

Bewijzen Proefwerk Juni

Aron Martens

March 2025

1 Bepaalde integraal p.16

Stel dat f een positieve, continue functie is in $[a, b]$. We zoeken de oppervlakte van het gebied tussen f en de x-as.

1. Verdeel $[a, b]$ in n intervallen met breedte $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
2. Bereken in elk interval het minimum m_i en maximum M_i . Aangezien f continu is, zijn deze altijd te vinden. (Stelling van Weierstrass).
3. Bereken de ondersom en de bovensom:

$$s_n = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x \quad \text{en} \quad S_n = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x$$

4. We definiëren de bepaalde integraal als

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$$

1.1 Opmerking Riemannsom p.16

Bernhard Riemann toonde aan dat je het minimum of maximum niet nodig hebt. Een willekeurige functiewaarde $f(x_i)$ volstaat.

Bewijs.

$$\begin{aligned} m_i &\leq f(x_i) \leq M_i \\ &\Downarrow \\ m_i \cdot \Delta x &\leq f(x_i) \cdot \Delta x \leq M_i \cdot \Delta x \\ &\Downarrow \\ \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x &\leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x \leq \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x \\ &\Downarrow \\ s_n &\leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x \leq S_n \end{aligned}$$

Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$, volgt uit de insluitstelling dat

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

□

2 Integraal van $x^0 = 1$ p.19

$$\begin{aligned} \int_a^b x^0 dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n 1 \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \cdot n \\ &= b-a \end{aligned}$$

3 Integraal van x p.20

We verdelen $[a, b]$ in n deelintervallen met breedte $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Als x_i nemen we de linkergrens van elk interval.

INTERVAL	x_i	$f(x_i) = x_i$
$[a, a + \Delta x]$	a	a
$[a + \Delta x, a + 2\Delta x]$	$a + \Delta x$	$a + \Delta x$
$[a + 2\Delta x, a + 3\Delta x]$	$a + 2\Delta x$	$a + 2\Delta x$
\dots	\dots	\dots
$[a + (n-1)\Delta x, b]$	$a + (n-1)\Delta x$	$a + (n-1)\Delta x$

$$\begin{aligned} \int_a^b x dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \cdot [a + (a + \Delta x) + (a + 2\Delta x) + \dots + (a + (n-1)\Delta x)] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n \cdot (a + a + (n-1)\Delta x)}{2} \quad \left(s = \frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(b-a) \cdot (a + b - \Delta x)}{2} \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2} \end{aligned}$$

4 Integraal van x^2 p.21

4.1 Over het interval $[0, b]$ met $b > 0$

We verdelen $[0, b]$ in n deelintervallen met breedte $\Delta x = \frac{b}{n}$. Als x_i nemen we de rechtergrens van elk interval.

INTERVAL	x_i	$f(x_i) = x_i^2$
$[0, \Delta x]$	Δx	$1 (\Delta x)^2$
$[\Delta x, 2\Delta x]$	$2\Delta x$	$4 (\Delta x)^2$
$[2\Delta x, 3\Delta x]$	$3\Delta x$	$9 (\Delta x)^2$
\dots	\dots	\dots
$[(n-1)\Delta x, b]$	$n\Delta x = b$	$n^2 (\Delta x)^2$

$$\begin{aligned}
\int_0^b x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b}{n} \left((1 + 4 + 9 + \dots + n^2) \cdot (\Delta x)^2 \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{b^2}{n^2} \\
&= \frac{b^3}{6} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3}{n^3} \\
&= \frac{b^3}{3}
\end{aligned}$$

4.2 Over het interval $[a, b]$ met $0 < a < b$

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^2 dx &= \int_0^b x^2 dx - \int_0^a x^2 dx \\
&= \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}
\end{aligned}$$

4.3 Over het interval $[a, b]$ met $a < 0 \leq b$

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^2 dx &= \int_a^0 x^2 dx + \int_0^b x^2 dx \\
&= \int_0^{-a} x^2 dx + \int_0^b x^2 dx \\
&= -\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3}
\end{aligned}$$

