

# Compte-rendu TP Elements sur la variable complexe

Tom Chauvel

## Contents

1 Calcul d'intégrales le long d'un chemin .....	2
1.1 Intégration d'une fonction .....	2
1.2 Intégration le long d'un chemin .....	3
1.3 Création d'un script et applications .....	4
1.3.a Le long d'un arc de cercle .....	4
1.3.b Le long d'un chemin .....	6
2 Calcul d'intégrales le long d'un contour fermé .....	8
2.1 Premières applications .....	8
2.2 Application du théorème des résidus .....	10
2.2.a $f_1(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ .....	10
2.2.b $f_2(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ .....	11
2.3 Intégrales de Cauchy .....	13
3 Intégrales sur $\mathbb{R}$ .....	14

# 1 Calcul d'intégrales le long d'un chemin

## 1.1 Intégration d'une fonction

Dans ce premier exemple nous allons calculer l'intégrale suivante à la main, et nous allons vérifier avec python

$$\int_0^\pi (2 + \sin(t)) dt = [2t - \cos(t)]_0^\pi = 2\pi - \cos(\pi) - (-\cos(0)) = 2\pi + 2$$

Vérifions avec python

```
from sympy import *
```

```
t = symbols('t', real=True)
f = lambda x : 2 + sin(x)

inte = integrate(f(t), (t, 0, pi))

print(inte)
```

```
2 + 2*pi
```

On obtient le même résultat.

## 1.2 Intégration le long d'un chemin

Maintenant nous allons intégrer le long d'un arc du cercle de rayon 1 et de centre 0 avec  $f(z) = z^2$

Mathématiquement :

$$f(z) = z^2$$

$$\gamma(t) = z = e^{it}$$

$$\gamma(a) = e^{ia} = 1 \Rightarrow a = 0$$

$$\gamma(b) = e^{ib} = 0.5 + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma'(t) = (e^{it})' = ie^{it} \Rightarrow \gamma'(t)dt = dz$$

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)dt$$

$$= \int_a^b (e^{it})^2 \times ie^{it}dt$$

$$= \int_a^b ie^{2it} \times e^{it}dt$$

$$= \int_a^b ie^{3it}dt$$

$$= \left[ \frac{e^{3it}}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{e^{3i \times (\frac{\pi}{3})}}{3} - \frac{e^{3i \times 0}}{3}$$

$$= \frac{-1-1}{3}$$

$$= \frac{-2}{3}$$

Avec python:

```
t = symbols('t', real=True)
z = symbols('z', complex=True)
f = z*z

gamma = exp(I*t)
gamma_p = diff(gamma, t)

f2 = f.replace(z, gamma) * gamma_p

a = 0
b = pi/3

inte = integrate(f2, (t, a, b))

print(inte)
```

-2/3

On obtient bien la même chose

## 1.3 Création d'un script et applications

### 1.3.a Le long d'un arc de cercle

Ici on fait la même chose, mais avec un cercle de rayon 2,  $f(z) = z^2 + 3z$ , et des bornes d'intégrations différentes.

Mathématiquement:

$$f(z) = z^2 + 3z$$

$$\gamma(t) = z = 2e^{it}$$

$$\gamma(a) = 2e^{ia} = 2 \Rightarrow a = 0$$

$$\gamma(b) = 2e^{ib} = 2i \Rightarrow b = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma'(t) = (2e^{it})' = 2ie^{it} \Rightarrow \gamma'(t)dt = dz$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \left( (2e^{it})^2 + 3 \times 2e^{it} \right) \times 2ie^{it}dt \end{aligned}$$

$$= \int_a^b (4e^{2it} + \times 6e^{it}) \times 2ie^{it}dt$$

$$= \int_a^b 8ie^{3it} + \times 12ie^{2it}dt$$

$$= \left[ \frac{8}{3}e^{3it} + \frac{12}{2}e^{2it} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{8}{3}e^{3i \times (\frac{\pi}{2})} - \frac{8}{3}e^{3i \times 0} + 6e^{2i(\frac{\pi}{2})} - 6e^{2i0}$$

$$= \frac{8}{3} \times (-i) - \frac{8}{3} - 6 - 6 = -\frac{8i+44}{3}$$

Sur Python:

```
def integr(f,g,a,b):  
    gp = diff(g,t)  
    f = f.replace(z,g) * gp  
    return simplify( integrate(f,(t,a,b)) )
```

```
t = symbols('t',real=True)  
z = symbols('z',complex=True)  
  
f = z*z + 3*z  
  
gamma = 2*exp(I*t)  
  
a = 2  
b = 2*I  
  
b_inf = solve(gamma - a,t)  
b_sup = solve(gamma - b,t)  
  
print(integr(f,gamma,b_inf,b_sup))
```

```
-44/3 - 8*I/3
```

On trouve la même chose.

