TOPOLOGÍA
PROBLEMAS

ApuntsFME

Barcelona, Marzo 2018

Autores principales: Òscar Benedito, Jordi Castellví, Ernesto Lanchares, Miquel Ortega, Èric Sierra.

Última modificación: 22 de octubre de 2018.

Contenidos

Tema 1

Espacios métricos y aplicaciones continuas

Ejercicio 1.1. Hay que comprobar que

i) $d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in X$ y que $d(x, y) = 0 \iff x = y$, lo cual es trivial por la definición de d.

ii) $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in X$, que de nuevo, esinmediato por la definición.

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \ \forall x, y, z \in X$, suponemos que x, y, z son distintos dos a dos. Entonces, $d(x, y) = 1 \leq d(x, z) + d(z, y) = 1 + 1 = 2$.

Ejercicio 1.2. De nuevo, hemos de comprobar que

i) $d_{\text{cent}}(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in X$. Esto es fácil de ver, ya que $d(c, x), d(c, y) \geq 0$, por lo tanto $d_{\text{cent}}(x, y) = d(c, x) + d(c, y) \geq 0$.

ii) $d_{\text{cent}}(x, y) = 0 \iff x = y$. Si $x = y \implies d_{\text{cent}}(x, y) = 0$ por definición. Y si $d_{\text{cent}}(x, y) = 0$, hay dos posiblidades, o $x = y$ (y ya hemos acabado) o $d(c, x) = d(c, y) = 0$. Pero si ocurre lo segundo, entonces $x = c = y$.

iii) $d_{\text{cent}}(x, y) = d_{\text{cent}}(y, x) \ \forall x, y \in X$. Esto es obvio ya que la suma es conmutativa y d también.

iv) $d_{\text{cent}}(x, y) \leq d_{\text{cent}}(x, z) + d_{\text{cent}}(z, y)$. Vamos a ver que se cumple:

$$d_{\text{cent}}(x, y) = d(c, x) + d(c, y) \leq d(c, x) + d(c, z) + d(c, z) + d(c, y) = d_{\text{cent}}(x, z) + d_{\text{cent}}(z, y)$$

Ahora, dibujaremos las bolas. En azul, está $B\left((0, 0), 1\right)$ y en rojo $B\left(\left(\frac{42}{100}, \sqrt{\frac{2461}{10}}\right), 1\right)$:

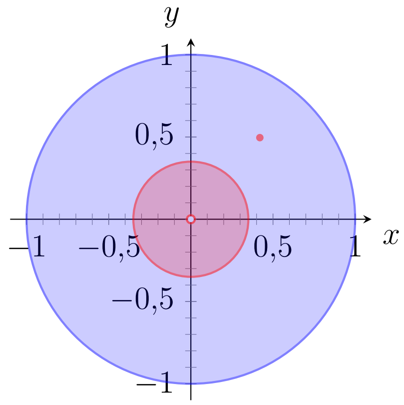


Figura 1.1: $B_1\,(0,0)$ y $B_1\left(\frac{42}{100}, \sqrt{\frac{2461}{10}}\right)$

Ejercicio 1.3. Tenemos que comprobar que

i) $d(a,b) \geq 0 \ \forall a,b \in A^n$ y que $d(a,b) = 0 \iff a = b$, lo cual es trivial por la definición de d.

ii) $d(a,b) = d(b,a) \ \forall a,b \in A^n$. Trivial por la definición.

iii) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$. Sea $i \in R = \left\{j | a_j \neq b_j\right\}$, entonces, se cumple al menos una de las dos siguientes afirmaciones

$$\begin{cases} i \in P = \left\{j | a_j \neq c_j\right\} \\ i \in Q = \left\{j | c_j \neq b_j\right\} \end{cases}$$

Por lo tanto, $R \subseteq P \cup Q \implies d(a,b) = |R| \leq |P \cup Q| \leq |P| + |Q| = d(a,c) + d(a,b)$.

Ejercicio 1.4. Tenemos que comprobar que

i) $d(a,b) \geq 0 \ \forall a,b \in \mathcal{S}(A)$, y que $d(a,b) = 0 \iff a = b$, lo cual es trivial por la definición.

ii) $d(a,b) = d(b,a) \ \forall a,b \in \mathcal{S}(A)$, también trivial por la definición.

iii) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $d(a,c) \geq d(b,c)$. Sea s tal que $e^{-s} = d(a,c)$ y sea S tal que $e^{-S} = d(b,c)$, entonces, si $S = s$, entonces, $d(b,c) = d(a,c) \implies d(a,b) \leq d(a,c)$. Si $S > s$, entonces, $d(a,b) \leq d(a,c)$.

Ejercicio 1.5.

(a) Sí que define una métrica, ya que

i) $d(x,y) \geq 0$ y $d(x,y) = 0 \iff x = y$ son triviales.

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ es obvio.

iii) $d(x,y) = |e^x - e^y| = |e^x - e^z + e^z - e^y| \leq |e^x - e^z| + |e^z - e^y| = d(x,z) + d(y,z)$.

(b) No es una métrica. Los puntos $x = \frac{\pi}{2}$ y $y = \frac{3\pi}{2}$ son distintos, pero $d(x, y) = 0$.

(c) Sí que es una métrica:

i) $d(x, y) \geq 0$ es trivial y $d(x, y) = 0 \iff \cos(x) = \cos(y) \iff x = y$.

ii) $d(x, y) = d(y, x)$ es obvio.

iii) Finalmente,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |\cos(x) - \cos(y)| \\ &= |\cos(x) - \cos(z) + \cos(z) - \cos(y)| \\ &\leq |\cos(x) - \cos(z)| + |\cos(z) - \cos(y)| = d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

(d) Sí define una métrica:

i) $d(x, y) \geq 0$ es trivial y $d(x, y) = 0 \iff \arctan(x) = \arctan(y) \iff x = y$.

ii) $d(x, y) = d(y, x)$ es obvio.

iii) Finalmente,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |\arctan(x) - \arctan(y)| \\ &= |\arctan(x) - \arctan(z) + \arctan(z) - \arctan(y)| \\ &\leq |\arctan(x) - \arctan(z)| + |\arctan(z) - \arctan(y)| \\ &= d(x, z) + d(y, z). \end{aligned}$$

En general, basta con que f sea inyectiva para que $d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$ sea una distancia. Vemos que si f es inyectiva

i) $d(x, y) \geq 0$ por el valor absoluto. $d(x, y) = 0 \iff f(x) - f(y) = 0 \iff f(x) = f(y) \overset{f \text{ inyectiva}}{\iff} x = y$.

ii) $d(x, y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = d(y, x)$.

iii) $d(x, y) = |f(x) - f(y)| = |f(x) - f(z) + f(z) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| = d(x, z) + d(z, y)$.

Ejercicio 1.6.

(a) Sí que es una métrica, de hecho es la métrica habitual en $\mathbb{R}^n$.

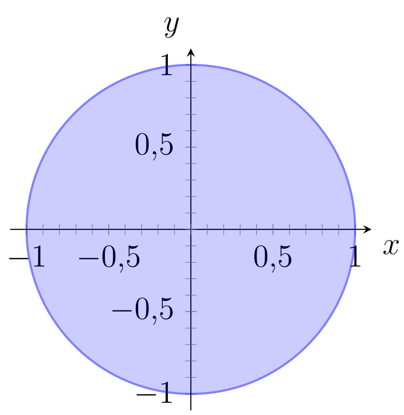


Figura 1.2: $B_1(0, 0)$

(b) Sí que es una distancia

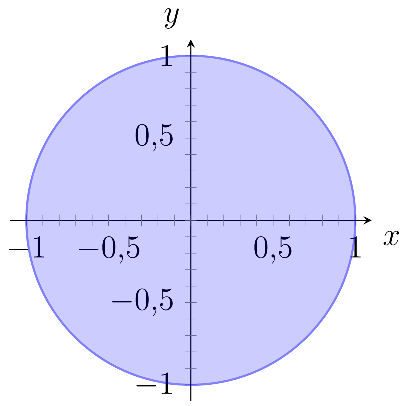


Figura 1.3: $B_1(0,0)$

(c) Sí que es una métrica

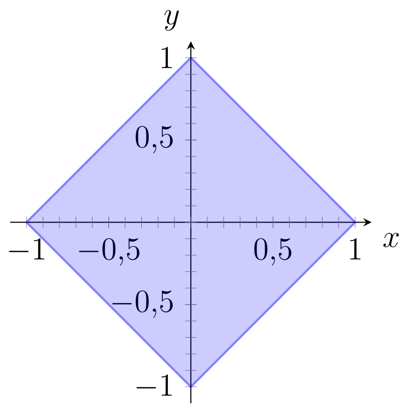


Figura 1.4: $B_1(0,0)$

(d) No es una métrica, por ejemplo, $d((1,0),(1,1)) = 0$, pero $(1,0) \neq (1,1)$.

