

高頻度データ解析：市場リスク計測 手法の新展開

林 高樹

本稿は、1日内の金融証券取引の詳細を記録したデータ、いわゆる「高頻度データ」を用いた市場リスク分析について解説する。特に、過去十年余り、高頻度データの応用分野の中でも最も研究が進んでいる実現ボラティリティ (realized volatility) を中心に、高頻度データによる市場リスク計測手法の現状や問題点、最近の展開について紹介する。

キーワード：ボラティリティ計測、市場リスク管理、ティックデータ、マーケット・マイクロストラクチャ、一日内季節性、高頻度トレード

1. 高頻度データとは

1日内の金融証券取引の詳細を記録したデータ、「高頻度データ」の利用が大きく広がっている。高頻度データは、約定や気配などの価格と、それらの発生、記録された時刻 (タイムスタンプ)、それに付随する各種取引情報 (例えば、板寄せによる約定か、ザラ場での約定か、取引相手の情報など) から成るが、質・量ともにそのカバレッジは年を追うごとに拡大の一端をたどっている。高頻度データの形式的特徴は、文字通りデータの記録頻度が「高頻度」であることであり、当然ながら、データサイズが極めて大きいことである。例えば、国内株式の高頻度データを集録する『日経 NEEDS ティックデータ』『個別株・5本気配値』版では、東証データの解像度は分次 (2010年1月より秒次)、大証データは秒次で、1年分約500GB程度である。同時に、その内容的特徴として、集計される前の個別取引 (ないしはそれに近い集計値) を記録することから、市場参加者の注文行動や取引ルールなどの市場の微細構造、いわゆる「マイクロストラクチャ」を強く反映したデータでもある。「ビッド・アスク・バウンス現象」などの微細変動や、市場のオープン・クローズなどに起因する一日内の時系列パターン (「一日内季節性」) など、高頻度時系列データには、中・低頻度では見られない様々な時系列的特徴が観察される。ファイナンス、統計学・計量経済学を中心に、

様々なアングルから新たな実証的知見の獲得やそれに伴う理論・方法論の確立が期待される、まさに宝の山である。

参考までに、高頻度データの例として、ICAP社のEBSヒストリカル・データベース『EBS Data Mine』を紹介する。EBSは、外国為替スポット取引のインターバンク市場においてReutersと並ぶ2大電子ブローキング・システムの一つである。『EBS Data Mine』には、時間刻み1秒で約定と両サイド最良気配のみを集録した「レベル1.0」から、時間刻み100/250ミリ秒で、約定 (deal) と両サイド10気配、取引金額、気配数 (約定であればカウンターパーティ数) を集録した「レベル5.0」までの5段階のデータベースがあり、主要通貨を含むおおよそ50にもなる通貨ペアのスポットレートをカバーする。

表1にEBSの「レベル5.0」データ (約定データ) の実例を示す (ただし、筆者が一部編集)。第2列はタイムスタンプ (グリニッジ標準時間、解像度250ミリ秒)、第4列は取引のサイド (0または1)、第5列の価格は、直前250ミリ秒の間に約定したものの中で最高値 (第4列が0のとき) または最安値 (第4列が1のとき) を表し、第6列約定ロット (単位百万ドル)、第7列はカウンターパーティ数である。第4列が0 (「Given」サイド) とは、指値注文の取り手が売り手だったこと (すなわち、bidを取りに行った売り手主導の約定であったこと)、1 (「Paid」サイド) はそれが買い手だったことを表す。なお、第6、7列は、第5列の約定に対する付随情報であり、250ミリ秒のタイムスライスの中で発生した全約定を累計したものではないことに注意が必要である。データ日付である

はやし たかき

慶應義塾大学 大学院経営管理研究科
〒223-8526 横浜市港北区日吉 4-1-1

2008年10月6日は、前月15日に発生したリーマンブラザーズ破綻の影響が金融資本市場や実体経済を大きく揺るがしていたさ中で、この日だけでもUSDJPY相場は4円ほど円高に進行した。特に、14時12分2.75~3秒間に成立した買い手主導の102.25円の約定以降は、14時19分48.25~48.5秒間に成立した売り手主導の100.22円の約定までほぼ一本調子で下がり続けた。わずか7分間で2円、2%の下落である。表1は、この短時間の急激な下落のクライマックス時点(14時19分を過ぎた辺り)の緊迫した様子を抽出したものである。

次に、同じ時間帯における「レベル5.0」データの気配データより作成された注文板(売買それぞれ10気配まで記録)の推移の様子を図1に示す(なお、見やすくするため注文ロット(縦軸)は買い注文をマイ

ナス表示)。USDJPYは、もちろん取引量が最大の通貨ペアの一つであり、EBSの取扱シェアが特に大きいとされる。最良気配間のスプレッド(ビッド・アスク・スプレッド)は平常時であれば最小pips(呼び値単位)の1-2銭であるが、14時19分12.5秒から同12.75秒の間250ミリ秒の間に買い指値注文が一気に消滅し(成行注文による約定、ないしは当該指値注文のキャンセルにより)、スプレッドが43銭にまで急拡大、一方、最良売気配注文は44ロットまで急増、流動性が枯渇した状態となったことが読み取れる。注文板の買いサイドに残っているのは、利益確定か損失回避のためだろうか、この時間帯の以前より実勢レート(スポット・レート)よりも大幅に低い値段に設定されていた指値注文100.22円、100.20円のみである。

なお、250ミリ秒の解像度は高頻度データとしては目下最速の部類である(2009年9月以降は100ミリ秒にアップグレード)。一方、EBSのマッチング・エンジンは数秒(~数十ミリ秒)の速さで約定しているものと推察されることから、図1は「高速ストロボ」によって「超高速被写体」を連写したスナップショットといえようか。世界の主要な市場においてティックサイズ(取引最小単位)が縮小され、マッチング・エンジンも高速化され、取引件数も飛躍的に増大している。市場の高速化・大規模化に追従する形で、記録データの高解像度化・大規模化が進行する中、高頻度デ

表1 ティックデータの例:『EBS Data Mine』「レベル5.0」、USDJPY 約定(Deal)データ(2008年10月6日)。(c)ICAP all rights reserved worldwide.

