RESUM DE PROGRAMACIÓ MATEMÀTICA

ApuntsFME

Barcelona, Octubre 2018

Autors: Òscar Benedito, Paolo Lammens.

Darrera modificació: 28 d'octubre de 2018.

Índex

Tema 1

Introducció a la programació lineal no entera i símplex primal

1.1 Poliedres

Definició 1.1.1. Un hiperplà és un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit com

$$H = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}'\boldsymbol{x} = b\}\,,$$

on $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ i s'anomena el vector normal de l'hiperplà, i $b \in \mathbb{R}$.

Definició 1.1.2. Donat un hiperplà $H = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}'\boldsymbol{x} = b\}$, es defineixen dos semiespais:

$$\begin{aligned} S_{\geq} &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}'\boldsymbol{x} \geq b\} \\ S_{\leq} &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}'\boldsymbol{x} \leq b\}\,. \end{aligned}$$

En referència a la definició 1.1.2, es diu informalment que el semiespai $S_{\geq}$ és el conjunt de punts que estan "per sobre" de l'hiperplà, i $S_{\leq}$, dels que estan "per sota".

Definició 1.1.3. Un poliedre P és un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit per una intersecció de semiespais:

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} \leq b_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}\}\,,$$

on $n, m \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$ i $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$.

1.2 Problemes de PL

Proposició 1.2.1. Un problema de PL és un problema de tipus

$$\min_{\boldsymbol{x} \in P}\{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}\}\,,$$

on P és un poliedre. Denotarem el problema corresponent com (P).

Definició 1.2.2. Si un problema de PL té un poliedre buit ($P = \varnothing$), direm que és infactible.

Definició 1.2.3. Sigui (P) un problema de PL. Si

$$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists \boldsymbol{x} \in P: \qquad \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \le k\,,$$

direm que (P) és il · limitat.

Definició 1.2.4. Si un problema (P) no és ni infactible ni il · limitat, direm que té solució òptima, o alternativament que té òptim.

1.3 Solucions bàsiques factibles

El fet que hi hagi solucions òptimes que siguin punts extrems no és de gran ajuda computacional per sí sol. Per tenir una caracterització computacionalment assequible cal el concepte de solució bàsica factible, que es defineix a continuació.

Definició 1.3.1. Donat un poliedre en forma estàndard P_e associat a un problema de programació lineal, una solució bàsica és un vector $\boldsymbol{x} \in P_e$ del qual es pot fer la partició $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_\mathcal{B} \mid \boldsymbol{x}_\mathcal{N}]$ tal que

i) $\mathcal{B}, \mathcal{N} \subseteq \{1, \dots, n\}$ són conjunts complementaris d'índexos i $|\mathcal{B}| = m$, on m és el nombre de restriccions (el nombre de files de la matriu A). $\mathcal{B}$ s'anomena el conjunt d'índexos de variables bàsiques o **base**, i $\mathcal{N}$ s'anomena el conjunt d'índexos de variables no bàsiques.

ii) $\boldsymbol{x}_\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_{\mathcal{B}(1)} & x_{\mathcal{B}(2)} & \cdots & x_{\mathcal{B}(m)} \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{x}_\mathcal{N} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_{\mathcal{N}(1)} & x_{\mathcal{N}(2)} & \cdots & x_{\mathcal{N}(n-m)} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$, on $\mathcal{B}(i)$ i $\mathcal{N}(i)$ denoten, respectivament, l'i-èsim índex de $\mathcal{B}$ i $\mathcal{N}$.

iii) La matriu definida per

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A_{\mathcal{B}(1)} & A_{\mathcal{B}(1)} & \cdots & A_{\mathcal{B}(m)} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

és no singular. Aquesta matriu s'anomena matriu bàsica.

Aquesta definició no és gaire intuïtiva; a continuació es presenta una versió alternativa basada en el poliedre general.

Definició 1.3.2. Donat un poliedre (general) $P \subseteq \mathbb{R}^n$ associat a un problema de programació lineal, direm que $\boldsymbol{x} \in P$ és una solució bàsica si és la intersecció de n hiperplans (associats cadascun a una restricció) linealment independents.

1.4 Direccions bàsiques factibles

Definició 1.4.1. Una DBF sobre la SBF $\boldsymbol{x} \in P_e$ associada a $q \in \mathcal{N}$ és $\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_\mathcal{B} \\ \boldsymbol{d}_\mathcal{N} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tal que:

- $d_{N(i)} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & N(i) = q \\ 0 & N(i) \neq q \end{cases}, \forall i \in \{1, \ldots, n-m\}$,

- $A(\boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{d}) = b$ per algun $\theta \in \mathbb{R}^+ \implies \boldsymbol{d}_{\mathcal{B}} \overset{\text{def}}{=} -B^{-1} A_q$.

Proposició 1.4.2. *Càlcul de θ^*.* Calculem $\theta^* \overset{\text{def}}{=} \max\{\theta > 0 \,|\, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{d} \in P_e\}$:

1. $A(\boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{d}) = b$, $\forall \theta$ és cert.

2. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{d} \geq 0$:

$$\boldsymbol{x}_{B(i)} + \theta d_{B(i)} \geq 0 \iff \theta \geq -\frac{\boldsymbol{x}_{B(i)}}{d_{B(i)}},$$
$$\theta^* = \min_{\{i \in \{1,\ldots,m\} | d_{B(i)} < 0\}} \left\{ -\frac{\boldsymbol{x}_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\}.$$

Proposició 1.4.3. Sigui $\boldsymbol{d}$ una DBF sobre $\boldsymbol{x}$, una SBF de P_e,

1. Si P_e és no degenerat, $\boldsymbol{d}$ és factible:

   a) $\boldsymbol{d}_{\mathcal{B}} \ngeq 0 \implies \theta^* > 0$.

   b) $\boldsymbol{d}_{\mathcal{B}} \geq 0 \implies \theta^*$ no definida, $\forall \theta > 0, \boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{d} \in P_e$, $\boldsymbol{d}$ és un raig extrem.

2. Si P_e degenerat ($\exists i \in \mathcal{B}$ tal que $\boldsymbol{x}_{B(i)} = 0$) $\boldsymbol{d}$ pot no ser factible:

$$\min \left\{ -\frac{\boldsymbol{x}_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\} = 0 \implies \nexists \theta > 0 \text{ t. q. } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{d} \implies \boldsymbol{d} \text{ infactible.}$$

Proposició 1.4.4. Siguin q i $B(p)$ les variables que entren i surten de la base, respectivament,

$$\bar{\mathcal{B}} := \left\{ \bar{B}(1), \ldots, \bar{B}(m) \right\}, \text{ on } \bar{B}(i) = \begin{cases} B(i) & i \neq p \\ q & i = p \end{cases},$$

i la nova matriu bàsica és

$$\bar{B} = \left[A_{B(1)}, \ldots, A_{B(p-1)}, A_q, A_{B(p+1)}, \ldots, A_{B(m)} \right].$$

Definició 1.4.5.

- $\boldsymbol{d}$ és una DBF de descens si $\forall \theta > 0, \boldsymbol{c}'(\boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{d}) < \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \iff \boldsymbol{c}'\boldsymbol{d} < 0$.

- Si $\boldsymbol{d}$ és DBF sobre $\boldsymbol{x}$ (SBF), $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \theta^* \boldsymbol{c}'\boldsymbol{d} = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \theta^* r_q$ i

  - $r_q = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{d}$.
  - Si P_e no degenerat, llavors la DBF $\boldsymbol{d}$ associada a $q \in \mathcal{N}$ és de descens $\iff$ $r_q < 0$.

Teorema 1.4.6. *Condicions d'optimalitat de SBF.*

a) $r \geq \mathbf{0} \implies \boldsymbol{x}$ és SBF òptima.

b) $\boldsymbol{x}$ SBF i no degenerada $\implies \boldsymbol{r} \geq \mathbf{0}$.