(e) Sí que es una métrica

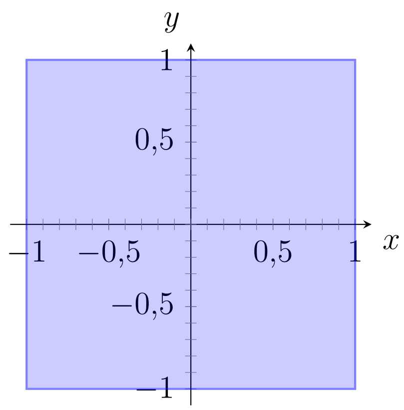


Figura 1.5: $B_1(0,0)$

(f) No es una métrica, por ejemplo, $d\left((1,0),(1,1)\right) = 0$, pero $(1,0) \neq (1,1)$.

(g) En general no es una métrica, si tomamos la distancia euclidiana, $d_{\text{eq}}\left((1,0),(0{,}5,0)\right) = 0{,}5 \implies d\left((1,0),(0{,}5,0)\right) = \lfloor 0{,}5 \rfloor = 0$.

(h) En general no es una métrica, por ejemplo si A tiene un vep v de vap $\lambda < 0$, entonces $d(v,0) = \sqrt{(v-0)A(v-0)^t}$ no existe, ya que el contenido de dentro de la raiz es negativo.

(i) Vemos que cumple que

i) $d(x,y) \geq 0$, sí, ya que A es definida positiva y por lo tanto, $(x-y)A(x-y)^t \geq 0 \implies \sqrt{(x-y)A(x-y)^t} \geq 0$.

ii) $d(x,y) = 0 \iff \sqrt{(x-y)A(x-y)^t} = 0 \iff (x-y)A(x-y)^t = 0 \overset{A \text{ def. pos.}}{\iff} x = y$.

iii) $d(x,y) = \sqrt{(x-y)A(x-y)^t} = \sqrt{(-1)(y-x)A(-1)(y-x)^t} = \sqrt{(y-x)A(y-x)^t} = d(y,x)$

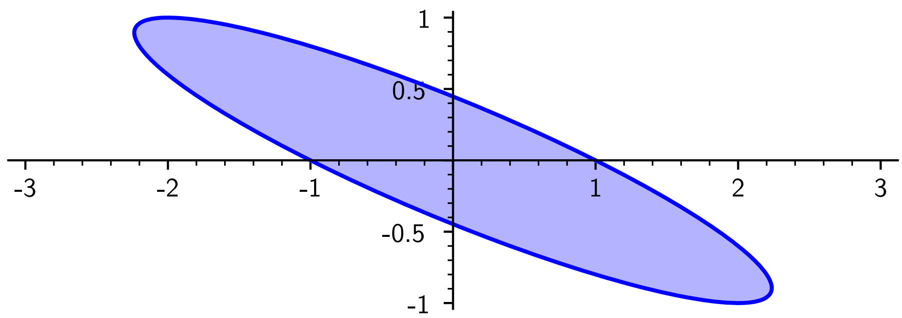
iv) Se tiene que

$$\begin{aligned}
d^2(x,y) = (x-y)A(x-y)^t &= (x-z+z-y)A(x-z+z-y)^t \\
&= (x-z)A(x-z)^t + (x-z)A(z-y)^t + (z-y)A(x-z)^t + \\
&\qquad + (z-y)A(z-y)^t \\
&\leq (x-z)A(x-z)^t + 2\left|(x-z)A(z-y)^t\right| + (z-y)A(z-y)^t \\
&\leq (x-z)A(x-z)^t + 2\sqrt{(x-z)A(x-z)^t(z-y)A(z-y)^t} + \\
&\qquad + (z-y)A(z-y)^t \\
&= \left((x-z)A(x-z)^t + (z-y)A(z-y)^t\right)^2 \\
&= \left(d(x,z) + d(z,y)\right)^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Ponemos un ejemplo, tomando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$



Ejercicio 1.7.

(a) Comprobaremos las propiedades para $\bar{d}$:

i) $\bar{d}(x,y) \geq 0$ trivial por la definición.

ii) $\bar{d}(x,y) = 0 \iff \bar{d}(x,y) = d(x,y) = 0 \iff x = y$.

iii) $\bar{d}(x,y) = \bar{d}(y,x)$ trivial por la definición.

iv) Si $d(x,y) < 1$ entonces $\bar{d}(x,y) = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \leq \bar{d}(x,z) + \bar{d}(z,y)$. Si $d(x,y) \geq 1$, entonces $\bar{d}(x,y) = 1$, y $\bar{d}(x,z) + \bar{d}(z,y)$ es mayor o igual que 1, ya que, si $d(x,z) \geq 1$ o $d(z,y) \geq 1$ ya se cumple la desigualdad. En otro caso, se tiene que $\bar{d}(x,y) = 1 \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = \bar{d}(x,z) + \bar{d}(z,y)$.

(b) Comprobamos las propiedades

i) $\bar{d}(x,y) \geq 0$ división de dos números positivos.

ii) $\bar{d}(x,y) = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$.

iii) $\bar{d}(x,y) = \bar{d}(y,x)$ trivial por la definición.

iv)

$$
\begin{aligned}
\bar{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} &\leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} = \bar{d}(x,z) + \bar{d}(z,y) \iff \\
&\iff \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)+d(z,y)+2d(x,z)d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)+d(x,z)d(z,y)} \\
&\iff d(x,y) + \cancel{d(x,y)d(x,z)} + \cancel{d(x,y)d(z,y)} + \cancel{d(x,y)d(x,z)d(z,y)} \leq \\
&\qquad \leq d(x,z) + d(z,y) + 2d(x,z)d(z,y) + \cancel{d(x,y)d(x,z)} + \\
&\qquad\qquad + \cancel{d(x,y)d(z,y)} + \cancel{2}d(x,y)d(x,z)d(z,y) \\
&\iff d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) + 2d(x,z)d(z,y) + d(x,y)d(x,z)d(z,y).
\end{aligned}
$$

Lo cual es cierto ya que d es una distancia.

(c) De nuevo, comprobamos

i) $\bar{d}(x,y) \geq 0 \iff d(x,y) \geq \frac{0}{\alpha}$ OK.

ii) $\bar{d}(x,y) = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$.

iii) $\bar{d}(x,y) = \bar{d}(y,x)$ trivial.

iv) $\bar{d}(x,y) = \alpha d(x,y) \leq \alpha\left(d(x,z) + d(z,y)\right) = \alpha d(x,z) + \alpha d(z,y) = \bar{d}(x,z) + \bar{d}(z,y)$.

(d) Comprobamos

i) $\bar{d}(x,y) \geq 0$ inmediato.

ii) $\bar{d}(x,y) = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$.

iii) $\bar{d}(x,y) = \bar{d}(y,x)$ trivial.

iv) $\bar{d}(x,y) = (d(x,y))^c \leq (d(x,z) + d(z,y))^c \leq d(x,z)^c + d(z,y)^c$, ya que la función $f(x) = x^c$ es cóncava.

Ejercicio 1.8.

(a) Como f es cóncava, cumple la desigualdad $\alpha f(z)+(1-\alpha)f(t) \leq f\left(\alpha z+(1-\alpha)t\right)$, tomamos ahora $z=0$ y $t=x+y$, entonces, substituyendo para unos valores concretos de α:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=\frac{x}{x+y} \implies \frac{x}{x+y}f(0)+\frac{y}{x+y}f(x+y) \leq f\left(\frac{x}{x+y}0+\frac{y}{x+y}(x+y)\right)=f(y) \\ \alpha=\frac{y}{x+y} \implies \frac{y}{x+y}f(0)+\frac{x}{x+y}f(x+y) \leq f\left(\frac{y}{x+y}0+\frac{x}{x+y}(x+y)\right)=f(x) \end{array}\right\} \implies$$

$$\implies f(0)+f(x+y) \leq f(x)+f(y) \overset{f(0)\geq 0}{\implies} f(x+y) \leq f(x)+f(y)$$

(b) Comporbamos las propiedades

i) f creciente $\implies f(x) \geq f(0)=0 \implies (f\circ d)(x,y) \geq 0$.

ii) $(f\circ d)(x,y)=0 \iff d(x,y)=0 \iff x=y$.

iii) $(f\circ d)(x,y)=f\left(d(x,y)\right)=f\left(d(y,x)\right)=(f\circ d)(y,x)$.

iv) $(f\circ d)(x,y)=f\left(d(x,y)\right) \leq f\left(d(x,z)+d(z,y)\right) \overset{(a)}{\leq} f\left(d(x,z)\right)+f\left(d(z,y)\right)=(f\circ d)(x,z)+(f\circ d)(z,y)$.

Ejercicio 1.9. Veremos que $(a) \implies (b)$. Sea $U \subset X$ un abierto de (X,d_2), entonces $\mathrm{Id}^{-1}(U)=U$, que es un abierto en (X,d_1) y análogamente con Id^{-1}.