2008/10/6	14:19:12.000	USD/JPY	1	100.85	1	1
2008/10/6	14:19:12.250	USD/JPY	0	100.80	1	1
2008/10/6	14:19:12.250	USD/JPY	1	100.83	1	1
2008/10/6	14:19:12.500	USD/JPY	0	100.80	3	1
2008/10/6	14:19:12.500	USD/JPY	1	100.82	1	1
2008/10/6	14:19:12.750	USD/JPY	1	100.65	7	4
2008/10/6	14:19:13.000	USD/JPY	0	100.59	1	1
2008/10/6	14:19:13.000	USD/JPY	1	100.65	5	4

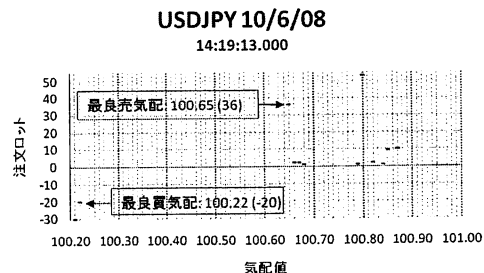
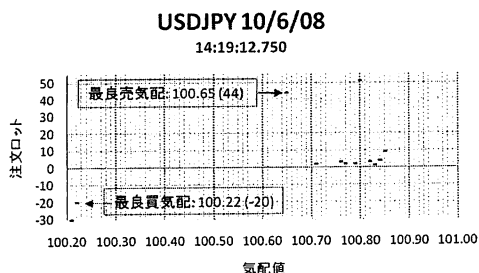
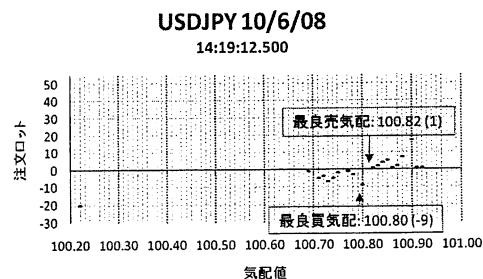
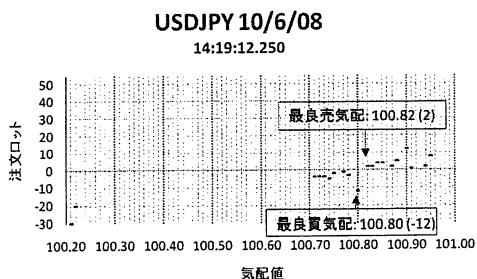


図1 USDJPY 気配値(Quote)注文板の推移: 2008年10月6日、14:19:12.250秒~14:19:13.000秒。『EBS Data Mine』「レベル5.0」データを基に筆者が作成。

ータを対象にした解析に対するニーズは今後とも高まりこそすれ、減ることはまず考えられない。

一口に「高頻度データ解析」といっても、解析の目的や解析者の専門性によって多種多様であるのは、他分野と同様である。本稿では、ページ数の限りもあることから、高頻度データによりいかに精度よく市場リスクを計測するかという方法論に焦点を当てる。特に、高頻度データの応用分野の中でも最も研究が進んでいる「実現ボラティリティ」を中心に解説する。

2. 高頻度データによる市場リスク量の計測

周知の通り、ボラティリティは、オプション価格の評価・ヘッジや、金融証券の資産運用、VaR（ヴァリュー・アット・リスク）に代表される金融機関のリスク計測・管理に不可欠のリスク指標である。高頻度データによるボラティリティ計測の、現代的かつ重要な手法が「実現ボラティリティ」（realized volatility）である。実現ボラティリティの研究は、90年代後半に始まって以来飛躍的に発展している分野である。

2.1 Realized volatility と累積分散

以下では、連続時間に変動する証券価格が高頻度で離散的に観測される状況において、ボラティリティを推定したいとする。時点 t におけるある証券の価格 P_t の対数値 $X_t = \log P_t$ を取ることにより、例えば、時点 s から t への ($s < t$) 対数価格の変化幅 $\log P_t - \log P_s = \log(P_t/P_s)$ は、証券 P の s から t までの累積収益率（連続複利ベース）を表すことができ都合がよい。ボラティリティ計測期間としてはいま一日 $T=1$ を考えよう。

X が金融工学における標準的なモデルである拡散過程に従うケースを考える：

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1)$$

ここで、 μ_t はドリフト係数、 σ_t は拡散係数、 W_t は標準ブラウン運動である。拡散係数は未知の量であり、これが推定対象であるとする。統計的な意味では、 σ_t は確定的な（時間の）関数であるのが自然であるが、一般には σ_t はランダムであり、確率微分方程式(1)を成立させるのに十分な正則条件を持つものとする。 μ_t は、未知でも既知でも良く、ランダムであってもなくても構わないが、一定の正則条件を満たす必要がある。以下、 σ と W は独立であるとするが、より一般には（各時点において将来の情報を含んでいないのであれば）互いに依存していても良い。

いま、離散時点 (t_i) において、証券の対数価格 X_{t_i} が観測されるとする。このとき、実現ボラティリティを次のように定義する：

$$RV = \sum_{i:t_i \leq T} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2. \quad (2)$$

このとき、 RV は計測時点 T が固定のもと、最大観測区間幅 $\Delta = \max_i (t_i - t_{i-1})$ がゼロに収束するに従い、拡散係数の2乗を時点0から T まで積分した値 $IV = \int_0^T \sigma_t^2 dt$ 、累積分散（integrated variance）に確率収束する（ \xrightarrow{P} と書く）。すなわち、 IV は未知な量であったので、統計量 RV は累積分散 IV の一致推定量である。 IV は証券の日次ボラティリティ（標準偏差または分散）に他ならないので、証券の日次ボラティリティを推定するには、当該証券の日次データを長期間に渡って収集して推定するのではなく、一日分の高頻度データを集めて RV を計算すればよい（高頻度データであればあるほど、より精度良く推定できる）。しかも、ボラティリティ σ_t に対して特定のモデルを仮定せずともよい。また、 RV の（推定誤差の）従う漸近分布も求められており、 RV に対する統計的推測を行うことも可能である。

