Bewijzen Proefwerk Juni

Aron Martens

March 2025

1 Bepaalde integraal p.16

Stel dat f een positieve, continue functie is in $[a, b]$. We zoeken de oppervlakte van het gebied tussen f en de x-as.

1. Verdeel $[a, b]$ in n intervallen met breedte $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
2. Bereken in elk interval het minimum m_i en maximum M_i. Aangezien f continu is, zijn deze altijd te vinden. (Stelling van Weierstrass).
3. Bereken de ondersom en de bovensom:
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x \qquad \text{en} \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x$$
4. We definiëren de bepaalde integraal als
$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = \int_a^b f(x)\, dx$$

1.1 Opmerking Riemannsom p.16

Bernhard Rimemann toonde aan dat je het minimum of maximum niet nodig hebt. Een willekeurige functiewaarde $f(x_i)$ volstaat.

Bewijs.

$$m_i \leq f(x_i) \leq M_i$$
$$\Downarrow$$
$$m_i \cdot \Delta x \leq f(x_i) \cdot \Delta x \leq M_i \cdot \Delta x$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x$$
$$\Downarrow$$
$$s_n \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x \leq S_n$$

Omdat $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$, volgt uit de insluitstelling dat

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

. $\square$

2 Integraal van $x^0 = 1$ p.19

$$\begin{aligned}\int_a^b x^0\,dx &= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} 1\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\cdot n\\ &= b-a\end{aligned}$$

3 Integraal van x p.20

We verdelen $[a,b]$ in n deelintervallen met breedte $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Als x_i nemen we de linkergrens van elk interval.

INTERVAL	x_i	$f(x_i) = x_i$
$[a, a+\Delta x]$	a	a
$[a+\Delta x, a+2\Delta x]$	$a+\Delta x$	$a+\Delta x$
$[a+2\Delta x, a+3\Delta x]$	$a+2\Delta x$	$a+2\Delta x$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$[a+(n-1)\Delta x, b]$	$a+(n-1)\Delta x$	$a+(n-1)\Delta x$

$$\begin{aligned}\int_a^b x\,dx &= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\cdot[a+(a+\Delta x)+(a+2\Delta x)+\cdots+(a+(n-1)\Delta x)]\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\cdot\frac{n\cdot(a+a+(n-1)\Delta x)}{2} && \left(s=\frac{u_1+u_n}{2}\cdot n\right)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(b-a)\cdot(a+b-\Delta x)}{2}\\ &= \frac{b^2-a^2}{2}\end{aligned}$$

4 Integraal van x^2 p.21

4.1 Over het interval $[0,b]$ met $b>0$

We verdelen $[0,b]$ in n deelintervallen met breedte $\Delta x = \frac{b}{n}$. Als x_i nemen we de rechtergrens van elk interval.

INTERVAL	x_i	$f(x_i) = x_i^2$
$[0, \Delta x]$	Δx	$1 (\Delta x)^2$
$[\Delta x, 2\Delta x]$	$2\Delta x$	$4 (\Delta x)^2$
$[2\Delta x, 3\Delta x]$	$3\Delta x$	$9 (\Delta x)^2$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$[(n-1)\Delta x, b]$	$n\Delta x = b$	$n^2 (\Delta x)^2$

$$\begin{aligned}
\int_0^b x^2\,dx &= \lim_{n\to+\infty} \frac{b}{n}\left(\left(1+4+9+\cdots+n^2\right)\cdot(\Delta x)^2\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{b}{n}\frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\frac{b^2}{n^2}\\
&= \frac{b^3}{6}\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^3}{n^3}\\
&= \frac{b^3}{3}
\end{aligned}$$

4.2 Over het interval $[a,b]$ met $0 < a < b$

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^2\,dx &= \int_0^b x^2\,dx - \int_0^a x^2\,dx\\
&= \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}
\end{aligned}$$

4.3 Over het interval $[a,b]$ met $a < 0 \leq b$

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^2\,dx &= \int_a^0 x^2\,dx + \int_0^b x^2\,dx\\
&= \int_0^{-a} x^2\,dx + \int_0^b x^2\,dx\\
&= -\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3}
\end{aligned}$$

4.4 Over het interval $[a,b]$ met $a < b \leq 0$

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^2\,dx &= \int_{-b}^{-a} x^2\,dx\\
&= \frac{\left(-a^3\right)}{3} - \frac{\left(-b^3\right)}{3}\\
&= -\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3}
\end{aligned}$$

5 Middelwaardestelling van de integraalrekening p.31

Stelling. Als f continu is in $[a,b]$, dan bestaat er een $c \in [a,b] : \displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = (b-a) \cdot f(c)$

Bewijs. We hebben 3 gevallen:

