

# Bewijzen Proefwerk Juni

Aron Martens

March 2025

## 1 Bepaalde integraal p.16

Stel dat  $f$  een positieve, continue functie is in  $[a, b]$ . We zoeken de oppervlakte van het gebied tussen  $f$  en de x-as.

1. Verdeel  $[a, b]$  in  $n$  intervallen met breedte  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ .
2. Bereken in elk interval het minimum  $m_i$  en maximum  $M_i$ . Aangezien  $f$  continu is, zijn deze altijd te vinden. (Stelling van Weierstrass).
3. Bereken de ondersom en de bovensom:

$$s_n = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x \quad \text{en} \quad S_n = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x$$

4. We definiëren de bepaalde integraal als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$$

### 1.1 Opmerking Riemannsom p.16

Bernhard Riemann toonde aan dat je het minimum of maximum niet nodig hebt. Een willekeurige functiewaarde  $f(x_i)$  volstaat.

*Bewijs.*

$$\begin{aligned} m_i &\leq f(x_i) \leq M_i \\ &\Downarrow \\ m_i \cdot \Delta x &\leq f(x_i) \cdot \Delta x \leq M_i \cdot \Delta x \\ &\Downarrow \\ \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x &\leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x \leq \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x \\ &\Downarrow \\ s_n &\leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x \leq S_n \end{aligned}$$

Omdat  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$ , volgt uit de insluitstelling dat

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

□

## 2 Integraal van $x^0 = 1$ p.19

$$\begin{aligned} \int_a^b x^0 dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n 1 \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \cdot n \\ &= b-a \end{aligned}$$

## 3 Integraal van $x$ p.20

We verdelen  $[a, b]$  in  $n$  deelintervallen met breedte  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . Als  $x_i$  nemen we de linkergrens van elk interval.

INTERVAL	$x_i$	$f(x_i) = x_i$
$[a, a + \Delta x]$	$a$	$a$
$[a + \Delta x, a + 2\Delta x]$	$a + \Delta x$	$a + \Delta x$
$[a + 2\Delta x, a + 3\Delta x]$	$a + 2\Delta x$	$a + 2\Delta x$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$[a + (n-1)\Delta x, b]$	$a + (n-1)\Delta x$	$a + (n-1)\Delta x$

$$\begin{aligned} \int_a^b x dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \cdot [a + (a + \Delta x) + (a + 2\Delta x) + \dots + (a + (n-1)\Delta x)] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n \cdot (a + a + (n-1)\Delta x)}{2} \quad \left( s = \frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(b-a) \cdot (a + b - \Delta x)}{2} \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2} \end{aligned}$$

## 4 Integraal van $x^2$ p.21

### 4.1 Over het interval $[0, b]$ met $b > 0$

We verdelen  $[0, b]$  in  $n$  deelintervallen met breedte  $\Delta x = \frac{b}{n}$ . Als  $x_i$  nemen we de rechtergrens van elk interval.

INTERVAL	$x_i$	$f(x_i) = x_i^2$
$[0, \Delta x]$	$\Delta x$	$1 (\Delta x)^2$
$[\Delta x, 2\Delta x]$	$2\Delta x$	$4 (\Delta x)^2$
$[2\Delta x, 3\Delta x]$	$3\Delta x$	$9 (\Delta x)^2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$[(n-1)\Delta x, b]$	$n\Delta x = b$	$n^2 (\Delta x)^2$

$$\begin{aligned}
\int_0^b x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b}{n} \left( (1 + 4 + 9 + \dots + n^2) \cdot (\Delta x)^2 \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{b^2}{n^2} \\
&= \frac{b^3}{6} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3}{n^3} \\
&= \frac{b^3}{3}
\end{aligned}$$

#### 4.2 Over het interval $[a, b]$ met $0 < a < b$

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^2 dx &= \int_0^b x^2 dx - \int_0^a x^2 dx \\
&= \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}
\end{aligned}$$

#### 4.3 Over het interval $[a, b]$ met $a < 0 \leq b$

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^2 dx &= \int_a^0 x^2 dx + \int_0^b x^2 dx \\
&= \int_0^{-a} x^2 dx + \int_0^b x^2 dx \\
&= -\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3}
\end{aligned}$$

#### 4.4 Over het interval $[a, b]$ met $a < b \leq 0$

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^2 dx &= \int_{-b}^{-a} x^2 dx \\
&= \frac{(-a^3)}{3} - \frac{(-b^3)}{3} \\
&= -\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3}
\end{aligned}$$

## 5 Middelwaardestelling van de integraalrekening p.31

**Stelling.** Als  $f$  continu is in  $[a, b]$ , dan bestaat er een  $c \in [a, b] : \int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c)$

*Bewijs.* We hebben 3 gevallen:

