

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA



Funciones Espectrales En Teorías Cuánticas de Campos Con Singularidades

TESINA DE GRADO

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN FÍSICA

PRESENTA

CAMILO LEONEL AMADIO

DIRECTOR: PABLO PISANI

LA PLATA, ARGENTINA

2018

“Con fundamento en los artículos 21 y 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor y como titular de los derechos moral y patrimonial de la obra titulada “**TÍTULO DE LA TESIS**”, otorgo de manera gratuita y permanente al Instituto Tecnológico Autónomo de México y a la Biblioteca Raúl Baillères Jr., la autorización para que fijen la obra en cualquier medio, incluido el electrónico, y la divulguen entre sus usuarios, profesores, estudiantes o terceras personas, sin que pueda percibir por tal divulgación una contraprestación”.

AUTOR

FECHA

FIRMA

DEDICATORIA

Agradecimientos

Me gustan los agradecimientos cortos, y la birra fría.

1. A Mama que me demostro cual es el camino hoy y cada día de mi vida, con el ejemplo y no solo con palabras
2. papa
3. A mis tíos y tías que siempre me extenieron una mano cuando la necesite
4. A Mi Abue Mirtha, todo esto te lo dedico a vos, que siempre estuviste
5. A todos mis amigos que me acompañaron a lo largo de estos años, sin ellos me hubiera vuelto a las 2 semanas
6. A Wikipedia y Julioprofe
7. Al Rasta y a Lolo, que me acompañaron a salir de joda
8. A mis mejores amigos, Lucas, La Sol y la Celia
9. A la cerveceria Quilmes que sin ella probablemente ya me hubiera suicidado hace mucho
10. A Agus que siempre me termina arreglando la compu, sin el hubiera estado compilando todo el día en Nodens

Prefacio

PUEDEN QUITAR ESTA PARTE

Índice general

1. Introducción	1
1.1. El Operador Diferencial	1
1.2. Calculo Asintótico de los autovalores	2
1.3. Calculo de la funcion zeta mediante calculo complejo: . . .	5
1.4. Calculo del Heat-Kernel	6
2. Estudio del Prblema Singular	7
2.1. El Operador Singular	7
2.2. Calculo Asintótico de los autovalores	9
2.3. Calculo Utilizando Variable Compleja	9
2.4. Cálculo de la energía de vacío	12
3. Conclusiones	15
A. Calculo de las correcciones asintoticas la Funcion Hypergeometrica	17

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se van a explicar los conceptos matemáticos utilizados con un ejemplo, para luego aplicarlos al estudio del caso que nos interesa. Se va a calcular la función $\zeta_A(s)$ mediante distintas técnicas, calculando asintóticamente los autovalores, y luego ponerlos en la definición o en el Heat Kernel, y luego se procedió a utilizar el cálculo completo.

1.1. El Operador Diferencial

En estudiarán los autovalores del operador diferencial A determinado por:

$$\begin{aligned} A\phi(x) &= -\partial_x^2 \phi(x) \\ \phi(0) &= 0 \\ \partial_x \phi(L) + \gamma \phi(L) &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Donde las condiciones de contorno me fijan un espectro autovalores $\lambda > 0$, que está dado cualquiera de las dos ecuaciones equivalentes:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\gamma} \cos(L\lambda) + \sin(L\lambda) &= 0 \\ \frac{\lambda}{\gamma} + \tan(\lambda L) &= 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Una vez obtenidos los autovalores el siguiente paso es calcular la función ζ definida por:

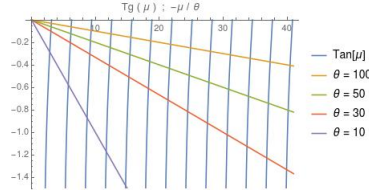


Figura 1.1: Aquí se busca encontrar los terminos que no se anulan a $n = \infty$ del desarrollo asintotico de autovalores de la ecuacion (1.4)

$$\zeta_A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} \quad (1.3)$$

Al no poder encontrar explícitamente los autovalores se proceden a distintas técnicas para hallar distintas aproximaciones de la función $\zeta_A(s)$

1.2. Calculo Asintótico de los autovalores

Haciendo el cambio de variables $\mu = \lambda L$ y $\theta = \gamma L$ las ecuaciones (1.2) se pueden expresar de la forma:

$$\begin{aligned} Tg[\mu] + \frac{\mu}{\theta} &= 0 \\ \frac{\mu}{\theta} Cos[\mu] + Sin[\mu] &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Tal como se puede ver en la figura (1.1), los autovalores μ_n tienden a pegarse a la asíntota vertical de $Tg(\mu)$ a medida que μ_n se hace cada vez mas grande.