Veremos ahora que $(b) \implies (c)$. Sea $B_1(x,r)$ una bola abierta según la métrica d_1 de centro x, entonces, por (b), $\mathrm{Id}^{-1}\left(B_1(x,r)\right)$ es un abierto, y $x \in \mathrm{Id}^{-1}\left(B_1(x,r)\right)$. Por lo tanto, $\exists s$ t. q. $B_2(x,s) \subset \mathrm{Id}^{-1}\left(B_1(x,r)\right)=B_1(x,r)$. (la otra implicación es análoga).

Por último, comprobaremos que $(c) \implies (a)$. Sea U un abierto en (X,d_1), entonces $\forall x \in U\ \exists r$ t. q. $B_1(x,r) \subset U$, pero por (c), $\exists s$ t. q. $x \in B_2(x,s) \subset B_1(x,r) \subset U \implies x$ es un punto interior en (X,d_2), por lo tanto, U es abierto en (X,d_2) y la otra implicación se demuestra de forma análoga.

Ejercicio 1.10. Sean d_1, d_2 dos métricas fuertemente equivalentes. Sean $r \in \mathbb{R}$ y $x \in X$, entonces, $\exists s=\frac{r}{M} \in \mathbb{R}$ t. q. $B_2(x,s) \subset B_1(x,r)$. De nuevo, la otra implicación es análoga.

Las métricas $d_1(x,y)=|x-y|$ y $d_2(x,y)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|$ son equivalentes, pero no son fuertemente equivalentes.

Ejercicio 1.11.

(a) Comprobemos que D_1 satisface las propiedades de las métricas. Por ser d_1 y d_2 métricas,

i)

$$D_1\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)=d_1\left(x_1,y_1\right)+d_2\left(x_2,y_2\right) \geq 0.$$

ii)

$$D_1\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)=d_1\left(x_1,y_1\right)+d_2\left(x_2,y_2\right)=0 \iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} d_1\left(x_1,y_1\right)=0 \\ d_2\left(x_2,y_2\right)=0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x_1=y_1 \\ x_2=y_2 \end{array}\right\} \iff \left(x_1,y_1\right)=\left(x_2,y_2\right).$$

iii)

$$D_1\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)=d_1\left(x_1,y_1\right)+d_2\left(x_2,y_2\right)=d_1\left(y_1,x_1\right)+d_2\left(y_2,x_2\right)=\\=D_1\left(\left(y_1,y_2\right),\left(x_1,x_2\right)\right).$$

iv)

$$D_1\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)=d_1\left(x_1,y_1\right)+d_2\left(x_2,y_2\right)\le d_1\left(x_1,z_1\right)+d_1\left(z_1,y_1\right)+\\+d_2\left(x_2,z_2\right)+d_2\left(z_2,y_2\right)=D_1\left(\left(x_1,x_2\right),\left(z_1,z_2\right)\right)+D_1\left(\left(z_1,z_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right).$$

(b) Comprobemos que D_2 satisface las propiedades de las métricas. Por ser d_1 y d_2 métricas,

i)

$$D_2\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)=\sqrt{d_1\left(x_1,y_1\right)^2+d_2\left(x_2,y_2\right)^2}\ge 0.$$

ii)

$$D_2\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)=\sqrt{d_1\left(x_1,y_1\right)^2+d_2\left(x_2,y_2\right)^2}=0\iff\\ \iff\left\{\begin{array}{l}d_1\left(x_1,y_1\right)=0\\ d_2\left(x_2,y_2\right)=0\end{array}\right\}\iff\left\{\begin{array}{l}x_1=y_1\\ x_2=y_2\end{array}\right\}\iff\left(x_1,y_1\right)=\left(x_2,y_2\right).$$

iii)

$$D_2\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)=\sqrt{d_1\left(x_1,y_1\right)^2+d_2\left(x_2,y_2\right)^2}=\\=\sqrt{d_1\left(y_1,x_1\right)^2+d_2\left(y_2,x_2\right)^2}=D_2\left(\left(y_1,y_2\right),\left(x_1,x_2\right)\right).$$

iv) Primero, demostraremos un resultado auxiliar. Para cualesquiera reales positivos a,b,c,d se tiene que

$$\begin{aligned}0\le(ad-cb)^2 &\implies 2abcd\le a^2d^2+c^2b^2\\ &\implies (ab+cd)^2=a^2b^2+2abcd+c^2d^2\\ &\qquad\qquad\le a^2b^2+a^2d^2+c^2b^2+c^2d^2\\ &\qquad\qquad=\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)\\ &\implies (a+b)^2+(c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2cd\\ &\qquad\le a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)}\\ &\implies\left(\sqrt{(a+b)^2+(c+d)^2}\right)^2\le\left(\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2}\right)^2\\ &\implies\sqrt{(a+b)^2+(c+d)^2}\le\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}D_2\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)&=\sqrt{d_1\left(x_1,y_1\right)^2+d_2\left(x_2,y_2\right)^2}\\ &\le\sqrt{\left(d_1\left(x_1,z_1\right)+d_1\left(z_1,y_1\right)\right)^2+\left(d_2\left(x_2,z_2\right)+d_2\left(z_2,y_2\right)\right)^2}\\ &\overset{(1.1)}{\le}\sqrt{d_1\left(x_1,z_1\right)^2+d_2\left(x_2,z_2\right)^2}+\sqrt{d_1\left(z_1,y_1\right)^2+d_2\left(z_2,y_2\right)^2}\\ &=D_2\left(\left(x_1,x_2\right),\left(z_1,z_2\right)\right)+D_2\left(\left(z_1,z_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right).\end{aligned}$$

(c) Comprobemos que D_∞ satisface las propiedades de las métricas. Por ser d_1 y d_2 métricas,

i)
$$D_\infty\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)=\text{máx}\left\{d_1\left(x_1,y_1\right),d_2\left(x_2,y_2\right)\right\}\geq 0.$$

ii)
$$\begin{aligned}&D_\infty\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)=\text{máx}\left\{d_1\left(x_1,y_1\right),d_2\left(x_2,y_2\right)\right\}=0\iff\\ &\iff\left\{\begin{array}{l}d_1\left(x_1,y_1\right)=0\\ d_2\left(x_2,y_2\right)=0\end{array}\right\}\iff\left\{\begin{array}{l}x_1=y_1\\ x_2=y_2\end{array}\right\}\iff\left(x_1,y_1\right)=\left(x_2,y_2\right).\end{aligned}$$

iii)
$$\begin{aligned}&D_\infty\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)=\text{máx}\left\{d_1\left(x_1,y_1\right),d_2\left(x_2,y_2\right)\right\}=\\ &=\text{máx}\left\{d_1\left(y_1,x_1\right),d_2\left(y_2,x_2\right)\right\}=D_2\left(\left(y_1,y_2\right),\left(x_1,x_2\right)\right).\end{aligned}$$

iv)
$$\begin{aligned}D_\infty\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)&=\text{máx}\left\{d_1\left(x_1,y_1\right),d_2\left(x_2,y_2\right)\right\}\\ &\leq\text{máx}\left\{d_1\left(x_1,z_1\right)+d_1\left(z_1,y_1\right),d_1\left(x_2,z_2\right)+d_2\left(z_2,y_2\right)\right\}\\ &\leq\text{máx}\left\{d_1\left(x_1,z_1\right),d_2\left(x_2,z_2\right)\right\}+\\ &\qquad+\text{máx}\left\{d_1\left(z_1,y_1\right),d_2\left(z_2,y_2\right)\right\}\\ &=D_\infty\left(\left(x_1,x_2\right),\left(z_1,z_2\right)\right)+D_\infty\left(\left(z_1,z_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right).\end{aligned}$$

Veamos ahora que D_1 y D_2 son métricas fuertemente equivalentes. Observamos que

$$D_1\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)^2-D_2\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)^2=2d_1\left(x_1,y_1\right)d_2\left(x_2,y_2\right).$$

Entonces,

$$2d_1\left(x_1,y_1\right)d_2\left(x_2,y_2\right)\geq 0\implies D_2\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)\leq D_1\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right).$$

Y también

$$\begin{aligned}&2d_1\left(x_1,y_1\right)d_2\left(x_2,y_2\right)\leq d_1\left(x_1,y_1\right)^2+d_2\left(x_2,y_2\right)^2=D_2\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)^2\implies\\ &\implies D_1\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)\leq\sqrt{2}D_2\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$D_2\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)\leq D_1\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)\leq\sqrt{2}D_2\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right),$$

con lo que D_1 y D_2 son métricas fuertemente equivalentes. Veamos ahora que D_1 y D_∞ también lo son. Es trivial comprobar que

$$D_\infty\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)\leq D_1\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)\leq 2D_\infty\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right).$$

Finalmente, como que la equivalencia fuerte es una propiedad transitiva, D_2 y D_∞ son métricas fuertemente equivalentes.