1.  $\boxed{a < b}$

We verdelen  $[a, b]$  in  $n$  intervallen met breedte  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Dan geldt: } m &\leq f(x_i) \leq M \\
 &\Downarrow \\
 m \cdot \Delta x &\leq f(x_i) \cdot \Delta x \leq M \cdot \Delta x \\
 &\Downarrow \\
 n \cdot m \cdot \Delta x &\leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x \leq n \cdot M \cdot \Delta x \\
 &\Downarrow \\
 m \cdot (b - a) &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a) \\
 &\Downarrow \\
 m &\leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M
 \end{aligned}$$

Volgens de stelling van Weierstrass en de tussenwaardestelling bestaat er in  $[a, b]$  minstens één  $c$  zodat

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx, \quad \text{dus} \quad \int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c)$$

2.  $\boxed{a = b}$

Dan is  $\int_a^b f(x) dx = 0 = (b - a) \cdot f(c)$

3.  $\boxed{a > b}$

$$\begin{aligned}
 \text{Uit 1 volgt dan: } \exists c \in [a, b] : \int_a^b f(x) dx &= (a - b) \cdot f(c) \\
 &\Downarrow \\
 \exists c \in [a, b] : - \int_b^a f(x) dx &= (a - b) \cdot f(c) \\
 &\Downarrow \\
 \exists c \in [a, b] : \int_b^a f(x) dx &= (b - a) \cdot f(c)
 \end{aligned}$$

□

## 6 Oppervlakte van een cirkel p.119

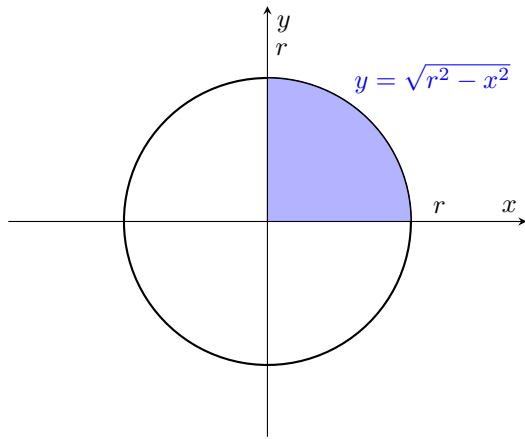
**Stelling.** De oppervlakte van een cirkel met straal  $r$  is  $\pi r^2$

*Bewijs.* De vergelijking van een cirkel is

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Dan is de vergelijking in het eerste kwadrant:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$



De oppervlakte is dus

$$A = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Stel  $x = r \sin t$  en  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , dan is  $dx = r \cos t dt$ .

Dan is

$$\sqrt{r^2 - x^2} dx = \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} dx = r \sqrt{\cos^2 t} \cdot r \cos t dt = r^2 \cos^2 t dt.$$

Als  $x = 0$ , dan is  $r \sin t = 0$  of  $t = 0$ .

Als  $x = r$ , dan is  $r \sin t = r$  of  $t = \frac{\pi}{2}$ .

Dus

$$\begin{aligned} A &= 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2r^2 \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2r^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi r^2. \end{aligned}$$

□

## 7 Oppervlakte van een cirkelsegment p.121

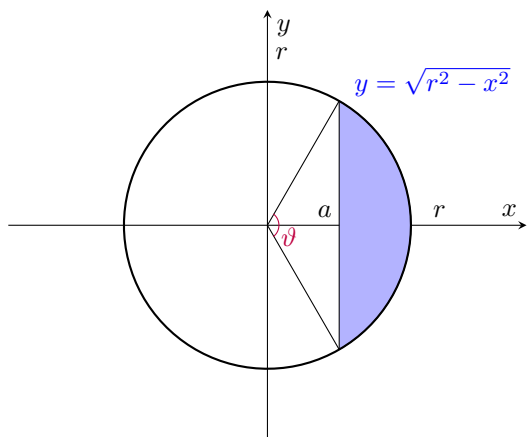
**Stelling.** De oppervlakte van een cirkelsegment met straal  $r$  en middelpuntshoek  $\vartheta$  is  $\frac{r^2}{2} (\vartheta - \sin \vartheta)$ .

*Bewijs.* De vergelijking van een cirkel is

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Dan is de vergelijking in het eerste kwadrant:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$



De oppervlakte is:

$$A = 2 \cdot \int_a^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Stel  $x = r \cos t$  en  $t \in [0, \pi]$ , dan is  $dx = -r \sin t dt$ .

Dan is

$$\sqrt{r^2 - x^2} dx = \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 t} dx = r \sqrt{\sin^2 t} (-r \sin t) dt = -r^2 \sin^2 t dt.$$

Als  $x = a$ , dan is  $r \cos t = a$  of  $t = \arccos \frac{a}{r} = \frac{\vartheta}{2}$ .

Als  $x = r$ , dan is  $r \cos t = r$  of  $t = 0$ .