4.4 Over het interval $[a, b]$ met $a < b \leq 0$

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^2 dx &= \int_{-b}^{-a} x^2 dx = \int_0^{-a} x^2 dx - \int_0^{-b} x^2 dx \\
&= \frac{(-a)^3}{3} - \frac{(-b)^3}{3} \\
&= -\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3}
\end{aligned}$$

5 Middelwaardestelling van de integraalrekening p.31

Stelling. Als f continu is in $[a, b]$, dan bestaat er een $c \in [a, b] : \int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c)$

Bewijs. We hebben 3 gevallen:

1. $\boxed{a < b}$

We verdelen $[a, b]$ in n intervallen met breedte $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Dan geldt: } m &\leq f(x_i) \leq M \\
 &\Downarrow \\
 m \cdot \Delta x &\leq f(x_i) \cdot \Delta x \leq M \cdot \Delta x \\
 &\Downarrow \\
 n \cdot m \cdot \Delta x &\leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x \leq n \cdot M \cdot \Delta x \\
 &\Downarrow \\
 m \cdot (b - a) &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a) \\
 &\Downarrow \\
 m &\leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M
 \end{aligned}$$

Volgens de stelling van Weierstrass en de tussenwaardestelling bestaat er in $[a, b]$ minstens één c zodat

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx, \quad \text{dus} \quad \int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c)$$

2. $\boxed{a = b}$

Dan is $\int_a^b f(x) dx = 0 = (b - a) \cdot f(c)$

3. $\boxed{a > b}$

$$\begin{aligned}
 \text{Uit 1 volgt dan: } \exists c \in [b, a] : \int_b^a f(x) dx &= (a - b) \cdot f(c) \\
 &\Downarrow \\
 \exists c \in [a, b] : - \int_a^b f(x) dx &= (a - b) \cdot f(c) \\
 &\Downarrow \\
 \exists c \in [a, b] : \int_a^b f(x) dx &= (b - a) \cdot f(c)
 \end{aligned}$$

□

6 Hoofdstelling van de integraalrekening p.33

Stelling. Als f continu is in $[a, b]$, dan geldt in $[a, b]$: $I_a'(x) = f(x)$.

Bewijs. We bewijzen dat $\forall x \in [a, b] : \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{I_a(x + \Delta x) - I_a(x)}{\Delta x} = f(x)$

$$\begin{aligned} \frac{I_a(x + \Delta x) - I_a(x)}{\Delta x} &= \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{\Delta x} \\ &= \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt + \int_x^a (-f(t)) dt}{\Delta x} \\ &= \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} \\ &= \frac{(x + \Delta x - x) \cdot f(c)}{\Delta x} \\ &= f(c) \quad \text{met } c \in [x, x + \Delta x], \end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{I_a(x + \Delta x) - I_a(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

□

7 Primitieve functies p.34

Stelling. Primitieve functies verschillen slechts in een constante term.

Bewijs. F_1 en F_2 zijn primitieve functies van f . Dan is

$$\begin{aligned} DF_1 &= f \\ \text{en} \\ DF_2 &= f \\ \Downarrow \\ DF_2 - DF_1 &= 0 \\ \Downarrow \\ D(F_2 - F_1) &= 0 \\ \Downarrow \\ F_2 - F_1 &= C \\ \Downarrow \\ F_2 &= F_1 + C \quad \text{met } C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

8 Bepaalde integralen p.36

Stelling. Als f continu is in $[a, b]$ en F is een primitieve functie van f , dan geldt:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Bewijs. $I_a(x)$ is een primitieve functie, dus $I_a(x) = F(x) + C$.

