

Formulari de càlcul integral

El formulari consta de dues cares. Tot i així, la primera cara **no** correspon al contingut del parcial.

Assegura't que tens l'última versió el dia de l'examen!

Última modificació: 21:54, 22 de juny de 2018

ApuntsFME



C. Cauchy (sèries): $\sum a_n$ conv.
 $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ t. q. $m > n \geq n_0$ llavors,
 $|s_m - s_n| = |a_{n+1} + \dots + a_m| < \varepsilon$.
 • La convergència és lineal i associativa.
 Sèries geomètriques: $\sum_{n \geq 1} \alpha^n$ conv. sii
 $\alpha \in (-1, 1)$, oscil·lant sii $\alpha = -1$, div.
 altrament.

1 Sèries n. positius

Dins aquest apartat les successions són totes de termes positius.

C. comp. dir.: $a_n \leq b_n \forall n \geq n_0 \implies \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \implies (\sum b_n \text{ conv.} \implies \sum a_n \text{ conv.})$ i $(\sum a_n \text{ div.} \implies \sum b_n \text{ div.})$.

C. comp. al límit: $\lim \frac{a_n}{b_n} = l \in [0, +\infty]$. Si $l < \infty$, $\sum b_n$ conv. $\implies \sum a_n$ conv.. Si $l > 0$, $\sum a_n$ conv. $\implies \sum b_n$ conv.

C. arrel Cauchy: (a_n) positiva i

$\exists \lim a_n^{1/n} = \alpha \implies (\alpha > 1 \text{ div.})$ i $(\alpha < 1 \text{ conv.})$.

C. quo. Alambert: (a_n) estr. pos. i $\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha \implies (\alpha > 1 \text{ div.})$ i $(\alpha < 1 \text{ conv.})$.

C. Raabe: (a_n) estr. pos. i $\exists \lim n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = L \implies (L > 1 \text{ conv.})$ i $(L < 1 \text{ div.})$.

C. Leibniz sèr. alt.: (a_n) decr. i $\lim a_n = 0$, llavors $\sum (-1)^n a_n$ és conv.. A més, $|s - s_N| < a_{n+1}$.

C. de la integral: $a_n = f(n), f \geq 0$ int. i decreixent, $\int_M^{\infty} f$ convergeix $\iff \sum a_k$ convergeix i $\sum_M^{\infty} = \sum_M^{N-1} + \int_N^{\infty} f + \varepsilon_N$, $\varepsilon_N \in [0, a_N]$.

C. logarítmic: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log a_n}{\log n} = L \implies (L > 1 \text{ conv.})$ i $(L < 1 \text{ div.})$.

C. condensació: a_n decreixent, $a_n \geq 0$, $\sum a_n$ convergent $\iff \sum 2^n a_{2^n}$ convergent.
Sèrie Rie.: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$ és conv. sii $p > 1$, div. altrament.

2 Altres sèries

• Sèrie cond. conv. \implies podem reordenar per tal que $\sum = s \in [-\infty, +\infty]$.

Sèrie alternada: un pos., un neg., ...

C. Dirichlet: Si s_n d' (a_n) fitades i (b_n) decr., $\lim b_n = 0$, llavors $\sum a_n b_n$ convergeix.

3 Sèries de potències

Radi de convergència: Màxim r t. q. $\sum a_n r^n$ és conv.

Domini de conv.: $(-R, R)$, on R és radi de conv.. És possible que convergeixi als externs.

T. Cauchy-Hadamard: Sigui $\sum a_n x^n, R$ ve donada per $\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n}$. La sèrie de potències és abs. conv. si $|x| < R$ i div. si $|x| > R$. Si $|x| = R$ no sabem res.

Càlcul radi de conv.: $\frac{1}{R} = \lim |a_n|^{1/n}$ o $\frac{1}{R} = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

4 Integrals impròpies

• La convergència d'integrals és lineal.

C. Cauchy per a int. impròpies:

$f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. $\int_a^b f$ és conv.
 $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists c_0 \in [a, b)$ t. q. si $c_1, c_2 > c_0$, llavors $\left| \int_{c_1}^{c_2} f \right| < \varepsilon$.