Dus

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \int_a^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = -2r^2 \int_{\frac{\vartheta}{2}}^0 \sin^2 t dt = -2r^2 \int_{\frac{\vartheta}{2}}^0 \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = -r^2 \left[ t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_{\frac{\vartheta}{2}}^0 \\ &= -r^2 \left( -\frac{\vartheta}{2} + \frac{\sin \vartheta}{2} \right) = \frac{r^2}{2} (\vartheta - \sin \vartheta). \end{aligned}$$

□

## 8 Oppervlakte van een cirkelsector p.122

**Stelling.** De oppervlakte van een cirkelsector met straal  $r$  en middelpuntshoek  $\vartheta$  is  $\frac{r^2 \vartheta}{2}$ .

*Bewijs.* Met een hoek van  $2\pi$  is de oppervlakte de hele cirkel dus  $\pi r^2$ . Dan is de oppervlakte van de cirkelsector met hoek  $\vartheta$  gelijk aan  $\pi r^2 \cdot \frac{\vartheta}{2\pi} = \frac{r^2 \vartheta}{2}$ . □

## 9 Volume omwentelingslichamen p.134

Stel dat  $f$  een continue functie is in  $[a, b]$ . We zoeken het volume  $V$  van het omwentelingslichaam van  $f$  tussen  $a$  en  $b$ .

1. Verdeel  $[a, b]$  in  $n$  intervallen met breedte  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ .
2. Kies in elk interval een willekeurige  $c_i$ . We bouwen een rechthoekje met breedte  $\Delta x$  en hoogte  $|f(c_i)|$ .
3. We wentelen dit om de x-as en krijgen een cilinder met volume  $\Delta x \cdot \pi \cdot (f(c_i))^2$ .

4. De som van alle cilinders is

$$V_n = \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot \pi \cdot (f(c_i))^2.$$

5. De limiet hiervan is het gevraagde volume

$$V = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot \pi \cdot (f(c_i))^2.$$

6. Omdat  $f$  continu is, is  $\pi f^2$  ook continu. Door de definitie van bepaalde integralen is het volume gelijk aan

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

## 10 Volume van een cilinder p.137

**Stelling.** *Het volume van een cilinder met hoogte  $h$  en straal  $r$  is  $\pi r^2 h$ .*

*Bewijs.*  $\ll$  FIGUUR P. 137  $\gg$

De cilinder is gevormd door  $y = r$  te wentelen om de x-as. Het volume is dus

$$V = \pi \int_0^h r^2 dx = \pi r^2 [x]_0^h = \pi r^2 h.$$

□

## 11 Volume van een kegel p.137

**Stelling.** *Het volume van een kegel met hoogte  $h$  en straal  $r$  is  $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ .*

*Bewijs.*  $\ll$  FIGUUR P. 137  $\gg$

De kegel is gevormd door  $y = \frac{r}{h}x$  te wentelen om de x-as. Het volume is dus

$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

□

## 12 Volume van een afgeknotte kegel p.138

**Stelling.** *Het volume van een afgeknotte kegel met hoogte  $h$  en stralen  $a$  en  $b$  is  $\frac{\pi h}{3} \cdot (b^2 + ab + a^2)$ .*

*Bewijs.*  $\ll$  FIGUUR P. 138  $\gg$

De afgeknotte kegel is gevormd door de rechte door  $(0, a)$  en  $(h, b)$  om de x-as te wentelen.

Deze rechte heeft als vergelijking  $y - a = \frac{b-a}{h-0} \cdot (x - 0) \iff y = \frac{b-a}{h}x + a$ . Het volume is dus

$$V = \pi \int_0^h \left( \frac{b-a}{h}x + a \right)^2 dx.$$

$$\text{Stel } t = \frac{b-a}{h}x + a$$

$$\text{Dan } dt = \frac{b-a}{h} dx$$

Voor  $x = 0$  is  $t = a$ .

Voor  $x = h$  is  $t = b$ .

$$= \frac{h}{b-a} \cdot \pi \int_a^b \left( \frac{b-a}{h}x + a \right)^2 \frac{b-a}{h} dx$$

$$= \frac{\pi h}{b-a} \int_a^b t^2 dt$$

$$= \frac{\pi h}{b-a} \cdot \left[ \frac{t^3}{3} \right]_a^b$$

$$= \frac{\pi h}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3}$$

$$(b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2))$$

$$= \frac{\pi h}{3} \cdot (b^2 + ab + a^2)$$

□



### 13 Volume van een bol p.139

**Stelling.** *Het volume van en bol met straal  $r$  is  $\frac{4\pi r^3}{3}$*

*Bewijs.*  $\ll$  FIGUUR P. 139  $\gg$

De bol is gevormd door  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  te wentelen om de x-as. Het volume is dus

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \int_{-r}^r r^2 dx - \pi \int_{-r}^r x^2 dx \\ &= \pi r^2 [x]_{-r}^r - \pi \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r \\ &= \pi r^2 \cdot 2r - \frac{2\pi r^3}{3} \\ &= \frac{4\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

□