1. $\boxed{a < b}$
   We verdelen $[a,b]$ in n intervallen met breedte $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

$$\begin{aligned}
\text{Dan geldt:} \qquad m \leq & f(x_i) \leq M \\
& \Downarrow \\
m \cdot \Delta x \leq & f(x_i) \cdot \Delta x \leq M \cdot \Delta x \\
& \Downarrow \\
n \cdot m \cdot \Delta x \leq & \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x \leq n \cdot M \cdot \Delta x \\
& \Downarrow \\
m \cdot (b-a) \leq \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} & f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)\ dx \leq M \cdot (b-a) \\
& \Downarrow \\
m \leq \frac{1}{b-a} & \int_a^b f(x)\ dx \leq M
\end{aligned}$$

   Volgens de stelling van Weierstrass en de tussenwaardestelling bestaat er in $[a,b]$ minstens één c zodat

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ dx, \quad \text{dus} \quad \int_a^b f(x)\ dx = (b-a) \cdot f(c)$$

2. $\boxed{a = b}$
   Dan is $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = 0 = (b-a) \cdot f(c)$

3. $\boxed{a > b}$

$$\begin{aligned}
\text{Uit } \mathbf{1} \text{ volgt dan: } \exists c \in [a,b] : \int_a^b f(x)\ dx &= (a-b) \cdot f(c) \\
&\Downarrow \\
\exists c \in [a,b] : -\int_b^a f(x)\ dx &= (a-b) \cdot f(c) \\
&\Downarrow \\
\exists c \in [a,b] : \int_b^a f(x)\ dx &= (b-a) \cdot f(c)
\end{aligned}$$

□

6 Hoofdstelling van de integraalrekening

Stelling. Als f continu is in $[a,b]$, dan geldt in $[a,b]$: $I_a^{'}(x) = f(x)$.

Bewijs. We bewijzen dat $\forall x \in [a,b] : \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{I_a(x+\Delta x) - I_a(x)}{\Delta x} = f(x)$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{I_a(x+\Delta x) - I_a(x)}{\Delta x} &= \frac{\displaystyle\int_a^{x+\Delta x} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt}{\Delta x} \\
&= \frac{\displaystyle\int_a^{x+\Delta x} f(t)\ dt + \int_x^a (t)\ dt}{\Delta x} \\
&= \frac{\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)\ dt}{\Delta x} \\
&= \frac{(x+\Delta x - x)\cdot f(c)}{\Delta x} \\
&= f(c) \qquad \text{met } c \in [x, x+\Delta x],
\end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{I_a(x+\Delta x) - I_a(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

□

7 Oppervlakte van een cirkel p.119

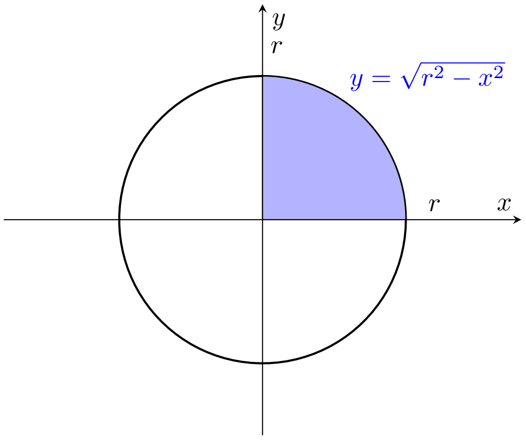
Stelling. De oppervlakte van een cirkel met straal r is πr^2

Bewijs. De vergelijking van een cirkel is

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Dan is de vergelijking in het eerste kwadrant:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$



De oppervlakte is dus

$$A = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

Stel $x = r \sin t$ en $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, dan is $dx = r \cos t\, dt$.
Dan is

$$\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t}\, dx = r\sqrt{\cos^2 t} \cdot r \cos t\, dt = r^2 \cos^2 t\, dt.$$

Als $x = 0$, dan is $r \sin t = 0$ of $t = 0$.
Als $x = r$, dan is $r \sin t = r$ of $t = \frac{\pi}{2}$.
Dus

$$A = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = 2r^2 \left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2r^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi r^2.$$

$\square$

8 Oppervlakte van een cirkelsegment p.121

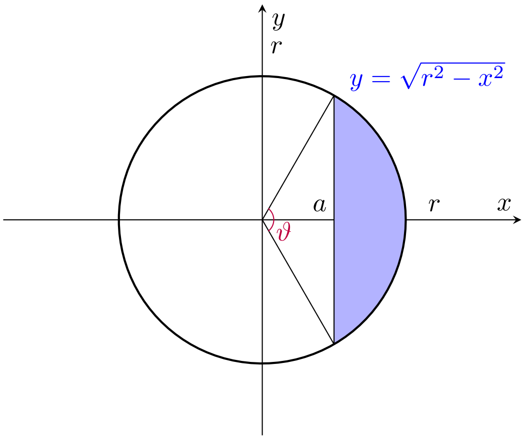
Stelling. De oppervlakte van een cirkelsegment met straal r en middelpuntshoek ϑ is $\frac{r^2}{2}(\vartheta - \sin\vartheta)$.

