# 2020年全国大学生数学竞赛非数学专业竞赛试题

一、填空题（满分 30 分，共 5 小题，每题 6 分）

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(e^{\tan x}+\sqrt{1-\cos x}\right)-\tan x}{\arctan\left(4\sqrt{1-\cos x}\right)}=$ ________.

解：$\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)$，$e^{\tan x}=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+o\left(x^3\right)$，$\sqrt{1-\cos x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x+o(x)$

$e^{\tan x}+\sqrt{1-\cos x}=1+\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)x+o(x)$，$\ln\left(e^{\tan x}+\sqrt{1-\cos x}\right)=\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)x+o(x)$，

$\ln\left(e^{\tan x}+\sqrt{1-\cos x}\right)-\tan x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x+o(x)$，

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(e^{\tan x}+\sqrt{1-\cos x}\right)-\tan x}{\arctan\left(4\sqrt{1-\cos x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(e^{\tan x}+\sqrt{1-\cos x}\right)-\tan x}{4\sqrt{1-\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(e^{\tan x}+\sqrt{1-\cos x}\right)-\tan x}{2\sqrt{2}x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}x+o(x)}{2\sqrt{2}x}=\frac{1}{4}.$$

（2）设隐函数 $y=y(x)$ 由 $y^2(x-y)=x^2$ 确定，则 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2}=$ ________.

解：令 $y=tx$，则 $x=\dfrac{1}{t^2(1-t)},y=\dfrac{1}{t(1-t)}$，$\mathrm{d}x=\displaystyle\int\frac{3t-2}{t^3(1-t)^2}\mathrm{d}t$，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2}=\int\frac{3t-2}{t}\mathrm{d}t=3t-2\ln|t|+c=3\frac{y}{x}-2\ln\left|\frac{y}{x}\right|+c.$$

（3）定积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x=$ ________.

解：根据奇偶性，显然 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x=0$.

（4）若曲线 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=t+\cos t\\ e^y+ty+\sin t=1\end{cases}$ 确定，则此曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程为 ________.

解： $t=0$ 时， $x=1$， $y=0$；又曲线 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=t+\cos t \\ e^y+ty+\sin t=1 \end{cases}$ 确定，所以：

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}(t+\cos t)=(1-\sin t)\mathrm{d}t，\ \mathrm{d}\left(e^y+ty+\sin t\right)=0 \Rightarrow e^y\mathrm{d}y+y\mathrm{d}t+t\mathrm{d}y+\cos t\mathrm{d}t=0$$

$$\Rightarrow \left(e^y+t\right)\mathrm{d}y+(y+\cos t)\mathrm{d}t=0 \Rightarrow \mathrm{d}y=-\frac{y+\cos t}{e^y+t}\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow f'(0)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=-\frac{y+\cos t}{\left(e^y+t\right)(1-\sin t)}\Big|_{t=0}=-1.$$

$$\Rightarrow y=-x+1$$

（5） $\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分______________.

解：令 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}},x>0$，则 $f(x)$ 单调减少，$\int_1^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x<\sum_{n=1}^{100}f(n)<1+\int_1^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，

又 $\int_1^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}\Big|_1^{100}=18$， $\Rightarrow \left[\sum_{n=1}^{100}n^{-\frac{1}{2}}\right]=18$.

上面不等式的证明：

$$f(n)=\int_n^{n+1}f(n)\mathrm{d}x>\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \sum_{n=1}^{100}f(n)>\int_1^{101}f(x)\mathrm{d}x>\int_1^{101}f(x)\mathrm{d}x,$$

$$f(n+1)=\int_n^{n+1}f(n+1)\mathrm{d}x<\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \sum_{n=1}^{99}f(n+1)<\int_1^{100}f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{100}f(n)<1+\int_1^{100}f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_1^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x<\sum_{n=1}^{100}f(n)<1+\int_1^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

二、（14 分）求在 $[0,+\infty)$ 上的可微函数 $f(x)$，使 $f(x)=e^{-ux}$， $u=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

解： $f(x)=e^{-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t} \Rightarrow \ln f(x)=-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)$，

三、（14 分）设 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,1\right]$ 上连续且 $1\le f\left(x\right)\le 3$，证明：

$$1\le\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x\le\frac{4}{3}.$$

证明：由柯西不等式，$\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x\ge\left[\int_0^1\sqrt{f\left(x\right)}\sqrt{\frac{1}{f\left(x\right)}}\mathrm{d}x\right]^2=1$，又因为：

$$\left(f\left(x\right)-1\right)\left(3-f\left(x\right)\right)\ge 0\Rightarrow 4f\left(x\right)-3-f^2\left(x\right)\ge 0\Rightarrow 4\ge\frac{3}{f\left(x\right)}+f\left(x\right)$$

$$\Rightarrow 4\ge\int_0^1\left[\frac{3}{f\left(x\right)}+f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x\Rightarrow\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{3}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x\le\left\{\frac{1}{2}\left[\int_0^1\frac{3}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x+\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\right]\right\}^2\le 4,$$

$$\Rightarrow\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x\le\frac{4}{3}\Rightarrow 1\le\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x\le\frac{4}{3}.$$

四、（14 分）讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)\left(1+a^2\right)\cdots\left(1+a^n\right)}$ 的敛散性，$a>0$ 为常数.

解：记 $b_n=\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)\left(1+a^2\right)\cdots\left(1+a^n\right)}$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{1+a^{n+1}}=\begin{cases}0,0<a<1\\ \frac{1}{2},a=1\\ 1,a>1\end{cases}$，

故 $a\le 1$ 时级数收敛；

当 $a>1$ 时，令 $c=\frac{1}{a}$，则 $0<c<1$，

$$b_n=\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)\left(1+a^2\right)\cdots\left(1+a^n\right)}=\frac{1}{(1+c)\left(1+c^2\right)\cdots\left(1+c^n\right)},$$

记 $c_n=(1+c)\left(1+c^2\right)\cdots\left(1+c^n\right)$，则 $\left\{c_n\right\}$ 单调递增，由不等式 $e^x>1+x,\left(x>0\right)$ 知：

$c_n=(1+c)\left(1+c^2\right)\cdots\left(1+c^n\right)<e^c e^{c^2}\cdots e^{c^n}=e^{\frac{c-c^{n+1}}{1-c}}<e^{\frac{c}{1-c}}$，从而知 $\left\{c_n\right\}$ 单调递增有上界，

且其极限值介于1与 $e^{\frac{c}{1-c}}$ 之间，故此时级数发散；

综上：$a\le 1$ 时级数收敛；$a>1$ 时级数发散.

五、记曲面 $z^2=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成的空间区域为 $\Omega$，计算三重积分

$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解：$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^3\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}r = 2\pi$ .

六、（14 分）已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}, y_2 = xe^x + e^{-x}, y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶常系数非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

解：由题意知 $e^{2x}, e^{-x}$ 是相应其次方程的两个线性无关的解，且 $xe^x$ 是非齐次的一个特解，故有：$y'' - y' - 2y = f\left(x\right)$，将 $xe^x$ 带入可以求出 $f\left(x\right) = \left(1-2x\right)e^2$，故此微分方程的表达式为：$y'' - y' - 2y = \left(1-2x\right)e^2$.