Se puede ver entonces de los autovalores μ_n se pueden descomponer en una parte correspondiente a las asíntotas verticales de $Tg(x)$ mas una corrección que tiende a cero a medida que n tiende a ∞

$$\begin{aligned} \mu_n &= n\pi + \frac{\pi}{2} + \epsilon_n \\ \text{Donde } \epsilon_n &\rightarrow 0 \text{ si cuando } n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.5)$$

conocer ϵ_n es equivalente a resolver la ecuación (1.4), la cual no puede resolverse analíticamente, en vez de eso voy a obtener un desarrollo de ϵ_n para $n \rightarrow \infty$.

voy a intesertar (1.5) en la segunda ecuacion de (1.4) y desarrollar alrededor de $\epsilon \rightarrow 0$ obteniendo:

$$\text{Sin}(n\pi + \frac{\pi}{2} + \epsilon_n) = -\frac{\mu_n}{\theta} \text{Cos}(n\pi + \frac{\pi}{2} + \epsilon_n) \quad (1.6)$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \epsilon^{2p}}{(2p)!} = \frac{-1}{\theta} (n\pi + \frac{\pi}{2} + \epsilon) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \epsilon^{2p+1}}{(2p+1)!} \quad (1.7)$$

Donde acomodando la igualdad, obtengo la ecuacion :

$$1 = \sum_{p=1}^{\infty} \epsilon^{2p+2} (-1)^p \left(\frac{1}{(2p+2)!} + \frac{1}{\theta} \frac{(1)}{(2p+1)!} \right) + \frac{1}{\theta} \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \epsilon^{2p+1}}{(2p+1)!} \quad (1.8)$$

Suponiendo que ϵ_n tiene un desarrollo en serie (1.9), donde la contribución de cada termino es menor que la anterior.

$$\epsilon = \epsilon^{(1)} + \epsilon^{(2)} + \epsilon^{(3)} + \dots \quad (1.9)$$

Insertando este desarrollo de ϵ en la ecuación (1.8), e igualando orden a orden se obtiene, para los primeros ordenes de ϵ (1.10) :

$$\begin{aligned} \epsilon^{(1)} &= \frac{\theta}{n\pi} \\ \epsilon^{(2)} &= -\frac{\theta}{2\pi n^2} \\ \epsilon^{(3)} &= \frac{\theta}{n^3 \pi} \left(\frac{1}{4} - \frac{\theta^2}{2\pi^2} - \frac{\theta}{\pi^2} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Una vez obtenido el desarrollo de μ_n puedo calcular a $\lambda_n = \frac{\mu_n}{L}$

$$\lambda_n = \alpha n + \beta + \frac{\gamma}{n} + \frac{\delta}{n^2} + \frac{\eta}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad (1.11)$$

Donde α, β, \dots quedan escritos en funcion de los $\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}, \dots$; Luego se calcula la funcion $\zeta_A(s)$ utilizando el desarrollo asintotico de los autovalores.

$$\zeta_A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha n + \beta + \frac{\gamma}{n} + \frac{\delta}{n^2} + \frac{\eta}{n^3} + O(\frac{1}{n^4}))^{-2s} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha n)^{-2s} \left(1 + \underbrace{\frac{\beta}{\alpha n} + \frac{\gamma}{\alpha n^2} + \frac{\delta}{\alpha n^3} + \frac{\eta}{\alpha n^4} + O(\frac{1}{n^5})}_{\chi_n} \right)^{-2s} \quad (1.12)$$

Para calcular esta serie voy a hacer un desarrollo binomial alrededor de $\chi_n \rightarrow 0$

$$\zeta_A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha n)^{-2s} ((\text{circulo})0 \chi^0 + (\text{circulo})1 \chi^1 + (\text{circulo})2 \chi^2 + \dots) \quad (1.13)$$