1.5 Algorisme del Símplex Primal

Algorisme 1.5.1. *del símplex primal.*

1. **Inicialització**: Trobem una SBF $(\mathcal{B}, \mathcal{N}, \boldsymbol{x}_{\mathcal{B}}, z)$.
2. **Identificació de la SBF òptima i selecció VNB entrant**:
   - Calculem els costos reduïts: $\boldsymbol{r}' = c'_N - c'_B B^{-1} A_n$.
   - Si $\boldsymbol{r}' \geq \mathbf{0}$, llavors és la SBF òptima. **STOP!**

   Altrament seleccionem una q tal que $r_q < 0$ (VNB entrant).
3. **Càlcul de DBF de descens**:
   - $\boldsymbol{d}_{\mathcal{B}} = -B^{-1} A_q$
   - Si $\boldsymbol{d}_{\mathcal{B}} \geq \mathbf{0}$, DBF de descens il $\cdot$ limitat $\implies (PL)$ il $\cdot$ limitat. **STOP!**
4. **Càlcul de θ^* i $B\left(p\right)$**:
   - Càlcul de θ^*:
   $$\theta^* = \min_{i \in \{1, \ldots, m\} \,|\, d_{B(i)} < 0} \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\}.$$
   - Variable bàsica de sortida: $B\left(p\right)$ tal que $\theta^* = -\frac{\boldsymbol{x}_{B(p)}}{d_{B(p)}}$.
5. **Actualitzacions i canvi de base**:
   - $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}} := \boldsymbol{x}_{\mathcal{B}} + \theta^* \boldsymbol{d}_{\mathcal{B}}$,
     $x_q := \theta^*$,
     $z := z + \theta^* r_q$.
   - $\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{B\left(p\right)\} \cup \{q\}$,
     $\mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{q\} \cup \{B\left(p\right)\}$.
6. **Anar** a 2.

Observació 1.5.2. *Fase 1 del símplex.* A la fase 1 del símplex resolem el problema:

$$(P_I) \begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{y}_i \\ \text{s.a.:} \\ \quad (1) \quad A\boldsymbol{x} + I\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\ \quad (2) \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \geq 0 \end{cases}$$

El resultat pot ésser:

- $z_I^* > 0 \implies (P)$ infactible.
- $z_I^* = 0 \implies (P)$ factible. Dos casos:
  - $\mathcal{B}_I^*$ no conté variables $\boldsymbol{y} \implies \mathcal{B}_I^*$ és SBF de (P).
  - $\mathcal{B}_I^*$ conté alguna variable $\boldsymbol{y}$. Tenim que $\boldsymbol{y}_B^* = \mathbf{0} \implies \mathcal{B}_I^*$ és SBF degenerada de (P_I) i per tant podem obtenir una SBF de (P) a partir de $\mathcal{B}_I^*$.

Regla 1.5.3. *de Bland.*
Usem la regla de Bland per assegurar la terminació del símplex en resoldre un problema degenerat.

1. Seleccionem com VNB d'entrada la VNB d'índex menor (lexicogràficament) que compleix $r_q < 0$.
2. Si al seleccionar la variable de sortida hi ha empat, seleccionem la VB amb índex menor.

Tema 2

Dualitat

2.1 Definició del problema dual

La idea intuïtiva[1] darrere de l'anomenat "problema dual" és la següent. Suposem que (P) és el següent problema lineal de minimització:

$$(P)\begin{cases}\min & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}\\ \text{s.a.} & A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ & \boldsymbol{x}\geq 0\end{cases}\quad .$$

En comptes de considerar el problema com està, trobant una solució òptima x^* que satisfaci estrictament les constriccions, podem pensar en una versió "relaxada" del problema, on minimitzem sense constriccions la mateixa funció objectiu, però sumant-li un cert terme que indica la "quantitat" amb la qual s'estan violant les constriccions.

Si, per cada [j-èsima] restricció, introduïm un paràmetre $\lambda_j \in \mathbb{R}$ que indiqui el "preu que implica violar la restricció", podem formular el mencionat problema "relaxat",

$$(\tilde{P})\begin{cases}\min & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda}'(\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x})\\ \text{s.a.} & \boldsymbol{x}\geq 0\end{cases}\quad ,$$

on $\boldsymbol{\lambda}$ és el vector dels preus λ_j (per tant és del mateix ordre que $\boldsymbol{b}$), i $\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x}$ es pot pensar com un vector que conté la quantitat amb què s'està violant cada constricció. Anomenem z la funció objectiu de (P) i $\tilde{z}(\boldsymbol{\lambda})$—en funció de $\boldsymbol{\lambda}$—la funció objectiu de $(\tilde{P})$. Noteu que si la constricció es satisfà estrictament, és a dir, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, llavors $b-A\boldsymbol{x}=0$, i per tant $z=\tilde{z}(\boldsymbol{\lambda})$.

Podem intuir que el valor de $\tilde{z}(\boldsymbol{\lambda})$ sempre serà menor o igual que z, ja que el problema $(\tilde{P})$ és una versió més "flexible" de (P)—el conjunt de solucions factibles és molt més ampli—i per tant es podrà aconseguir un mínim més petit (o almenys igual) que a (P); i, efectivament, per qualsevol x^* solució factible de (P),

$$\tilde{z}^*(\boldsymbol{\lambda}) \overset{\text{def}}{=} \min_{\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}}\{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda}'(\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x})\} \;\leq\; \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{\lambda}'(\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^*\,.$$

ja que $\quad \min A \leq a \quad$ per qualsevol conjunt A i element $a\in A$.

[1] L'explicació d'aquesta secció és una paràfrasi de *Introduction to Linear Optimization*, Bertsimas & Tsitsiklis, capítol 4, secció 1.

Per tant, si trobem $\boldsymbol{\lambda}$ tal que $\tilde{z}^*(\boldsymbol{\lambda})$ sigui màxim trobarem la fita inferior del valor òptim de la f.o. de (P) més ajustada (la més "propera"). Podem expressar això com el problema de PL

$$(D)\begin{cases}\max\limits_{\boldsymbol{\lambda}} & \tilde{z}^*(\boldsymbol{\lambda})\\ \text{s.a.} & \textit{(cap constricció)}\end{cases} \tag{2.1}$$

és una versió "primitiva" del que anomenem *problema dual* de (P). De fet, l'interès principal del dual és, com veurem més endavant al teorema fort de dualitat, que el valor en l'òptim de (D) coincideix amb el valor en l'òptim de (P)—és a dir, que la "fita inferior més ajustada" de l'òptim de (P) coincideix exactament amb aquest.

Segons la definició de $\tilde{z}^*(\boldsymbol{\lambda})$,

$$\begin{aligned}\tilde{z}^*(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\boldsymbol{x}\geq 0}\{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}'(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})\} = \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} + \min_{\boldsymbol{x}\geq 0}\{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}'A\boldsymbol{x}\} =\\ = \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} + \min_{\boldsymbol{x}\geq 0}\{(\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{\lambda}'A)\boldsymbol{x}\}\,.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Noteu que si

$$\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{\lambda}'A \leq \mathbf{0}\,,$$

tenint en compte que $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$, llavors podem fer $(\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{\lambda}'A)\boldsymbol{x}$ tant "negatiu" com vulguem, i per tant no és un cas que ens interessi pel problema (D)—que és un problema de maximització de $\tilde{z}^*(\boldsymbol{\lambda})$. En canvi, si

$$\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{\lambda}'A \geq \mathbf{0}\,,$$

llavors $\min_{\boldsymbol{x}\geq 0}\{(\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{\lambda}'A)\boldsymbol{x}\}$ és 0. Per tant només hem de tenir en compte els casos en què $\boldsymbol{\lambda}'A \leq \boldsymbol{c}'$. Podem fer un raonament similar pels problemes on $\boldsymbol{x} \leq 0$ o on $\boldsymbol{x}$ és lliure—vegeu la taula 2.1. En síntesi, continuant a partir de (2.2), el problema (D) que hem enunciat a (2.1) es pot reduir al següent:

$$(D)\begin{cases}\max\limits_{\boldsymbol{\lambda}} & \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b}\\ \text{s.a.} & \boldsymbol{\lambda}'A \leq \boldsymbol{c}'\end{cases}\,.$$

Ara continuem amb la definició formal de problema dual.

Definició 2.1.1. Donat un problema primal (P), el problema dual corresponent (denotat per (D)) es defineix segons la taula 2.1.

Proposició 2.1.2. *Equivalència de duals.* Donat un problema de PL qualsevol (P), són equivalents:

(i) El dual de (P)—que denotarem (D)

(ii) El dual de (P_e)—que denotarem (D^e)

(iii) La forma estàndard de (D)—que denotarem (D_e)

(iv) La forma estàndard de (D^e)—que denotarem (D^e_e)

	(P)		(D)
min	$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$	max	$\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b}$
s.a.	$\boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$	s.a.	$\lambda_i \geq 0$
	$\boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$		$\lambda_i \leq 0$
	$\boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$		λ_i lliure
s.a.	$x_j \geq 0$	s.a.	$\boldsymbol{\lambda}'A_j \leq \boldsymbol{c}$
	$x_j \leq 0$		$\boldsymbol{\lambda}'A_j \geq \boldsymbol{c}$
	x_j lliure		$\boldsymbol{\lambda}'A_j = \boldsymbol{c}$

Taula 2.1: Taula de transformació d'un problema primal al seu dual.