Para acabar, mostraremos la generalización de estos resultados. Sean $\left(X_i,d_i\right)$ espacios métricos para todo $i\in\{1,\ldots,n\}$, y sea $X=X_1\times\cdots\times X_n$. Definimos en X las aplicaciones

(a) $D_1\left(\left(x_1, y_1\right), \ldots, \left(x_n, y_n\right)\right) = d_1\left(x_1, y_1\right) + \cdots + d_n\left(x_n, y_n\right).$

(b) $D_2\left(\left(x_1, y_1\right), \ldots, \left(x_n, y_n\right)\right) = \sqrt{d_1\left(x_1, y_1\right)^2 + \cdots + d_n\left(x_n, y_n\right)^2}.$

(c) $D_\infty\left(\left(x_1, y_1\right), \ldots, \left(x_n, y_n\right)\right) = \text{máx}\left\{d_1\left(x_1, y_1\right), \ldots, d_n\left(x_n, y_n\right)\right\}.$

A través de un razonamiento inductivo inmediato a partir de lo anteriormente visto, obtenemos que D_1, D_2 y D_∞ son métricas en X y fuertemente equivalentes entre ellas.

Ejercicio 1.12. Sea $x = (x_1, x_2) \in X \times X$ y sean $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon$. Entonces, $\forall y = (y_1, y_2) \in X \times X$ con $D_1(x, y) < \delta$,

$$\begin{aligned}
|d(x_1, x_2) - d(y_1, y_2)| &\leq |d(x_1, x_2) - d(x_2, y_1) + d(x_2, y_1) - d(y_1, y_2)| \\
&\leq |d(x_1, x_2) - d(x_2, y_1)| + |d(x_2, y_1) - d(y_1, y_2)| \\
&\leq d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2) = D_1(x, y) \\
&< \delta = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así pues, la aplicación $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ es continua tomando en $X \times X$ la métrica D_1. Por ser D_1, D_2 y D_∞ métricas fuertemente equivalentes, d también es continua si tomamos en $X \times X$ las métricas D_2 o D_∞.

Ejercicio 1.13.

(a) Comprobemos que $\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}$ satisface las propiedades de norma.

i) $\langle u, u\rangle \geq 0 \implies \|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} \geq 0.$

ii) $(\langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0) \implies \left(\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = 0 \iff u = 0\right).$

iii) $\|\lambda u\| = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle u, u\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle u, u\rangle} = |\lambda|\|u\|.$

iv)

$$\begin{gathered}
\|u + v\| = \sqrt{\langle u + v, u + v\rangle} = \sqrt{\langle u, u + v\rangle + \langle v, u + v\rangle} = \\
= \sqrt{\langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle} \leq \sqrt{\langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle} \leq \\
\leq \sqrt{\langle u, u\rangle} + \sqrt{\langle v, v\rangle} = \|u\| + \|v\|.
\end{gathered}$$

(b) Comprobemos que $d(u, v) := \|u - v\|$ satisface las propiedades de métrica.

i) $d(u, v) = \|u - v\| \geq 0.$

ii) $d(u, v) = \|u - v\| = 0 \iff u - v = 0 \iff u = v.$

iii)

$$\begin{gathered}
d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} = \sqrt{\langle u, u - v\rangle - \langle v, u - v\rangle} = \\
= \sqrt{\langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle} = \sqrt{\langle v - u, v - u\rangle} = \|v - u\| = d(v, u).
\end{gathered}$$

iv) $d(u, v) = \|u - v\| = \|u - w + w - v\| \leq \|u - w\| + \|w - v\| = d(u, w) + d(w, v).$

(c) La métrica discreta no proviene de norma alguna. Esto es así porque no es escalable, por ejemplo, $2 = 2d\left((0,\dots,0),(1,\dots,1)\right) \neq d\left((0,\dots,0),(2,\dots,2)\right) = 1$, cosa que debiera cumplir si proviniera de una norma.

La norma $\|x\| = \sum |x_i|$ no proviene de ningún producto escalar. De hacerlo, debiera cumplir la identidad del paralelogramo, pero los vectores $x = (1,0,\dots,0)\,, y = (0,1,0,\dots,0)$ no la cumplen: $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 4 \neq 8 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$. Para $n = 1$ este contraejemplo no es válido pero en ese caso sí es cierto que toda norma proviene de un producto escalar.

Ejercicio 1.14. Dado un isomorfismo $\phi\colon \mathbb{F} \to \mathbb{E}$, dos normas en $\mathbb{E}$ serán equivalentes si y solo si las normas asociadas de $\mathbb{F}$ por ϕ (es decir, de la forma $\|u\|' = \|\phi(u)\|$) lo son. Como cualquier $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita es isomorfo a $\mathbb{R}^n$ basta comprobar que todas las normas de este último son equivalentes.

Para ello, veremos primero que es suficiente probar que todas las normas son equivalentes a la norma ordinaria (que denotaremos por $\|\cdot\|_{\text{ord}}$). Si toda norma es equivalente a la ordinaria, entonces tenemos que, para toda pareja de normas $\|\cdot\|_1\,, \|\cdot\|_2$ y vector $v \in \mathbb{E}$

$$m_1\|v\|_1 \leq \|v\|_{\text{ord}} \leq M_1\|v\|_1\,,$$
$$m_2\|v\|_{\text{ord}} \leq \|v\|_2 \leq M_2\|v\|_{\text{ord}}\,.$$

Por lo tanto,

$$m_1 m_2\|v\|_1 \leq m_2\|v\|_{\text{ord}} \leq \|v\|_2 \leq M_2\|v\|_{\text{ord}} \leq M_2 M_1\|v\|_1\,.$$

Es decir, que la equivalencia es una propiedad transitiva y, como ya se ha dicho, solo hace falta ver que todas las normas son equivalentes a la ordinaria.

Para ver esto último, comenzamos demostrando que

$$\|v\| = \|x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\| \leq |x_1|\|e_1\| + \cdots + |x_n|\|e_n\| \leq nXE \leq nE\|v\|_{\text{ord}} = M\|v\|_{\text{ord}}\,,$$

donde E es el máximo de las $\|e_i\|$ y X el máximo de las $|x_i|$. La cota M obtenido es independiente de v. Usando esto, podemos ver que una norma $\|\cdot\|$ en el espacio métrico ordinario de $\mathbb{R}^n$ es continua: Para todo $\varepsilon > 0$, fijando $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, si $\|x-y\|_{\text{ord}} < \delta$ se cumple

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\| \leq M\|x-y\|_{\text{ord}} < \varepsilon.$$

De lo que $\|\cdot\|$ es continua. Sabiendo esto, podemos deducir que existe una cota m tal que $m \leq \|v\|\ \forall\, v$ t. q. $\|v\|_{\text{ord}} = 1$, puesto que cualquier función continua sobre un compacto (en este caso, la esfera unidad con la métrica habitual en $\mathbb{R}^n$) admite una cota inferior. Finalmente, para cualquier vector v

$$m\|v\|_{\text{ord}} \leq \left\|\frac{v}{\|v\|_{\text{ord}}}\right\|\|v\|_{\text{ord}} = \|v\|\,.$$

Con lo que hemos encontrado las cotas m y M necesarias para ver que cualquier norma es equivalente a la ordinaria en $\mathbb{R}^n$, y, como se ha explicado antes, para ver que dos normas cualesquiera en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.

Ejercicio 1.15.

(a) Comprobemos que $\|f\|_1$ es una norma.

i) $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x \geq 0$.

ii) $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x = 0 \overset{f \text{ continua}}{\iff} f = 0$.

iii) $\|kf\|_1 = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x = |k| \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x = |k| \|f\|_1$.

iv) $\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(x) + g(x)| \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)| + |g(x)| \, \mathrm{d}x = \|f\|_1 + \|g\|_1$.

Comprobemos que $\|f\|_2$ es una norma.

i) $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x} \geq 0$.

ii) $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x} = 0 \overset{f \text{ continua}}{\iff} f = 0$.

iii) $\|kf\|_2 = \sqrt{\int_a^b |kf(x)|^2 \, \mathrm{d}x} = |k| \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x} = |k| \|f\|_2$.

iv) $\|f+g\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 \, \mathrm{d}x} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 + 2f(x) g(x) + |g(x)|^2 \, \mathrm{d}x} \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 + |g(x)|^2 \, \mathrm{d}x} \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x} + \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 \, \mathrm{d}x} = \|f\|_2 + \|g\|_2$.

Comprobemos que $\|f\|_3$ es una norma.

i) $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} \Big\{ |f(x)| \Big\} \geq 0$.

ii) $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} \Big\{ |f(x)| \Big\} = 0 \iff f = 0$.

iii) $\|kf\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} \Big\{ |kf(x)| \Big\} = |k| \sup_{x \in [a,b]} \Big\{ |f(x)| \Big\} = |k| \, \|f\|_\infty$.

iv) $\|f+g\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} \Big\{ |f(x) + g(x)| \Big\} \leq \sup_{x \in [a,b]} \Big\{ |f(x)| \Big\} + \sup_{x \in [a,b]} \Big\{ |g(x)| \Big\} = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

(b) Consideremos la familia de funciones, para $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} f_k \colon \; & [0,1] \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f_k(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x > \frac{1}{k} \\ 2k(1-kx) & \text{si } x \leq \frac{1}{k} \end{cases} \end{aligned}$$

Se tiene que para todo $k \geq 1$, $\|f_k\|_1 = 1$ y $\|f_k\|_\infty = k$, de modo que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ no son equivalentes.