Donde hay que tener en cuenta que cada termino χ^n contribuye con distintas potencias de $\frac{1}{n}$, escribiendo explícitamente la expresion de cada $(\text{circulo})p$ obtengo.

$$(1 - s\chi_n + \frac{s}{2}(s+1)\chi_n^2 + \frac{-1}{6}s(2+3s+s^2)\chi_n^3 + \frac{s}{24}(6+11s+6s^2+s^3)\chi_n^4) \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha n)^{-2s} \quad (1.14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha n)^{-2s} (\text{circulo})0 = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha n)^{-2s} = \zeta(2s) \quad (1.15)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha n)^{-2s} (\text{circulo})1 \chi^1 =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-s\chi_n) =$$

$$-s\alpha^{-s} \left(\frac{\beta}{\alpha} \zeta(s+1) + \frac{\gamma}{\alpha} \zeta(s+2) + \frac{\delta}{\alpha} \zeta(s+3) + \frac{\eta}{\alpha} \zeta(s+4) + \sum O(\frac{1}{n^{s-5}}) \right) \quad (1.16)$$

$$\frac{s(s+1)}{2} \alpha^{-2s} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha n)^{-2s} (\text{circulo})2 = \sum \frac{s}{2}(s+1)\chi_n^2 \right. \\ \left. \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} \zeta(s+2) + \frac{2\beta\gamma}{\alpha} \zeta(s+3) + \left(\frac{2\beta\gamma}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \right) \zeta(s+4) \right) + \sum O(\frac{1}{n^5}) \right) \quad (1.17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha n)^{-2s} (\text{circulo})3 = \sum (\alpha n)^{-s} \left(\frac{-s}{6} (2 + 3s + s^2) \right) \chi_n^3 - \alpha^{-2s} \frac{s}{6} (2 + 3s + s^2) \left(\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^3 \zeta(s+3) + \frac{3\beta^2\gamma}{\alpha^3} \zeta(s+4) + \sum \frac{1}{n^{s-5}} \right) \quad (1.18)$$

$$\sum (\alpha n)^{2s} \frac{s}{24} (6 + 11s + 6s^2 + s^3) \chi_n^4 (\text{circulo})4 = \frac{\alpha^{-s}s}{24} (6 + 11s + 6s^2 + s^3) \frac{\beta}{\alpha} \zeta(s+4) \quad (1.19)$$

Una vez calculados todos los terminos los sumo y saco factor común cada $\zeta(2s+n)$

Obteniendo como resultado

$$\zeta_A(s) = C_s \zeta(s) + C_{s+1} \zeta(s+1) + C_{s+2} \zeta(s+2) + C_{s+3} \zeta(s+3) + C_{s+4} \zeta(s+4) + \dots \quad (1.20)$$

Se puede ver que el resultado esta expresado como suma de funciones $\zeta(s+n)$ acompañados de unos argumentos C_{s+n} que dependen de los $(\text{circulo})n$ que se escriben en funcion de $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ que estan calculados en la ecuacion (1.10)

1.3. Calculo de la funcion zeta mediante calculo complejo:

Conocida la función de la cual hay que despejar los autovalores, se puede proceder a calcular la funcion ζ utilizando variable de calculo complejo, utilizando el camino representado en la figura (1.2) el cual al no poseer mas ceros, se puede deformar hasta el camino (1.2)

$$\zeta_A(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(x)}{f(x)} z^{-2s} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\cos(\gamma z) \left(\gamma + \frac{1}{L} \right) - \sin(\gamma z) \frac{z\gamma}{L}}{\cos(\gamma z) \frac{z}{L} + \sin(\gamma z)} z^{-2s} dz \quad (1.21)$$

La integral de linea puede descomponerse en 3 partes, un contorno circular y dos lineas rectas, la contribución circular es regular para todo s , entonces no aporta a la estructura de polos, en cuanto a las contribuciones del lado recto puedo expresar ambos tramos como la integral (1.22)