C. comp. dir.: $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}, f, g > 0, f \leq g$ localment integrables. Aleshores $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. Si la segona conv., la primera també. Si la primera div., la segona també.

C. comp. al límit: $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}, f, g > 0$ localment integrables. Suposem $\exists \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Si $l < \infty$, $\int_a^b g$ conv. $\implies \int_a^b f$ conv.. Si $l > 0$, $\int_a^b f$ conv. $\implies \int_a^b g$ conv..

C. Dirichlet: $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ localment integrables. Suposem $\exists M > 0$ t. q. si

$a < c < b$, $\left| \int_a^c f(x) dx \right| \leq M$ i g decreixent amb

$\lim_{x \rightarrow b} g = 0$. Aleshores $\int_a^b fg$ és conv..

5 Integrals a rectangles

Suma inf. del rect.:

$m_R = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x), s(f; \mathcal{P}) = \sum_R m_R \text{vol}(R)$.

Suma sup. del rect.:

$M_R = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x), S(f; \mathcal{P}) = \sum_R M_R \text{vol}(R)$.
 Si \mathcal{P}' més fina que \mathcal{P} :

$s(f; \mathcal{P}) \leq s(f; \mathcal{P}') \leq S(f; \mathcal{P}') \leq S(f; \mathcal{P})$.

• $\int_A f = \sup_{\mathcal{P}} s(f; \mathcal{P})$, $\bar{\int}_A f = \inf_{\mathcal{P}} S(f; \mathcal{P}) \rightarrow$ si són iguals, f és integrable Riemann.

C. Riemann: f int. Rie.

$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \mathcal{P}$ t. q. $S(f; \mathcal{P}) - s(f; \mathcal{P}) < \varepsilon$.

• Integrabilitat Riemann és lineal.

Suma de Rie.: Siguin $\xi_k \in R_k$, la suma és $R(f; \mathcal{P}; \xi) = \sum_k f(\xi_k) \text{vol}(R_k)$.

6 Mesura nul·la

Mesura nul·la: Recobert per numerables rectangles de mesura $< \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

Contingut nul: Mesura nul·la amb un nombre finit de rectangles.

• Si un conjunt té un punt interior, no és de mesura nul·la.

Quadrat: volum: c^n , diàmetre: $c\sqrt{n}$ (a \mathbb{R}^n , on c costat).

• Sigui $z \subset \mathbb{R}^n$ mesura nul·la. $\forall \varepsilon, \exists$ família numerable de quadrats compactes Q_k t. q. $z \in \bigcup_k Q_k, \sum \text{vol}(Q_k) < \varepsilon$.

• Sigui $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ classe \mathcal{C}^1 o lipschitziana, $z \subset U$ mesura nul·la, llavors $f(z) \subset \mathbb{R}^n$ té mesura nul·la.

7 Teorema de Lebesgue

• Sigui X espai mètric, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, l'oscil·lació de f sobre $E \subset X$ és el diàmetre de $f(E)$: $\omega(f, E) = \sup_{x, y \in E} d(f(x), f(y)) \in [0, +\infty]$.
 Finita $\iff f|_E$ fitada, $0 \iff f|_E$ constant.

Oscil·lació en $a \in X$: $\omega(f, a) = \lim_{r \rightarrow 0} \omega(f, B(a; r)) = \inf_{r > 0} \omega(f, B(a; r))$.

• f cont. en $a \iff \omega(f, a) = 0$.

T. Lebesgue: Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$ rectangle compacte, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fitada. Llavors f és integrable Riemann $\iff \text{disc}(f)$ és de mesura nul·la \iff contínua gairebé pertot.

8 Integral de Riemann

• $C \subset \mathbb{R}^n$ és admissible o mesurable Jordan si és fitat i $\text{Fr}(C)$ té mesura nul·la.

• $\text{Fr}(A \cup A'), \text{Fr}(A \cap A'), \text{Fr}(A \setminus A') \subseteq$

$\text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(A')$.

