Teoria de Topologia

Oscar Benedito
Jordi Castellví
Ernesto Lanchares
Ferran López
Miquel Ortega

ApuntsFME
Barcelona, Octubre 2018

Índex

1 Espais topològics 2AN i espais separables

Definició 1.1. Un espai topològic X es diu que satisfà el segon axioma de numerabilitat (2AN) si té una base de cardinal numerable.

Exemple 1.2. Amb la topologia usual, $\mathbb{R}$ té una base numerable: la família de tots els intervals oberts (a, b) amb $a, b \in \mathbb{Q}$. Anàlogament, també $\mathbb{R}^n$ té una base numerable:

$$B = \{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \,|\, a_i, b_i \in \mathbb{Q}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Definició 1.3. Es diu que un conjunt A és dens en X si $\overline{A} = X$. Un espai s'anomena separable si té un subconjunt numerable dens.

Exemple 1.4. Tenim que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Com que $\mathbb{Q}$ és numerable, $\mathbb{R}$ és separable. Més generalment, $\mathbb{R}^n$ és separable perquè admet $\mathbb{Q}^n$ com a subconjunt dens.

Proposició 1.5. Un espai mètric X és 2AN si i només si és separable.

Demostració. Sigui $\mathcal{B}$ una base numerable de X. Per a cada $B \in \mathcal{B}$, prenem un punt $x_B \in B$ qualsevol. Llavors, com és fàcil de comprovar, el conjunt $\{x_B\}_{B\in\mathcal{B}}$ és dens.

Sigui A un subconjunt numerable dens de l'espai. Llavors

$$\mathcal{B} = \left\{ B_{1/n}(a) \mid a \in A,\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

és una base numerable de l'espai. És numerable perquè és reunió numerable de conjunts numerables. A més, és una base ja que sigui x un punt qualsevol i U un entorn obert seu. Com que x és interior a U, $\exists n > 0$ tal que $B_{1/n}(x) \subset U$, llavors $B_{1/2n}(x) \cap A \neq \varnothing$ perquè A és dens en X. Sigui $a \in B_{1/2n}(x) \cap A \subseteq U \cap A$, tenim que $x \in B_{1/2n}(a)$. Vegem que $B_{1/2n}(a) \subset U$. Sigui $y \in B_{1/2n}(a)$, per la desigualtat triangular es té

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

i, per tant, $y \in B_{1/n}(x) \subset U \implies x \in B_{1/2n}(a) \subseteq B_{1/n}(x) \subset U$. □

2 Topologia quocient

Observació 2.1. Siguin X un conjunt i $\sim$ una relació d'equivalència, llavors $X/\sim$ és el conjunt de classes d'equivalència. Si $f\colon X \to Y$ exhaustiva, definim $x \sim x' \iff f(x) = f(x')$ i tenim que

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon X/\sim &\to Y \\ [x] &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

és bijectiva.

Definició 2.2. Sigui X un espai topològic. Siguin $Y \subset X$ i $\pi\colon X \to Y$ exhaustiva. Diem que Y té la topologia quocient per π si els oberts de Y són

$$\mathcal{T}_Y = \left\{ V \subseteq Y \mid \pi^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \right\}.$$

Proposició 2.3. Propietats:

1. La topologia quocient de Y per π és la més fina que fa π contínua.
2. Sigui $g \circ \pi\colon X \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{g} Z$. g és contínua $\iff$ $g \circ \pi$ és contínua.

Demostració. Vegem-ho.

1. Immediat per la definició de topologia quocient.
2. La implicació cap a la dreta: $g \circ \pi$ és contínua perquè és composició de contínues.