### 1.3.b Le long d'un chemin

Ici, au lieu de faire avec un arc de cercle, on va calculer le long de deux segment.

Mathématiquement :

- Entre 2 et  $2+2i$

$$f(z) = z^2 + 3z$$

$$\gamma(t) = z = it$$

$$\gamma(a) = ia = 2 \Rightarrow a = -2i$$

$$\gamma(b) = ib = 2 + 2i \Rightarrow b = 2 - 2i$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma'(t) = (it)' = i \Rightarrow \gamma'(t)dt = dz$$

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)dt$$

$$= \int_a^b (-it^2 - 3t)dt$$

$$= \left[ -\frac{it^3}{3} - \frac{3t^2}{2} \right]_{-2i}^{2-2i}$$

$$\text{on simplifie } (2 - 2i)^2 = -8i$$

$$= -\frac{8}{3}(2 - 2i) + 12i - \frac{8}{3} - 6$$

$$= -14 + \left(\frac{16}{3} + \frac{36}{3}\right)i = -14 + \frac{52}{3}i$$

- Entre  $2+2i$  et  $2i$

$$f(z) = z^2 + 3z$$

$$\gamma(t) = z = t$$

$$\gamma(a) = a = 2 + 2i$$

$$\gamma(b) = b = 2$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma'(t) = (t)' = 1 \Rightarrow \gamma'(t)dt = dz$$

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)dt$$

$$= \int_a^b (t^2 + 3t)dt$$

$$= \left[ \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} \right]_{2+2i}^{2i}$$

$$\text{on simplifie } (2 + 2i)^2 = 8i$$

$$= -\frac{8}{3}i - 6 - \frac{8}{3}i(2 + 2i) - 12i$$

$$= -8i - 12i - 6 + \frac{16}{3} = -20i - \frac{2}{3}$$

- somme des intégrales

$$I_{total} = -20i - \frac{2}{3} - 14 + \frac{52}{3}i = -\frac{8}{3}i - \frac{44}{3}$$

Avec python :

```
t = symbols('t',complex=True)
z = symbols('z',complex=True)
f = z*z + 3*z

a = 2
b = 2+2*I
c = 2*I

gamma = -I*t
b_inf = solve(gamma-a,t)
b_sup = solve(gamma-b,t)

res1 = integr(f,gamma,b_inf,b_sup)

gamma = -t
b_inf = solve(gamma-b,t)
b_sup = solve(gamma-c,t)

res2 = integr(f,gamma,b_inf,b_sup)

print(res1+res2)
```

```
-44/3 - 8*I/3
```

On trouve bien la même chose avec Python.

On remarque aussi que le calcul entre deux segments et un arc de cercle donne le même résultat.

C'est normale car d'après le corollaire du théorème de Cauchy, si une fonction est holomorphe alors l'intégrale du contour est égale du moment qu'on a le même point de départ et le même point d'arrivée ; le chemin importe peu.

## 2 Calcul d'intégrales le long d'un contour fermé

### 2.1 Premières applications

Ici on doit calculer trois intégrales entre 0 et  $2\pi$

$$\gamma(t) = z = \cos(t) + i \sin(t) = e^{it}$$

$$a = 0$$

$$b = 2\pi$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma'(t) = (e^{it})' = ie^{it} \Rightarrow \gamma'(t)dt = dz$$

- Pour  $f_1(z) = z^2$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z)dz &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)dt \\&= \int_0^{2\pi} (e^{it})^2 \times ie^{it}dt \\&= \int_0^{2\pi} ie^{3it}dt \\&= \left[ \frac{e^{3it}}{3} \right]_0^{2\pi} \\&= \frac{e^{3i \times 2\pi}}{3} - \frac{e^{3i \times 0}}{3} \\&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0\end{aligned}$$

- Pour  $f_2(z) = \frac{1}{z}$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z)dz &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)dt \\&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \times ie^{it}dt \\&= \int_0^{2\pi} i dt \\&= [it]_0^{2\pi} \\&= 2i\pi\end{aligned}$$