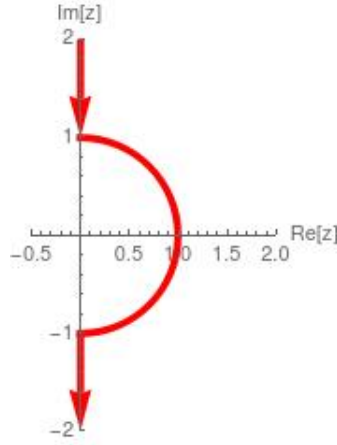


Figura 1.2: Camino tenido en cuenta para realizar la integral de contorno en el plano complejo

$$\frac{1}{\pi} \text{Sin}(\pi s) \int_1^{\infty} t^{-2s} \underbrace{\left(\frac{(1 + L\gamma) \text{Cosh}(\gamma t) + t\gamma \text{Sin}(\gamma t)}{t \text{Cosh}(t\gamma) + L \text{Sinh}(t\gamma)} \right)}_{\chi} dt \quad (1.22)$$

Luego voy a desarrollar asintoticamente χ (1.23), para despues insertarlo en (1.22) da como resultado y realizar la integral termino a termino para luego obtener (1.24)

$$\gamma + \frac{1}{t} - \frac{L}{t^2} + \frac{L^2}{t^3} + O\left(\frac{1}{t^4}\right) \quad (1.23)$$

$$\zeta_A(s) = \frac{\text{Sin}(\pi s)}{\pi} \left(\frac{\gamma}{2s-1} + \frac{1}{2s} - \frac{L}{2s+1} + \frac{L^2}{2s+2} + \dots \right) \quad (1.24)$$

De donde se pueden comparar los polos y residuos con el caso anterior

1.4. Calculo del Heat-Kernel

Capítulo 2

Estudio del Problema Singular

En Este capitulo se van a aplicar las herramientas desarrolladas en el capitulo anterior al estudio del espectro de un operador singular

2.1. El Operador Singular

Como trabajo de tesis se propondra aplicar los metodos desarrollados en el capitulo anterior al operador diferencial (2.1).

$$\begin{aligned} A\phi(x) &= -\partial_x^2 \phi(x) - \frac{\alpha}{x} \phi(x) \\ \alpha &> 0 \\ \phi(0) &= \phi(L) = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Para eso voy a resolver la ecuación de autovalores (2.2).

$$\begin{aligned} A[\phi(x)] &= \omega^2 \phi(x) \\ \omega &\in \Re \end{aligned} \tag{2.2}$$

La cual posee soluciones LI y_1 y y_2 dadas por :

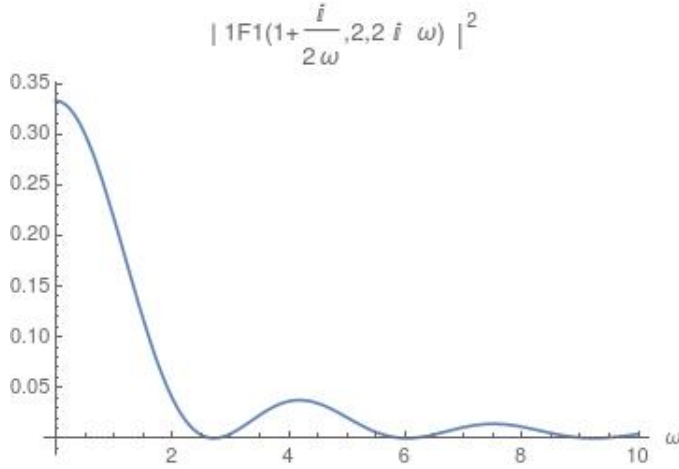


Figura 2.1: En esta imagen se puede ver el comportamiento de los ceros de función F_1^1 , para $\alpha = 1$ y $L = 1$

$$\phi(x) = \underbrace{C[1] e^{-i\omega x} x F_1^1\left(1 + \frac{i\alpha}{2\omega}, 2, 2i\omega x\right)}_{y_1} + \underbrace{C[2] e^{-i\omega x} x U\left(1 + \frac{i\alpha}{2\omega}, 2, 2i\omega x\right)}_{y_2} \quad (2.3)$$

Donde $F_1^1(a, b, z)$ y $U(a, b, z)$ son las soluciones LI de la ecuacion hypergeometrica (2.4)

$$z \partial_z^2 \psi(a, b, z) + (b - z) \partial_z \psi(a, b, z) - a \psi(a, b, z) = 0 \quad (2.4)$$

Apliciando la condicion de contorno $\phi(0) = 0$, debido a que $U(1 + \frac{i\alpha}{2\omega}, 2, 0) \rightarrow \infty$ se obtiene $C[2] = 0$

Los autovalores entonces están dados por los ceros de $y_1(L) = 0$, donde la única función que se anula en el producto es $F_1^1(1 + \frac{i\alpha}{2\omega}, 2, 2i\omega x)$, los autovalores estarán caracterizados por F_1^1 , en la figura (2.1) se puede ver su comportamiento en funcion de ω para $\alpha = 1$, $L = 1$.

