Modelagem matemática de uma mistura salina

Disciplina: Cálculo III

Obs.: A solução algébrica por software se encontra no arquivo .html, enviado junto a este trabalho.

Junho, 2018

1 Dedução matemática

Quando se estuda um certo tipo de equação diferencial, por exemplo, uma equação linear de primeira ordem, muitas vezes é útil ter em mente um sistema físico, o qual pode ser modelado por essa equação diferencial (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014) (BOYCE; di PRIMA; MAEDE, 2009).

Para tanto aqui será descrito um modelo para um processo de mistura salina:

Supondo que se possui um tanque com algum líquido, com ou sem sal dissolvido, no qual existe um fluxo de líquido com uma quantidade de sal que entra no tanque, e é retirado uma mistura perfeita entre o tanque e a mistura que entra nele. Para saber qual é a quantidade de sal existente no tanque (A), em um determinado momento (ZILL; CULLEN, 2001), pode-se defini-la como:

$$\Delta A = T_e - T_s$$

Onde T_e é a quantidade de sal que entra em função do tempo e T_s é a quantidade de sal, em função do tempo, que sai.

Definindo que a mistura entra no tanque a uma taxa r_e com concentração C_e, e sai a uma taxa r_s com concentração C_s.

É possível determinar Tcomo $(C \cdot r)\Delta t$, portanto:

$$\Delta A = (C_e r_e)\Delta t - (C_s r_s)\Delta t$$

Logo, a variação infinitesimal da quantidade de sal, existente no tanque, em um determinado tempo é:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = C_e r_e - C_s r_s$$

Agora, definindo C_e, r_e e r_s como constantes definidas e conhecidas, permite definir C_s como variável em função do tempo:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = C_e r_e - C(t) r_s$$

Como a solução é uma mistura perfeita a concentração de sal que sai do tanque, C_s, é igual a concentração de sal existente no tanque, em um determinado tempo, isto é:

$$C_s = \frac{A(t)}{V(t)}$$

Onde $A(t)$ é a concentração existente no tanque, e $V(t)$ é o volume da solução no tanque. $V(t)$ pode ser definido como a soma entre o volume inicialmente existente no tanque ($t = 0$) e a variação de volume causada pela entrada e saída de líquido do tanque em um determinado momento ($\Delta r \cdot t$), ou seja:

$$V(t) = V_0 + (r_e - r_s) \cdot t$$

Portanto, a quantidade de sal existente no tanque, em função do tempo, pode ser descrita como:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = C_e r_e - r_s \cdot \frac{A(t)}{V_0 + (r_e - r_s)t}$$

Rearranjando tem-se:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} + \frac{r_s}{V_0 + (r_e - r_s)t} \cdot A(t) = C_e r_e$$

Que se assemelha à função de equações diferenciais lineares de primeira ordem:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

Podendo ser resolvida através da seguinte solução:

$$A(x) = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}(C + \int q(x) \cdot e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x)$$

2 Resolução do problema proposto

Um grande tanque está parcialmente cheio com 100 litros de um fluido no qual foram dissolvidos 10 quilos de sal. Uma solução salina contendo 500 gramas de sal por litro é bombeada para dentro do tanque com uma vazão de 6 litros por minuto. A solução bem misturada é então bombeada para fora com uma vazão de 4 litros por minuto.

Dados:

- Volume inicial: $V_0 = 100l$
- Quantidade de sal inicial: $A_0 = 10kg$
- Vazão de entrada: $r_e = 6l/min$

- Vazão de saída: $r_s = 4l/min$
- Concentração de sal que entra: $C_e = 0,5kg/l$

2.1 Solução Geral

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} + \frac{4}{100 + (6-4)t}A(t) = 0{,}5 \cdot 6$$
$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{50 + t}A(t) = 3$$

$$p(t) = \frac{2}{50+t};\ q(t) = 3$$

$$A(t) = e^{-\int \frac{2}{50+t}\mathrm{d}t}(C + \int 3 \cdot e^{\int \frac{2}{50+t}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t)$$
$$A(t) = e^{-2\cdot\ln|t+50|}(C + \int 3 \cdot e^{2\cdot\ln|t+50|}\mathrm{d}t)$$
$$A(t) = (t+50)^{-2}[C + (t+50)^3]$$
$$\texttt{S.G.:}\ A(t) = \frac{C + (t+50)^3}{(t+50)^2}$$

2.2 Soluções Parciais

2.2.1 Solução Parcial 1

A partir da quantidade definida de sal em t=0 ($10kg$), expresso pelo problema, pode-se determinar a Solução Parcial (SP):

$$A_1(0) = 10kg$$
$$10 = \frac{C + 50^3}{50^2} \therefore C = -100000$$

S.P.:

$$A_1(t) = \frac{(t+50)^3 - 100000}{(t+50)^2}$$

E, através desta, determinar a quantidade de sal existente na solução $30min$ após $t = 0$:

$$A_1(30) = \frac{(30+50)^3 - 100000}{(30+50)^2} = 64{,}375kg$$

No entanto, a partir das constantes dadas é possível determinar outras SPs.

2.2.2 Solução Parcial 2

Por exemplo, é possível determinar o mínimo da função, ou seja, quando a quantidade de sal em $t = 0$ é, também, igual a zero, isto é, logicamente falando, a quantidade de sal presente na solução em $t = 0$ não pode ser menor que zero, mas pode ser um líquido sem a menor presença de sal:

$$A_2(0) = 0{,}0kg$$

$$0 = \frac{C + 50^3}{50^2} \therefore C = -125000$$

S.P.:

$$A_2(t) = \frac{(t + 50)^3 - 125000}{(t + 50)^2}$$

E, em $30min$:

$$A_2(30) = \frac{(30 + 50)^3 - 125000}{(30 + 50)^2} = 60{,}469kg$$

2.2.3 Solução Parcial 3

Com isso em mente não há impedimentos para calcular outras quantidades iniciais como: 5, 50 e $100kg$:

$$A_3(0) = 5{,}0kg$$

$$5 = \frac{C + 50^3}{50^2} \therefore C = -112500$$

S.P.:

$$A_3(t) = \frac{(t + 50)^3 - 112500}{(t + 50)^2}$$

E, em $30min$:

$$A_3(30) = \frac{(30 + 50)^3 - 112500}{(30 + 50)^2} \cong 62{,}422kg$$

2.2.4 Solução Parcial 4

Para $A_4(0) = 50kg$:

$$50 = \frac{C + 50^3}{50^2} \therefore C = 0$$

S.P.:

$$A_4(t) = t + 50$$

E, em $30min$:

$$A_4(30) = 30 + 50 = 80kg$$

2.2.5 Solução Parcial 5

Para $A_5(0) = 100kg$, um quilo de sal para cada um litro de líquido:

$$100 = \frac{C + 50^3}{50^2} \therefore C = 125000$$

S.P.:

$$A_5(t) = \frac{(t + 50)^3 + 125000}{(t + 50)^2}$$

E, em $30min$:

$$A_5(30) = \frac{(30 + 50)^3 + 125000}{(30 + 50)^2} \cong 99{,}53kg$$

Referências

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cáculo*. 10. ed. Porto Alegre: Bookman Editora LTDA., 2014. Citado na página 1.

BOYCE, W. E.; di PRIMA, R. C.; MAEDE, D. B. *Elementary differential equations and boundary value problems*. 2. ed. New York: Wiley, 2009. 533 p. Citado na página 1.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais*. São Paulo: Makron Books, 2001. Citado na página 1.