   La implicació cap a l'esquerra: Sigui $W \subseteq Z$ obert, $g^{-1}(W) \subseteq Y$ és obert ja que

   $$(g \circ \pi)^{-1}(W) \text{ obert} \implies \pi^{-1}\left(g^{-1}(W)\right) \text{obert} \implies g^{-1}(W) \text{ obert}.$$

$\square$

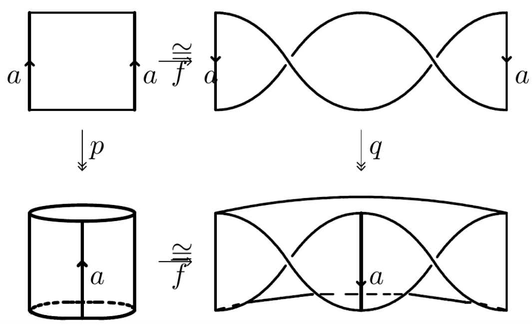
Proposició 2.4. *Tallar i enganxar.* Siguin $f\colon X \to Y$ un homeomorfisme i $\sim_X$, $\sim_Y$ relacions d'equivalència a X i a Y tals que $x \sim_X x' \iff f(x) \sim_Y f(x')$, llavors f indueix un homeomorfisme $\overline{f}\colon X/\sim \to Y/\sim$.

Demostració. Com que $x \sim x' \implies f(x) \sim f(x')$, f indueix una aplicació $\overline{f}\colon X/\sim \to Y/\sim$ que fa commutatiu el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ X/\sim \arrow[r, "\overline{f}"] & Y/\sim \end{tikzcd}$$

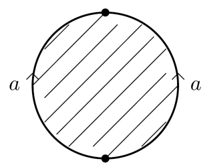
Com que $q \circ f$ és contínua, per la propietat universal de la topologia quocient de $X/\sim$, $\overline{f}$ és contínua. Si f és bijectiva, com que $x \sim x' \iff f(x) \sim f(x')$, $\overline{f}$ és bijectiva. Apliquem el mateix raonament a f^{-1} per deduir que $\overline{f}^{-1}$ és contínua. $\square$

Exemple 2.5.

1. 

2. $\mathbb{D} = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\right\}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D} \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \mathbb{D}/\sim \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{S}^2 \end{tikzcd}$$



3. Altres: banda de Möbius, pla projectiu, ampolla de Klein, tor...

3 Espai compacte i compacitat del producte

Definició 3.1. Un espai topològic X és compacte si per tot recobriment obert $\mathcal{U}$ existeix un subrecobriment $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ finit.

Lema 3.2. *Lema del tub.* Siguin X i Y espais topològics, Y compacte. Sigui $x \in X$ i N obert de $X \times Y$ tal que $x \times Y \subset N$. Aleshores existeix $W \subset X$ obert tal que $x \times Y \subset W \times Y \subset N$.

Demostració. Per cada punt $(x, y) \in x \times Y$ prenem un obert $U_y \times V_y$ de la base de $X \times Y$ que el contingui, de manera que $(U_y \times V_y) \subset N$. El conjunt de tots els $U_y \times V_y$ és un recobriment obert de $x \times Y$.
Com que $x \times Y \cong Y$ és compacte, podem extraure un recobriment finit $(U_1 \times V_1) \cup \cdots \cup (U_n \times V_n)$ del recobriment anterior.
El conjunt $W = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ és obert de X perquè és intersecció finita d'oberts, i $x \times Y \subset W \times Y \subset (U_1 \times V_1 \cup \cdots \cup U_n \times V_n) \subset N$. □

Proposició 3.3. X, Y espais topològics i $X \times Y$ la topologia producte. Aleshores

$$X \times Y \text{ compacte } \iff X, Y \text{ compactes}$$

Demostració. Si $X \times Y$ és compacte i la projecció $\pi_X \colon X \times Y \to X$ és contínua, $\pi_X(X \times Y) = X$ és compacte. Anàlogament per Y.

