RESUM DE PROGRAMACIÓ MATEMÀTICA

OSCAR BENEDITO

ApuntsFME
Universitat Politècnica de Catalunya
Barcelona

GENER 2018

Índex

1 Introducció a la programació lineal no entera i símplex primal

Definició 1.1 *Direcció bàsica factible*

Una DBF sobre la SBF $x \in P_e$ associada a $q \in \mathcal{N}$ és $d = \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tal que:

- $d_{N(i)} \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1 & N(i) = q \\ 0 & N(i) \neq q \end{cases}, \forall i \in \{1, \dots, n-m\}$,
- $A(x + \theta d) = b$ per algun $\theta \in \mathbb{R}^+ \implies d_B \overset{\text{def.}}{=} -B^{-1} A_q$.

Proposició 1.2 *Càlcul de θ^**
Calculem $\theta^* \overset{\text{def.}}{=} \max\left\{\theta > 0 \,|\, y = x + \theta d \in P_e\right\}$:

1. $A(x + \theta d) = b$, $\forall\theta$ és cert.

2. $y = x + \theta d \geq 0$:

$$x_{B(i)} + \theta d_{B(i)} \geq 0 \iff \theta \geq -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}},$$
$$\theta^* = \min_{i \in \{1,\ldots,m\} \,|\, d_{B(i)} < 0} \left\{-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}}\right\}.$$

Proposició 1.3
Sigui d una DBF sobre x, una SBF de P_e,

1. Si P_e és no degenerat, d és factible:

   a) $d_B \ngeq 0 \implies \theta^* > 0$.

   b) $d_B \geq 0 \implies \theta^*$ no definida, $\forall\theta > 0, x + \theta d \in P_e$, d és un raig extrem.

2. Si P_e degenerat ($\exists i \in \mathcal{B}$ tal que $x_{B(i)} = 0$) d pot no ser factible:

$$\min\left\{-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}}\right\} = 0 \implies \nexists\theta > 0 \text{ t. q. } y = x + \theta d \implies d \text{ infactible}$$

Proposició 1.4
Siguin q i $B(p)$ les variables que entren i surten de la base, respectivament,

$$\bar{\mathcal{B}} := \left\{\bar{B}(1), \ldots, \bar{B}(m)\right\}, \text{ on } \bar{B}(i) = \begin{cases} B(i) & i \neq p \\ q & i = p \end{cases},$$

i la nova base és

$$\bar{B} = \left[A_{B(1)}, \ldots, A_{B(p-1)}, A_q, A_{B(p+1)}, \ldots, A_{B(m)}\right].$$

Definició 1.5 *DBF de descens*

- d és una DBF de descens si $\forall\theta > 0, c'(x + \theta d) < c'x \iff c'd < 0$.

- Si d és DBF sobre x (SBF), $c'x + \theta^* c'd = c'x + \theta^* r_q$ i
  - $r_q = c'd$.
  - Si P_e no degenerat, llavors la DBF d associada a $q \in \mathcal{N}$ és de descens $\iff$ $r_q < 0$.

Teorema 1.6 *Condicions d'optimalitat de SBF*

a) $r \geq [0] \implies x$ és SBF òptima.

b) x SBF i no degenerada $\implies r \geq [0]$.

Algorisme del símplex primal (1.7)

1. **Inicialització**: Trobem una SBF $(\mathcal{B}, \mathcal{N}, x_B, z)$.
2. **Identificació de la SBF òptima i selecció VNB entrant**:
   - Calculem els costos reduïts: $r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_n$.
   - Si $r' \geq [0]$, llavors és la SBF òptima. **STOP!**

   Altrament seleccionem una q tal que $r_q < 0$ (VNB entrant).
3. **Càlcul de DBF de descens**:
   - $d_B = -B^{-1} A_q$
   - Si $d_B \geq [0]$, DBF de descens il·limitat $\implies$ (PL) il·limitat. **STOP!**
4. **Càlcul de θ^* i $B\,(p)$**:
   - Càlcul de θ^*:
   $$\theta^* = \min_{i \in \{1,\ldots,m\} \,|\, d_{B(i)} < 0} \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\}.$$
   - Variable bàsica de sortida: $B\,(p)$ tal que $\theta^* = -\frac{x_{B(p)}}{d_{B(p)}}$.
5. **Actualitzacions i canvi de base**:
   - $x_B := x_B + \theta^* d_B$,
     $x_q := \theta^*$,
     $z := z + \theta^* r_q$.
   - $\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{B\,(p)\} \cup \{q\}$,
     $\mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{q\} \cup \{B\,(p)\}$.
6. **Anar** a 2.