• $\text{Fr}(A \times B) = (\text{Fr}(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \text{Fr}(B))$.

• $A, A' \subset \mathbb{R}^n$ admissibles

$\implies A \cup A', A \cap A', A \setminus A'$ admissibles.

• $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$ admissibles

$\implies A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ admissible.

• Els rectangles fitats i les boles euclidianes són admissibles.

Funció característica de $C \subset X$: (o indicatriu) $\chi_C: X \rightarrow \mathbb{R}, \chi_C(x) = 1$ si $x \in C$, val 0 altrament.

• χ no és contínua a $\text{Fr}(C) \implies (C \text{ adm.} \iff C \text{ fitat i } \forall R, \exists \int_R \chi_C \text{ t. q. } C \subset R)$.

• $g: E \rightarrow \mathbb{R}, \bar{g}: X \rightarrow \mathbb{R}(\bar{g}(x) = 0, \forall x \notin E)$. Aleshores $\text{disc}(g) \subseteq \text{disc}(\bar{g}) \subseteq \text{disc}(g) \cup \text{Fr}(E)$.

• $f \chi_C$ integrable Rie. en $\mathbb{R} \iff \text{disc}(f)$ de mesura nul·la.

Pel T. Lebesgue: $C \subset \mathbb{R}^n$ admissible.

$f: C \rightarrow \mathbb{R}$ és integrable Rie. $\iff \text{disc}(f)$ mesura nul·la.

• Si C adm., $\text{vol}(C) = \int_C 1$ és la mesura (o contingut) de Jordan o volum (n -dimensional) de C .

• $C \subset \mathbb{R}^n$ té contingut nul $\iff C$ adm. i $\text{vol}(C) = 0$.

9 Propietats de la int. de Rie.

• Sigui $E \subset \mathbb{R}^n$ mesurable Jordan, $\text{Rie}(E) = \{f | f \text{ int. Rie. en } E\}$ és un \mathbb{R} -e.v. i Rie: $E \rightarrow \mathbb{R}, \text{Rie}(f) = \int_E f$ és una forma lineal positiva i monòtona.

T. valor mitjà per a integrals: Sigui E m.J., $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ int. Rie.. $m \leq f \leq M \implies m \text{vol}(E) \leq \int_E f \leq M \text{vol}(E)$.

• E m.J. connex, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ fitada i cont., $\exists x_0 \in E$ t. q. $\int_E f = f(x_0) \text{vol}(E)$.

• E m.J., $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ int. Rie., $h: f(E) \rightarrow \mathbb{R}$ cont., $h \circ f$ és int. Rie..

• f, h int. Rie. no implica $h \circ f$ int. Rie..

• f int. Rie. $\implies |f|$ int. Rie. i $\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$.

• f, g int. Rie. $\implies f \times g$ int. Rie..

• Siguin $A, B \subset \mathbb{R}^n$ m.J. $f: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ fitada.

Si f és int. Rie. a A i B , aleshores ho és a $A \cap B$ i a $A \cup B$ i es compleix:

$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A \cap B} f$.

• E m.J., $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ positiva i int. Rie., aleshores $\int_E f = 0 \iff f$ nul·la gairebé pertot.

• Dues funcions int. i iguals gairebé pertot tenen la mateixa integral (tot i que canviar els valors en un conjunt de mesura nul·la pot destruir la integrabilitat).

10 Teorema de Fubini

T. Fubini: $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$ rect. comp., $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ int. Rie.. Sigui $\Phi: A \rightarrow \mathbb{R}$ t. q. $\int_B f(x, y) \leq \Phi(x) \leq \bar{\int}_B f(x, y)$.

Aleshores Φ int. Rie. i

$\int_{A \times B} f = \int_A \Phi, (A \leftrightarrow B \text{ també})$.

• $x \in A$ t. q. $f(x, y)$ no int. Rie. té mesura nul·la.

• $D \subset X, f: D \rightarrow \mathbb{R}$ cont., $E = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} | x \in D, y \geq f(x)\}$, llavors $(D \subset X \text{ tancat} \implies E \subset X \times \mathbb{R} \text{ tancat})$ i $(\text{Fr}(E) \subset \text{graf}(f) \cup (\text{Fr}(D) \times \mathbb{R}))$.