Suposem que X i Y són compactes. Sigui $\mathcal{U}$ un recobriment obert de $X \times Y$. $x \times Y$ és compacte, per tant hi ha un recobriment finit $x \times Y \subset V_1 \cup \cdots \cup V_n$ amb elements de $\mathcal{U}$. Considerem $N = V_1 \cup \cdots \cup V_n$, pel lema del tub existeix un $x \in W \subset X$ tal que $x \times Y \subset W \times Y \subset N$. Per tant $V_1 \cup \cdots \cup V_n$ és un recobriment obert finit de $W \times Y$ amb elements de $\mathcal{U}$.
Ara, per cada $x \in X$ apliquem el lema del tub i obtenim un $x \in W_x$ tal que $W_x \times Y$ té un recobriment finit amb elements de $\mathcal{U}$. Els W_x formen un recobriment de X, i X és compacte, tenim un recobriment finit $X = W_1 \cup \cdots \cup W_n$. Per cada W_i prenem els V corresponents i obtenim un subrecobriment de $\mathcal{U}$ finit, per tant $X \times Y$ és compacte.
□

4 Tancats, Hausdorff i compacitat

Definició 4.1. Un espai topològic X és Hausdorff si $\forall\, x, y \in X$, $\exists\, U$, V oberts tals que $U \cap V = \varnothing$ i $x \in U$, $y \in V$.

Proposició 4.2. Tot supespai tancat d'un espai compacte és un espai compacte.

Demostració. Siguin X un espai compacte, $Y \subseteq X$ un tancat i $\mathcal{U}$ un recobriment de Y per oberts de X. Afegint l'obert $X \setminus Y$ obtenim un recobriment obert de X que, per ser X compacte, conté un subrecobriment finit. Els oberts d'aquest subrecobriment diferents de $X \setminus Y$ han de cobrir Y, i per tant formen un subrecobriment finit de $\mathcal{U}$. □

Exemple 4.3. La recta real amb la topologia de complements finits és un espai compacte i també ho és qualsevol subespai d'aquesta, però només són tancats els conjunts finits de punts, d'on un subespai compacte pot no ser tancat.

Proposició 4.4. Tot subespai compacte d'un espai de Hausdorff és tancat.

Demostració. Siguin X un espai de Hausdorff i $Y \subseteq X$ un subconjunt compacte. Vegem que $X \setminus Y$ és obert comprovant que tot punt $x_0 \in X \setminus Y$ és interior. Com X és de Hausdorff, per a cada $y \in Y$ existeixen oberts disjunts U_y, V_y tals que $x_0 \in U_y, y \in V_y$. La família $\{V_y\}_{y \in Y}$ forma un recobriment obert de Y. Per ser Y compacte, conté un subrecobriment finit $Y \subseteq V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$. Considerem els oberts

$$V = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n},\, U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n},$$

que són disjunts ja que si $z \in V$, aleshores existeix y_i tal que $z \notin U_{y_i}$, d'on $z \notin U$. Per tant, $U \subseteq X \setminus Y$. ☐

Proposició 4.5. Sigui $f : X \longrightarrow Y$ una aplicació contínua i bijectiva. Si X és compacte i Y és de Hausdorff, aleshores f és un homeomorfisme.

Demostració. Hem de provar f^{-1} és contínua, però això és equivalent a que f sigui tancada. Sigui C un tancat de X. Com X és compacte, C també ho és. Per ser imatge d'un compacte per una aplicació contínua, $f(C)$ és compacte i per la proposició anterior, com Y és de Hausdorff, també és tancat. ☐

5 Espais connexos

Definició 5.1. Sigui X un espai topològic. Una descomposició de X consisteix en dos subconjunts $U, V \subseteq X$ no buits tals que

$$X = U \cup V, \quad \overline{U} \cap V = \varnothing, \quad U \cap \overline{V} = \varnothing.$$

Podem observar que U i V són tancats i oberts de X i per tant donar una descomposició és equivalent a donar dos oberts disjunts no buits U, V amb $X = U \cup V$.

Definició 5.2. Un espai topològic X s'anomena connex si no admet cap descomposició, és a dir, no existeixen oberts disjunts $U, V \subseteq X$ no buits tals que $X = U \cup V$.

Definició 5.3. Sigui X un espai topològic. Un camí de X és una aplicació contínua $\sigma : I = [0, 1] \longrightarrow X$.

Definició 5.4. Un espai topològic X s'anomena arc-connex si per a tot parell de punts $x, y \in X$ existeix un camí $\sigma : I \longrightarrow X$ tal que $\sigma(0) = x$ i $\sigma(1) = y$.