(c) Con la distancia $d_1(f,g) = \|f-g\|_1$, la bola no se puede dibujar. Con la distancia $d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$, ERNESTO PON TU DIBUJO.

Ejercicio 1.16.

(a) El punto $(1,0)$ del conjunto no es interior, de modo que el conjunto no es abierto.

(b) Para cada punto (x,y) del conjunto, la bola abierta centrada en él y de radio $1-|x|$ está contenida en el conjunto, de modo que el conjunto es abierto.

(c) El punto $(0,0)$ del conjunto no es interior, de modo que el conjunto no es abierto.

(d) El punto $(0,0)$ del conjunto no es interior, de modo que el conjunto no es abierto.

(e) El punto $(1,0)$ del conjunto no es interior, de modo que el conjunto no es abierto.

(f) El punto $(0,0)$ del conjunto no es interior, de modo que el conjunto no es abierto.

(g) El punto $\left(\sqrt{2},0\right)$ del conjunto no es interior, de modo que el conjunto no es abierto.

(h) El punto $(0,0)$ del conjunto no es interior, de modo que el conjunto no es abierto.

Ejercicio 1.17. Sea $x \in E$. Entonces, $\forall \varepsilon > 0$, $d(x,y) < \delta = \varepsilon \implies |d(x,p) - d(p,y)| \leq d(x,y) < \varepsilon$. Por tanto, $d(\cdot,p) : E \to \mathbb{R}$ es continua.

Ejercicio 1.18. En el espacio métrico $(\mathbb{R}, d_0)$, todos los puntos son interiores a cualquier conjunto que los contenga, ya que $B_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\}$. Entonces, para cualquier aplicación $f\colon (\mathbb{R}, d_0) \to (\mathbb{R}, d)$, la antiimagen de un abierto es siempre un abierto y por consiguiente es una aplicación continua.

Ejercicio 1.19.

(a) Vamos a comprobar que es continua por definición.

Sean $x',\, y' \in X$ t. q. $d(x',\, y') < \varepsilon$. Entonces tenemos que

$$f(x') = \inf_{y\in A} d\left(x',\, y\right) \leq \inf_{y\in A} \left(d\left(x',\, y'\right) + d\left(y',\, y\right)\right) = d\left(x',\, y'\right) + \inf_{y\in A} d\left(y',\, y\right) < \varepsilon + f(y')$$
$$f(y') = \inf_{y\in A} d\left(y',\, y\right) \leq \inf_{y\in A} \left(d\left(y',\, x'\right) + d\left(x',\, y\right)\right) = d\left(y',\, x'\right) + \inf_{y\in A} d\left(x',\, y\right) < \varepsilon + f(x').$$

Lo que nos dice que

$$f(x') - \varepsilon \leq f(y') \leq f(x') + \varepsilon \iff \left|f(x') - f(y')\right| < \varepsilon.$$

Y por lo tanto, cogiendo $\delta = \epsilon$ tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t. q. } \text{ si } d\left(x',\, y'\right) < \delta, \left|f(x') - f(y')\right| < \varepsilon,$$

lo que demuestra la continuidad de f.

(b) Tenemos dos opciones:

- $x \in A$, y por lo tanto, $\exists y \in A$ t. q. $d(x,\, y) = 0$ $(y = x)$, y por lo tanto $d(x,\, A) = 0$.
- $x \notin A$. Como $0 = d(x,\, A) = \inf_{y\in A} d(x,\, y)$, podemos encontrar puntos de A tan cercanos a x como queramos, es decir

$$\forall \delta > 0,\, \exists y \in A \text{ t. q. } y \in B_\delta(x) \implies (B_\delta(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing,$$

que son los puntos de acumulación de A.

Por lo tanto, $d(x,\, A) = 0 \iff x \in A \cup A'$.

Ejercicio 1.20.

(a) Si cogemos $f(x) = x$ y $g(x) = 2x$ tenemos un contraejemplo a la continuidad de la función, ya que $d\left(f'(x), g'(x)\right) = \sup\left(f'(x) - g'(x)\right) = 1$, lo que nos dice que no podemos hacer la distancia tan pequeña como queramos.

(b) Es trivial demostrar que $\bar{d}$ es una distancia a partir de las propiedades del valor absoluto. Para ver que la función derivada es continua, usaremos la definición. Si consideramos dos funciones f y g t. q. $\bar{d}\left(f, g\right) < \varepsilon$, por definición de $\bar{d}$ tenemos que $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x) - g'(x)| < \bar{d}\left(f, g\right) < \varepsilon$, y por lo tanto, si cogemos $\delta = \varepsilon$, tenemos que

$$\forall\varepsilon,\ \exists\delta \ \text{t. q.} \ \ \text{si } \bar{d}\left(f, g\right) < \delta,\ \sup_{x\in[a,b]}\Big|f'(x) - g'(x)\Big| < \bar{d} < \varepsilon,$$

lo que nos dice que la aplicación derivada con esta métrica es continua.

Ejercicio 1.21.

(a) Tomemos una bola abierta cualquiera $B_r\left(x\right)$ y un punto cualquiera perteneciente a dicha bola $y \in B_r\left(x\right)$. Entonces, para todo punto $z \in B_r\left(y\right)$ (bola abierta) se tiene que $d\left(x, z\right) \leq \text{máx}\left\{d\left(x, y\right), d\left(y, z\right)\right\} < r$. Así pues, $B_r\left(y\right) \subseteq B_r\left(x\right)$. Mediante un razonamiento análogo, obtenemos que $B_r\left(x\right) \subseteq B_r\left(y\right)$, concluyendo que $B_r\left(y\right) = B_r\left(x\right)$. Para las bolas cerradas el procedimiento es el mismo.

(b) Sea $y \in B_{r_1}\left(x_1\right) \cap B_{r_2}\left(x_2\right)$ y pongamos, sin pérdida de generalidad, $r_1 \leq r_2$. Entonces $B_{r_1}\left(x_1\right) \overset{(a)}{=} B_{r_1}\left(y\right) \subseteq B_{r_2}\left(y\right) \overset{(a)}{=} B_{r_2}\left(x_2\right)$.

(c) Veamos primero que toda bola es un cerrado. Sea $B_r\left(x\right)$ una bola cualquiera (abierta o cerrada) y sea $y \notin B_r\left(x\right)$ un punto no perteneciente a dicha bola. Supongamos que $\exists z \in B_r\left(x\right) \cap B_r\left(y\right)$. Se tiene que $B_r\left(x\right) \overset{(a)}{=} B_r\left(z\right) \overset{(a)}{=} B_r\left(y\right)$, lo cual es una contradicción porque $y \notin B_r\left(x\right)$. Entonces, $B_r\left(x\right) \cap B_r\left(y\right) = \varnothing$ y todos los puntos del complementario de la bola son interiores, de modo que $B_r\left(x\right)$ es cerrada. Veamos ahora que toda bola es un abierto. Sea $B_r\left(x\right)$ una bola cualquiera (abierta o cerrada) y sea $y \in B_r\left(x\right)$ un punto perteneciente a dicha bola. Se tiene que $B_r\left(y\right) \overset{(a)}{=} B_r\left(x\right)$ y, por consiguiente, que y es un punto interior. Concluimos, pues, que la bola es un abierto.

(d) Queremos ver que $d\left(a, b\right) \leq \text{máx}\left\{d\left(a, c\right), d\left(c, b\right)\right\}$. Supongamos que no se satisface, es decir, que $\exists a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $n^{-r_1} = d\left(a, b\right) > \text{máx}\left\{d\left(a, c\right), d\left(c, b\right)\right\} = \text{máx}\left\{n^{-r_2}, n^{-r_3}\right\} = n^{-r_2}$, sin pérdida de generalidad. Esto implica que $r_1 < r_2$ y que $r_2 | \left(a - c\right)$ y $r_2 | \left(c - b\right)$, lo que a su vez significa que $r_2 | \left(a - c\right) + \left(c - b\right) = \left(a - b\right)$. Pero esto supone una contradicción porque entonces $d\left(a, b\right) \geq r_2 > r_1$. Por consiguiente, $d\left(a, b\right) \leq \text{máx}\left\{d\left(a, c\right), d\left(c, b\right)\right\}$.

(e) Las bolas cerradas de radio n^{-r}, $\left\{b \in \mathbb{Z} | d\left(a, b\right) \leq n^{-r}\right\}$, son los conjuntos de puntos que satisfacen $n^r | \left(a - b\right)$, es decir, los conjuntos $a + n^r\mathbb{Z}$. Comprobamos pues, que una bola abierta de radio R satisfaciendo $n^{-r} < R \leq n^{-r+1}$ coincide con el conjunto $a + n^r\mathbb{Z}$ y que una bola cerrada de radio R satisfaciendo $n^{-r} \leq R < n^{-r+1}$ coincide con el conjunto $a + n^r\mathbb{Z}$.

