

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет физики

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

«Определение свободного падения при помощи маятников. Изучение
колебаний маятников»

Практикум по механике, 1 курс, группа БФ3251

Выполнила студент:
Перминова Ульяна

Проверил:

Содержание

1 Цели работы	2
2 Методика выполнения	3
2.1 Теоретическая часть	3
2.2 Описание опыта	3
3 Обзор полученных данных и предобработка	5
3.1 Исходные данные и подсчет аномалий	5
3.2 Обработка пропусков, выбросов и аномалий	11
4 Подсчет погрешностей	17
5 Заключение	18
6 Приложение с кодом	18
6.1 Программа для снятия данных с эксперимент. установки	18
6.2 Построение графиков периода	19
6.3 Графики скорости	20

1 Цели работы

- 1) Изучить колебания математического маятника при разных длинах подвеса, разных углах отклонения (3, 6, 15 градусов)
- 2) Определить ускорение свободного падения по результатам эксперимента
- 3) Проанализировать зависимость коэффициента затухания от длины подвеса
- 4) Проверить справедливость утверждения о независимости периода колебаний от угла отклонения для малых колебаний

2 Методика выполнения

2.1 Теоретическая часть

Математический маятник. Колебания с затуханием.

В реальном маятнике всегда есть потери. Основная часть этих потерь связана с трением о воздух, эта сила сопротивления для малых скоростей пропорциональна скорости. Второй закон Ньютона тогда имеет вид $ml\ddot{\alpha} = -mg \sin \alpha - \xi l \dot{\alpha}$, здесь коэффициент вязкого трения ξ зависит также от размера тела, точный характер этой зависимости заранее неизвестен. Для очень медленного движения (в воздухе эти условия для тела используемого размера недостижимы практически) верна формула Стокса $F_{\text{сопр}} = -6\pi\eta rV$.

Для нас важно, что теперь масса тела не сократится и получим уравнение $\ddot{\alpha} + \frac{\xi}{m}\dot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0$, обозначим $\frac{\xi}{m} = 2\gamma = \frac{2}{\tau}$ и будем считать, что $\gamma T \ll 1$ (потери энергии за период колебаний малы).

Ищем решение в виде $e^{\lambda t}$, получаем после подстановки квадратное уравнение $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$. Тогда $\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = -\gamma \pm i\omega\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2} \approx -\gamma \pm i\omega\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2\right)$, так как $\gamma \gg \frac{\gamma}{\omega}$, то для слабо затухающих колебаний получим приближенное решение $\alpha = \alpha_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi_0) = \alpha_0 e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \phi_0)$, описывающее затухающие колебания.

Помимо коэффициента затухания γ или времени затухания $\tau = 1/\gamma$ часто используют понятие добротности колебаний. Добротностью колебаний Q для слабо затухающих колебаний называют отношение энергии, запасенной в маятнике к потерям за время, соответствующее изменению фазы колебаний на 1 радиан (т.е. за время $1/\omega$).

Для математического маятника, отклоненного на малый угол α запасенная энергия равна $mgl\frac{\alpha^2}{2}$. За период угол отклонения уменьшится в $e^{-\gamma/\omega}$ раз, потери энергии составят $mgl\frac{\alpha^2}{2}(1 - e^{-2\gamma/\omega}) \approx mgl\frac{\alpha^2}{2} \times \frac{2\gamma}{\omega}$, откуда добротность $Q = \frac{\omega}{2\gamma} \gg 1$.

2.2 Описание опыта

Используемое оборудование:

1) металлический шар с петелькой для подвеса массой $m = 576.24$ г.

- 2) леска и гайки для крепления
- 3) штативы с муфтой и лапкой
- 4) линейки, уровень, весы и ножницы
- 5) компьютер, оптический датчик, провода, микроконтроллер raspberry pi