Bewijs. De vergelijking van een cirkel is

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Dan is de vergelijking in het eerste kwadrant:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$



De oppervlakte is:

$$A = 2 \cdot \int_a^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

Stel $x = r\cos t$ en $t \in [0, \pi]$, dan is $dx = -r\sin t\, dt$.
Dan is

$$\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \sqrt{r^2 - r^2\cos^2 t}\, dx = r\sqrt{\sin^2 t}\,(-r\sin t)\; dt = -r^2\sin^2 t\, dt.$$

Als $x = a$, dan is $r\cos t = a$ of $t = \text{bgcos}\frac{a}{r} = \frac{\vartheta}{2}$.

.

Als $x = r$, dan is $r\cos t = r$ of $t = 0$.
Dus

$$A = 2 \cdot \int_a^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = -2r^2 \int_{\frac{\vartheta}{2}}^0 \sin^2 t\, dt = -2r^2 \int_{\frac{\vartheta}{2}}^0 \frac{1 - \cos 2t}{2}\, dt = -r^2\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_{\frac{\vartheta}{2}}^0$$

$$= -r^2\left(-\frac{\vartheta}{2} + \frac{\sin\vartheta}{2}\right) = \frac{r^2}{2}(\vartheta - \sin\vartheta).$$

□

9 Oppervlakte van een cirkelsector p.122

Stelling. De oppervlakte van een cirkelsector met straal r en middelpuntshoek ϑ is $\frac{r^2\vartheta}{2}$.

Bewijs. Met een hoek van 2π is de oppervlakte de hele cirkel dus πr^2. Dan is de oppervlakte van de cirkelsector met hoek ϑ gelijk aan $\pi r^2 \cdot \frac{\vartheta}{2\pi} = \frac{r^2\vartheta}{2}$. □

10 Volume omwentelingslichamen p.134

Stel dat f een continue functie is in $[a, b]$. We zoeken het volume V van het omwentelingslichaam van f tussen a en b.

1. Verdeel $[a, b]$ in n intervallen met breedte $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
2. Kies in elk interval een willekeurige c_i. We bouwen een rechthoekje met breedte Δx en hoogte $|f(c_i)|$.
3. We wentelen dit om de x-as en krijgen een cilinder met volume $\Delta x \cdot \pi \cdot (f(c_i))^2$.
4. De som van alle cilinders is
$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot \pi \cdot (f(c_i))^2 .$$
5. De limiet hiervan is het gevraagde volume
$$V = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot \pi \cdot (f(c_i))^2 .$$
6. Omdat f continu is, is πf^2 ook continu. Door de definitie van bepaalde integralen is het volume gelijk aan
$$V = \pi \int_a^b (f(c_i))^2 \, dx$$

11 Volume van een cilinder p.137

Stelling. Het volume van een cilinder met hoogte h en straal r is $\pi r^2 h$.

Bewijs. ≪ FIGUUR P. 137 ≫
De cilinder is gevormd door $y = r$ te wentelen om de x-as. Het volume is dus

$$V = \pi \int_0^h r^2 dx = \pi r^2 [x]_0^h = \pi r^2 h.$$

□

12 Volume van een kegel p.137

Stelling. Het volume van een kegel met hoogte h en straal r is $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Bewijs. ≪ FIGUUR P. 137 ≫
De kegel is gevormd door $y = \frac{r}{h}x$ te wentelen om de x-as. Het volume is dus

$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

□

13 Volume van een afgeknotte kegel p.138

Stelling. Het volume van een afgeknotte kegel met hoogte h en stralen a en b is $\frac{\pi h}{3} \cdot \left(b^2 + ab + a^2\right)$.

Bewijs. ≪ FIGUUR P. 138 ≫
De afgeknotte kegel is gevormd door de rechte door $(0, a)$ en (h, b) om de x-as te wentelen.
Deze rechte heeft als vergelijking $y - a = \frac{b-a}{h-0} \cdot (x - 0) \iff y = \frac{b-a}{h}x + a$. Het volume is dus

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{b-a}{h}x + a\right)^2 dx. \qquad \text{Stel } t = \frac{b-a}{h}x + a$$

$$\text{Dan } dt = \frac{b-a}{h}\,dx$$

Voor $x = 0$ is $t = a$.
Voor $x = h$ is $t = b$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{h}{b-a} \cdot \pi \int_a^b \left(\frac{b-a}{h}x + a\right)^2 \frac{b-a}{h}dx \\
&= \frac{\pi h}{b-a} \int_a^b t^2 dt \\
&= \frac{\pi h}{b-a} \cdot \left[\frac{t^3}{3}\right]_a^b \\
&= \frac{\pi h}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} \qquad \left(b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2)\right) \\
&= \frac{\pi h}{3} \cdot \left(b^2 + ab + a^2\right)
\end{aligned}$$

□

14 Volume van een bol p.139

Stelling. Het volume van en bol met straal r is $\frac{4\pi r^3}{3}$

Bewijs. ≪ Figuur p. 139 ≫
De bol is gevormd door $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ te wentelen om de x-as. Het volume is dus

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \int_{-r}^{r} r^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} x^2 dx \\ &= \pi r^2 \left[x\right]_{-r}^{r} - \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} \\ &= \pi r^2 \cdot 2r - \frac{2\pi r^3}{3} \\ &= \frac{4\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

□