2.2 Propietats del dual

Teorema 2.2.1. *Teorema feble de dualitat.*
Per tota solució factible $\boldsymbol{x}$ d'un problema primal (P) i tota solució factible $\boldsymbol{\lambda}$ del dual (D) associat

$$\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}\,.$$

Demostració. Sigui $m \times n$ l'ordre de la matriu de restriccions A al problema primal. Definim, per cada $i \in \{1, \dots, m\}$ (per cada restricció de (P)) i per cada $j \in \{1, \dots, n\}$ (per cada variable de (P)), respectivament,

$$u_i \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_i(\boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x} - b_i)$$
$$v_j \stackrel{\text{def}}{=} (c_j - \boldsymbol{\lambda}'A_j)x_j\,.$$

Primerament, veiem que u_i i v_j sempre són positius. Si $\boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x} - b_i \geq 0$, llavors la i-èsima restricció de (P) serà de la forma

$$\boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x} \geq b_i\,,$$

i per tant la corresponent variable dual λ_i complirà $\lambda_i \geq 0$. D'altra banda, si $\boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x}_i - b_i \leq 0$ la variable dual λ_i serà negativa. Finalment, si $\boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x} - b_i = 0$, es té que $u_i = 0$ independentment de λ_i. Per tant $u_i \geq 0$ per tot i. Es pot fer un raonament similar per v_j.

Ara, observem que

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x} - \lambda_i b_i = \boldsymbol{\lambda}'A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b}\,, \tag{2.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \boldsymbol{\lambda}'A_j x_j = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}'A\boldsymbol{x}\,. \tag{2.4}$$

Si sumem (2.3) i (2.4) i tenim en compte que $u_i \geq 0$ i $v_j \geq 0$ per tot i i j, obtenim

$$\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_i = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \geq 0 \tag{2.5}$$

i per tant

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b}\,.$$

□

Corol · lari 2.2.2. *Coroll·llaris del teorema feble de dualitat (2.2.1).* Per qualsevol problema primal (P) i el seu dual (D):

i) (P) il·llimitat $\implies$ (D) infactible.

ii) (D) il·llimitat $\implies$ (P) infactible.

iii) Siguin $\boldsymbol{x}^* \in P$ i $\boldsymbol{\lambda}^* \in D$ solucions factibles del primal i del dual respectivament. Si $\boldsymbol{\lambda}^{*\prime}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^*$ llavors $\boldsymbol{\lambda}^*$ i $\boldsymbol{x}^*$ són solucions òptimes pel problema dual i primal respectivament.

Demostració.

i) Sigui $\boldsymbol{x}$ solució factible de (P) i $\boldsymbol{\lambda}$ solució factible de (D). Per hipòtesi (P) és il·llimitat i per tant

$$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists \boldsymbol{x} \in P: \qquad \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} < k\,.$$

Suposem que existís una solució dual $\boldsymbol{\lambda}$ factible. Llavors, pel teorema feble de dualitat, $\forall \boldsymbol{x} \in P$: $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$. D'altra banda, per la proposició anterior, tenim que $\exists \boldsymbol{x} \in P$: $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} > \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$—prenent el valor $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b}$ per $k \in \mathbb{R}$; contradicció. Per tant (D) és infactible.

ii) Sigui $\boldsymbol{\lambda}$ solució factible de (D) i $\boldsymbol{x}$ solució factible de (P). Per hipòtesi (D) és il·llimitat i per tant

$$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists \boldsymbol{\lambda} \in D: \qquad \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} > k\,.$$

Suposem que existís una solució primal $\boldsymbol{x}$ factible. Llavors, pel teorema feble de dualitat, $\forall \boldsymbol{\lambda} \in D$: $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$. D'altra banda, per la proposició anterior, tenim que $\exists \boldsymbol{\lambda} \in D$: $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} > \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$; contradicció. Per tant (P) és infactible.

iii) Pel teorema feble de dualitat, tenim que $\forall \boldsymbol{\lambda} \in D : \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^*$, i per tant, aplicant la hipòtesi,

$$\forall \boldsymbol{\lambda} \in D : \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{\lambda}^{*\prime}\boldsymbol{b}\,;$$

ergo, $\boldsymbol{\lambda}^*$ és l'òptim del dual (ja que és un problema de maximització). D'altra banda, novament pel teorema anterior, $\forall \boldsymbol{x} \in P : \boldsymbol{\lambda}^{*\prime}\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$, cosa que implica per hipòtesi que

$$\forall \boldsymbol{x} \in D : \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^* \leq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$$

i per tant $\boldsymbol{x}^*$ és un òptim.

□

Teorema 2.2.3. *Teorema fort de dualitat.*
Sigui (P) un problema primal i (D) el seu dual. Llavors (D) té òptim si i només si (P) té òptim. A més, si en tenen, el valor de la funció objectiu en l'òptim coincideix.

Demostració. Considerem la forma estàndard del problema primal (P),

$$(P_e)\begin{cases}\min & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}\\ \text{s.a.} & A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ & \boldsymbol{x}\geq 0\end{cases},$$

on la matriu A és d'ordre $m\times n$, i el dual corresponent (a P_e):

$$(D^e)\begin{cases}\max & \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b}\\ \text{s.a.} & \boldsymbol{\lambda}'A\leq \boldsymbol{c}'\end{cases},$$

Primer demostrarem que si (P_e) té òptim, (D^e) també. Si (P_e) té òptim, l'algorisme del símplex primal aplicat a (P_e) terminarà amb una SBF òptima $\boldsymbol{x}^*$ de (P_e), amb matriu bàsica B, tal que el vector de costos reduïts sigui no negatiu:

$$\mathbf{r}'=\boldsymbol{c_{\mathcal{N}}}'-\boldsymbol{c_{\mathcal{B}}}'B^{-1}A_{\mathcal{N}}\geq 0\,.$$

Sigui $\boldsymbol{\lambda}^*$ el vector definit per $\boldsymbol{\lambda}^{*\prime}\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{c_{\mathcal{B}}}'B^{-1}$. Demostrarem que $\boldsymbol{\lambda}^*$ és solució òptima de (D^e).

Primer hem de comprovar si és factible. Efectivament,

$$\boldsymbol{\lambda}^{*\prime}A=\boldsymbol{c_{\mathcal{B}}}'B^{-1}\Big[B|A_{\mathcal{N}}\Big]=\Big[\boldsymbol{c_{\mathcal{B}}}'\,\mathrm{Id}\quad \boldsymbol{c_{\mathcal{B}}}B^{-1}A_{\mathcal{N}}\Big]\leq\Big[\boldsymbol{c_{\mathcal{B}}}'\quad \boldsymbol{c_{\mathcal{N}}}'\Big]=\boldsymbol{c}'\,.$$

D'altra banda,

$$\boldsymbol{\lambda}^{*\prime}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c_{\mathcal{B}}}'B^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c_{\mathcal{B}}}'\boldsymbol{x}^*{}_{\mathcal{B}}=\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^*\,.$$

Aplicant el corol·llari 2.2.2, deduïm que $\boldsymbol{\lambda}^*$ és solució òptima de (D^e). Queda demostrat que si (P_e) té solució òptima existeix una solució òptima de (D^e) (i pel corol·llari mencionat produeixen el mateix valor de la f.o.).

Finalment, podem afirmar que aquest resultat és vàlid per els problemes que no estan en forma estàndard, ja que el problema (P) i el seu estàndard són equivalents—sempre es pot passar d'una solució de l'un a una solució de l'altre, i el valor de la f.o. en l'òptim és el mateix—, i el dual de l'estàndard—(D^e)—és equivalent al dual de (P). □

Corol · lari 2.2.4. *Corol·lari del teorema fort de dualitat (2.2.3).* Si $(P)_e$ és un problema factible i amb matriu de restriccions A de rang complet, i té una SBF òptima $\boldsymbol{x}^*$ amb matriu bàsica B, llavors (D) té solució factible òptima a $\boldsymbol{\lambda}'=\boldsymbol{c_{\mathcal{B}}}'B^{-1}$.