Exemple 5.5. Hi ha espais connexos que no són arc-connexos. Per construir-ne un exemple considerem el subconjunt de $\mathcal{R}^2$

$$C = ([0,1] \times \{0\}) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \right) \right) \cup (0,1)$$

que s'anomena "la pinta i la puça".

Proposició 5.6. Sigui X un espai topològic tal que per tota $x \in X$ existeix $x \in U$ obert arc-connex. Aleshores

$$X \text{ connex} \iff X \text{ arc-connex}$$

Demostració. La implicació conversa és una propietat dels espais arc-connexos en general. Vegem ara la implicació directa. Sigui C el component maximal arc-connex que conté x. Com $\forall\, y \in C$ existeix un obert arc-connex $y \in U$, per ser C maximal $y \in U \subseteq C$ i C és obert. Si C és l'únic component arc-connex aleshores $C = X$ i per tant X és arc-connex. En cas contrari, X és la unió disjunta de components arc-connexos, per tant $C = X \setminus \bigcup D$, on D són els altres components arc-connexos. Com hem vist, aquests són oberts i per tant C és tancat. Com C és tancat i obert $C \neq \varnothing$ i X és connex, $C = X$ i per tant X és arc-connex. □

6 Índexs

Teorema 6.1. *Teorema de la invariància de l'índex per homotopies.*
Siguin $f, g \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ corbes tancades i sigui $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \left(f\left(\mathbb{S}^1\right) \cup g\left(\mathbb{S}^1\right) \right)$. Aleshores,

$$\mu(f,p) = \mu(g,p) \iff f \simeq g \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R} \setminus \{p\}.$$

Teorema 6.2. *Teorema de Rouché.*
Siguin $f, g \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ corbes tancades. Aleshores,

$$d(f(z), g(z)) < d(f(z), p),\ \forall z \in \mathbb{S}^1 \implies \mu(f,p) = \mu(g,p).$$

Demostració.

$$d(f(z), g(z)) < d(f(z), p) \implies p \notin \overline{f(z)\, g(z)} \overset{\text{P-B}}{\implies} \mu(f,p) = \mu(g,p).$$

□

Teorema 6.3. *Teorema de Bolzano (dim 2).*
Sigui $F \colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}^2$ contínua, on $\mathbb{D}$ és el disc unitat tancat. Sigui $f = F_{|\mathbb{S}^1}$ i sigui $P \in \mathbb{R}^2$. Aleshores,

$$\mu(f,P) \neq 0 \implies \exists Q \in \mathbb{D} \text{ t.q. } F(Q) = P.$$

Demostració. Suposem que $\mu(f,P) \neq 0$ i que $\nexists Q \in \mathbb{D}$ t. q. $F(Q) = P$.

$$\begin{array}{lclcl} \mathbb{S}^1 \times I & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{D} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^2 \setminus \{P\} \\ (z,t) & \mapsto & zt & \mapsto & F(zt) \\ (z,0) & \mapsto & 0 & \mapsto & F(0) \\ (z,1) & \mapsto & z & \mapsto & F(z) = f(z) \end{array}$$

Tenim, doncs, que $F \circ \pi$ és una homotopia entre f i la funció constant zero. Finalment, pel teorema d'invariància de l'índex d'homotopies, tenim que $\mu(f,P) = 0$ i hem incoregut en una contradicció. $\square$

Teorema 6.4. *Teorema del punt fix de Brouwer.*
Sigui $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$ la bola tancada unitat de centre 0 i sigui $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ contínua. Aleshores, f té un punt fix.