Observació 1.8 *Fase 1 del símplex*
A la fase 1 del símplex resolem el problema:

$$(P_I) \begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \\ \text{s.a.:} \\ \quad (1) \quad Ax + Iy = b \\ \quad (2) \quad x, y \geq 0 \end{cases}$$

El resultat pot ésser:

- $z_I^* > 0 \implies (P)$ infactible.
- $z_I^* = 0 \implies (P)$ factible. Dos casos:
  - $\mathcal{B}_I^*$ no conté variables $y \implies \mathcal{B}_I^*$ és SBF de (P).

- $\mathcal{B}_I^*$ conté alguna variable y. Tenim que $y_B^* = [0] \implies \mathcal{B}_I^*$ és SBF degenerada de (P_I) i per tant podem obtenir una SBF de (P) a partir de $\mathcal{B}_I^*$.

Regla de Bland (1.9)
Usem la regla de Bland per a no entrar en bucle al utilitzar el símplex per a resoldre un problema degenerat.

1. Seleccionem com VNB d'entrada la VNB d'índex menor que compleix $r_q < 0$.
2. Si al seleccionar la variable de sortida hi ha empat, seleccionem la VB amb índex menor.

2 Teoria de dualitat

Teorema feble de dualitat (2.1)
Sigui x SBF de (P) i λ SBF del (D) associat, llavors

$$\lambda' b \leq c' x.$$

Corol·lari 2.2

- (P) il·limitat $\implies$ (D) infactible.
- (D) il·limitat $\implies$ (P) infactible.

Teorema fort de dualitat (2.3)
Siguin x^*, λ^* solucions òptimes de (P) i el seu dual (D), respectivament, llavors

$$(\lambda^*)' \, b = c' x^*.$$

Corol·lari 2.4
Si $(P)_e$ de rang complet amb solució, llavors (D) té solució i òptim a $\lambda' = c_B' B^{-1}$.

Teorema de folga complementària (2.5)
Siguin x, λ solucions factibles de (P) i (D), respectivament. x, λ són solucions òptimes si i només si

$$\begin{aligned} \lambda_j \left(a_j' x - b_j \right) = 0, &\quad \forall j \in \{1, \ldots, m\}, \\ (c_i - \lambda' A_i) \, x_i = 0, &\quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Definició 2.6 *Solució bàsica factible dual*
Sigui $(P)_e$, una SBFD és tota SB de $(P)_e$ tal que $r \geq [0]$.

Algorisme del símplex dual (2.7)

1. **Inicialització**: Trobem una SBFD $(\mathcal{B}, \mathcal{N}, x_B, z)$.
2. **Identificació de la SBF òptima i selecció VB sortint**:
   - Si $x_B \geq [0]$, llavors és la SBF òptima. **STOP!**

   Altrament seleccionem VB p amb $x_{B(p)} < 0$ (VB sortint).
3. **Càlcul de DBF de** $(D)_e$:

- $d_{r_N} = \left(\beta_p A_N\right)'$ (β_p és la fila p-èssima de B^{-1}).
- Si $d_{r_N} \geq [0]$, $(D)_e$ il·limitat. **STOP!**

4. **Càlcul de θ^* i selecció de la VNB entrant**:
   - Càlcul de θ^*_D:
   $$\theta^*_D = \min_{j\in\mathcal{N}\,|\,d_{r_{N_j}}<0} \left\{ -\frac{r_j}{d_{r_{N_j}}} \right\}.$$
   - Variable no bàsica entrant: q tal que $\theta^* = -\frac{x_q}{d_{r_{N_q}}}$.

5. **Actualitzacions i canvi de base**:
   - $r_N := r_N + \theta^*_D d_{r_N}$,
   $\lambda := \lambda - \theta^*_D \beta'_p$,
   $r_{B(p)} := \theta^*_D$,
   $z := z - \theta^* x_{B(p)}$.
   - $\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \left\{B\left(p\right)\right\} \cup \{q\}$,
   $\mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{q\} \cup \left\{B\left(p\right)\right\}$.

6. **Anar** a 2.

Proposició 2.8
Una SBFD òptima és degenerada ($\exists j \in \mathcal{N}$ tal que $r_j = 0$) si i només si $(P)_e$ té òptims alternatius.

Proposició 2.9
Si $(P)_e$ no té cap SBFD degenerada, el símplex dual convergeix amb un nombre finit d'iteracions. Altrament, podem usar la regla de Bland (1.9) per a que convergeixi amb un nombre finit d'iteracions.

3 Programació lineal entera

Observació 3.1
La següent taula explica les relacions possibles entre un (PLE) i la seva relaxació lineal (RL).

$(PLE) \setminus (RL)$	Solució òptima	Infactible	Il·limitat
Solució òptima	Sí	No	Sí ($A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$) No ($A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{Q})$)
Infactible	Sí	Sí	Sí
Il·limitat	No	No	Sí

En aquest resum falta una part important de programació lineal entera, per a més informació, consulteu els apunts de classe!