We stellen $x = a$:

$$I_a(a) = \int_a^a f(t) dt = F(a) + C$$

\Downarrow

$$0 = F(a) + C$$

\Downarrow

$$C = -F(a) \quad \text{dus: } I_a(x) = F(x) - F(a).$$

Dus,

$$I_a(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) + C = F(b) - F(a)$$

□

9 Oppervlakte van een cirkel p.119

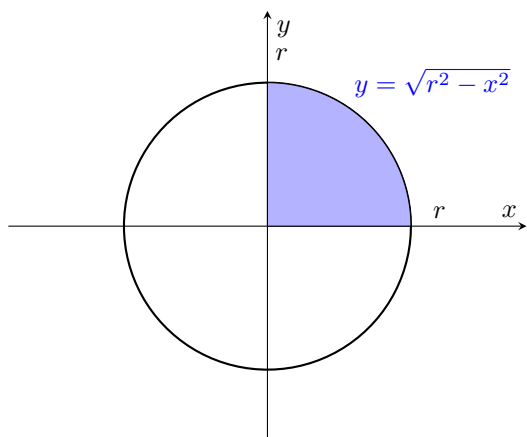
Stelling. De oppervlakte van een cirkel met straal r is πr^2

Bewijs. De vergelijking van een cirkel is

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Dan is de vergelijking in het eerste kwadrant:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$



De oppervlakte is dus

$$A = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Stel $x = r \sin t$ en $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dan is $dx = r \cos t dt$.

Dan is

$$\sqrt{r^2 - x^2} dx = \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} dx = r \sqrt{\cos^2 t} \cdot r \cos t dt = r^2 \cos^2 t dt.$$

Als $x = 0$, dan is $r \sin t = 0$ of $t = 0$.

Als $x = r$, dan is $r \sin t = r$ of $t = \frac{\pi}{2}$.

Dus

$$A = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2r^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt \right)$$

$$= 2r^2 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2r^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi r^2.$$

□

10 Oppervlakte van een cirkelsegment p.121

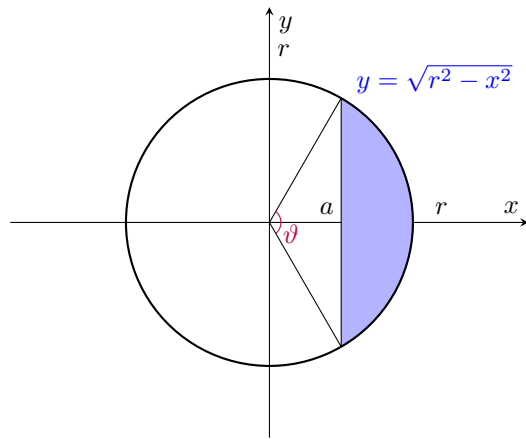
Stelling. De oppervlakte van een cirkelsegment met straal r en middelpuntshoek ϑ is $\frac{r^2}{2} (\vartheta - \sin \vartheta)$.

Bewijs. De vergelijking van een cirkel is

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Dan is de vergelijking in het eerste kwadrant:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$



De oppervlakte is:

$$A = 2 \cdot \int_a^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Stel $x = r \cos t$ en $t \in [0, \pi]$, dan is $dx = -r \sin t dt$.

Dan is

$$\sqrt{r^2 - x^2} dx = \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 t} dx = r \sqrt{\sin^2 t} (-r \sin t) dt = -r^2 \sin^2 t dt.$$

Als $x = a$, dan is $r \cos t = a$ of $t = \arccos \frac{a}{r} = \frac{\vartheta}{2}$.

Als $x = r$, dan is $r \cos t = r$ of $t = 0$.

Dus

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \int_a^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = -2r^2 \int_{\frac{\vartheta}{2}}^0 \sin^2 t dt = -2r^2 \int_{\frac{\vartheta}{2}}^0 \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = -r^2 \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_{\frac{\vartheta}{2}}^0 \\ &= -r^2 \left(-\frac{\vartheta}{2} + \frac{\sin \vartheta}{2} \right) = \frac{r^2}{2} (\vartheta - \sin \vartheta). \end{aligned}$$

□

11 Oppervlakte van een cirkelsector p.122

Stelling. De oppervlakte van een cirkelsector met straal r en middelpuntshoek ϑ is $\frac{r^2 \vartheta}{2}$.

