МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра компьютерной инженерии и моделирования

Дискретные сигналы

Отчет по лабораторной работе 6

по дисциплине «**Обработка сигналов**»

студента 3 курса группы ИВТ-б-о-202

Шор Константина Александровича

Направления подготовки 09.03.01«Информатика и вычислительная техника»

Симферополь, 2023

Лабораторная работа №6

Тема: Дискретные сигналы

Теоретические сведения

Дискретный сигнал – функция, определённая только на дискретном множестве точек времени.

Дискретный сигнал хд(t) представляет собой последовательность (…, x-1, x0, x1, x2, …), отсчетных значений сигнала x(t) в точках (…, t-1, t0, t1, t2, …) соответственно. Отсчеты дискретных сигналов берутся, как правило, через равный промежуток времени (интервал (шаг) дискретизации):

$$\Delta = t_m - t_{m-1} = t_{m-1} - t_{m-2} = \ldots$$

Если сигнал задан на отрезке [0, T] (T является периодом для периодического сигнала), то полное число отсчетов

$$N = T/\Delta$$

Сопоставив исходному сигналу x(t) дискретную модель с учетом комплексного ряда Фурье, имеем:

$$x(t) = \Delta \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot \delta(t - k \cdot \Delta) = \Delta \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot t / T}$$

Для определения коэффициентов Cn используется дискретное преобразование Фурье (ДПФ):

$$C_n = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot k / N}$$

Свойства ДПФ:

1. Число коэффициентов Cn равно количеству отсчетов N
2. Коэффициент C0 является средним значением всех отсчетов:

$$C_0 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k$$

3. Если N – четное число, то

$$C_{N/2} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot (-1)^k$$

4. Если отсчетные значения xk – вещественные числа, то коэффициенты ДПФ, номера которых располагаются симметрично относительно N/2, образуют сопряженные пары:

$$C_{N-n} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (N-n) \cdot k / N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot k / N} = C_n^*$$

Для восстановления сигнала x(t) с ограниченным спектром по заданным отсчетным значениям (x0, x1, x2, …, xN-1) необходимо найти коэффициенты ДПФ (C0, C1, C2, …, CN/2) и использовать следующий ряд Фурье:

$$\begin{gathered} x(t) = C_0 + 2 \cdot |C_1| \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t / T + \varphi_1) + 2 \cdot |C_2| \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot t / T + \varphi_2) + \\ + \ldots + |C_{N/2}| \cdot \cos(N \cdot \pi \cdot t / T + \varphi_{N/2}) \end{gathered}$$

Для определения отсчетных значений по известным значениям коэффициентов Cn используется обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ):

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot k / N}$$

Ход работы

Инициализация переменных

```python
# импортируем библиотеки
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.array([2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0])
t = np.arange(0, 1, 1/len(x))
```

Расчёт ряда Фурье

Ряд Фурье – позволяет представить периодическую функцию как сумму гармонических функций с разными частотами и амлитудой.

```python
# рассчитываем ряд Фурье
a0 = np.mean(x)
a = np.zeros(4)
b = np.zeros(4)

#рассчёт коэффициентов
for k in range(1, 5):
    a[k-1] = (2.0 / len(x)) * np.sum([x[n] * np.cos(2 * np.pi * k * n / len(x)) for n in range(len(x))])
    b[k-1] = (2.0 / len(x)) * np.sum([x[n] * np.sin(2 * np.pi * k * n / len(x)) for n in range(len(x))])

t = np.arange(0, len(x))
x_reconstructed = np.zeros(len(x))
x_reconstructed += a0

#вычисление восстановленного сигнала
for k in range(1, 5):
    x_reconstructed += a[k-1] * np.cos(2 * np.pi * k * t / len(x)) + b[k-1] * np.sin(2 * np.pi * k * t / len(x)
```

Коэффициент ДПФ

ДПФ – это дискретное преобразование Фурье, которое является дискретной версией преобразования Фурье. Оно позволяет анализировать периодические сигналы в частотной области

```
# Коэффициенты ДПФ (DFT)
DFT_coef = np.fft.fft(x)
#DFT_coef = np.array([8., 0.47140452, 0., 0.47140452, 0., 0.47140452, 0., 0.47140452])
```