RV 計算の際には、操作の容易性や後述の「マイクロストラクチャ効果」をふまえ、全ティックデータ（非等間隔）ではなく、5分や30分等の等間隔グリッドを設定し、各グリッドの直前の価格によりデータ補間するなどの簡便法が取られることも多い。また、実際に際しては、市場がクローズしている時間をボラティリティ評価にどう加えるのかも重要な点である。文献[8]は、株式市場の1日内オープン時間から計測される実現ボラティリティを使って、オーバーナイト、つまり市場がクローズしている時間における変動をも考慮したボラティリティ補正の方法を考えた。日中（オープンからクローズまでの対数収益率を用いて計測される）実現ボラティリティを RV^{o-c} 、オーバーナイト（前日クローズから当日オープンまで）の収益率を r^{c-o} として、補正後 RV を

$$RV^{1-\text{day}} = w_1 (r^{c-o})^2 + w_2 RV^{o-c}$$

で与え、丸1日（前日クローズから当日クローズまで）の累積分散 IV に対する MSE を最小化するようなウェイト (w_1, w_2) を求めた。

RV によって精度良く日々のボラティリティが計測されれば、それらを集めて得られる日次時系列の特性を調べることも可能となる。 RV 研究のパイオニアである Andersen らのグループは、為替市場や株式市場

において、日次の RV の時系列構造を分析し、長期記憶性などの性質を報告した (例, 文献[1])。また, RV 系列を使って将来のボラティリティを予測する研究は実務上重要であり数多くなされている。例えば, 文献[2]は, 複数通貨の日次 RV 系列から作られる多変量自己回帰 (VAR) モデルによるボラティリティ予測力が, 日次 GARCH や FIEGARCH などの金融時系列分野の代表的ボラティリティ・モデルよりも優れていると報告した。

実現ボラティリティ研究においては, 「マイクロストラクチャ・ノイズ」への対応は重要なテーマである。現実の高頻度データにおいては, 価格は離散値を取り, 取引データは時間に連続的に存在せず, 離散時点かつ, 非均等間隔に並んでいて, 約定価格は, 新たに入ってくる売買注文の種類に応じて, 売気配と買気配との間を行ったり来たりする「ビッド・アスク・バウンス」現象が見られるなど, 式(1)のような拡散過程の仮定からは大きく乖離した特徴が見られる。 RV に関する研究では, このような市場の現実を踏まえて, マイクロストラクチャ効果を考慮したモデル, その下での観測不能な真の対数価格過程に対する IV を効率的に推定する研究も盛んに行われている。文献[11]による「サブサンプリング法」, 文献[3]による一般的な重み関数 (カーネル) を用いる方法などが代表例である。

一方, 対数収益率の 2 乗和 (quadratic variation, 2 次変動) である RV を, 対数収益率 (絶対値) の n 乗和へと拡張した統計量である realized power variation (RPV) に関する研究も進展している。

2.2 Realized Bipower Variation と価格ジャンプ

実際の価格データを観察すると, 時折「ジャンプ」らしき不連続変化が見受けられることから, 式(1)のような連続型拡散過程にジャンプが加わったモデル, $X_t = X_t^c + J_t$, がファイナンスではしばしば用いられる。ここでは, J_t は有限時間内に高々有限回のジャンプをするようなジャンプ過程であり, 連続部分 X^c と独立であるとする (これらの条件は拡張可能である)。このとき, 同期間における X の 2 次変動は $[X, X]_T = [X^c, X^c]_T + \sum_{s \leq T} (\Delta J_s)^2$ となることから (ただし, $\Delta J_s = J_s - J_{s-}$ は時点 s における価格ジャンプ幅), RV のみでは, 連続拡散過程部分 X^c の生成する累積分散 $[X^c, X^c]_T = \int_0^T \sigma_t^2 dt$ を分離して把握 (よって分離してリスク管理) することができない。そこで, 統計量

$$RBV = \sum_{i: t_i \leq T} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| |X_{t_{i-1}} - X_{t_{i-2}}|$$

を考えることにする (realized bipower variation)。その確率収束の極限を $\{X, X\}_T$ で表し, $\mu_1 = E[|Z|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.79788$ (ただし, $Z \sim N(0, 1)$) と書くと,

緩い条件の下で, $\{X, X\}_T = \mu_1^2 \int_0^T \sigma_t^2 dt$ が示される [5]。

したがって, $(RV - \mu_1^2 RBV)$ によって, ジャンプ変動部分 $\sum_{s \leq T} (\Delta J_s)^2$ を漸近的に抽出することができるのである。また, サンプルパスの連続性 ($[X, X]_T = [X^c, X^c]_T$ か否か) に関する検定法も提案されている。以上紹介した RBV や RPV は, Barndorff-Nielsen and Shephard らのグループを中心に進められており, 多項・多変量にまで拡張されている。

2.3 Realized Semivariance と下方リスク

ファイナンス分野においては, ボラティリティ (分散ないしは標準偏差) をリスク指標として用いるのが最も標準的ではあるが, これらは「対称」リスク指標であり, 損失の発生可能性をリスクと捉える私たちの常識とは必ずしも相入れない。そこで, ボラティリティの代わりに, リターン分布のマイナス部分, 左側の裾の広がり具合を計量化しようという試みも代替的なされる。例えば, 「下方半分散」(lower semivariance) や「下方絶対偏差」(lower absolute deviation) が代表例である。オペレーションズ・リサーチ分野でも, これらの下方リスク指標を用いたポートフォリオ最適化問題が研究されている (例, 文献[12])。

近年, RV 研究の進展の中で, 高頻度データを利用した非対称リスク指標の精度の高い計測を行う試みもなされている。下方半分散とは, 1 期間で考えると, 1 期先リターン R に対して $E[(R - E[R])^2 1_{\{R - E[R] \leq 0\}}]$ で表される量である。 RV の方法論を応用して, 実現下方半分散 (realized lower semivariance) が定義される [4] :

$$RS^- = \sum_{i: t_i \leq T} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|^2 1_{\{X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \leq 0\}}.$$

ジャンプ付き拡散過程 X に対して, RS^- を上述の RBP と組合せて得られる量 (realized bipower downward variation), $RBPDV = RS^- - \frac{1}{2} \mu_1^2 RBP$ を算出すれば, その極限は $\sum_{s \leq T} (\Delta X_s)^2 1_{\{\Delta X_s \leq 0\}}$ であることが示される。すなわち, $RBPDV$ を使えば下方ジャンプ変動のみを取り出すことが可能となる。

2.4 Realized covariance と累積共分散

2 つの証券価格間の共分散・相関係数の計測にも

RV の方法論が適用できる。いま、時点 t における証券の対数価格 X_t^1, X_t^2 に対して、(1)式と同様の連続拡散過程を想定する。ただし、各々拡散係数 σ_t^i を持ち、ブラウン運動 W_t^i によって駆動されるとする ($i=1, 2$)。 W_t^1, W_t^2 は、(未知な) 相関 $\rho_t \in [-1, 1]$ を持つとする (ランダムで構わない)。