Ejercicio 1.22. Trataremos primero el caso $d_{\text{mín}}$. Sea $S = \{A, B, C\}$ y sean

$$d_1 \colon S \times S \to \mathbb{R}$$
$$d_1(A,B) = d_1(B,A) = 2, \quad d_1(B,C) = d_1(C,B) = 3, \quad d_1(C,A) = d_1(A,C) = 1,$$
$$d_1(A,A) = 0, \qquad d_1(B,B) = 0, \qquad d_1(C,C) = 0.$$

y

$$d_2 \colon S \times S \to \mathbb{R}$$
$$d_2(A,B) = d_2(B,A) = 1, \quad d_2(B,C) = d_2(C,B) = 3, \quad d_2(C,A) = d_2(A,C) = 2,$$
$$d_2(A,A) = 0, \qquad d_2(B,B) = 0, \qquad d_2(C,C) = 0.$$

Es trivial comprobar que tanto d_1 como d_2 son métricas. Consideremos ahora $d_{\text{mín}}(x,y) = \text{mín}\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$. Tenemos que $d_{\text{mín}}(B,C) = 3 > 1 + 1 = d_2(B,A) + d_1(A,C) = d_{\text{mín}}(B,A) + d_{\text{mín}}(A,C)$. Esto es incompatible con la desigualdad triangular de las métricas, de modo que $d_{\text{mín}}$ no és una métrica. Tratemos ahora $d_{\text{máx}}$. Puesto que d_1 y d_2 son métricas,

i) $d_{\text{máx}}(x,y) = \text{máx}\{d_1(x,y), d_2(x,y)\} \geq 0$.

ii) $d_{\text{máx}}(x,y) = \text{máx}\{d_1(x,y), d_2(x,y)\} = 0 \iff x = y$.

iii) $d_{\text{máx}}(x,y) = \text{máx}\{d_1(x,y), d_2(x,y)\} = \text{máx}\{d_1(y,x), d_2(y,x)\} = d_{\text{máx}}(y,x)$.

iv)

$$\begin{aligned} d_{\text{máx}}(x,y) &= \text{máx}\{d_1(x,y), d_2(x,y)\} \\ &\leq \text{máx}\{d_1(x,z) + d_1(z,y), d_2(x,z) + d_2(z,y)\} \\ &\leq \text{máx}\{d_1(x,z), d_2(x,z)\} + \text{máx}\{d_1(z,y), d_2(z,y)\} \\ &= d_{\text{máx}}(x,z) + d_{\text{máx}}(z,y). \end{aligned}$$

Así pues, $d_{\text{máx}}$ sí es una métrica.

Ejercicio 1.23.

(a) Vamos a comprobar que D_1 cumple las propiedades de las métricas.

i) $|x_n - y_n| \geq 0 \implies D_1(x,y) \geq 0$.

ii) $x_n = y_n \iff |x_n - y_n| = 0 \iff D_1(x,y) = 0$.

iii) $D_1(x,y) = \sup\left\{\text{mín}\{|x_n - y_n|, 1\}\right\} = \sup\left\{\text{mín}\{|y_n - x_n|, 1\}\right\} = D_1(y,x)$.

iv)

$$\begin{aligned} D_1(x,y) &= \sup\left\{\text{mín}\{|x_n - y_n|, 1\}\right\} \\ &= \sup\left\{\text{mín}\{|x_n - y_n + z_n - z_n|, 1\}\right\} \\ &\leq \sup\left\{\text{mín}\{|x_n - z_n| + |y_n - z_n|, 1\}\right\} \\ &\leq \sup\left\{\text{mín}\{|x_n - z_n|, 1\}\right\} + \sup\left\{\text{mín}\{|y_n - z_n|, 1\}\right\} \\ &= D_1(x,z) + D_1(y,z). \end{aligned}$$

La comprobación de que D_2 es equivalente a la de D_1.

(b) Veamos qué conjunto conforma la bola $B^1_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}^\omega | D_1(0,x) < \varepsilon\}$. Podemos separar dos casos. Si $\varepsilon > 1$, trivialmente tenemos que $B^1_\varepsilon(0) = \mathbb{R}^\omega$. En cambio, si $\varepsilon \leq 1$, $B^1_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}^\omega | \quad |x_n| < \varepsilon\}$.

Tratemos ahora la bola $B^2_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}^\omega | D_2(0,x) < \varepsilon\}$. Sabemos que si $n > \frac{1}{\varepsilon}$, entonces $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Por lo tanto,

$$B^2_\varepsilon(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^\omega \text{ t. q. } \frac{|x_n|}{n} < \varepsilon, \forall n \geq \frac{1}{\varepsilon}\right\}$$

(c) Estudiemos, para empezar, el primer conjunto. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots) \in (a,b) \times \mathbb{R} \times (c,d) \times \mathbb{R} \times \cdots$ y tomemos $r = \text{mín}\{x_1 - a, b - x_1, x_3 - c, d - x_3\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} B^1_r(x) &= \{y \in (a,b) \times \mathbb{R} \times (c,d) \times \mathbb{R} \times \cdots | D_1(y,x) < r\} \subseteq \\ &\subseteq (a,b) \times \mathbb{R} \times (c,d) \times \mathbb{R} \times \cdots . \end{aligned}$$

Por consiguiente, x es un punto interior por la métrica D_1 y $(a,b) \times \mathbb{R} \times (c,d) \times \mathbb{R} \times \cdots$ es un conjunto abierto por la métrica D_1. De forma similar, tomemos $r = \text{mín}\left\{x_1 - a, b - x_1, \frac{x_3 - c}{3}, \frac{d - x_3}{3}\right\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} B^2_r(x) &= \{y \in (a,b) \times \mathbb{R} \times (c,d) \times \mathbb{R} \times \cdots | D_2(y,x) < r\} \subseteq \\ &\subseteq (a,b) \times \mathbb{R} \times (c,d) \times \mathbb{R} \times \cdots . \end{aligned}$$

Por consiguiente, x es un punto interior por la métrica D_2 y $(a,b) \times \mathbb{R} \times (c,d) \times \mathbb{R} \times \cdots$ es un conjunto abierto por la métrica D_2.

Estudiemos, ahora, el segundo conjunto. Sea $x = \left(a + \frac{b-a}{n}\right)$. Entonces, para cualquier $r > 0$,

$$B^1_r(x) = \left\{y \in (a,b)^\omega | D_1(y,x) < r\right\} \cap \left(\mathbb{R}^\omega \setminus (a,b)^\omega\right) \neq \varnothing.$$

Por consiguiente, x no es un punto interior por la métrica D_1 y $(a,b)^\omega$ no es un conjunto abierto por la métrica D_1. Además, $B^1_r(x) \subseteq B^2_r(x) = \left\{y \in (a,b)^\omega | D_2(y,x) < r\right\}$, con lo que x no es un punto interior por la métrica D_2 y $(a,b)^\omega$ no es un conjunto abierto por la métrica D_2.

(d) Estudiemos, para empezar, $f(t)$. Observemos que

$$D_1(f(x), f(y)) = \sup\left\{\text{mín}\{|x-y|, 1\}\right\} \leq |x-y|.$$

Entonces,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon \text{ t. q. } |x-y| < \delta \implies D_1(f(x), f(y)) \leq |x-y| < \delta = \varepsilon.$$

Por consiguiente, $f(t)$ es contínua si tomamos la métrica D_1 en $\mathbb{R}^\omega$. Observemos ahora que

$$D_2(f(x), f(y)) = \sup\left\{\frac{1}{n}\text{mín}\{|x-y|, 1\}\right\} \leq |x-y|.$$

Entonces,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \, \varepsilon > 0, \, \exists \delta = \varepsilon \; \text{t. q.} \; |x - y| < \delta \implies D_2 \left(f\left(x\right), f\left(y\right) \right) \leq |x - y| < \delta = \varepsilon.$$

Por lo tanto, $f\left(t\right)$ es contínua si tomamos la métrica D_2 en $\mathbb{R}^\omega$.

Estudiemos ahora $g\left(t\right)$. Observemos que

$$D_1 \left(f\left(x\right), f\left(y\right) \right) = \sup \left\{ \text{mín} \left\{ n|x - y|, 1 \right\} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Entonces, la condición de continuidad no se satisface para $0 < \varepsilon < 1$, de modo que $f\left(t\right)$ no es contínua si tomamos la métrica D_1 en $\mathbb{R}^\omega$. Observemos ahora que

$$D_2 \left(f\left(x\right), f\left(y\right) \right) = \sup \left\{ \text{mín} \left\{ |x - y|, \frac{1}{n} \right\} \right\} \leq |x - y|.$$

Entonces,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \, \varepsilon > 0, \, \exists \delta = \varepsilon \; \text{t. q.} \; |x - y| < \delta \implies D_2 \left(f\left(x\right), f\left(y\right) \right) \leq |x - y| < \delta = \varepsilon.$$

Finalmente, $g\left(t\right)$ es contínua si tomamos la métrica D_2 en $\mathbb{R}^\omega$.