Noteu que, donada una SBF òptima primal $\boldsymbol{x}^*=B^{-1}\boldsymbol{b}$, la implicació "$\boldsymbol{\lambda}^{*\prime}=\boldsymbol{c_{\mathcal{B}}}'B^{-1}\implies\boldsymbol{\lambda}^*$ òptima dual", que hem trobat durant la demostració del teorema 2.2.3, és unidireccional: no tota solució òptima dual és de la forma $\boldsymbol{\lambda}'=\boldsymbol{c_{\mathcal{B}}}'B^{-1}$, on B és la matriu bàsica de la SBF òptima primal.

D'altra banda, però, donada una SB primal qualsevol $\boldsymbol{x}$ amb $\boldsymbol{r}\geq\mathbf{0}$—és a dir, una SBFD—, sent B la matriu bàsica de $\boldsymbol{x}$, llavors el vector $\boldsymbol{\lambda}$ definit per $\boldsymbol{\lambda}'\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{c_{\mathcal{B}}}'B^{-1}$ és una solució factible del problema dual, ja que

$$\boldsymbol{r}'\geq\mathbf{0}\iff\boldsymbol{c}'-\boldsymbol{c_{\mathcal{N}}}'B^{-1}A\geq\mathbf{0}\iff\boldsymbol{c}'-\boldsymbol{\lambda}'A\geq\mathbf{0}\iff\boldsymbol{\lambda}'A\leq\boldsymbol{c}'\,.$$

Utilitzarem aquest fet durant el desenvolupament del símplex dual per "aprofitar" l'estructura del símplex primal; a més, pel que hem vist al teorema 2.2.3, si en l'algorisme del símplex dual anem canviant de solució dual $\boldsymbol{\lambda}'$ que sigui de la forma $\boldsymbol{c_{\mathcal{B}}}'B^{-1}$, llavors, quan arribem a la solució òptima λ^*, haurem trobat la SBF òptima primal $\boldsymbol{x}^* = B^{-1}b$.

Teorema 2.2.5. *Teorema de folga complementària.*
Siguin $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}$ solucions factibles de (P) i (D), respectivament. Llavors $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{\lambda}$ són solucions òptimes si i només si

$$\begin{aligned} u_i &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda_i \left(\boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x} - b_i\right) = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \\ v_j &\stackrel{\text{def}}{=} \left(c_j - \boldsymbol{\lambda}' A_j\right) x_j = 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \ . \end{aligned}$$

Demostració. Demostrem primer que si $u_i = 0 \wedge v_j = 0$ per tot i i tot j, llavors $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{\lambda}$ són òptimes. Com hem vist a la demostració del teorema feble de dualitat—l'equació (2.5)—,

$$\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \, .$$

Sabent que $u_i = 0$ per tot i i $v_j = 0$ per tot j, tenim que

$$\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = 0 = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \, ,$$

i pel corol·llari 2.2.2 del teorema feble, $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{\lambda}$ són solucions òptimes per al problema respectiu.

Per demostrar la implicació recíproca, només cal notar que, com hem demostrat a la demostració del corol·llari 2.2.2, u_i i v_j sempre són no negatius, i per tant l'única manera de que es compleixi

$$\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = 0$$

és que $u_i = 0$ per tot i i $v_j = 0$ per tot j. Per tant només cal recórrer en sentit recíproc totes les implicacions de la demostració que acabem de fer. □

Noteu que el teorema 2.2.5 s'anomena de "folga complementària" perquè les expressions

$$(\boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x} - b_i) \quad \text{i} \quad (c_j - \boldsymbol{\lambda}' A_j)$$

es poden interpretar com les "folgues" associades a les restriccions primals i duals

$$A\boldsymbol{x} \lesseqqgtr \boldsymbol{b} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{\lambda}' A \lesseqqgtr \boldsymbol{c} \, ,$$

respectivament; "complementària" perquè la "folga" d'un problema està associada amb una component del vector variable de l'altre problema—$(\boldsymbol{a_i}'\boldsymbol{x} - b_i)$ amb λ_i i $(c_j - \boldsymbol{\lambda}' A_j)$ amb x_j.

Definició 2.2.6. Sigui (P) un problema de PL i sigui (P_e) la seva forma estàndard. Llavors, direm que tota solució bàsica $\boldsymbol{x}$ de $(P)_e$ tal que $\mathbf{r} \geq \mathbf{0}$ és una solució bàsica factible dual (SBFD).

Noteu que la definició 2.2.6 deriva directament dels resultats que hem obtingut durant la demostració del teorema fort de dualitat (2.2.3): extrapolant l'argument que vam utilitzar, per tota solució bàsica $\boldsymbol{x}$—d'una forma estàndard (P_e)—amb matriu bàsica B i un vector de costos reduïts no negatius, el vector $\boldsymbol{\lambda}' \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{c_{\mathcal{B}}}' B^{-1}$ és una solució factible del problema dual corresponent.

Observeu també que l'adjectiu "factible" en la definició de SBFD es refereix a una solució bàsica de (P_e), que **pot no ser factible** per a aquest (és a dir, que $\boldsymbol{x} \notin P_e$), que es *correspon*, però, a una **solució factible del problema dual** (D^e) corresponent: $\boldsymbol{\lambda} \overset{\text{def}}{=} (\boldsymbol{c_{\mathcal{B}}}' B^{-1})' \in D^e$. Potser ajuda pensar en "Solució bàsica factible dual" en dos blocs: "Solució bàsica" i "factible dual".

Per últim, noteu que si una solució bàsica $\boldsymbol{x}$ de (P_e) és factible dual (per tant és SBFD) i és alhora factible primal ($\boldsymbol{x} \in P_e \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$), llavors és solució òptima de (P_e), ja que és una solució factible amb $\boldsymbol{r} \geq \boldsymbol{0}$.

2.3 Símplex dual

Per desenvolupar l'algorisme del símplex dual, partirem de l'estructura general del símplex primal.

2.3.1 Forma estàndard del problema dual

Per poder emprar solucions bàsiques, hem de poder definir una forma estàndard del dual. Partirem amb la següent definició provisional.

Definició 2.3.1. *Forma estàndard del dual.* Sigui (P_e) un problema en forma estàndard i sigui (D^e) el seu dual:

$$(P_e)\begin{cases}\min & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ \text{s.a.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0\end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad (D^e)\begin{cases}\max & \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \\ \text{s.a.} & A'\boldsymbol{\lambda} \leq \boldsymbol{c}\end{cases} .$$

Definirem la forma estàndard del dual (diferent de la forma estàndard habitual), i la notarem amb $(D^e_{\tilde{e}})$ així:

$$(D^e) \rightsquigarrow (D^e_{\tilde{e}})\begin{cases}\min & -\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \\ \text{s.a.} & A'\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{\rho} \geq \boldsymbol{0}\end{cases} ,$$

on $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^n$ és un vector de variables de folga. Si definim la matriu $A^D \in \mathcal{M}_{n\times(m+n)}(\mathbb{R})$, el vector de variables $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{m+n}$ i el vector de "costos" del dual $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^{m+n}$ com segueix,

$$A^D \overset{\text{def}}{=} \left[A' \,\middle|\, \mathrm{Id}_n\right], \quad \boldsymbol{y} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix}\boldsymbol{\lambda} \\ \hline \boldsymbol{\rho}\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix}-\boldsymbol{b} \\ \hline \boldsymbol{0}\end{bmatrix},$$

podem reescriure $(D^e_{\tilde{e}})$ com segueix:

$$(D^e_{\tilde{e}})\begin{cases}\min & \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{g} \\ \text{s.a.} & A^D\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{\rho} \geq \boldsymbol{0}\end{cases} . \tag{2.6}$$