このとき、離散時点 (t_i) において、2つの証券の対数価格の対 ($X_{t_i}^1, X_{t_i}^2$) が (同時) 観測されるとすると、実現共分散 (realized covariance) は、次のように定義される：

$$RCV = \sum_{i:t_i \leq T} (X_{t_i}^1 - X_{t_{i-1}}^1)(X_{t_i}^2 - X_{t_{i-1}}^2). \quad (3)$$

RV と同様に、計測時点 T が固定のもと、最大観測区間幅 $\Delta = \max_i(t_i - t_{i-1})$ がゼロに収束するに従い、 RCV は累積共分散 (integrated covariance) $ICV = \int_0^T \sigma_t^1 \sigma_t^2 \rho_t dt$ に確率収束する。さらに、この RCV を2つの実現ボラティリティ、 RV^1, RV^2 、の積 (の平方根) で除すと実現相関 (realized correlation)、 $RCR = \frac{RCV}{\sqrt{RV^1 \times RV^2}}$ 、が得られる。拡散係数および相関係数が定数 ($\sigma_t^i = \sigma^i > 0, i=1, 2, \rho_t = \rho$) の場合には、 RCR は定数 ρ に対する一致推定量となる。

2.5 Hayashi-Yoshida 推定量と取引の非同期性

(3)式から明らかなように、 RCV を計算するには、2系列に対する対のデータセット $\{(X_{t_i}^1, X_{t_i}^2)\}$ が必要である。ところが、非等間隔、ランダムな時点に行われる実取引時刻が記録されたティックデータを用いて RCV の計算を行うには、あらかじめそれらを規則的に並べ補間を施すという作業、「同期化」を行わなければならない。簡単に推察されるとおり、この同期化作業は「同期化バイアス」を混入させることにつながる。

筆者は東大吉田朋広教授と共同で、非同期的に観測される、2つの高頻度時系列データに対して、同期化せずに共分散・相関を推定する方法を提案した[9]。いま、2つの連続拡散過程 X^1, X^2 に対して、(S^i), (T^j) が各々のサンプリング時点を表す (ランダムな) 増加列であるとする ($S^0 = T^0 = 0$)。簡便のため、これらは X^1, X^2 とは独立であるとする (これらは拡張可能である)。ある $T > 0$ を観測の打ち切り時点とする。観測区間を $I^i = [S^{i-1}, S^i]$, $J^j = [T^{j-1}, T^j]$ で表す。さらに、時点 T までの観測区間の最大長 Δ がゼロに (確率) 収束する状況を考える。ここで、(I^i) と (J^j) との関係には制約を与えない。したがって、両者

が同一なケース ($I^i \equiv J^j$)、すなわち、完全同期観測のケースも含まれる。

次のような統計量を考える (「Hayashi-Yoshida 推定量」)：

$$HY = \sum_{i:S^i \leq T} \sum_{j:T^j \leq T} (X_{S^i}^1 - X_{S^{i-1}}^1) \times (X_{T^j}^2 - X_{T^{j-1}}^2) 1_{(I^i \cap J^j \neq \emptyset)}, \quad (4)$$

ここで、 1_A は事象 A が真のときに、1、さもなければ0を取る指標関数である。 $\Delta \xrightarrow{P} 0$ の状況において、 $HY \xrightarrow{P} CV$ が示される (一致性)。その一方で、 HY は実現共分散 RCV のときのような同期化が一切不要である。 RCV の定義式(3)と比較すると、 HY には、指標関数を通じて、取引の生起時間の情報が使われており、より有効な情報の使い方がなされている。また、 HY は i と j の2つのインデックスについての和を取ってはいるが、指標関数の働きによって、実質的には、計算法は実現共分散に比べて比例的にしか増えない。

筆者らは、観測時刻 (S^i), (T^j) が停止時刻 (stopping time) であり、 X^1, X^2 が連続セミマルチンゲールであるような状況において、 HY の漸近分布を導出するなど理論をさらに発展させている[10]。これは、観測時刻 (=取引時刻) と価格過程が、自分自身の過去のみならず、相互に依存しうるとより一般的な設定である。

2.6 その他の代替的リスク計測法

高頻度データの利用が一般化する以前から、1日の四本値 (始値・高値・安値・終値) を用いることによって、日次ボラティリティ (標準偏差) を精度よく推定する方法として、Parkinson 推定量, Garman-Klass 推定量, Kunitomo 推定量などが提案されてきた。高頻度データが普及している今日でも、1分足、5分足などの四本値が供給されるケースも多く、四本値をベースにしたボラティリティ計測法の有用性は依然として残されている。最近では、 RV 研究の流れの中で、このような価格レンジによるボラティリティ推定法の改良法も試みられている。端的に言えば、(対数) 価格過程 X はボラティリティー一定の (ドリフト付き) ガウス拡散過程ではなく、ランダムなボラティリティを持つ伊藤過程であると仮定し、高頻度・微小区間での価格レンジによるボラティリティ推定値を積み上げて (一日の) 累積ボラティリティを推定しようとするものである。このような「実現レンジ分散」 (realized range-based variance) は、途中に実現した価格経路に依存しないことから、高頻度データを扱

うときに表面化するマイクロストラクチャ・ノイズの影響を受けにくい。計算の容易性・迅速性、計算に必要なデータ量の小ささとともに、このアプローチの大きなメリットである。さらに、これらを精緻化し、分布の端（高値・安値）ではなく収益率分布のクオンタイル（パーセント点）を用いた「クオンタイル・ベース実現分散」(quantile-based realized variance) も考えられている（例、文献[6]）。

ボラティリティに代わる代替リスク指標として、例えば、チューリッヒの Olsen グループは、外国為替市場における高頻度トレーディングの見地から平均絶対偏差の利用を推奨し、相場のトレンド形成や反転を測定する指標も考案した[7]。

また、高値からの下落幅の最大値、いわば、高値で売りそこなった運用者の「リグレット」の最大値を表す最大ドロウダウン (maximum drawdown), $MDD_t = \max_{0 \leq s \leq t} (\max_{0 \leq u \leq s} P_u - P_s)$, は下方リスク尺度の一種で、高頻度トレーディングのパフォーマンス評価に用いられる標準的尺度である。