Tema 2

Espacios topológicos y aplicaciones continuas

Ejercicio 2.1.

(a) Comprobamos que

i) El intervalo $(a, a) = \varnothing \in \mathcal{T}$ y $(-\infty, +\infty) = X \in \mathcal{T}$.

ii) Sea $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ la unión de un numero arbitrario de abiertos, entonces, $\forall x \in U, \exists i \in I$ t. q. $x \in U_i \subseteq U$ y por tanto x es un punto interior y U es un abierto.

iii) Sea $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ la intersección de un numero finito de abiertos, entonces, $\forall x \in U, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \exists a_i, b_i$ t. q. $x \in (a_i, b_i) \subseteq U_i$, porque $x \in U_i$ y U_i abierto. Sean

$$a = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \{a_i\},$$
$$b = \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} \{b_i\},$$

entonces $x \in (a, b) \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ y por tanto x es un punto interior y U es un abierto.

(b) Sea $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in X \cup \{\pm\infty\}\}$, comprobamos que

i) $\forall x \in X, x \in (-\infty, +\infty) \in \mathcal{B}$.

ii) $\forall a, b, c, d \in X \cup \{\pm\infty\}$, si $(a, b) \cap (c, d) \neq \varnothing$, entonces,

$$\alpha = \max\{a, c\},$$
$$\beta = \min\{b, d\},$$
$$(a, b) \cap (c, d) = (\alpha, \beta).$$

y por tanto $\forall x \in (a, b) \cap (c, d), x \in (\alpha, \beta) \subseteq (a, b) \cap (c, d)$, y $(\alpha, \beta) \in \mathcal{B}$.

(c) Si vemos que $\forall x \in X, \{x\}$ es un abierto, ya abremos acabado, ya que todo conjunto de $\mathcal{P}(X)$ contiene únicamente puntos de X y por lo tanto sera la unión de abiertos. En $\mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{Z}$, tenemos que $\{x\} = (n-1, n+1)$ y por tanto ya estamos. En $\mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, tenemos que $\{x\} = (n-1, n+1)$ y $\{1\} = (-\infty, 2)$ y por tanto ya estamos, suponiendo que $0 \notin \mathbb{N}$.

(d) Sea X un espacio topológico con la topología del orden, entonces $\forall x, y \in X, x < y$,

- Si $\exists z$ tal que $x < z < y$, entonces $x \in (-\infty, z), y \in (z, +\infty), (-\infty, z) \cap (z, +\infty) = \varnothing$.
- Si $\nexists z$ tal que $x < z < y$, entonces $x \in (-\infty, y), y \in (x, +\infty), (-\infty, y) \cap (x, +\infty) = \varnothing$.

(e) Aquest dibuix està en contrucció.

(f) Tenemos que ver que $\mathcal{T}_{\text{ord}} \subset \mathcal{T}_{\leq}$, es decir, $\mathcal{T}_{\text{ord}} \subseteq \mathcal{T}_{\leq}$ y $\mathcal{T}_{\leq} \neq \mathcal{T}_{\text{ord}}$.

- Veamos que $\mathcal{T}_{\text{ord}} \subseteq \mathcal{T}_{\leq}$. Sea $U \subseteq \mathcal{T}_{\text{ord}}$, $\forall x \equiv (x_1, x_2) \in U$, $\exists r \in \mathbb{R}^+$ t. q. $B_r(x) \subseteq U$, y por tanto, $A = ((x_1 - r, x_2), (x_1 + r, x_2)) \subseteq B_r(x), A \in \mathcal{T}_{\leq}$. Así pues, todos los puntos de U son interiores en la topología del orden y por tanto $U \in \mathcal{T}_{\leq}$.
- Veamos que $\mathcal{T}_{\leq} \neq \mathcal{T}_{\text{ord}}$. Sean $x = (0,0), y = (0,1)$, entonces $(x, y) \in \mathcal{T}_{\leq}$, $(x, y) \notin \mathcal{T}_{\text{ord}}$. Por tanto $\mathcal{T}_{\leq} \neq \mathcal{T}_{\text{ord}}$.

(g) Son las topologías discretas.

Ejercicio 2.2.

(a) Comprobamos que

i) $\varnothing = [x, x) \in \mathcal{T}_\ell$ y $X = \bigcup\limits_{x \in X} [x, \infty) \in \mathcal{T}_\ell$.

ii) Sea $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ la unión de un numero arbitrario de abiertos, entonces, $\forall x \in U, \exists i \in I$ t. q. $x \in U_i \subseteq U$ y por tanto x es un punto interior y U es un abierto.

iii) Sea $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ la intersección de un numero finito de abiertos, entonces, $\forall x \in U, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \exists a_i, b_i$ t. q. $x \in [a_i, b_i) \subseteq U_i$, porque $x \in U_i$ y U_i abierto. Sean

$$a = \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} \{a_i\},$$
$$b = \min_{i \in \{1, \ldots, n\}} \{b_i\},$$

entonces $x \in [a, b) \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ y por tanto x es un punto interior y U es un abierto.

(b) Sea $\mathcal{B} = \{[a, b) : a \in X, b \in X \cup \{\infty\}\}$, comprobamos que

i) $\forall x \in X, x \in [x, \infty) \in \mathcal{B}$.

ii) $\forall a, b, c, d \in X \cup \{\infty\}$, si $[a, b) \cap [c, d) \neq \varnothing$, entonces,

$$\alpha = \max\{a, c\},$$
$$\beta = \min\{b, d\},$$
$$[a, b) \cap [c, d) = [\alpha, \beta).$$

y por tanto $\forall x \in [a, b) \cap [c, d), x \in [\alpha, \beta) \subseteq [a, b) \cap [c, d)$, y $[\alpha, \beta) \in \mathcal{B}$.

(c)

	(a,b)	$[a,b)$	$(a,b]$	$[a,b]$	$\{0\}\cup\{1/n\}_{n\geq 1}$	$\{0\}\cup\{-1/n\}_{n\geq 1}$
Adherencia	$[a,b)$	$[a,b)$	$[a,b]$	$[a,b]$	$\{0\}\cup\{1/n\}_{n\geq 1}$	$\{0\}\cup\{-1/n\}_{n\geq 1}$
Interior	(a,b)	$[a,b)$	(a,b)	$[a,b)$	$\varnothing$	$\varnothing$
Frontera	$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{0\}\cup\{1/n\}_{n\geq 1}$	$\{0\}\cup\{-1/n\}_{n\geq 1}$
Acumulación	$[a,b)$	$[a,b)$	$[a,b)$	$[a,b)$	$\{0\}$	$\varnothing$
Puntos aislados	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{b\}$	$\{b\}$	$\{1/n\}_{n\geq 1}$	$\{0\}\cup\{-1/n\}_{n\geq 1}$

Ejercicio 2.3. Este ejercicio aún no está resuelto.

Ejercicio 2.4. (a) Para ver que son una topología, tenemos que comprobar que:

i) $K^n = V(\{0\})$ y $\varnothing = V(\{x-x_1, x-x_2\})$ (con $x_1 \neq x_2$).

ii) La unión de dos conjuntos $V(I_1), V(I_2) \in K^n$ es parte de la topología.

Tomamos los susodichos subconjuntos $V(I_1)$ y $V(I_2)$. Veremos ahora que la unión pertenece a la topología:

Para todo $f_\alpha \in I_1$ tomamos el conjunto $f_\alpha I_2$ (el producto de f_α por cada elemento de I_2). Y ahora, consideramos el conjunto

$$I = \bigcup_{f_\alpha \in I_1} f_\alpha I_2$$

Por último, comprobaremos que $V(I_1)\cup V(I_2) = V(I)$. Es trivial que si $x \in V(I_1)$ entonces $x \in V(I)$, ya que x anula a tosos los elementos del conjunto I_1 y por lo tanto también a los de $f_\alpha I_2$ ($f_\alpha \in I_1$). Análogamente, si $x \in V(I_2)$, $x \in V(I)$.

Ahora, $\forall x \in V(I)$. Suponemos que $x \notin V(I_1)$ por lo tanto, existe una $f_\alpha \in I_1$ tal que $f_\alpha(x) \neq 0$. Como $x \in V(I)$, x anula a $f_\alpha I_2$, como $f_\alpha(x) \neq 0$ entonces $x \in V(I_2)$ y análogamente para $V(I_2)$.

Con lo cual deducimos que $V(I_1)\cup V(I_2) = V(I)$ y la unión finita de cerrados, es cerrado.

iii) La intersección arbitraria de cerrados es cerrada.