A partir de ahora en vez de trabajar con la función hypergeometrica, voy a trabajar con su aproximación dada por (2.5) la cual tiene validez para $|z| \rightarrow \infty$. (COMO CITO EL ABRA)

$$F_1^1(a, b, z) = \Gamma(b) \left(\frac{e^z z^{a-b}}{\Gamma(a)} * A_1 + \frac{(-z)^{-a}}{\Gamma(b-a)} * A_2 \right) \quad (2.5)$$

Donde A_1 y A_2 son correcciones asintóticas, que voy a tomar como 1, en el apéndice 1 se demuestra que no contribuyen a la estructura de los polos, al orden que estoy calculando, si hay que tenerlos en cuenta para calcular los polos mas halla de donde se calcularon en esta tesis.

Definiendo las variables adimensionales $\mu = \omega L$ y $\beta = \alpha L$ y reemplazando los valores correspondientes en la ecuación (2.5) obtengo.

$$F_1^1\left(1+i\frac{\beta}{2\mu}, 2, 2i\beta\right) = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}\frac{\beta}{\mu}}}{2\mu} \left(\frac{e^{i(\frac{\beta}{2\mu} \ln(2\mu) - \pi/2 + 2\mu)}}{\Gamma(1 + \frac{i\beta}{2\mu})} + \frac{e^{-i(\frac{\beta}{2\mu} \ln(2\mu) - \pi/2)}}{\Gamma(1 - \frac{i\beta}{2\mu})} \right) \quad (2.6)$$

La cual queda expresada como un producto de dos funciones, una parte que se anula y una parte que no.

Para obtener los autovalores voy a solo ocuparme de la parte que se anula, la cual esta entre paréntesis.

$$M(\mu) = \frac{e^{i(\frac{\beta}{2\mu} \ln(2\mu) - \pi/2 + 2\mu)}}{\Gamma(1 + \frac{i\beta}{2\mu})} + \frac{e^{-i(\frac{\beta}{2\mu} \ln(2\mu) - \pi/2)}}{\Gamma(1 - \frac{i\beta}{2\mu})} \quad (2.7)$$

Para calcular los polos de $\zeta_A(s)$ voy a utilizar las técnicas desarrolladas en el capitulo anterior.

2.2. Calculo Asintótico de los autovalores

2.3. Calculo Utilizando Variable Compleja

Sabiendo que los autovalores de mi ecuación son todos reales, puedo expresar mi $\zeta_A(s)$ como una integral en el plano complejo, y sabiendo que no presenta ningun otro polo, puedo deformarlo hasta que quede el camino dado por (1.2) tal como había echo antes

La función $\zeta_A(s)$ queda definida por la ecuación (CAPITULO ANTERIOR), donde $f(\omega)$ donde al igual que antes voy a usar la ecuación (2.7) en vez de (2.6) ya que ambas poseen los mismos ceros.

Cuando deforme el camino en la integral sobre los ejes verticales, voy a obtener un termino exponencialmente decreciente y uno decreciente, que se van a alternar dependiendo de si estoy arriba o abajo del eje real.

voy a tener que calcular $f'(\omega)$ y $f(\omega)$ para luego evaluar $\omega = \pm it$, donde t es el parámetro de integración .

