmente independiente, [28](#)
  - liso, [73](#)
  - polar respecto a una cuádrica, [77](#)
  - singular, [73](#)
- razón
  - doble, [38](#)
  - simple, [47](#)
- referencia dual de una base, [35](#)

- secante a una cuádrica, 75
- sección, 40
- simetrizado de un tensor, 15
- sistema de referencia proyectivo, 29
- tangente a una cuádrica, 75
- tensor, 8
  - antisimétrico, 13
  - de tipo  $(p, q)$ , 8
- simétrico, 13
- variedad lineal
  - de puntos fijos de una homografía, 59
  - dual, 33
  - fija de una homografía, 59
  - proyectiva, 25
    - completada, 44
  - suplementaria, 27