高頻度データの利用拡大とともに、ここに書いたもの以外にも、新たなリスク量やその計測法が提案されそれらが実務へ応用される動きが今後広がることも期待される。

3. 最後に

本稿では、筆者の専門分野であるファイナンス統計学、具体的には、実現ボラティリティを中心とした高頻度データによる市場リスク計測に関する研究動向について概説した（ページ数の制約もあり、「データ解析」の実例を含めなかった点にご容赦願いたい）。もちろん、高頻度データの応用分野は、市場リスク計測に留まらない。例えば、図1で紹介したような注文板（多変量時系列データ）の挙動を多重待ち行列によってモデル化し、それをベースに時々刻々の板の状況を利用する「最適」トレーディング戦略・アルゴリズム取引戦略の研究も行われている。

本稿執筆中の去る2010年5月6日、「ギリシャ問題」に端を発した世界的金融不安から、米国株式市場でダウ工業株30種平均が午後2時40分からわずか7分の間に前週末より998ドル急落するなど乱高下した。米国内では、「超高速で株式を売買するハイ・フリークエンシー取引 (HFT) が、5月6日に起きた米株価の乱高下を引き起こした」との指摘もなされているようだ¹。各マイクロ主体のための最適化問題にとどま

らず、マクロな視点から一市場参加者全体、さらには私達の経済・社会全体にとって「最適」な市場の設計やその実現にも、オペレーションズ・リサーチ分野の貢献が期待される。

謝辞 高頻度データの利用による市場リスク計測手法に関する研究に対して、科研費研究助成金（基盤研究(C)、課題番号19530186、2007～2009年度）、石井記念証券研究振興財団（2008～2009年度）より研究助成金を頂いた。ここに謝意を表する。

参考文献

- [1] Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. and Labys, P.: The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility, *J. Amer. Statist. Assoc.*, Vol. 96 (2001), 42-55.
- [2] Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. and Labys, P.: Modeling and forecasting realized volatility, *Econometrica*, Vol. 71 (2003), 579-625.
- [3] Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A. and Shephard, N.: Designing realised kernels to measure the ex-post variation of equity prices in the presence of noise, preprint, 2008.
- [4] Barndorff-Nielsen, O. E., Kinnebrock, S. and Shephard, N.: Measuring downside risk-realised semi-variance, preprint, 2008.
- [5] Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N.: Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps (with discussion), *J. Finan. Econometrics*, Vol. 2 (2004), 1-48.
- [6] Christensen, K., Oomen, R. C. and Podolskij, M.: Realised Quantile-Based Estimation of the Integrated Variance, preprint, 2008.
- [7] Guillaume, D. M., Dacorogna, M. M., D  ve, R. R., M  ller, U. A., Olsen, R. B. and Pictet, O. V.: From the bird's eye to the microscope: A survey of new stylised facts of the intra-daily foreign exchange markets, *Finance Stoch.*, Vol. 1 (1997), 95-129.
- [8] Hansen, P. R. and Lunde, A.: A Realized Variance for the Whole Day Based on Intermittent High-Frequency Data, *J. Finan. Econometrics*, Vol. 3 (2005), 525-554.
- [9] Hayashi, T. and Yoshida, N.: On Covariance Estimation of Non-synchronously Observed Diffusion Processes, *Bernoulli*, Vol. 11 (2005), 359-379.

¹ 日本速報ニュースアーカイブ, 2010年5月29日。

金融市場に対する物理学的手法の適用とその成果

山田 健太, 高安美佐子, 高安 秀樹

株式市場や為替市場に代表される金融市場に対して物理学のアプローチを行う経済物理学の手法と研究成果を紹介する。高頻度データを解析した結果、時々刻々と変化する金融市場にも物質世界と同じように普遍的な統計性があることが分かってきた。また、近年の成果として、これらの統計性を定性的、さらには定量的に再現する時系列モデルやエージェントベースモデルについて述べる。最後に展望として応用領域や金融市場以外の経済物理学の話題を紹介する。

キーワード：経済物理学, 確率過程, 時系列解析, エージェントベースモデル

1. はじめに

経済物理学という言葉は15年ほど前に統計物理の国際会議で生まれた。物理学者が経済分野に進出したきっかけとしては、コンピュータの発達により株式市場や為替市場に代表される金融市場に対して、日時のデータではなく、秒単位さらにはミリ秒単位といった時間分解能の高いデータが手に入るようになり、統計的に十分な信頼がおける精度で解析が行えるようになった点大きい。

詳細なデータに基づく定量的な観測は物理学には欠かせない手順であり、物理学の父とも呼ばれるガリレオは、自作の望遠鏡による木星の衛星、金星の満ち欠け、太陽の黒点の観測結果から、天動説が間違っていることを訴えた。良く知られているように、宗教上の理由から彼の理論は当時受け入れられなかったが、ニュートンの古典力学へとつながる。古典力学はボールの運動といった身近な現象から天体の運動といった非常に大きなスケールの運動までを正確に記述するが、 10^{-10} m程度の原子スケールでの現象へは適用することができない。この小さなスケールにおける現象は、量子力学によって記述されるが、量子力学の出発点もやはり観測であった。

産業革命以降、鉄は国力の指標となるほど重要な物

質であった。鉄は鉄鉱石とコークスを高炉に入れ、高温で熱することにより鉄鉱石から酸素を除去することで得られるが、このとき、高炉は非常に高温で普通の温度計では測ることができず、温度管理は職人の勘と経験を頼りに行われていたため、より効率的に鉄を作るためには誰もが簡単に温度を測る方法が必要であった。赤々と光った鉄が熱いことは、経験的にも分かるように、熱せられた物体が放つ色と温度の間には関係があり、この色（光のスペクトル）と温度の関係を理論的に説明するモデルが構築できれば、光のスペクトルを測ることにより温度を定量的に測定できたことになる。そこで、高炉から発せられる光のスペクトルを用いて測り、その分布を説明するモデルを構築しようと多くの物理学者が試みたが、古典力学を用いたモデルではどうしても説明することはできなかった。この問題を解決したのは量子論の父と呼ばれるプランクである。プランクは、このスペクトルを説明するために、エネルギーに最少単位を設定し、エネルギーの量子化（離散化）が必要であることを示した。そして、この量子論は、その後、原子スケールの現象にも適用されることが分かり量子力学へとつながる。