• $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ comp., m.J., $\varphi, \psi: D \rightarrow \mathbb{R}$ cont. t. q. $\varphi \leq \psi, E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} | x \in D, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\} \subset \mathbb{R}^n$ és compacte i m.J.. (Si $f: E \rightarrow \mathbb{R}, \int_E f = \int_D dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy f(x, y)$).

Regió elemental: A \mathbb{R} és un interval compacte. Si no és de la forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} | x \in D, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$, on $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ és regió elemental i $\phi \leq \psi: D \rightarrow \mathbb{R}$ contínues.

11 Canvi de variables

• Sigui $V \subset \mathbb{R}^n$ obert, $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ injectiva, classe \mathcal{C}^1 amb $\det d\varphi(y) \neq 0, \forall y \in V$. Sigui $U = \varphi(V)(\varphi: V \rightarrow U$ difeo. classe \mathcal{C}^1). Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ int., $\int_U f = \int_V (f \circ \varphi) |\det d\varphi|$.

11.1 Alguns canvis de variables

Polars a \mathbb{R}^2 :
 $\int_U f(x, y) \, dx \, dy = \int_V f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi$.
Cilíndriques a \mathbb{R}^3 : $\int_U f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_V f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$.
Esfèriques a \mathbb{R}^3 : $\int_U f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_V f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta$.

12 Integrals impròpies

Exhaustió: $E \subset \mathbb{R}^n$. (E_i) m.J tals que $E_i \subset E$, $E_i \subset E_{i+1}$, $\bigcup E_i = E$

Integral de Riemann impròpia: Sigui (E_i) exhaustió, és $\int_E f := \lim_i \int_{E_i} f$ (suposant que no depengui de l'exhaustió).

- Si E m.J., (E_i) exh., $\lim_i \text{vol}(E_i) = \text{vol}(E)$, i si $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ int. Rie., f és int. Rie. a cada E_i i int. Rie. coincideix amb la int. impròpia.
- Siguin $E \subset \mathbb{R}^n, f: E \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$, llavors $\lim_i \int_{E_i} f$ no depèn de l'exh. considerada.
- Lema ceba: Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ obert no buit, $\exists (V_i)$ de conj. oberts m.J., $\bar{V}_i \subset U$ t.q. \bar{V}_i és compacte, $\bar{V}_i \subset V_{i+1}$, $\bigcup V_i = U$.

13 Camins i long. de corba

Longitud d'una poligonal:
 $L(\gamma, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^N \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$.
Longitud d'una corba:
 $\bar{L}(\gamma) = \sup_{\mathcal{P}} L(\gamma, \mathcal{P}) \in [0, +\infty]$.
Camí rectificable: Si longitud és finita.
Additivitat camí: $a < c < b \implies L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]})$.
• Sigui $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, l(a) = 0$ i $l(t) = L(\gamma|_{[a,t]})$, $a < t \leq b, l: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ és creixent i continua.
• Si $\vec{f}: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ int., $\|\vec{f}\|$ també (norma euclidian).
• $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ classe $\mathcal{C}^1 \implies$ rectificable i