4 Programació no lineal sense restriccions

Teorema 4.1 *Condicions necessàries d'optimalitat*
Sigui $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un problema d'optimització no lineal $\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$. Si x^* és un mínim local de f i $f \in \mathscr{C}^2$ en un entorn de x^*, llavors:

i) $\nabla f(x^*) = 0$. (Condició de 1r ordre)

ii) $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$. (Condició de 2n ordre)

Teorema 4.2 *Condicions suficients d'optimalitat*
Si $f \in \mathscr{C}^2$ en un entorn obert de x^*, $\nabla f(x^*) = 0$ i $\nabla^2 f(x^*)$ és definida positiva, llavors x^* és mínim local estricte de f.

Teorema 4.3 *Condicions d'optimalitat en problemes convexos*
Si f és convexa i diferenciable, llavors $\nabla f(x^*) = 0 \iff x^*$ és mínim global de f.

Mètode del Gradient (4.4)
$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k, \quad d^k = -\nabla f\left(x^k\right)$.
α^k ha de complir les condicions d'Armijo-Wolfe.

Mètode de Newton (4.5)
$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k, \quad d^k = -\left(\nabla^2 f\left(x^k\right)\right)^{-1} \nabla f\left(x^k\right)$.
α^k ha de complir les condicions d'Armijo-Wolfe, normalment $\alpha^k = 1$.

Proposició 4.6 *Condicions d'Armijo-Wolfe*

i) Condició de descens suficient (AW-1):
$g(\alpha) \leq g(0) + \alpha c_1 g'(0)\,,\ c_1 \in (0,1)$.
$f\left(x^k + \alpha d^k\right) \leq f\left(x^k\right) + \alpha c_1 \nabla f\left(x^k\right)^t d^k$, $c_1 \in (0,1)$.

ii) Condició de corbatura (AW-2):
$g'(\alpha) \geq c_2 g'(0)\,,\ 0 < c_1 < c_2 < 1$.
$\nabla f\left(x^k + \alpha d^k\right)^t d^k \geq c_2 \nabla f\left(x^k\right) d^k$, $0 < c_1 < c_2 < 1$.

5 Programació no lineal amb restriccions

Donat el problema:

$$(P)\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.a.:} \\ \quad (1) \quad h(x) = 0 \\ \quad (2) \quad g(x) \leq 0 \end{cases}$$

amb $\mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = f(x) + \lambda^t h(x) + \mu^t g(x)$.

Proposició 5.1 *Condicions necessàries*
Sigui x^* òptim local. Si és punt regular, llavors $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}^m$ i $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ tals que:

i) $h(x^*) = 0$, $g(x^*) \leq 0$.

ii) $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda^* + \nabla g(x^*)\mu^* = 0$.

iii) $\mu^* \geq 0$ i $(\mu^*)^t g(x^*) = 0$ (si $g_i(x^*)$ és inactiva, llavors $\mu_j^* = 0$).

iv) $d^t \nabla^2_{x_i x_j} \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) d \geq 0, \forall d \in M = \begin{cases} (\nabla h_i(x^*))^t d = 0 & i \in \{1, \ldots, m\} \\ (\nabla g_j(x^*))^t d = 0 & j \in \mathcal{A}(x^*) \end{cases}$

Els punts i, ii i iii són les condicions de 1r ordre del KKT i el punt iv és la condició de 2n ordre.

Nota: $\mathcal{A}(x^*) = \left\{j \in \{1, \ldots, p\} \mid g_j(x) = 0\right\}$ és el conjunt d'índex de desigualtats actives a x.

Proposició 5.2 *Condicions suficients*
Sigui x^*, és òptim local si satisfà:

i) $h(x^*) = 0$, $g(x^*) \leq 0$.

ii) $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) + \nabla h(x^*) \lambda^* + \nabla g(x^*) \mu^* = 0$.

iii) $\mu^* \geq 0$ i $(\mu^*)^t g(x^*) = 0$ ($g_i(x^*) < 0 \implies \mu_j^* = 0$).

iv) $d^t \nabla^2_{x_i x_j} \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) d > 0, d \in M' = \begin{cases} (\nabla h_i(x^*))^t d = 0 & i \in \{1, \ldots, m\} \\ (\nabla g_j(x^*))^t d = 0 & j \in \mathcal{A}(x^*) \cap \left\{j \mid \mu^* > 0\right\} \end{cases}$

Els punts i, ii i iii són les condicions de 1r ordre del KKT i el punt iv és la condició de 2n ordre.

Nota: $\mathcal{A}(x^*) = \left\{j \in \{1, \ldots, p\} \mid g_j(x) = 0\right\}$ és el conjunt d'índex de desigualtats actives a x.