Tomamos una familia arbitraria de cerrados $\{V(I_\alpha)\}_\alpha$. Consideramos el conjunto

$$I = \bigcup_\alpha I_\alpha$$

Y vermos que $\cap V(I_\alpha) = V(I)$. Si $x \in V(I) \implies x \in V(I_\alpha)$ $(\forall \alpha)$, ya que si x anula a todo I, en particular anula a un subconjunto de I (I_α). Y si x anula a I_α para todo α por definición, $x \in V(I)$.

(b) En el caso $n = 1$, obtenemos la topología de los complementos finitos. De forma trivial un conjunto finito de puntos es cerrado:

$$\{x_1, \ldots, x_n\} = V\Big(\{(x-x_1)\cdots(x-x_n)\}\Big).$$

Suponemos ahora que existe un subconjunto cerrado C con un número no finito de elementos (y distinto del total). Entonces $C = V(I)$ para algún I. Como $C \neq K$, $\exists f \in I$ y todo elemento de C anula a f. Pero esto es imposible, ya que un polinomio tiene un número finito de raices. Por lo tanto no existe un conjunto cerrado con infinitos elementos.

(c) Si K es finito, entonces K^n tmbién es finito y podemos suponer que

$$K^n = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}.$$

Consideramos ahora el polinomio

$$f(x) = (x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)$$

Ahora, de forma trivial, $V(\{f\}) = K^n \setminus \{x_1\}$, de donde se deduce que x_1 es abierto. Como esta construcción se puede hacer para cualquier punto x_i, cualquer punto es abierto, y por lo tanto la topología es la discreta.

(d) Para el caso $n = 1$ ya lo hemos demostrado en el apartado anterior. Ahora, procederemos a demostrar el paso de inducción: Suponemos que existe un polinomio

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

que se anula en todo $[0,1]^n$. Entonces, el polinomio

$$\begin{aligned} f'\colon \mathbb{R}^{n-1} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x, 1) \end{aligned}$$

Se anula en todo $[0,1]^{n-1}$, lo cual es una contradicción con la hipótesis de inducción. De aquí deducimos que la topología euclideana es más fina, ya que contiene más cerrados (como hemos visto, la de Zariski no contiene ningún cerrado que contenga a I^n, y como tiene más cerrados, tiene más abiertos.

(e) Primero, "traducimos" la definición de Hausdorff a cerrados: Un espacio es Hausdorff, si $\forall x, y \in X$, $\exists C_1 \not\ni x, C_2 \not\ni y$ tales que $C_1 \cup C_2 = X$. Ahora, veremos que no existen cerrados C_1 y C_2 no triviales tales que su unión sea el total.

Suponemos que existen dichos cerrados $C_1 = V(I_1)$ y $C_2 = V(I_2)$, como hemos visto en el primer apartado, $C_1 \cup C_2 = V(I)$ donde $I = I_1 I_2$ (simplificando la notación del primer apartado). Como la unión es el total y la única familia de polinomios que se anula en todo $\mathbb{R}^n$ es $\{0\}$, ya que, si se anula en todo $\mathbb{R}^n$, en particular se anula en $[0,1]^n$. Entonces $I_1 I_2 = \{0\}$, por lo tanto, o bien I_1, o bien I_2 son el conjunto formado por el polinomio 0. Con lo cual o bien C_1, o bien C_2 son el total, contradicción con la suposición de que fueran abiertos no triviales.

(f)

Ejercicio 2.5. Como viene siendo costumbre, para demostrar que $\mathcal{T}$ es una topología debemos ver que cumple las propiedades de esta:

i) El vacío es un abierto de $\mathbb{R}$ que no contiene 0.

ii) $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \left\{0^-, 0^+\right\} \in \mathcal{T}$.

iii) $\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} U_i' \setminus \{0\} \cup S_i = \left(\bigcup_{i\in I} U_i'\right) \setminus \{0\} \cup \bigcup_{i\in I} S_i = V \setminus \{0\} \cup S \in \mathcal{T}$. Los S_i son vacíos si $0 \notin U_i$ y en caso contrario $S_i \subseteq \left\{0^-, 0^+\right\}$. Se ha usado que la unión de abiertos en $\mathbb{R}$ es un abierto.

iv) $\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcap_{i=1}^{n} U_i' \setminus \{0\} \cup S_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i'\right) \setminus \{0\} \cup \bigcap_{i=1}^{n} S_i = V \setminus \{0\} \cup S \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ no es Hausdorff puesto que cualquier abierto que contenga 0^+ debe contener un intervalo alrededor del 0 en $\mathbb{R}$ y lo mismo es cierto para 0^-, con lo que cualquier pareja de abiertos que los contenga tendrá intersección no nula. $\mathcal{T}$ no es la topología métrica de una distancia dado que cualquier topología métrica es Hausdorff: Dados dos puntos x, y distintos, la bola abierta con centro x y radio $\frac{d(x,y)}{2}$ y la bola con centro y y de mismo radio tienen intersección nula (es consecuencia directa de la desigualdad triangular), pero contienen a sus respectivos centros.

Ejercicio 2.6. Este ejercicio aún no está resuelto

Ejercicio 2.7. Sea $\mathcal{T}$ una topología y X un espacio topológico. Por definición de ψ se tiene que $\forall A \subseteq X$, $\psi(A) = \overline{A}$ es un cerrado de $\mathcal{T}$. Por lo tanto, podemos definir un conjunto de abiertos de $\mathcal{T}$ como

$$\mathcal{B} = \{B \subseteq X \mid \exists A \subseteq X \text{ t. q. } B = X \setminus \psi(A)\}$$

que son abiertos por ser el complementario de un cerrado ($\overline{A}$ es el cerrado más pequeño que contiene a A).

Ahora demostraremos que $\mathcal{B}$ es una base de la topología $\mathcal{T}$.

Primero veamos que

$$X \setminus \psi(\varnothing) = X \setminus \varnothing = X \in \mathcal{B}$$
$$X \setminus \psi(X) = X \setminus X = \varnothing \in \mathcal{B}.$$

Entonces tenemos lo siguiente:

i) $\forall x \in X, \exists A \subseteq$ t. q. $\overline{A} \cap \{x\} = \varnothing \implies x \in B = X \setminus \psi(A)$. En concreto podemos coger $A = \varnothing$.

ii) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y sea $x \in X$ t. q. $x \in B_1 \cap B_2$. Entonces

$$\begin{aligned} x \in B_1 \cap B_2 = (X \setminus \psi(A_1)) \cap (X \setminus \psi(A_2)) = X \setminus (\psi(A_1) \cup \psi(A_2)) = \\ = X \setminus \psi(A_1 \cup A_2) = X \setminus \psi(\psi(A_1 \cup A_2)), \end{aligned}$$

y como $A = \psi(A_1 \cup A_2) \subseteq X$, $B = X \setminus \psi(A) \in \mathcal{B}$, tenemos que $\exists B \in \mathcal{B}$ t. q. $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es la base de una topología (de $\mathcal{T}$), lo que nos dice que como $\mathcal{B}$ son los mínimos abiertos que debe contener una topología que cumpla que $\psi(A) = \overline{A}$ y una base define una única topología, existe una única topología $\mathcal{T}$ que lo cumple.

Ejercicio 2.8.

(a) Este conjunto no es una base porque no es cierto que la intersección de dos elementos no disjuntos del conjunto contenga algún elemento de la base. Sin embargo, sí que es una subbase, ya que cualquier punto está contenido en algun elemento del conjunto.

(b) Este conjunto es una base porque cualquier punto está contenido en algún elemento del conjunto y porque la intersección de dos elementos no disjuntos del conjunto es, evidentemente, un elemento del conjunto. En particular, también es una subbase.

(c) Este conjunto es una base porque cualquier punto está contenido en algún elemento del conjunto y porque la intersección de dos elementos del conjunto contiene almenos un elemento del conjunto. Veamos esto último en detalle. Dados dos discos cualquiera, existe almenos un disco que contiene ambos, por ejemplo, un disco con centro el punto medio de los centros de los discos y con radio la suma de los radios de los dos discos y la distancia entre sus centros. Entonces, el exterior del disco que hemos definido está contenido en el exterior de los dos discos originales y, por tanto, de su intersección. En particular, también es una subbase.

(d) Este conjunto no es una base porque no es cierto que la intersección de dos elementos no disjuntos del conjunto contenga algún elemento de la base. Sin embargo, sí que es una subbase, ya que cualquier punto está contenido en algun elemento del conjunto.

(e) Este conjunto no es una base porque no es cierto que la intersección de dos elementos no disjuntos del conjunto contenga algún elemento de la base. Sin embargo, sí que es una subbase, ya que cualquier punto está contenido en algun elemento del conjunto.

(f) Este conjunto no es una base porque no es cierto que la intersección de dos elementos no disjuntos del conjunto contenga algún elemento de la base. Sin embargo, sí que es una subbase, ya que cualquier punto está contenido en algun elemento del conjunto.

(g) Este conjunto no es una base porque no es cierto que la intersección de dos elementos no disjuntos del conjunto contenga algún elemento de la base. Sin embargo, sí que es una subbase, ya que cualquier punto está contenido en algun elemento del conjunto.