- Pour  $f_3(z) = \text{conj}(z)$

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \times \gamma'(t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} e^{-it} \times ie^{it} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} i dt \\
 &= [it]_0^{2\pi} \\
 &= 2i\pi
 \end{aligned}$$

Vérifions nos calculs:

```

z = symbols('z',complex=True)
t = symbols('t',complex=True)

f1 = z*z
f2 = 1 / z
f3 = conjugate( z )

g = cos(t) + I * sin(t)

a = 0
b = 2*pi

print( "f1 : ",integr(f1,g,a,b) )
print( "f2 : ",integr(f2,g,a,b) )
print( "f3 : ",integr(f3,g,a,b) )

```

```

f1 :  0
f2 :  2*I*pi
f3 :  2*I*pi

```

On trouve les mêmes résultats avec Python et à la main.

Aussi calculer l'intégrale du conjugué ou celle de l'inverse pour un cercle de rayon 1 donne le même résultat.

## 2.2 Application du théorème des résidus

Ici, on va chercher premièrement tous nos résidus. Ensuite on va intégrer pour plusieurs cercles, grâce au théorème des résidus.

Pour le premier cas, un cercle de rayon 1 et un cercle de rayon 2.

Pour le second cas, un cercle de rayon 1, un cercle de rayon 2 et un cercle de rayon 3.

Le dernier rayon est suffisant car il englobe tous nos résidus, ce qui est équivalent à aller jusqu'à l'infini.

**2.2.a**  $f_1(z) = \frac{1}{z(z-1)}$

Les poles sont 0 et 1

$$\text{Res}(f_1, 0) = \frac{1}{(1-1)!} \left[ (z-0)^1 \frac{1}{z(z-1)} \right]_{z=0}^{1-1} = \left[ \frac{z}{z(z-1)} \right]_{z=0} = \frac{1}{0-1} = -1$$

$$\text{Res}(f_1, 1) = \frac{1}{(1-1)!} \left[ (z-1)^1 \frac{1}{z(z-1)} \right]_{z=1}^{1-1} = \left[ \frac{z-1}{z(z-1)} \right]_{z=1} = \frac{1}{1} = 1$$

Donc pour  $0 < \beta < 1$  on prend juste le résidu en 0 :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \times \text{Res}(0) = 2i\pi \times (-1) = -2i\pi$$

Et pour  $1 < \beta$  on prend le résidu en 1 et en 0 :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \times (\text{Res}(0) + \text{Res}(1)) = 2i\pi \times 0 = 0$$

```
//cercle rayon 1

Donner le numerateur: 1
Donner le denominateur: z*(z-1)
Donner le rayon du contour: 1
Résultat = -2*I*pi

//cercle rayon 2

Donner le numerateur: 1
Donner le denominateur: z*(z-1)
Donner le rayon du contour: 2
Résultat = 0
```

D'après les résultats du programme on trouve :

- $-2i\pi$  pour  $0 < \beta < 1$
- 0 pour  $1 < \beta$

Les résultats sont cohérents avec ceux calculés à la main.

**2.2.b**  $f_2(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$

Les poles sont 0, 1 et 2

$$Res(f_2, 0) = \frac{1}{(1-1)!} \left[ (z-0)^1 \frac{1}{z(z-1)(z-2)} \right]_{z=0}^{1-1} = \left[ \frac{z}{z(z-1)(z-2)} \right]_{z=0} = \frac{1}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}$$

$$Res(f_2, 1) = \frac{1}{(1-1)!} \left[ (z-1)^1 \frac{1}{z(z-1)(z-2)} \right]_{z=1}^{1-1} = \left[ \frac{z-1}{z(z-1)(z-2)} \right]_{z=1} = \frac{1}{(1)(-1)} = -1$$

$$Res(f_2, 2) = \frac{1}{(1-1)!} \left[ (z-2)^1 \frac{1}{z(z-1)(z-2)} \right]_{z=2}^{1-1} = \left[ \frac{z-2}{z(z-1)(z-2)} \right]_{z=2} = \frac{1}{(2)(1)} = \frac{1}{2}$$

Donc pour  $0 < \beta < 1$  on prend juste le résidu en 0 :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \times Res(0) = 2i\pi \times \left(\frac{1}{2}\right) = i\pi$$