Para evitar trabajar con todos los terminos de la expresion (2.7) voy a renombrar distintas partes de la ecuacion segun:

$$\begin{aligned} q &= \frac{\alpha}{2\beta} \text{Log}[2\omega L] \\ q' &= \partial_{\omega} q \\ p &= 2i\mu \\ p' &= \partial_{\omega} p \\ \Gamma_{\pm} &= \Gamma(1 \pm \frac{i\alpha}{2\omega}) \\ \psi^{\pm} &= \frac{1}{\Gamma_{\pm}} \partial_{\omega} \Gamma_{\pm} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Utilizando estas definiciones, mi ecuación (2.7) queda:

$$f(\omega) = -\frac{ie^{i(q+p)}}{\Gamma_+} + \frac{ie^{-i} q}{\Gamma_-} \tag{2.9}$$

Luego calculando $\partial_{\omega} f(\omega)$ obtengo:

$$f' = e^{ip} e^{iq} \underbrace{\left(\frac{1}{\Gamma_+} \partial_{\omega}(q+p) + i \frac{\partial_{\omega} \Gamma_+}{\Gamma_+^2} \right)}_{*} + e^{-iq} \left(\frac{1}{\Gamma_-} \partial_{\omega} q - i \frac{\partial_{\omega} \Gamma_-}{\Gamma_-^2} \right) \tag{2.10}$$

Donde todo el termino marcado con $*$ cuando haga la sustitucion $\omega = \pm it$ para hacer la integral sobre los ejes, van a converger $\forall t$ sin importar el eje.

El problema va a surgir cuando cuando quiera evaluar e^{ip} , voy a obtener un termino exponencialmente creciente, dependiendo si el eje es $-i$, para eso, saco factor común e^{ip} en f y f' cancelando el termino exponencialmente creciente y obteniendo una suma con un termino exponencialmente decreciente, obteniendo finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f} &= \frac{1}{i} \left(q' - i \frac{\partial_{\omega} \Gamma_-}{\Gamma_-} \right) \\ \text{Para } \omega &= it \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\frac{f'}{f} = i \left(q' + p' + i \frac{\partial_\omega \Gamma_+}{\Gamma_+} \right) \quad (2.12)$$

Para $\omega = -it$

Donde en las ecuaciones de arriba, reemplazando las definiciones de q y p obtengo, respectivamente

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{2i\omega^2} \left(1 - \text{Log}(2\omega L) + \psi\left(1 - \frac{\alpha}{2\beta\omega}\right) \right) \\ & \frac{i\alpha}{2\omega^2} \left(1 - \text{Log}(2\omega L) + \psi\left(1 + \frac{\alpha}{2\beta\omega}\right) \right) + 2iL \end{aligned} \quad (2.13)$$

Reemplazando estos resultados en la integral obtengo

$$\begin{aligned} & \zeta_A(s) = \\ & \frac{1}{2\pi i} \int_1^\infty \frac{i\alpha}{2t^2} \left(1 - \text{Log}(2Lt) - \frac{i\pi}{2} + \psi\left(1 - \frac{\alpha}{2t}\right) \right) t^{-2s} e^{-i\pi s} (idt) + \\ & \frac{1}{2\pi i} \int_1^\infty \frac{\alpha}{2it^2} \left(\left(1 - \text{Log}(2Lt) - \frac{i\pi}{2} + \psi\left(1 - \frac{\alpha}{2t}\right) \right) + 2iL \right) t^{-2s} e^{i\pi s} (-idt) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Donde antes de reacomodar los terminos puedo calcular el termino que contiene $2iL$ el cual es la potencia mas alta de t para obtener:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_1^\infty 2iL e^{i\pi s} t^{-2s} (-idt) = \frac{L e^{i\pi s}}{2\pi i} \frac{1}{s - 1/2} \quad (2.15)$$

Ningún otro termino aportará a este polo, entonces el residuo en $s = 1/2$ es:

$$\text{Res}(s = 1/2) = \frac{L}{2\pi} \quad (2.16)$$

Que se corresponde con el calculado con el método anterior.

Una vez calculado este termino, puedo reorganizar el resto de la integral como:

$$-\frac{\alpha}{2\pi} \sin[\pi s] \int_1^\infty t^{-2s-s} \left(1 - \text{Log}[2Lt] + \psi\left(1 - \frac{\alpha}{2t}\right) \right) dt - \frac{\alpha}{4} \text{Cos}[\pi s] \int_1^\infty t^{-2s-s} dt \quad (2.17)$$