Bewijs. Met een hoek van 2π is de oppervlakte de hele cirkel dus πr^2 . Dan is de oppervlakte van de cirkelsector met hoek ϑ gelijk aan $\pi r^2 \cdot \frac{\vartheta}{2\pi} = \frac{r^2 \vartheta}{2}$. □

12 Volume omwentelingslichamen p.134

Stel dat f een continue functie is in $[a, b]$. We zoeken het volume V van het omwentelingslichaam van f tussen a en b .

1. Verdeel $[a, b]$ in n intervallen met breedte $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
2. Kies in elk interval een willekeurige c_i . We bouwen een rechthoekje met breedte Δx en hoogte $|f(c_i)|$.
3. We wentelen dit om de x-as en krijgen een cilinder met volume $\Delta x \cdot \pi \cdot (f(c_i))^2$.
4. De som van alle cilinders is

$$V_n = \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot \pi \cdot (f(c_i))^2.$$

5. De limiet hiervan is het gevraagde volume

$$V = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot \pi \cdot (f(c_i))^2.$$

6. Omdat f continu is, is πf^2 ook continu. Door de definitie van bepaalde integralen is het volume gelijk aan

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

13 Volume van een cilinder p.137

Stelling. Het volume van een cilinder met hoogte h en straal r is $\pi r^2 h$.

Bewijs. \ll FIGUUR P. 137 \gg

De cilinder is gevormd door $y = r$ te wentelen om de x-as. Het volume is dus

$$V = \pi \int_0^h r^2 dx = \pi r^2 [x]_0^h = \pi r^2 h.$$

□

14 Volume van een kegel p.137

Stelling. Het volume van een kegel met hoogte h en straal r is $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Bewijs. \ll FIGUUR P. 137 \gg

De kegel is gevormd door $y = \frac{r}{h}x$ te wentelen om de x-as. Het volume is dus

$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

□

15 Volume van een afgeknotte kegel p.138

Stelling. Het volume van een afgeknotte kegel met hoogte h en stralen a en b is $\frac{\pi h}{3} \cdot (b^2 + ab + a^2)$.

Bewijs. \ll FIGUUR P. 138 \gg

De afgeknotte kegel is gevormd door de rechte door $(0, a)$ en (h, b) om de x-as te wentelen.

Deze rechte heeft als vergelijking $y - a = \frac{b-a}{h-0} \cdot (x - 0) \iff y = \frac{b-a}{h}x + a$. Het volume is dus

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{b-a}{h}x + a \right)^2 dx.$$

$$\text{Stel } t = \frac{b-a}{h}x + a$$

$$\text{Dan } dt = \frac{b-a}{h} dx$$

$$\text{Voor } x = 0 \text{ is } t = a.$$

$$\text{Voor } x = h \text{ is } t = b.$$

$$= \frac{h}{b-a} \cdot \pi \int_a^b \left(\frac{b-a}{h}x + a \right)^2 \frac{b-a}{h} dx$$

$$= \frac{\pi h}{b-a} \int_a^b t^2 dt$$

$$= \frac{\pi h}{b-a} \cdot \left[\frac{t^3}{3} \right]_a^b$$

$$= \frac{\pi h}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3}$$

$$(b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2))$$

$$= \frac{\pi h}{3} \cdot (b^2 + ab + a^2)$$

□

16 Volume van een bol p.139

Stelling. Het volume van en bol met straal r is $\frac{4\pi r^3}{3}$

Bewijs. « FIGUUR P. 139 »

De bol is gevormd door $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ te wentelen om de x-as. Het volume is dus

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \int_{-r}^r r^2 dx - \pi \int_{-r}^r x^2 dx \\ &= \pi r^2 [x]_{-r}^r - \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r \\ &= \pi r^2 \cdot 2r - \frac{2\pi r^3}{3} \\ &= \frac{4\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

□