Pour  $1 < \beta < 2$  on prend le résidu en 0 et en 1 :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \times (Res(0) + Res(1)) = 2i\pi \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -i\pi$$

et pour  $2 < \beta$  on prend tous les résidus :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \times (Res(0) + Res(1) + Res(2)) = 2i\pi \times (0) = 0$$

```

//cercle rayon 1

Donner le numerateur: 1
Donner le denominateur: z*(z-1)*(z-2)
Donner le rayon du contour: 1
Résultat = I*pi

//cercle rayon 2

Donner le numerateur: 1
Donner le denominateur: z*(z-1)*(z-2)
Donner le rayon du contour: 2
Résultat = -I*pi

//cercle rayon 3

Donner le numerateur: 1
Donner le denominateur: z*(z-1)*(z-2)
Donner le rayon du contour: 3
Résultat = 0

```

D'après les résultats du programme on trouve :

- $i\pi$  pour  $0 < \beta < 1$
- $-i\pi$  pour  $1 < \beta < 2$
- $0$  pour  $2 < \beta$

Les résultats sont aussi cohérents avec ceux calculés à la main.

## 2.3 Intégrales de Cauchy

En utilisant, le programme, on pourra calcul  $\int_{\gamma} f(z)dz$ .

Il suffira juste de divisé par  $2i\pi$  le résultat pour avoir le résultat des intégrals de Cauchy.

D'après  $p(z) = e^z$ , on sait que le rayon du cercle est 1.

```
Donner le numerateur: exp(z)
Donner le denominateur: z
Donner le rayon du contour: 1
Résultat = 2*I*pi
```

On trouve  $I = \frac{2i\pi}{2i\pi} = 1$

Pour vérifier, il suffit de calculer la somme des résidus (car les  $2i\pi$  se simplifie dans le calcul), ici seulement en  $z = 0$

$$I = \text{Res}(f, 0) = \left( z \times \frac{e^z}{z} \right)_{z=0} = e^0 = 1$$

Du coup le résultat est cohérent.

```
Donner le numerateur: exp(z)
Donner le denominateur: z-1/2
Donner le rayon du contour: 1
Résultat = 3.29744254140026*I*pi
```

$$I = \frac{3.29744254140026i\pi}{2i\pi} = 1.64872127$$

Vérifions:

$$I = \Sigma \text{Res} = \text{Res}\left(f, \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} = 1.64872127$$

Résultat cohérent

```
Donner le numerateur: exp(z)
Donner le denominateur: z-2
Donner le rayon du contour: 1
Résultat = 0
```

$$\text{Ici } I = \frac{0}{2i\pi} = 0$$

C'est normal car le résidu n'est pas dans le cercle de rayon 1, donc la somme est nulle.

### 3 Intégrales sur R

Pour cette dernière partie, on va calculer deux intégrales à la main et vérifier ensuite avec python.

Pour I1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+i)(z-i)} dz$$

Les pôles sont  $i$  et  $-i$ . Je choisis le demi-cercle supérieur qui contient seulement  $i$

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{(z+i)_{z=i}} = \frac{1}{2i}$$

$$I = 2i\pi \text{Res}(f, i) = \pi$$

Pour I2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3} dz$$

Les pôles sont  $i$  et  $-i$  de multiplicité 3. Je choisis le demi-cercle supérieur qui contient seulement  $i$

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(z+i)^3} \right]_{z=i}^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[ -\frac{3(z+i)^2}{(z+i)^6} \right]_{z=i}^1$$

$$= -\frac{3}{2} \left[ \frac{1}{(z+i)^4} \right]_{z=i}^1$$

$$= -\frac{3}{2} \left[ \frac{-4(z+i)^3}{(z+i)^8} \right]_{z=i}^0$$

$$= \frac{12}{2} \left[ \frac{1}{(z+i)^5} \right]_{z=i}^0$$

$$= 6 \left[ \frac{1}{(2i)^5} \right] = \frac{6}{32i} = \frac{3}{16i}$$

$$I = 2i\pi \text{Res}(f, i) = 2i\pi \times \frac{3}{16i} = \frac{3}{8}\pi$$

Vérifions avec python :

```
x = symbols('x', complex=False)

f1 = 1/(1+x*x)
f2 = 1/((1+x*x)**3)

print( "f1 : ", integrate(f1, (x, "-oo", "+oo")) )
print( "f2 : ", integrate(f2, (x, "-oo", "+oo")) )
```

```
f1 : pi
f2 : 3*pi/8
```

On obtient les mêmes résultats.