Donde todos los términos son calculables analíticamente, excepto el que esta multiplicado por ψ , para lo cual utilizo el desarrollo de ψ en $t \rightarrow \infty$:

$$\psi(1 - \frac{\alpha}{2t}) \approx -\gamma + O(\frac{1}{t}) \quad (2.18)$$

Realizando todas las integrales la funcion $\zeta_A(s)$ a este orden queda determinada por:

$$\begin{aligned} \zeta(s)_A = & \frac{Le^{i\pi s}}{2\pi i} \frac{1}{s-1/2} - \frac{\alpha \sin[\pi s]}{4\pi} \frac{1}{s+1/2} \\ & \alpha \frac{1+S\text{Log}(4)+2S\text{Log}[L]+\text{Log}[2L]}{8\pi} \frac{\sin(\pi s)}{(s+1/2)^2} \\ & \frac{\gamma \alpha \sin[\pi s]}{4\pi} \frac{1}{s+1/2} - \frac{\alpha \cos(\pi s)}{8\pi} \frac{1}{s+1/2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Donde el siguiente termino en el desarrollo de ψ contribuirá al residuo en $s = -3/2$

Para calcular el residuo en $s = -1/2$ desarrollo todo en Serie de Laurent alrededor de ese punto obteniendo.

$$-\frac{\alpha}{8\pi} \frac{1}{(s+1/2)^2} + \alpha \frac{1-\gamma-\text{Log}[2L]}{4\pi} \frac{1}{s+1/2} + \text{Regular} \quad (2.20)$$

Donde se puede ver que el residuo, y la contribución al polo cuadrático en $s = -1/2$ coinciden con las calculadas anteriormente.

Una aclaracion importante es que el termino $\text{Log}[2L]$ es correcto dimensionalmente, ya que proviene de evaluar la integral $\int_1^\infty \text{Log}[2L\omega] d\omega$

2.4. Cálculo de la energía de vacío

La energía de vacío queda determinada por la ecuación

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \zeta(s)|_{-\frac{1}{2}} \quad (2.21)$$

$\zeta(s)$ ya está desarrollada alrededor de $s = -1/2$ en (2.20), queda desarrollar $(E_c)^{2s+1}$ alrededor de $s = -1/2$ quedando.

$$E_c \approx 1 + 2\text{Log}[E_c](s+1/2) + 2\text{Log}[E_c]^2(s+1/2)^2 + O(s+1/2)^3 \quad (2.22)$$

Entonces la energía de vacío queda determinada por:

$$E_0 = \left(\frac{1}{(s+1/2)^2} \left(\frac{-\alpha}{8\pi} \right) + \frac{\alpha(1-\gamma - \text{Log}[2L]) - \alpha \text{Log}[E_c]}{4\pi(s+1/2)} + \text{Regular} \right) \Big|_{s=-1/2}$$

(2.23)

Capítulo 3

Conclusiones

Concluyo que

Apéndice A

Calculo de las correcciones asintoticas la Funcion Hypergeometrica

En el capítulo 3, cuando se calcularon asintoticamente los autovalores, se utilizó la aproximación:

$$F_1^1(a, b, z) = \Gamma(b) \left(\frac{e^z z^{a-b}}{\Gamma(a)} * A_1 + \frac{(-z)^{-a}}{\Gamma(b-a)} * A_2 \right) \quad (\text{A.1})$$

Donde A_1 y A_2 quedan determinadas por:

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{n=0}^{R-1} \left(\frac{(a)_n(1+a-b)_n}{n!} (-z)^{-n} + O(|z|^{-R}) \right) \\ A_2 &= \sum_{n=0}^{S-1} \left(\frac{(b-a)_n(1-a)_n}{n!} z^{-n} + O(|z|^{-S}) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Donde $(a)_n$ es el símbolo de Pochhammer, las primeras correcciones en A_1 y A_2 quedan, Luego de reemplazar a, b, z por sus valores:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 + \frac{a(1-a-b)}{-z} + O(|z|^{-2}) = -\frac{\beta}{4\mu^2} + \frac{\beta^2}{8i\mu^3} + O(|\mu|^{-3}) \\ A_2 &= 1 + \frac{(b-a)(1-a)}{z} + O(|z|^{-2}) = -\frac{\beta^2}{8i\mu^3} - \frac{\beta}{4\mu^2} + O(|\mu|^{-3}) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

De aquí puede verse que la primer corrección asintótica entra al orden mas bajo en la potencia μ^2 , que no contribuye al polo en $s = -1/2$ ya que

la ecuación asintótica, el del orden $\frac{1}{\mu^2}$ cuando quiero calcular el polo en $s = -3/2$.