Demostració. Només demostrarem el cas $n = 2$. Suposem que f no té cap punt fix. Definim $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{S}^1$, de manera que $g(x)$ és la intersecció de la semirecta amb origen $f(x)$ que passa per x amb $\mathbb{S}^1$. Vegem que g és contínua. Tenim que

$$g(x) = x + \lambda \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}, \qquad \lambda \geq 0.$$

Com que $g(x) \in \mathbb{S}^1$, podem imposar $\|g(x)\|^2 = 1$

$$\begin{aligned} \|g(x)\|^2 &= \left\langle x + \lambda \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}, x + \lambda \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|} \right\rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + 2 \left\langle x, \lambda \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|} \right\rangle + \left\langle \lambda \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}, \lambda \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|} \right\rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + 2\lambda \left\langle x, \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|} \right\rangle + \lambda^2 = 1. \end{aligned}$$

Ara, aïllem λ i ens quedem amb la solució positiva

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-2 \left\langle x, \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|} \right\rangle + \sqrt{4 \left\langle x, \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|} \right\rangle^2 - 4\left(\langle x, x \rangle - 1\right)}}{2} = \\ &= -\left\langle x, \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|} \right\rangle + \sqrt{1 + \left\langle x, \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|} \right\rangle^2 - \langle x, x \rangle}. \end{aligned}$$

L'expressió que ens dóna λ és contínua i, per tant, g també ho és. Però aleshores g és una retracció i incorrem en una contradicció amb el teorema de no retracció. $\square$

7 Superfícies

Definició 7.1. Sigui M un espai topològic. Direm que M és una varietat de dimensió n si:

i) M és Hausdorff

ii) M és $2AN$

iii) $\forall x \in M$, $\exists U \ni x$ obert i un homeomorfisme $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ (M localment homeomorf a $\mathbb{R}^n$)

Exemple 7.2.

1. $n = 1$, són corbes, per exemple $\mathbb{R}$ o $\mathbb{S}$. Més en general:
   - No s'admeten autointerseccions
   - No podem afegir límits (extrems) a les corbes.
2. $n = 2$, són superfícies.
3. Que M hagi de ser Hausdorff i $2AN$ és per evitar patologies (com els punts dobles) i a més ens permet triangular
4. Superfícies poligonals: $\mathbb{T}$, $\mathbb{K}$ (són compactes i convexes)
5. Superfícies estàndard: superfícies poligonals corresponents a les paraules.

Teorema 7.3. Tota superfície S compacta i connexa és homeomorfa a una única superfície estàndard.

- $A_0\colon aa^{-1}(g = 0) \to A_0 \cong \mathbb{S}^2$
- $A_g\colon a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}(g \geq 1) \to A_g \cong g\mathbb{T}$ (g-tors)
- $B_g\colon a_1a_1 \cdots a_ga_g(g \geq 1) \to B_g \cong g\mathbb{P}^2$ (g-plans projectius)

(g és el gènere de la superfície)

Definició 7.4. S és no orientable si conté una cinta de Möbius. S és orientable en cas contrari.

Exemple 7.5.

1. $g\mathbb{P}^2$, $g \geq 1$ no és orientable.
2. $g\mathbb{T}^2$, $g \geq 0$ sí que és orientable. ($g = 0$, $A_0 \rightsquigarrow \mathbb{S}^2$)
3. $S \cong S' \implies$ tenen la mateixa orientabilitat. De fet, dues superfícies són homeomorfes si tenen el mateix gènere i la mateixa orientabilitat.

Definició 7.6. Sigui (S, T) una superfície triangulada, definim la característica d'Euler de T per

$$\chi(s, t) = v - a + c$$

On v són els vèrtex, a les arestes i c les cares.

Teorema 7.7. $\chi(S)$ és independent de la triangulació.

Exemple 7.8.

1. $\chi(\text{poligonal}) = \cdots = 1 + v' - n$. Amb v', # de punts que són imatge dels vèrtexs del poligon.

2.
$$\chi(\text{estàndard})\colon \quad \begin{aligned} &\chi(A_0) = 2 \\ &\chi\left(g\mathbb{T}^2\right) = 2 - 2g \\ &\chi\left(g\mathbb{P}^2\right) = 2 - g \end{aligned}$$

Definició 7.9. Siguin S, S' superfícies, $D \subset S$, $D' \subset S'$ discs tancats i $h\colon \partial D \to \partial D'$ homeomorfisme llavors

$$S\#S' = \frac{\left(S \setminus \mathring{D}\right) \cup \left(S' \setminus \mathring{D}'\right)}{h\colon \partial D \to \partial D'}$$