$L(\gamma) = \int_I \|\gamma'\|$.
14 Integrals de línia
Int. de línia f. escalars:
 $\int_C f \, dl = \int_\sigma f \, dl := \int_I f(\sigma(s)) \|\sigma'(s)\| \, ds$.
Int. de línia c. vectorials: (o circulació) $\int_C \vec{f} \, d\vec{l} = \int_I \vec{f}(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s) \, ds$.
 τ i σ equivalents: $\int_\tau \vec{f} \, d\vec{l} = \pm \int_\sigma \vec{f} \, d\vec{l}$, signe és el de φ' .
Vector tangent a parametrització:
 $\vec{t}(\sigma(s)) = \frac{\sigma'(s)}{\|\sigma'(s)\|}$.
Component tangencial: $f_t = \vec{f} \cdot \vec{t}$.
• $\int_C \vec{f} \, d\vec{l} = \int_C f_t \, dl$.
15 Integrals de superfície
Vectors tangents: $\sigma: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$,
 $\vec{J}_\sigma = (\vec{T}_1 \ \vec{T}_2)$.
Int. de superfície f. escalars: $\sigma: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
 $\int_\sigma f \, dS = \int_U f(\sigma(\omega)) \|\vec{T}_1 \times \vec{T}_2\| \, d\omega_1 \, d\omega_2$.
Int. de superfície c. vectorials: (o flux a través de σ) $\sigma: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
 $\int_\sigma \vec{f} \, d\vec{S} := \int_U \vec{f}(\sigma(u)) \cdot (\vec{T}_1 \times \vec{T}_2) \, du_1 \, du_2$.
 σ difeo.: $\int_\sigma \vec{f} \, d\vec{S} = \pm \int_\sigma \vec{f} \, d\vec{S}$, signe de $\det J_\sigma$.
Vector normal a sup.: $\vec{n}(\sigma(u)) = \frac{\vec{T}_1 \times \vec{T}_2}{\|\vec{T}_1 \times \vec{T}_2\|}$.
Component normal: $f_n = \vec{f} \cdot \vec{n}$.
• $\int_M \vec{f} \, d\vec{S} = \int_M f_n \, dS$.
16 Operadors dif. a \mathbb{R}^3
Gradient: $\text{grad } f := \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$.
Rotacional: $\text{rot } \vec{F} := (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}) \hat{i} + (\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}) \hat{j} + (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) \hat{k}$.
Divergència: $\text{div } \vec{F} := \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$.
Regles de Leibniz:
• $\text{grad}(fg) = f \text{grad } g + g \text{grad } f$,
• $\text{rot}(f\vec{G}) = f \text{rot } \vec{G} + \text{grad } f \times \vec{G}$,
• $\text{div}(f\vec{G}) = f \text{div } \vec{G} + \text{grad } f \cdot \vec{G}$,
• $\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \cdot \text{rot } \vec{G}$.
T. Schwarz:
 $f, \vec{F} \in \mathcal{C}^2 \implies \text{rot}(\text{grad } f) = 0, \text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$.
Camp conservatiu: $\vec{F} = \text{grad } f$.
Camp irrotacional: $\text{rot } \vec{F} = 0$.
Camp solenoidal: $\vec{G} = \text{rot } \vec{F}$.
Camp sense div.: $\text{div } \vec{G} = 0$.
Laplacià: $\Delta f := \text{div}(\text{grad } f)$,
 $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

17 Fórmules int. camps
T. fon. càlcul: (o gradient) $W \subseteq \mathbb{R}^n$ obert, $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ classe \mathcal{C}^1 . C corba regular orientada classe \mathcal{C}^1 , t. q. $\bar{C} \subset W$ compacte $\implies \int_C \text{grad } f \, d\vec{l} = \int_{\partial C} f = f(x_1) - f(x_0), \partial C = \{x_0, x_1\}$ (orientada $x_0 \rightarrow x_1$). $\partial C = \emptyset \implies \int_{\partial C} f = 0$.
T. Kelvin-Stokes: (o rotacional) $W \subseteq \mathbb{R}^3$ obert, $\vec{F}: W \rightarrow \mathbb{R}^3$ classe \mathcal{C}^1 , $M \subset W$ superfície orientada classe \mathcal{C}^2 t. q. \bar{M} compacte, $\bar{M} \subset W, \partial M$ * $\implies \int_M \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{l}$.
T. Gauss-Ostrogradski: (o divergència) $W \subset \mathbb{R}^3$ obert, $\vec{F}: W \rightarrow \mathbb{R}^3$ classe \mathcal{C}^1 , $B \subset W$ obert t. q. \bar{B} compacte, $\bar{B} \subset W, \partial B$ * $\implies \int_B \text{div } \vec{F} \, dV = \int_{\partial B} \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