Ara considerem una SBFD del problema (P_e). Aquesta tindrà associada una base $\mathcal{B}$ de variables bàsiques, i com s'ha vist durant el desenvolupament del símplex primal, podem fer una partició de paràmetres i variables segons si estan associades a un índex de $\mathcal{B}$ o no—per exemple, partim la matriu A en $[B|A_{\mathcal{N}}]$. Podem aplicar aquesta partició al problema dual també. Donada una SBFD de (P_e) amb base $\mathcal{B}$, les constriccions del problema dual en forma estàndard $(D^e_{\tilde{e}})$ contingudes a $A^D\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ es particionen així,

$$A^D\boldsymbol{y} = \left[A' \,\middle|\, \mathrm{Id}_n\right] \left[\begin{array}{c}\boldsymbol{\lambda}\\ \hline \boldsymbol{\rho}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} B' & \mathrm{Id}_m & \varnothing \\ \hline A'_{\mathcal{N}} & \varnothing & \mathrm{Id}_{n-m}\end{array}\right] \left[\begin{array}{c}\boldsymbol{\lambda}\\ \hline \boldsymbol{\rho}\end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} B' & \mathrm{Id}_m & \varnothing \\ \hline A'_{\mathcal{N}} & \varnothing & \mathrm{Id}_{n-m}\end{array}\right] \left[\begin{array}{c}\boldsymbol{\lambda}\\ \hline \boldsymbol{\rho}_{\mathcal{B}} \\ \hline \boldsymbol{\rho}_{\mathcal{N}}\end{array}\right] \doteq \boldsymbol{c} = \left[\begin{array}{c}\boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}\\ \hline \boldsymbol{c}_{\mathcal{N}}\end{array}\right] , \tag{2.7}$$

on $\varnothing$ indica una submatriu nul·la, $\boldsymbol{\rho}_{\mathcal{B}}$ és un vector d'ordre m que conté totes les variables de $\boldsymbol{\rho}$ associades a índexos de la base $\mathcal{B}$, i $\boldsymbol{\rho}_{\mathcal{N}}$ conté la resta (variables de $\boldsymbol{\rho}$ associades a un índex de $\mathcal{N}$). Finalment, podem reescriure (2.7) com

$$A^D\boldsymbol{y} = \left[\begin{array}{c|c} B' & \varnothing \\ \hline A'_{\mathcal{N}} & \mathrm{Id}_{n-m}\end{array}\right] \left[\begin{array}{c}\boldsymbol{\lambda}\\ \hline \boldsymbol{\rho}_{\mathcal{N}}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c}\mathrm{Id}_m\\ \hline \varnothing\end{array}\right] \boldsymbol{\rho}_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c}\boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}\\ \hline \boldsymbol{c}_{\mathcal{N}}\end{array}\right] . \tag{2.8}$$

Ara bé, si restringim els vectors $\boldsymbol{\lambda}$ als que tenen la forma $\boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}'B^{-1}$ per una certa matriu bàsica (primal) B, llavors concloem el que s'enuncia a la proposició 2.3.2.

Proposició 2.3.2. Donat un problema primal en forma estàndard (P_e) i el seu dual $(D^e_{\tilde{e}})$ (segons la definició 2.3.1), si considerem només els vectors duals de la forma $\boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}'B^{-1}$ per una certa SBFD $\boldsymbol{x}$ de (P_e) amb matriu bàsica B, llavors $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}$, on $\boldsymbol{r}$ és el vector de costos reduïts associat a $\boldsymbol{x}$, i per tant

$$(D^e_{\tilde{e}}) \begin{cases} \min & -\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{b} \\ \text{s.a.} & A'\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{\rho} \geq \boldsymbol{0} \end{cases} , \quad \boldsymbol{y} = \left[\begin{array}{c}\boldsymbol{\lambda}\\ \hline \boldsymbol{r}_{\mathcal{B}} \\ \hline \boldsymbol{r}_{\mathcal{N}}\end{array}\right] .$$

Demostració. Sigui $\boldsymbol{x}$ una SBFD de (P) amb matriu bàsica B, i sigui $\boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}'B^{-1}$. Per la definició de SBFD, el vector de costos reduïts $\boldsymbol{r}$ associat a $\boldsymbol{x}$ és no negatiu. A més,

$$\boldsymbol{\lambda}'A = \boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}'B^{-1}A$$

i per tant

$$\boldsymbol{\lambda}'A + \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}'B^{-1}A + (\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}B^{-1}A) = \boldsymbol{c}' ;$$

és a dir, que les folgues $\boldsymbol{\rho}$ de la restricció $\boldsymbol{\lambda}'A + \boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{c}'$ coincideixen amb $\boldsymbol{r}$. □

2.3.2 SBF del poliedre dual

Ara, per poder utilitzar l'estructura del símplex primal en el desenvolupament del símplex dual, hem de trobar una manera de treballar amb solucions bàsiques factibles del poliedre $D^e_{\tilde{e}}$. Com veurem a la proposició 2.3.4, les solucions duals definides a 2.3.3 són SBF de $D^e_{\tilde{e}}$.

Definició 2.3.3. Donat un problema primal en forma estàndard (P_e) i una SBFD $\boldsymbol{x}$ d'aquest, amb matriu bàsica B i vector de costos reduïts $\boldsymbol{r}$, anomenarem "solució dual associada a la SBFD $\boldsymbol{x}$" al vector $\boldsymbol{y}$ tal que

$$\boldsymbol{y} = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{y}_{\mathcal{B}^D} \\ \hline \boldsymbol{y}_{\mathcal{N}^D} \end{array}\right], \quad \text{on } \boldsymbol{y}_{\mathcal{B}^D} = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\lambda} \\ \hline \boldsymbol{r}_{\mathcal{N}} \end{array}\right], \; \boldsymbol{y}_{\mathcal{N}^D} = \boldsymbol{r}_{\mathcal{B}} \doteq \mathbf{0}\,.$$

La última igualtat ($\boldsymbol{r}_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$) es satisfà, per definició de $\boldsymbol{r}$, per qualsevol SB de (P_e).

Podem aplicar la mateixa partició al vector $\boldsymbol{g}$,

$$\boldsymbol{g}_{\mathcal{B}^D} = \left[\begin{array}{c} -\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right], \quad \boldsymbol{g}_{\mathcal{N}^D} = \mathbf{0}\,,$$

on $\boldsymbol{g}_{\mathcal{B}^D} \in \mathbb{R}^n$, i $\boldsymbol{g}_{\mathcal{N}^D} \in \mathbb{R}^m$.

Proposició 2.3.4. Donada una SBFD $\boldsymbol{x}$ del problema primal (P_e), la solució dual $\boldsymbol{y}$ associada a $\boldsymbol{x}$ és una SBF del poliedre $D^e_{\tilde{e}}$.

Demostració. Emprant la definició 1.3.2 de solució bàsica, una SB és tota solució factible amb un nombre de constriccions actives linealment independents igual al nombre de variables (la dimensió del poliedre). En el cas del poliedre $D^e_{\tilde{e}}$, aquest nombre és $m+n$ (ja que $\boldsymbol{y}' = \left[\boldsymbol{\lambda}' | \boldsymbol{r}'\right] \in \mathbb{R}^{m+n}$).

A partir de l'equació (2.8), tenint en compte que $\boldsymbol{r}_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$, tenim que

$$\left[\begin{array}{c|c} B' & \varnothing \\ \hline A'_{\mathcal{N}} & \mathrm{Id}_{n-m} \end{array}\right] \boldsymbol{y}_{\mathcal{N}^D} = \boldsymbol{c}\,.$$

Analitzem la següent matriu:

$$B_D \overset{\text{def}}{=} \left[\begin{array}{c|c} B' & \varnothing \\ \hline A'_{\mathcal{N}} & \mathrm{Id}_{n-m} \end{array}\right].$$

Les últimes $n-m$ files de B_D són l.i. entre sí, ja que les darreres $n-m$ columnes d'aquestes formen la matriu Id_{n-m}. D'altra banda, la matriu B és no singular per definició, i per tant les m primeres files de B_D són l.i. entre sí. Finalment, les m primeres files i les $n-m$ darreres són l.i. entre elles, ja que la submatriu formada per les primeres m files i les darreres $n-m$ columnes és nul·la, mentre que la matriu formada per les $n-m$ darreres files i les $n-m$ darreres columnes és Id_{n-m}.

Per tant, el nombre total de files l.i. de B_D és $m + (n-m) = n$. És a dir, que el vector $\boldsymbol{y}_{\mathcal{N}^D}$ està subjecte a n restriccions actives l.i. (ja que $B_D \boldsymbol{y}_{\mathcal{N}^D} = \boldsymbol{c}$). D'altra banda, $\boldsymbol{r}_{\mathcal{B}} = 0$, cosa que afegeix m restriccions actives l.i. addicionals (un subconjunt de les restriccions $\boldsymbol{r} \geq \mathbf{0}$). Unint aquests dos fets, tenim que $\boldsymbol{y}$ està subjecte a $n+m$ restriccions actives l.i., i per tant $\boldsymbol{y}$ és una solució bàsica (i factible per construcció) del poliedre $D^e_{\tilde{e}}$. □

Noteu que ara, havent utilitzat la definició alternativa de SB (1.3.2), hem de redefinir a part els conceptes de matriu bàsica, variables bàsiques i no bàsiques pel problema dual. Tot i així, les definicions que farem a continuació (2.3.5 i 2.3.7) coincideixen idènticament amb les definicions que havíem fet a 1.3.1, i impliquen les mateixes propietats.