物理学の父がガリレオであり、量子論の父がプランクであるならば、経済物理学の父はマンデルブロといえるかもしれない。レヴィの安定分布の理論に影響を受けたマンデルブロは綿花の価格変動がベキ分布に従っていることを見だしフラクタルのアイデアを得た。フラクタルの概念は自然界や物質からも数多く観測され、全体と部分が自己相似な構造を持つ様々な形や時系列に応用され、複雑系科学の研究へとつながった。また、かれは著書の中で金融工学によるデリバティブ

やまだ けんた, たかやす みさこ
東京工業大学 総合理工学研究所
〒226-8502 横浜市緑区長津田町 4259
たかやす ひでき
ソニーコンピュータサイエンス研究所
〒141-0022 品川区東五反田 3-14-13

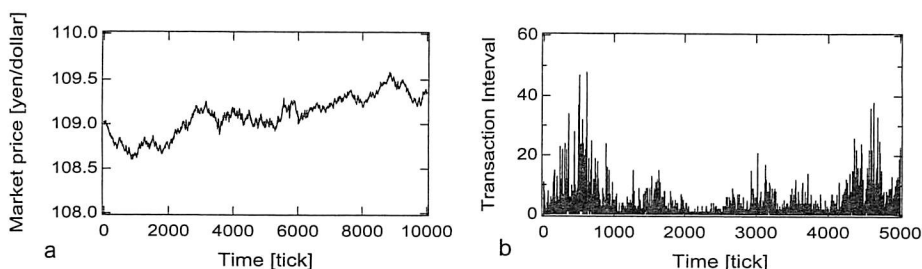


図1 a: 10000 ティック間の円ドル市場の価格変動. b: 5000 ティック間の取引間隔. 取引が成立すると1つ進む時間の単位をティック[tick]と呼ぶ.

の行き過ぎに警笛を鳴らし、昨今の金融危機を警戒していた[1].

近年では、さらに高頻度な金融市場データの解析が可能となり、価格変動の分布のベキ則やボラティリティーの長時間相関は市場や銘柄にかかわらず普遍的に観測されることが分かってきた. また、ベキ則や長時間相関といったキーワードは系の状態が急激に変化する臨界現象と関わりが深いため、さらに物理学者を引きつけ、近年もデータ解析やモデル化を中心に活発に研究が行われている[2]~[5].

2. 経済物理学の成果

2.1 経験則の確立

本稿では金融市場に焦点を当ててこれまでの経済物理学の研究成果を概説する. 経済物理学と経済学や金融工学との違いは、現象に対するアプローチ方法である. 経済学や金融工学では最初に人間の行動や価格変動のメカニズムに効用関数やブラウン運動などの仮定をおいてモデル化を行い、モデルの検証としてデータと比較する. 昨今の金融危機は金融工学に対して、この比較が不十分であったことが、原因の一つであると考えられる. 一方、経済物理学的手法では初めに秒単位やミリ秒単位の高頻度データを徹底的に解析することにより、解析対象から観測される普遍的な経験則を確立し、それらを再現するモデルを必要最小限の仮定とパラメータを用いてモデル化を行う. もし、観測される経験則を再現できるモデルが構築できれば、より高いレベルで現象の理解できたといえる. また、このモデルを用いて誰もが手軽にシミュレーションを行える実験場ができたことに相当し、金融市場の安定化などの応用が期待される. この物理的手法は、統計的に信頼できる高頻度のデータがあればその対象を問わない科学的な手法であり、ある分野で十分なデータが得られると物理化学や生物物理や経済物理を生み成功を収めて

いる. ○○物理という分野が多いのはこの適用範囲の広さと系の正確な記述による実用性の高さに由来する.

図1に示す外国為替市場や株式市場の価格変動や取引間隔から観測される統計的性質において重要で代表的なものを以下に示す.

- 為替市場の市場価格 $P(n)$ の価格差

$$\Delta P = P(n) - P(n-1) \quad (1)$$

の分布はベキ指数3程度のベキ分布に従う[6]~[8]. これは、正規分布を仮定したときにはほぼ起こりえない大きな変動が、実際には高い確率で起きていることを表す.

- 価格差 $\Delta P(n)$ の異時刻相関 $C(T)$ は1ティック目に負の相関をとる. これは、1ティック前の価格が上がった後は下がりやすく下がった後は上がりやすいことを意味している. しかし2ティック目以降は、ほとんど相関がない. この結果から価格変動の予測が不可能であるといわれることがしばしばある. 価格差の絶対値 (ボラティリティー) $|\Delta P(n)|$ には数週間から数カ月にもわたる長時間相関がある[6][9]. これは、市場が荒れた場合に大きな変動が起こると続けて大きな変動が起こりやすいこと示唆している. ここで、異時刻相関 $C(T)$ は

$$C(T) = \frac{\langle (x(t) - \langle x \rangle)(x(t+T) - \langle x \rangle) \rangle}{\sigma^2} \quad (2)$$

であり、 $\langle x \rangle$, σ^2 はそれぞれ x の平均値と分散である.

- 以下で定義される

$$\sigma(k) = (\langle (P(n+k) - P(n))^2 \rangle - \langle P(n+K) - P(n) \rangle^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

価格の拡散は時刻が k 経過したとき、到達した価格の分布の標準偏差である. 為替の価格においては小さな k の領域ではランダムウォーク時の通常拡散 $\sigma \propto T^{1/2}$ とは異なり、大きな領域で

はランダムウォークと同じ関係になる[10]。また、市場が荒れている際の時系列からは、通常拡散よりも速い拡散も観測される。

- 高安(美)らによって提案された PUCK (Potentials of Unbalanced Complex Kinetics) モデルを用いた解析により、市場価格 $P(n)$ から市場価格中のポテンシャルを観測することができる。これは、市場価格のダイナミクスが確率的な効果だけでなく、動力学的な効果を含むことを意味する[11][12]。
- インターネットバブルやハンガリーのインフレ時など、価格変動が指数関数や2重指数関数またはベキ関数といった非常に強いトレンドを持つ関数型でよくフィッティングできる場合がある[13]~[16]。
- 取引間隔は発生確率が一定のときに見られるポアソン過程には従っておらず、過去の取引間隔に依存する非ポアソンの過程に従っており、その分布は指数分布よりも広い裾野を持つ[17][18]。この非ポアソン性は、直感的にいうと市場で活発に取引が行われ、取引間隔が短くなりだすと、さらに市場が活発になり、より取引間隔が短くなる傾向があり、逆に市場が落ち着き、取引間隔が長くなり始めると、さらに長くなる傾向があることに起因する。