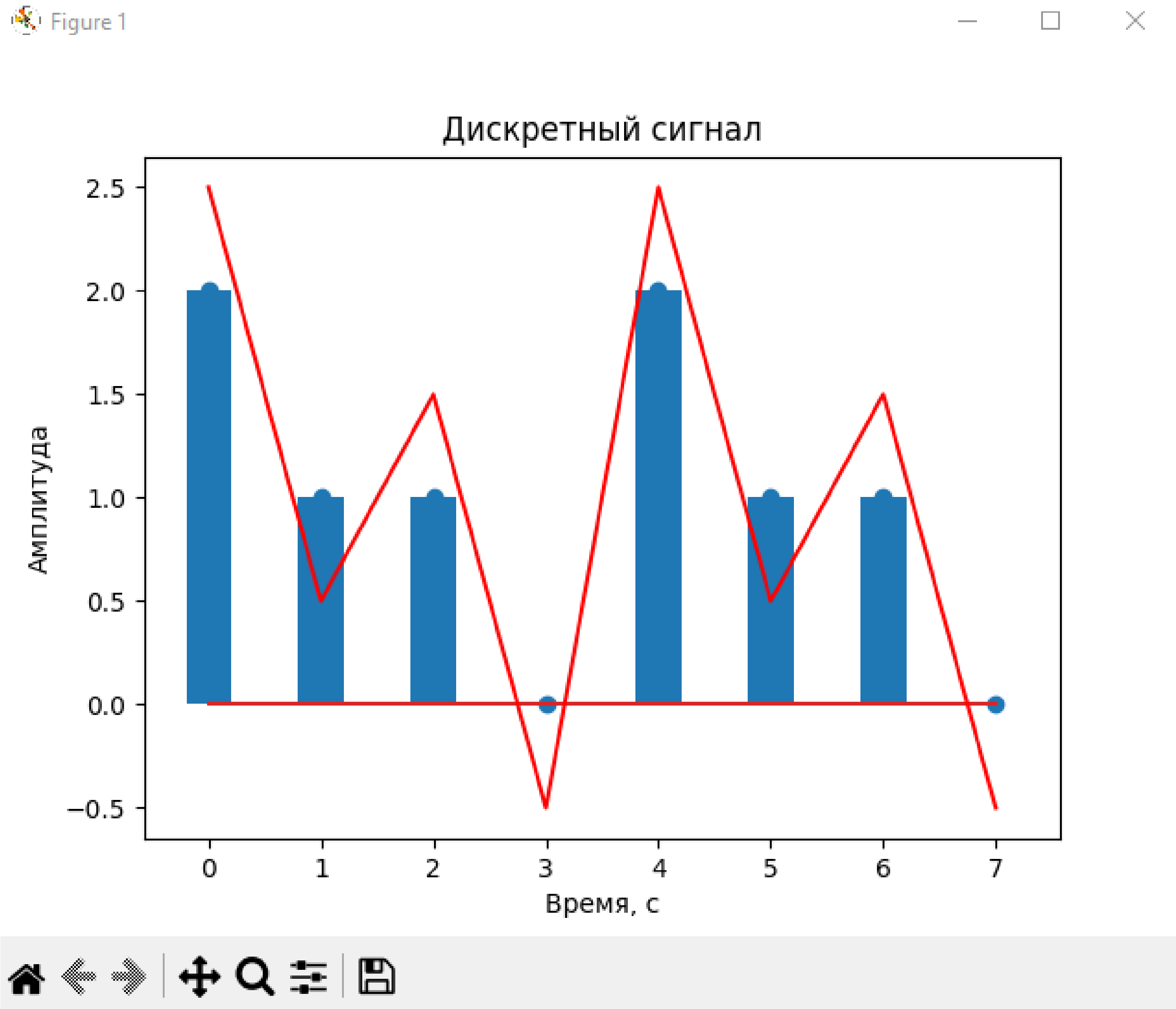
Обратное дискретное преобразование и вывод графика

ОДПФ – преобразует частотный спектр дискретного сигнала из его частотного представления во временное представление при помощи интерполяции частотных составляющих

```
# Обратное преобразование Фурье (IDFT)
x_restored = np.real(np.fft.ifft(DFT_coef))

plt.bar(t, x, width=0.4)
plt.stem(x)
plt.plot(x_reconstructed, 'r')
plt.title('Дискретный сигнал')
plt.xlabel('Время, с')
plt.ylabel('Амплитуда')
plt.show()
```

Восстановленный сигнал



Вывод: в ходе данной лабораторной работе я рассчитал ряд Фурье для данного сигнала, а именно рассчитал коэффициент и вычислил восстановленный сигнал, также рассчитал коэффициент дискретного преобразования Фурье и при его помощи произвёл обратное преобразование Фурье. Результат вывел на график