Definició 2.3.5. *Matriu bàsica d'una SBF dual.* Donada una solució dual $\boldsymbol{y}$ associada a una SBFD $\boldsymbol{x}$ del problema primal (P_e) amb matriu bàsica B, definirem la "matriu bàsica de $\boldsymbol{y}$" com

$$B_D \stackrel{\text{def}}{=} \left[\begin{array}{c|c} B' & \varnothing \\ \hline A'_{\mathcal{N}} & \mathrm{Id}_{n-m} \end{array}\right] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\,.$$

Definició 2.3.6. *Matriu no bàsica d'una SBF dual.* Donada una solució dual $\boldsymbol{y}$ associada a una SBFD $\boldsymbol{x}$ del problema primal (P_e), definirem la "matriu no bàsica de $\boldsymbol{y}$" com

$$A^D_{\mathcal{N}^D} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\begin{array}{c} \mathrm{Id}_m \\ \hline \varnothing \end{array}\right] \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})\,.$$

Definició 2.3.7. *Partició en variables bàsiques i no bàsiques d'una SBF dual.* Donada una solució dual associada a una SBFD $\boldsymbol{x}$ del problema primal (P_e) amb base $\mathcal{B}$, anomenarem "variables bàsiques de $\boldsymbol{y}$" a les variables contingudes en el vector

$$\boldsymbol{y}_{\mathcal{B}^D} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\lambda} \\ \hline \boldsymbol{r}_{\mathcal{N}} \end{array}\right]\,,$$

i anomenarem "variables no bàsiques de $\boldsymbol{y}$" a les variables contingudes en el vector

$$\boldsymbol{y}_{\mathcal{N}^D} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{r}_{\mathcal{B}} \doteq \mathbf{0}\,.$$

També definirem $\mathcal{B}^D \subseteq \{1,\ldots,m+n\}$ (tal que $|\mathcal{B}^D| = n$) com el conjunt d'índexos associats a una variable bàsica (de $\boldsymbol{y}_{\mathcal{B}^D}$) i l'anomenarem *base dual*, i definirem $\mathcal{N}^D$ com el complementari de $\mathcal{B}^D$ en $\{1,\ldots,m+n\}$ (de manera que $|\mathcal{N}^D| = m$).

Proposició 2.3.8. La matriu bàsica d'una SBF dual és no singular.

Demostració. Com hem vist a la demostració de la proposició 2.3.4, la matriu B_D, que és d'ordre $n\times n$, té n files l.i.; és conseqüència directa que B_D és no singular. □

2.3.3 Costos reduïts, DBF i longitud de pas màxima en el problema dual

Ara, per poder desenvolupar l'algorisme del símplex dual a partir del símplex primal, encara ens falta determinar els costos reduïts duals (que denotarem $\boldsymbol{r^D}$), les direccions bàsiques factibles, i la longitud de passa màxima pel problema dual.

Proposició 2.3.9. El vector de costos reduïts (associats a VNB duals) per una solució dual associada a una SBFD $\boldsymbol{x}$ amb base $\mathcal{B}$ coincideix amb $[\mathbf{0} \mid \boldsymbol{x}_{\mathcal{B}}']' \doteq [\mathbf{0}' \mid \boldsymbol{x}_{\mathcal{N}}' \mid \boldsymbol{x}_{\mathcal{B}}']'$.

Demostració. Pel que sabem del símplex primal, el vector de costos reduïts d'una SBF $\boldsymbol{x}$, amb base $\mathcal{B}$ i matriu bàsica B, d'un problema en forma estàndard

$$(P_e)\begin{cases}\min & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ \text{s.a.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0\end{cases}$$

està definit per

$$\boldsymbol{r}' \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{c}' - \boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}{}' B^{-1} A \,.$$

Apliquem aquesta noció directament al problema dual definit a (2.6):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{D}\prime} &= \boldsymbol{g}' - \boldsymbol{g}_{\mathcal{B}^D}{}' B_D^{-1} A^D = \left[\boldsymbol{g}_{\mathcal{B}^D}{}' \mid \boldsymbol{g}_{\mathcal{N}^D}{}'\right] - \left[-\boldsymbol{b} \mid 0\right] B_D^{-1} \left[B_D \;\middle|\; A^D_{\mathcal{N}^D}\right] = \\ &= \left[\boldsymbol{g}_{\mathcal{B}^D}{}' \mid \boldsymbol{0}'\right] - \left[\boldsymbol{g}_{\mathcal{B}^D}{}' \,\mathrm{Id}_n \;\mid\; - \boldsymbol{g}_{\mathcal{B}^D}{}' B_D^{-1} A^D_{\mathcal{N}^D}\right] = \left[\boldsymbol{0}' \mid\; - \boldsymbol{g}_{\mathcal{B}^D}{}' B_D^{-1} A^D_{\mathcal{N}^D}\right] . \end{aligned} \tag{2.9}$$

Desenvolupem la darrera expressió:

$$\begin{aligned} - \boldsymbol{g}_{\mathcal{B}^D}{}' B_D^{-1} A^D_{\mathcal{N}^D} &= - \left[-\boldsymbol{b}' \mid \boldsymbol{0}\right] \left[\begin{array}{c|c} B' & \varnothing \\ \hline A'_{\mathcal{N}} & \mathrm{Id}_{n-m}\end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c}\mathrm{Id}_m \\ \hline \varnothing\end{array}\right] = \\ &= \left[\boldsymbol{b}' \mid \boldsymbol{0}\right] \left[\begin{array}{c|c} (B^{-1})' & \varnothing \\ \hline -A'_{\mathcal{N}}(B^{-1})' & \mathrm{Id}_{n-m}\end{array}\right] \left[\begin{array}{c}\mathrm{Id}_m \\ \hline \varnothing\end{array}\right] = \left[\boldsymbol{b}' \mid \boldsymbol{0}\right] \left[\begin{array}{c} (B^{-1})' \\ \hline -A'_{\mathcal{N}}(B^{-1})'\end{array}\right] \mathrm{Id}_m = \\ &= \boldsymbol{b}'(B^{-1})' = (B^{-1}\boldsymbol{b})' = \boldsymbol{x}_{\mathcal{B}}{}' \,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Per tant, unint (2.9) i (2.10), obtenim que

$$\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{D}\prime} = \left[\boldsymbol{0}' \mid \boldsymbol{x}_{\mathcal{B}}{}'\right] \doteq \left[\boldsymbol{0}' \mid \boldsymbol{x}_{\mathcal{N}}{}' \mid \boldsymbol{x}_{\mathcal{B}}{}'\right] .$$

Com pel problema primal, tenim que $\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{D}}_{\mathcal{B}^D} = \boldsymbol{0}$. □

De la proposició 2.3.9 deduïm, com era d'esperar a partir del teorema fort de dualitat, que la condició d'optimalitat pel problema dual ($\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{D}} \geq \boldsymbol{0}$) coincideix amb la factibilitat primal ($\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$). D'altra banda, també veiem que l'algorisme del símplex primal seleccionarà a cada iteració, per tal de millorar el valor de la f.o., una variable no bàsica dual $y_{\mathcal{N}^D(p)} \doteq r_{\mathcal{B}(p)}$ tal que la variable primal $x_{\mathcal{B}(p)}$ sigui negativa: $r^D_{\mathcal{N}^D(p)} < 0 \Leftrightarrow x_{\mathcal{B}(p)} < 0$.