2.2 数理モデルの構築

これら金融市場における自明でない性質は、多くの市場から観測されることが分かってきた。次のステップとしてはこれらの現象を再現する数理モデルを構築することである。金融市場のモデルは大きく2つに分けることができる。一つは金融市場から観測される価格変動の時系列を直接モデル化する方法であり、もう一つは市場で取引を行うディーラーや集まってきた注文を表示する板情報の時間変化をモデル化する方法である。

金融市場の時系列に対して最初にモデル化を行ったのはフランスのバシェリエである。1900年にバシェリエは価格変動をランダムウォークの理論によって確率過程として記述した[19]。アインシュタインはその5年後にランダムウォークの理論をより厳密に定式化し、水面をジグザグと動く微粒子(ブラウン運動)に適用した。そして、ある時間が経過した後、平均的に粒子が始点からどれくらい離れるかを予測した[20]。これは物理界において奇跡の年と呼ばれている1905

年のアインシュタインの三大論文のうちの一つである。この予測は後にベランによって正しいことが示され、原子仮説を支持する有力な証拠となった。一方、バシェリエの研究は当時、評価されなかったが将来のオプション価格を評価するブラックショールズ方程式の基盤の研究になっている。しかし、ランダムウォーク理論では価格変動のベキ則やボラティリティーの長時間相関を説明することはできない。そこで、ランダムウォークモデルを改良した ARCH モデル[21]や GARCH モデル[22]が提案されたが、これらのモデルからは異常拡散やバブルやインフレーションを観測することはできないといった問題点がある。しかし、近年、これらの価格変動の基本的な性質をすべて再現するモデルとして PUCK モデルが提案された。このモデルは、現実の市場から観測される時間とともに変化する動力学的效果をランダムウォークモデルに加えることによって、市場を表現する。また、このモデルを解析的に解くことにより、価格差の分布やモデルにインフレーションやハイパーインフレーションの解が含まれていること、そしてこのモデルが ARCH や GARCH モデルを包括していることが理論的に分かっている[23][24]。

もう一つのよりミクロな視点から市場を記述する方法であり、ディーラーや市場の板情報のダイナミクスをモデル化する物理モデルとしては、板情報モデル[25]~[28]、ファンダメンタリスト vs. チャーティストモデル[29]~[31]、マイノリティーゲームモデル[32]~[34]、スピンベースモデル[35]~[37]、そして、ディーラーモデル[38]~[42]がある。

物理モデルの特徴は、なるべく少ない仮定とパラメータを用いて観測される統計性を再現するモデルを構築し、その現象を明らかにすることである。この点は遺伝的アルゴリズムなどを用いて大量のパラメータの中から最適なパラメータを探し出すコンピューターサイエンスの分野と大きく異なる。

板情報モデルでは指値(リミットオーダー)と呼ばれる、自分がいくら以下で買いたいか、またはいくら以上で売りたいかを示す注文と、成り行き(マーケットオーダー)と呼ばれる今ある最良価格ですぐに取引が起こる注文のダイナミクスを1次元の価格軸上で再現する。これらのモデルは価格差のベキ則、ボラティリティーの長時間相関を満たす。

ファンダメンタリスト vs. チャーティストモデルはファンダメンタリストとチャーティストの比率を調節

することにより、価格差のベキ則、ボラティリティーの長時間相関を再現する。

マイノリティーゲームとスピンベースモデルの構造は本質的には同じであり、買い手（アップスピン）と売り手（ダウンスピン）を設定し、それぞれのディーラーがマイノリティーゲームや群集心理によって相互作用することにより、価格差のベキ則、ボラティリティーの長時間相関を再現する。

価格変動のメカニズムでモデルを分類すると、ファンダメンタリスト vs. チャーティストモデル、マイノリティーゲームモデル、スピンベースモデルは価格変動が需給差（例えば、買い手の数－売り手の数）に比例するというワルラスの一般均衡理論に基づく仮定を用いるが、これは必ずしも実証的に正しいとは限らない。一方、オーダーブックモデルやディーラーモデルでは現実の市場と同じように価格軸上で注文がマッチングして取引が成立し市場価格が生まれるので、こちらの方が現実に近いモデルであるといえる。

ディーラーモデルは、市場で取引を行うディーラーをミクロな構成要素と考え、これをなるべく単純化してモデル化する。また、取引やディーラーが市場を観測することにより生まれるフィードバック効果をディーラー間の非線形な相互作用と考えることにより、ディーラーの振る舞いの集合である市場価格や取引間隔の再現をめざす。これは、単純化した気体分子モデルから、温度、圧力、体積といった巨視的な関係を記述するボイルシャルルの法則が導かれるように、人間の行動に関しても気体の運動の場合と同じように統計力学的アプローチが可能であると期待させるものである。

ディーラーモデルは決定論的ディーラーモデルが高安（秀）らによって最初に提案された[38]。その後、佐藤らによってディーラーモデルから生み出させる価格変動の分布がベキ分布になるメカニズムが解明され[40]、昨年、確率論的ディーラーモデルによってさらに理論的な解析が進み、また、現実市場の主要な統計性を全て再現することに成功した[42]。

我々は時系列モデルとエージェントベースモデルの両者で市場の統計的性質を再現できることを述べた。この両者の関係を明らかにすることは、ミクロスコピックなディーラーの行動とディーラーの行動の集合であるマクロスコピックな価格時系列の関係を解明することにつながり非常に重要である。我々はこの両者の関係も理論的に明らかにし、市場価格の時系列から観測されるポテンシャルは、取引を行っているディー

ラーの平均的な戦略に対応し、ディーラーがトレンドを追いかける順張りのときは不安定なポテンシャルが観測され、一方、トレンドと逆の方向に価格が動くと予測する逆張りのときは安定なポテンシャルが観測されることが明らかになった[42]。このことは、市場で取引するディーラーの直感とも良く一致し、また、市場価格から現在のディーラーの平均的な戦略が定量的に評価できる点は、市場の制御を考える上で重要な結果である。

3. 展望

このように、現実の市場を良く再現する、時系列モデルとエージェントベースモデルが提案され、さらに、両モデルの関係も明らかになり、モデル化の領域も高いレベルで完成され始め、金融市場に対する経済物理の研究は応用の領域に足を踏み入れつつある。具体的には政府による効率的な市場介入の方法や、より安定な市場を構築するためのルールの提案などが考えられる。応用を行うにあたっては慎重に議論を行う必要があるが、もし実現すれば、今まで勘と経験にたよって政策を決定してきた分野に対して科学的なアプローチが可能となる画期的な研究といえる。