18 Potencials

Potencial escalar: f és el pot. esc. de $\vec{F} \iff \text{grad } f = \vec{F}$.
Propietats: $U \subseteq \mathbb{R}^3$ obert connex, $\vec{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ classe \mathcal{C}^1 , són equivalents:
• \vec{F} conservatiu,
• $p_0, p_1 \in U, C \subset U$ corba orientada t. q. $\partial U = \{p_0, p_1\}$, circulació $\int_C \vec{F} \, d\vec{l} = f(p_0, p_1)$,
• $\forall C \subset U$ corba tancada, $\oint_C \vec{F} \, d\vec{l} = 0$.
• $U \subset \mathbb{R}^3$ obert simplement connex (def. apunts profe) i $\vec{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ classe \mathcal{C}^1 irrotacional $\implies \vec{F}$ conservatiu.

T. Green: $U \subseteq \mathbb{R}^2$ obert, $\vec{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ classe $\mathcal{C}^1, M \subset U$ obert t. q. $\bar{M} \subset U$ compacte, ∂M * $\implies \int_M (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) \, dx \, dy = \int_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{l}$.

19 Tema 5

• $(f \, dx^I) \wedge (g \, dx^J) = fg \, dx^I \wedge dx^J$.
• $\alpha \wedge \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \wedge \alpha$.
• $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) = \Omega^0(\mathbb{R}^n)$, podem construir $df := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$.
Diferencial exterior: Aplicació lineal, $d(f \, dx^I) = df \wedge dx^I$.
• $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge d\beta$.
• $d \circ d = 0$.
Tancada: α tancada $\iff d\alpha = 0$.
Exacta: β exacta $\iff \exists \alpha$ t. q. $\beta = d\alpha$.
• Exacta \implies tancada.
Lema Poincaré: En \mathbb{R}^n, α tancada i $|\alpha| \geq 1 \implies \alpha$ exacta.
Pullback: $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ classe \mathcal{C}^∞ ,

$g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, el pullback és $F^*(g) := g \circ F \in \mathcal{C}^\infty: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, F^*$ és \mathbb{R} -lineal, $F^*(g \, dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}) := F^*(g) \, dF^*(y^{i_1}) \wedge \dots \wedge dF^*(y^{i_k})$.
• $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*(\alpha) \wedge F^*(\beta)$.
• $F^*(dx) = dF^*(x)$.
Integral de ω al llarg de σ :
 $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n), \sigma: D \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n, \implies \int_\sigma \omega := \int_D \sigma^*(\omega)$.
T. Stokes: M varietat amb vora, orientada i $\dim M = m, \omega \in \Omega^{m-1}(M)$ de suport compacte i ∂M té orientació induïda $\implies \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$.

20.1 Altres. Volums n -dimensionals
Esfera: $S = 4\pi r^2, V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
Piràmide: $V = \frac{1}{3}bh$.
Con: $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} + \pi r^2$.
Casquet esfèric: $A = 2\pi Rh, V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$.
Parametrització el·lipse: $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = c^2 \implies \theta \mapsto c \cdot (a \cos(\theta), b \sin(\theta))$.

20.2 Altres. Integrals
• $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \, dx$ conv. $\iff \alpha > 1$ i és $\frac{1}{\alpha-1}$.
• $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \, dx$ conv. $\iff \alpha < 1$ i és $\frac{1}{1-\alpha}$.
• $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \, dt$ conv. $\iff \alpha > 0$ i és $\frac{1}{\alpha}$.
• $\int \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}) + C$.

20.3 Altres. Taylor
• $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.
• $\cos x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
• $\sin x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
• $\log(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.
• $(1+x)^p = \sum_{n \geq 0} \binom{p}{n} x^n$.
• $(1+x)^{-1} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$.

20.4 Altres. Trigonometria
• $\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$.
• $\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)$.
• $\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin(\frac{a+b}{2}) \cos(\frac{a-b}{2})$.
• $\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos(\frac{a+b}{2}) \cos(\frac{a-b}{2})$.

* amb orientació induïda (interior a l'esquerra) i punts frontera de M regulars o conjunt de punts frontera singulars és finit.
Nom: _____