2.3.3.1 DBF duals

Ara, per acabar de fonamentar les bases del símplex dual, cal determinar les direccions bàsiques factibles. Com abans, definim una DBF $\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{D}}$ sobre una SBF dual $\boldsymbol{y}$, associada a una VNB dual d'índex $\mathcal{N}^D(p)$, de manera que

$$d^D_{\mathcal{N}^D(i)} = \begin{cases}1 & \text{si } i = p \\ 0 & \text{si } i \neq p\end{cases} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \,.$$

Com en el cas del problema primal, volem que la direcció $\boldsymbol{d^D}$ conservi la factibilitat dual. Llavors, emprant la formulació (2.6) del dual, i sent θ un escalar positiu,

$$A^D(\boldsymbol{y}+\theta\boldsymbol{d^D}) = \boldsymbol{c} \Rightarrow A^D\boldsymbol{d^D} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \left[B_D \mid A^D_{\mathcal{N}^D}\right] \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{d^D_{\mathcal{B}^D}} \\ \hline \boldsymbol{d^D_{\mathcal{N}^D}} \end{array}\right] = \boldsymbol{0}$$
$$\Leftrightarrow B_D\boldsymbol{d^D_{\mathcal{B}^D}} + A^D_{\mathcal{N}^D}\boldsymbol{d^D_{\mathcal{N}^D}} = \boldsymbol{0}\,;$$

com abans, la definició que acabem de fer de $\boldsymbol{d^D_{\mathcal{N}^D}}$ implica que $A^D_{\mathcal{N}^D}\boldsymbol{d^D_{\mathcal{N}^D}} = \boldsymbol{A^D_{\mathcal{N}^D(p)}}$. Llavors tenim que

$$B_D\boldsymbol{d^D_{\mathcal{B}^D}} + \boldsymbol{A^D_{\mathcal{N}^D(p)}} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{d^D_{\mathcal{B}^D}} = -B_D^{-1}\boldsymbol{A^D_{\mathcal{N}^D(p)}}\,. \tag{2.11}$$

Recordant que $A^D_{\mathcal{N}^D} = [\mathrm{Id}_m \mid \varnothing]'$, la p-èsima columna d'$A^D_{\mathcal{N}^D}$ és

$$\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{e_p} \\ \hline \boldsymbol{0} \end{array}\right],$$

on $\boldsymbol{e_p}$ denota el vector unitari que té un 1 a la posició p i zeros a la resta d'entrades. Per tant, seguint a partir de (2.11),

$$\boldsymbol{d^D_{\mathcal{B}^D}} = -B_D^{-1}\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{e_p} \\ \hline \boldsymbol{0} \end{array}\right] = -\left[\begin{array}{c|c} (B^{-1})' & \varnothing \\ \hline -A'_{\mathcal{N}}(B^{-1})' & \mathrm{Id}_{n-m} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{e_p} \\ \hline \boldsymbol{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -(B^{-1})' \\ \hline A'_{\mathcal{N}}(B^{-1})' \end{array}\right]\boldsymbol{e_p}\,.$$

Denotant amb $\boldsymbol{\beta_p}$ el vector fila de la p-èsima fila de B^{-1}, simplifiquem l'expressió anterior:

$$\boldsymbol{d^D_{\mathcal{B}^D}} = \left[\begin{array}{c} -(B^{-1})'\boldsymbol{e_p} \\ \hline A'_{\mathcal{N}}(B^{-1})'\boldsymbol{e_p} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -(\boldsymbol{e_p}'B^{-1})' \\ \hline A'_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{e_p}'B^{-1})' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -\boldsymbol{\beta_p}' \\ \hline A'_{\mathcal{N}}\boldsymbol{\beta_p}' \end{array}\right].$$

Recordant la partició del vector

$$\boldsymbol{y_{\mathcal{B}^D}} = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\lambda} \\ \hline \boldsymbol{r_{\mathcal{N}}} \end{array}\right],$$

definim

$$\boldsymbol{d^D_{\lambda}} \overset{\text{def}}{=} -\boldsymbol{\beta_p}'\,, \quad \boldsymbol{d^D_{r_{\mathcal{N}}}} \overset{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\beta_p}A_{\mathcal{N}})'\,.$$

2.3.3.2 Longitud de pas dual

Les variables $\boldsymbol{\lambda}$ són lliures. Per tant, a l'hora de calcular la longitud de pas màxima de manera que es conservi la factibilitat dual, només caldrà tenir en compte les variables $\boldsymbol{r_{\mathcal{N}}}$. Aquestes estan subjectes a la restricció $\boldsymbol{r_{\mathcal{N}}} \geq \boldsymbol{0}$. Per tant, la màxima longitud de pas dual θ^*_D vindrà donada per

$$\theta^*_D = \min_{\{j\in\mathcal{N}\mid d^D_j<0\}}\left\{\frac{-r_j}{d^D_j}\right\}.$$

2.3.4 Algorisme del Símplex Dual

L'esquema general de l'algorisme del símplex dual (que està resumit a 2.3.10) és el següent. Comencem amb una SBFD inicial $\boldsymbol{x}$ i la seva solució dual associada $\boldsymbol{y}$—si no en tenim cap, com pel símplex primal, haurem de resoldre un problema de "fase I".

A cada iteració, primer durem a terme el test d'optimalitat per determinar si la SBFD actual és òptima. Si ho és, hem acabat. En cas contrari, seleccionarem una VNB dual entrant $y_{\mathcal{N}^D(p)}$ que tingui associat un cost reduït negatiu—és a dir, tal que $x_{\mathcal{B}(p)} < 0$. A continuació, calcularem la DBF dual corresponent. Si obtenim que $\boldsymbol{d^D_{r_\mathcal{N}}} \geq 0$, el problema dual és il·limitat i per tant el primal és infactible (pel coroll·lari 2.2.2); terminarem l'algorisme. En cas contrari, procedirem a calcular la longitud de passa màxima.

Per terminar la iteració caldrà fer totes les actualitzacions adients. Les variables duals es poden actualitzar directament mitjançant la DBF dual que hem calculat. Quant a les variables primals: tenint en compte que la variable $y_{\mathcal{N}^D(p)}$ passarà a ser una variable bàsica a la iteració següent, la VB $x_{\mathcal{B}(p)}$ passarà a ser VNB (en el context del problema primal), ja que el cost reduït de $y_{\mathcal{N}^D(p)}$ serà 0 i per tant—pel que hem vist a la proposició 2.3.9—el valor de $x_{\mathcal{B}(p)}$ passarà a ser 0. És a dir, que $x_{\mathcal{B}(p)}$ sortirà de la base primal (i per això l'anomenarem VB sortint). D'altra banda i de manera similar, la VNB primal entrant vindrà determinada pel càlcul de θ^*_D, ja que la VB dual sortint serà $r_{\mathcal{N}(q)}$ tal que

$$\theta^*_D = \frac{-r_{\mathcal{N}(q)}}{d^D_{r_{\mathcal{N}}(q)}}\,,$$

i llavors, altre cop per la proposició 2.3.9, $x_{\mathcal{N}(q)}$ passarà a ser VB primal (amb valor θ^*_D).

Per tant, per actualitzar les variables primals, caldrà calcular la DBF primal associada a la VNB primal $x_{\mathcal{N}(q)}$, i la longitud de passa màxima corresponent serà

$$\theta^* = \frac{-x_{\mathcal{B}(p)}}{d_{\mathcal{B}(p)}}\,.$$

Per últim, el valor de la funció objectiu (primal, que és equivalent a la dual *sense forma estàndard*) variarà segons $\boldsymbol{\lambda}$. Sigui $\boldsymbol{\lambda^1}$ el valor de $\boldsymbol{\lambda}$ en ls iteració actual, i sigui $\boldsymbol{\lambda^2}$ el seu valor en la següent iteració; i siguin z_1 i z_2 els valors de la f.o. en la iteració actual i següent, respectivament. Tenim que

$$\begin{aligned}-z_2 = -\boldsymbol{b}'\boldsymbol{\lambda^2} = -\boldsymbol{b}'(\boldsymbol{\lambda^1} + \theta^*_D \boldsymbol{d^D_\lambda}) = -\boldsymbol{b}'(\boldsymbol{\lambda^1} - \theta^*_D \boldsymbol{\beta_p}') = -\boldsymbol{b}'\boldsymbol{\lambda^1} + \theta^*_D(\boldsymbol{\beta_p b})' = \\ = -z_1 + x_{\mathcal{B}(p)} \Rightarrow z_2 = z_1 - \theta^*_D x_{\mathcal{B}(p)}\,.\end{aligned}$$

Algorisme 2.3.10. *del símplex dual.*

1. **Inicialització**: Trobem una SBFD i opcionalment la solució dual associada $(\mathcal{B}, \mathcal{N}, \boldsymbol{x_\mathcal{B}}, \boldsymbol{r}, z\,[, \boldsymbol{\lambda}])$.

2. **Test d'optimalitat**: Si $\boldsymbol{x_\mathcal{B}} \geq \boldsymbol{0}$, hem trobat la solució òptima. **STOP!**

3. **Selecció de VB sortint**: Seleccionem un índex $\mathcal{B}(p)$ tal que $\boldsymbol{x_{\mathcal{B}(p)}} < 0$ (VB sortint).