最後に、経済物理学と聞くと金融を連想しがちであるが、高頻度で信頼ができるデータが存在すればどのようなデータであっても経済物理学の対象になりうる。そのため、近年では金融市場に限らず、企業の取引関係ネットワークデータや財務データ、Web上に蓄積されたブログ記事、コンビニやスーパーマーケットのレシートデータの解析やモデル化も行われ、経済学的、社会学的、物理学的に興味深い現象がいくつも観測されている。企業の取引ネットワークからは、企業間のリンクを削っていくとあるところで突如お金の流れが止まってしまうような相転移現象が観測され、ブログ記事の解析からはある単語が1日あたり何件書き込まれたかを観測すると、インフレーションのように指数関数的に上昇する単語や、ハイパーインフレーションのように2重指数関数やベキ関数的に上昇する単語も見つかっている。また、スーパーのレシートデータからは価格を何パーセント下げると何個売れるかという人の応答関数を観測すると、ベキ則に従っていることがみつきり、中には半額にすると300倍程度も売れる商品も存在する。これらの分野は特にオペレーションズリサーチとも非常に密接に関係しており、今後の交流が期待される。

謝辞 これらの研究成果の一部は、日本学術振興会特別研究員研究奨励費 (21・8971) の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] ベノワ・B・マンデルブロ (高安秀樹監約) 「禁断の市場—フラクタルで見るリスクとリターン」東洋経済新聞社 (2008).
- [2] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, An Introduction to Econophysics—Correlation and Complexity in Finance—, Cambridge University Press, Cambridge, (2000).
- [3] J.-P. Bouchaud and M. Potters, Theory of Financial Risks, Cambridge University Press, Cambridge, (2000).
- [4] 高安秀樹, 高安美佐子, 『エコノフィジックス—市場に潜む物理法則』, 日本経済新聞社, (2001).
- [5] 高安秀樹: 『経済物理学の発見』, 光文社新書, (2004).
- [6] T. Mizuno, S. Kurihara, M. Takayasu and H. Takayasu, Physica A 324, 296-302 (2003).
- [7] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, Nature 376, 46-48 (1995).
- [8] F. Longin, Journal of Business 69, 383 (1996).
- [9] R. Cont, M. Potters and J.-P. Bouchaud, Scaling in stock market data: stable laws and beyond, Scale Invariance and Beyond (Proceedings of the CNS Workshop on Scale Invariance, Les Houches, March 1997).
- [10] A. A. Tsonis, F. Heller, H. Takayasu, K. Marumo and T. Shimizu, Physica A 366, 377-386 (2006).
- [11] M. Takayasu, T. Mizuno and H. Takayasu, Physica A 370, 91-97 (2006).
- [12] K. Watanabe, H. Takayasu and M. Takayasu, Physical Review E, 80 056110 (2009).
- [13] K. Watanabe, H. Takayasu and M. Takayasu, Physica A 382, 336-339 (2007).
- [14] K. Watanabe, H. Takayasu and M. Takayasu, Physica A 383, 120-124 (2007).
- [15] T. Mizuno, M. Takayasu and H. Takayasu, Physica A 308, 411-419 (2002).
- [16] A. Johansen and D. Sornette, Physica A 294, 465-502 (2001).
- [17] M. Takayasu, H. Takayasu and M. P. Okazaki, Proceedings of “Empirical Science of Financial Fluctuations” in Tokyo, edited by H. Takayasu, Springer, 18-26 (2001).
- [18] M. Takayasu and H. Takayasu, Physica A 324, 101-107 (2003).
- [19] L. Bachelier, Ann. Sci. Ec. Norm. Super. (iii) 17 (1900) 21 (Translation: Cootner, 1964).
- [20] A. Einstein, Annalen der Physik (Germany), 17, 891-921 (1905).
- [21] R. F. Engle, Econometrica 50, 987-1002 (1982).
- [22] T. Bollerslev, J. Econometrics 31, 307-327 (1986).
- [23] M. Takayasu, T. Mizuno and H. Takayasu, Physica A, 383, 115-119 (2007).
- [24] M. Takayasu and H. Takayasu, Progress of Theoretical Physics Supplement, 179, 1-7 (2009).
- [25] S. Maslov, Physica A 278, 571-578 (2000).
- [26] M. G. Daniels, J. D. Farmer, L. Gillemot, G. Iori and E. Smith, Phys. Rev. Lett. 90, 108102 (2003) E. Smith, J. D. Farmer, L. Gillemot and S. Krishnamurthy, Quant. Finance 3, 481 (2003).
- [27] J. Maskawa, Physica A 382, 172-178 (2007).
- [28] F. Slanina, Eur. Phys. J. B 225-240 (2008).
- [29] T. Lux and M. Marchesi, Nature 397, 498-500 (1999).
- [30] V. Alfi, M. Cristelli, L. Pietronero and A. Zaccaria, Eur. Phys. J. B 67, 385 (2009).
- [31] V. Alfi, M. Cristelli, L. Pietronero and A. Zaccaria, Eur. Phys. J. B 67, 399 (2009).
- [32] D. Challet, M. Marsili and R. Zecchina, Phys. Rev. Lett. 84, 1824 (2000).
- [33] A. De Martino, I. Giardina, A. Tedeschi and M. Marsili, Phys. Rev. E 70, 025104(R) (2004).
- [34] F. Ren, B. Zheng, T. Qiu and S. Trimper, Phys. Rev. E 74, 041111 (2006).
- [35] A. Krawiecki, J. A. HoAllyst and D. Helbing, Phys. Rev. Lett. 89, 158701 (2002).
- [36] T. Kaizoji, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 370, 109-113 (2006).
- [37] W. Zhou and D. Sornette, Eur. Phys. J. B 55, 175-181 (2007).
- [38] H. Takayasu, H. Miura, H. Hirabayashi and K. Hamada, Physica A 184, 127-134 (1992).
- [39] T. Hirabayashi, H. Takayasu, H. Miura and K. Hamada, Fractals 1, 29-37 (1993).
- [40] A. Sato and H. Takayasu, Physica A 250, 231-252 (1998).
- [41] K. Yamada, H. Takayasu and M. Takayasu, Physica A 382, 340-346 (2007).
- [42] K. Yamada, H. Takayasu and M. Takayasu, Phys. Rev. E 79, 051120 (2009).