4. **Càlcul de DBF dual**:

   - $\boldsymbol{d^D_{r_\mathcal{N}}} = \left(\boldsymbol{\beta_p} A_\mathcal{N}\right)'$ ($\boldsymbol{\beta_p}$ és la fila p-èsima de B^{-1}).

- $\left[\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{\lambda}}^{\boldsymbol{D}} = -\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{p}}{}'\right]$

  Si $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{r}_{\mathcal{N}}}^{\boldsymbol{D}} \geq \mathbf{0}$, $(D_{\tilde{e}}^{e})$ il·limitat $\Rightarrow$ (P_e) infactible. **STOP!**

5. **Càlcul de θ_D^* (i VNB primal entrant)**:

$$\theta_D^* = \min_{\{j\in\mathcal{N}\,|\,d_j^D<0\}} \left\{ -\frac{r_j}{d_{r_j}^D} \right\}.$$

VNB primal entrant: $x_{\mathcal{N}(q)}$ tal que $\theta_D^* = -\dfrac{x_{\mathcal{N}(q)}}{d_{r_{\mathcal{N}(q)}}^D}$.

6. **Càlcul de DBF primal i θ^***:

$$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = -B^{-1}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\mathcal{N}(q)}}$$
$$\theta^* = \frac{-x_{\mathcal{B}(p)}}{d_{\mathcal{B}(p)}}$$

7. **Actualitzacions i canvi de base**:

   (a) **Actualització variables duals**

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{\mathcal{N}}} := \boldsymbol{r}_{\mathcal{N}} + \theta_D^* \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{r}_{\mathcal{N}}}^{\boldsymbol{D}}$$
$$r_{B(p)} := \theta_D^*$$
$$z := z - \theta^* x_{\mathcal{B}(p)}$$
$$[\boldsymbol{\lambda} := \boldsymbol{\lambda} + \theta_D^* \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{\lambda}}^{\boldsymbol{D}}]$$

   (b) **Actualització variables primals**

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} := \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} + \theta^* \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$$
$$x_{\mathcal{N}(q)} = \theta^*$$

   (c) **Canvi de base**

$$\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{\mathcal{B}(p)\} \cup \{\mathcal{N}(q)\} \ ,$$
$$\mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{\mathcal{N}(q)\} \cup \{B(p)\} \ .$$

8. **Anar** a 2.

Proposició 2.3.11. Una SBFD òptima és degenerada ($\exists j \in \mathcal{N}$ tal que $r_j = 0$) si i només si $(P)_e$ té òptims alternatius.

Proposició 2.3.12. Si $(P)_e$ no té cap SBFD degenerada, el símplex dual terminarà amb un nombre finit d'iteracions. Altrament, podem usar la regla de Bland (1.5.3) per a que convergeixi amb un nombre finit d'iteracions.

Tema 3

Programació lineal entera

Observació 3.0.1. La següent taula explica les relacions possibles entre un (PLE) i la seva relaxació lineal (RL).

$(PLE) \setminus (RL)$	Solució òptima	Infactible	Il · limitat
Solució òptima	Sí	No	Sí ($A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$) No ($A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{Q})$)
Infactible	Sí	Sí	Sí
Il · limitat	No	No	Sí

En aquest resum falta una part important de programació lineal entera, per a més informació, consulteu els apunts de classe!

Tema 4

Programació no lineal sense restriccions

Teorema 4.0.1. *Condicions necessàries d'optimalitat.*
Sigui $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un problema d'optimització no lineal $\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$. Si x^* és un mínim local de f i $f \in \mathscr{C}^2$ en un entorn de x^*, llavors:

i) $\nabla f(x^*) = 0$. (Condició de 1r ordre)

ii) $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$. (Condició de 2n ordre)

Teorema 4.0.2. *Condicions suficients d'optimalitat.*
Si $f \in \mathscr{C}^2$ en un entorn obert de x^*, $\nabla f(x^*) = 0$ i $\nabla^2 f(x^*)$ és definida positiva, llavors x^* és mínim local estricte de f.

Teorema 4.0.3. *Condicions d'optimalitat en problemes convexos.*
Si f és convexa i diferenciable, llavors $\nabla f(x^*) = 0 \iff x^*$ és mínim global de f.

Mètode 4.0.4. *Mètode del Gradient.*
$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k, \quad d^k = -\nabla f\left(x^k\right).$
α^k ha de complir les condicions d'Armijo-Wolfe.

Mètode 4.0.5. *Mètode de Newton.*
$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k, \quad d^k = -\left(\nabla^2 f\left(x^k\right)\right)^{-1} \nabla f\left(x^k\right).$
α^k ha de complir les condicions d'Armijo-Wolfe, normalment $\alpha^k = 1$.

Proposició 4.0.6. *Condicions d'Armijo-Wolfe.*

i) Condició de descens suficient (AW-1):
$g(\alpha) \leq g(0) + \alpha c_1 g'(0)\,,\ c_1 \in (0,1).$
$f\left(x^k + \alpha d^k\right) \leq f\left(x^k\right) + \alpha c_1 \nabla f\left(x^k\right)^t d^k,\ c_1 \in (0,1).$

ii) Condició de corbatura (AW-2):
$g'(\alpha) \geq c_2 g'(0)\,,\ 0 < c_1 < c_2 < 1.$

$\nabla f\left(x^k + \alpha d^k\right)^t d^k \geq c_2 \nabla f\left(x^k\right) d^k$, $0 < c_1 < c_2 < 1$.

Tema 5

Programació no lineal amb restriccions

Donat el problema:

$$(P)\begin{cases}\min f(x) \\ \text{s.a.:} \\ \quad (1) \quad h(x)=0 \\ \quad (2) \quad g(x)\leq 0\end{cases}$$

amb $\mathcal{L}(x,\lambda,\mu)=f(x)+\lambda^t h(x)+\mu^t g(x)$.

Proposició 5.0.1. *Condicions necessàries.* Sigui x^* òptim local. Si és punt regular, llavors $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}^m$ i $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ tals que:

i) $h(x^*)=0,\ g(x^*)\leq 0$.

ii) $\nabla_x \mathcal{L}(x^*,\lambda^*,\mu^*)=\nabla f(x^*)+\nabla h(x^*)\lambda^*+\nabla g(x^*)\mu^*=0$.

iii) $\mu^*\geq 0$ i $(\mu^*)^t g(x^*)=0$ (si $g_i(x^*)$ és inactiva, llavors $\mu_j^*=0$).

iv) $d^t\nabla^2_{x_ix_j}\mathcal{L}(x^*,\lambda^*,\mu^*)\,d\geq 0, \forall d\in M=\begin{cases}(\nabla h_i(x^*))^t d=0 & i\in\{1,\dots,m\} \\ \left(\nabla g_j(x^*)\right)^t d=0 & j\in\mathcal{A}(x^*)\end{cases}$

Els punts i), ii) i iii) són les condicions de 1r ordre del KKT i el punt iv) és la condició de 2n ordre.

Nota: $\mathcal{A}(x^*)=\left\{j\in\{1,\dots,p\}\mid g_j(x)=0\right\}$ és el conjunt d'índex de desigualtats actives a x.

Proposició 5.0.2. *Condicions suficients.* Sigui x^*, és òptim local si satisfà:

i) $h(x^*)=0,\ g(x^*)\leq 0$.

ii) $\nabla_x \mathcal{L}(x^*,\lambda^*,\mu^*)=\nabla f(x^*)+\nabla h(x^*)\lambda^*+\nabla g(x^*)\mu^*=0$.

iii) $\mu^*\geq 0$ i $(\mu^*)^t g(x^*)=0$ $(g_i(x^*)<0 \implies \mu_j^*=0)$.

iv) $d^t \nabla^2_{x_i x_j} \mathcal{L}\left(x^*, \lambda^*, \mu^*\right) d > 0, d \in M' = \begin{cases} \left(\nabla h_i\left(x^*\right)\right)^t d = 0 & i \in \{1, \ldots, m\} \\ \left(\nabla g_j\left(x^*\right)\right)^t d = 0 & j \in \mathcal{A}\left(x^*\right) \cap \{j \mid \mu^* > 0\} \end{cases}$

Els punts i), ii) i iii) són les condicions de 1r ordre del KKT i el punt iv) és la condició de 2n ordre.

Nota: $\mathcal{A}\left(x^*\right) = \left\{j \in \{1, \ldots, p\} \mid g_j\left(x\right) = 0\right\}$ és el conjunt d'índex de desigualtats actives a x.

Índex alfabètic