Для проведения эксперимента была собрана установка, представленная на Рис. 1

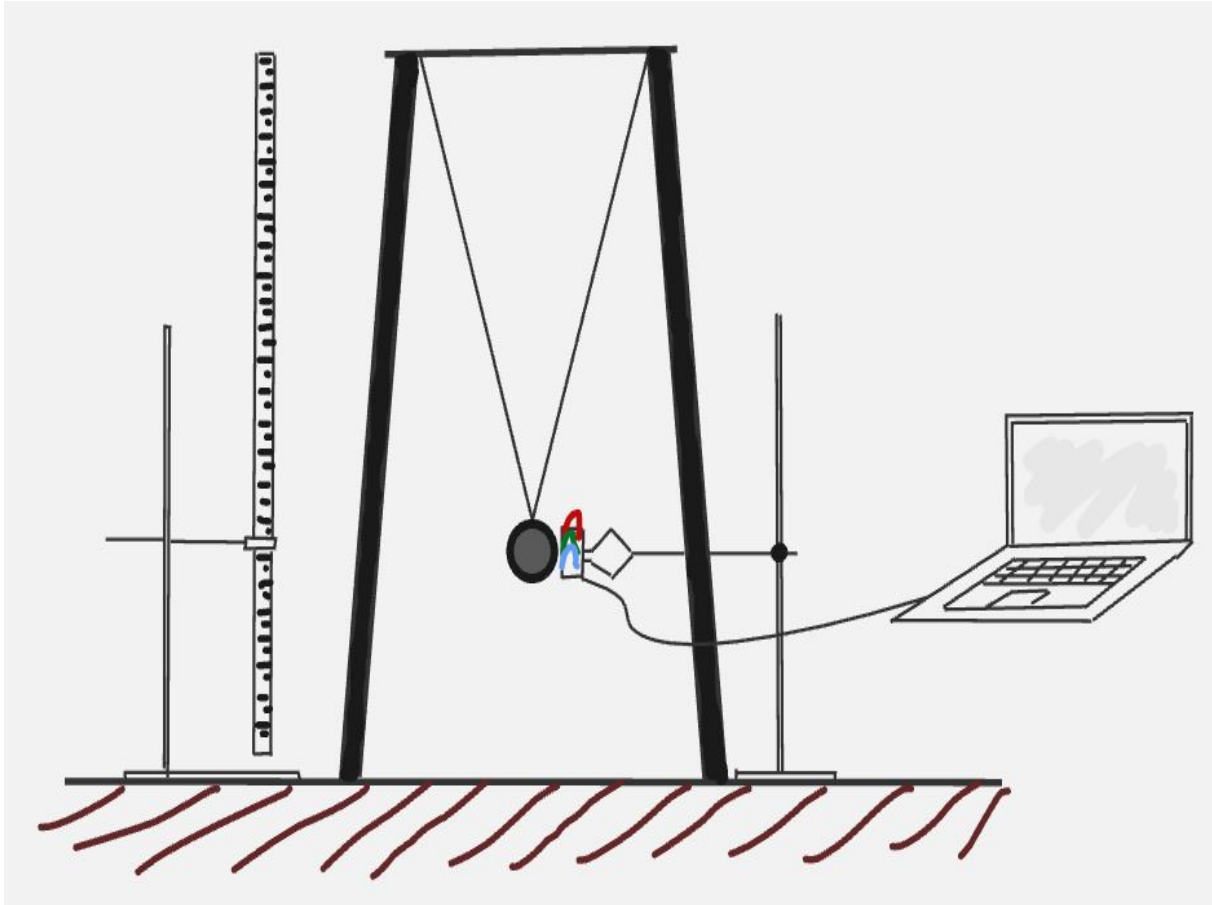


Рис. 1: Схема экспериментальной установки

Датчик-оптопара зафиксирован на штативе так, чтобы при колебаниях маятник проходили мимо датчика на расстоянии около 1 сантиметра. Когда шар проходит мимо датчика, на компьютер посылается сигнал. Интервал времени между сигналами равнялся 1 мс или 5мс.

Измерения проводились для различных конфигураций установки:

Конфигурация 1.1: Длина лески подвеса 86 см, угол отклонения маятника от положения равновесия 3° , интервал между сигналами 5 мс

Конфигурация 1.2: Длина лески подвеса 86 см, угол отклонения маятника от положения равновесия 6° , интервал между сигналами 1 мс

Конфигурация 1.3: Длина лески подвеса 86 см, угол отклонения маятника от положения равновесия 9° , интервал между сигналами 1 мс

Конфигурация 2.1: Длина лески подвеса 51 см, угол отклонения маятника от положения равновесия 3° , интервал между сигналами 1 мс

Конфигурация 2.2: Длина лески подвеса 51 см, угол отклонения маятника от положения равновесия 6° , интервал между сигналами 1 мс

Конфигурация 2.3: Длина лески подвеса 51 см, угол отклонения маятника от положения равновесия 9° , интервал между сигналами 1 мс

3 Обзор полученных данных и предобработка

3.1 Исходные данные и подсчет аномалий

В результате работы экспериментальной установки для каждой из конфигураций был получен файл, содержащий 0 и 1, где 1 означает, что маятник находится вне зоны видимости датчика, а 0 пролет маятника мимо датчика. Пример полученных данных приведен на Рис. 2.

Файл	Правка	Формат	Вид	Справка																							
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Рис. 2: Файл с данными для конфигурации 2.1

По полученным данным для конфигураций 1.1 и 1.2 с помощью библиотеки matplotlib.pyplot построим график зависимости периода колебаний маятника от времени. (Рис. 3) и (Рис. 4) Далее ограничимся построениями для конфигурации 1.1. Для остальных конфигураций все последующие построения будут иметь аналогичный вид.

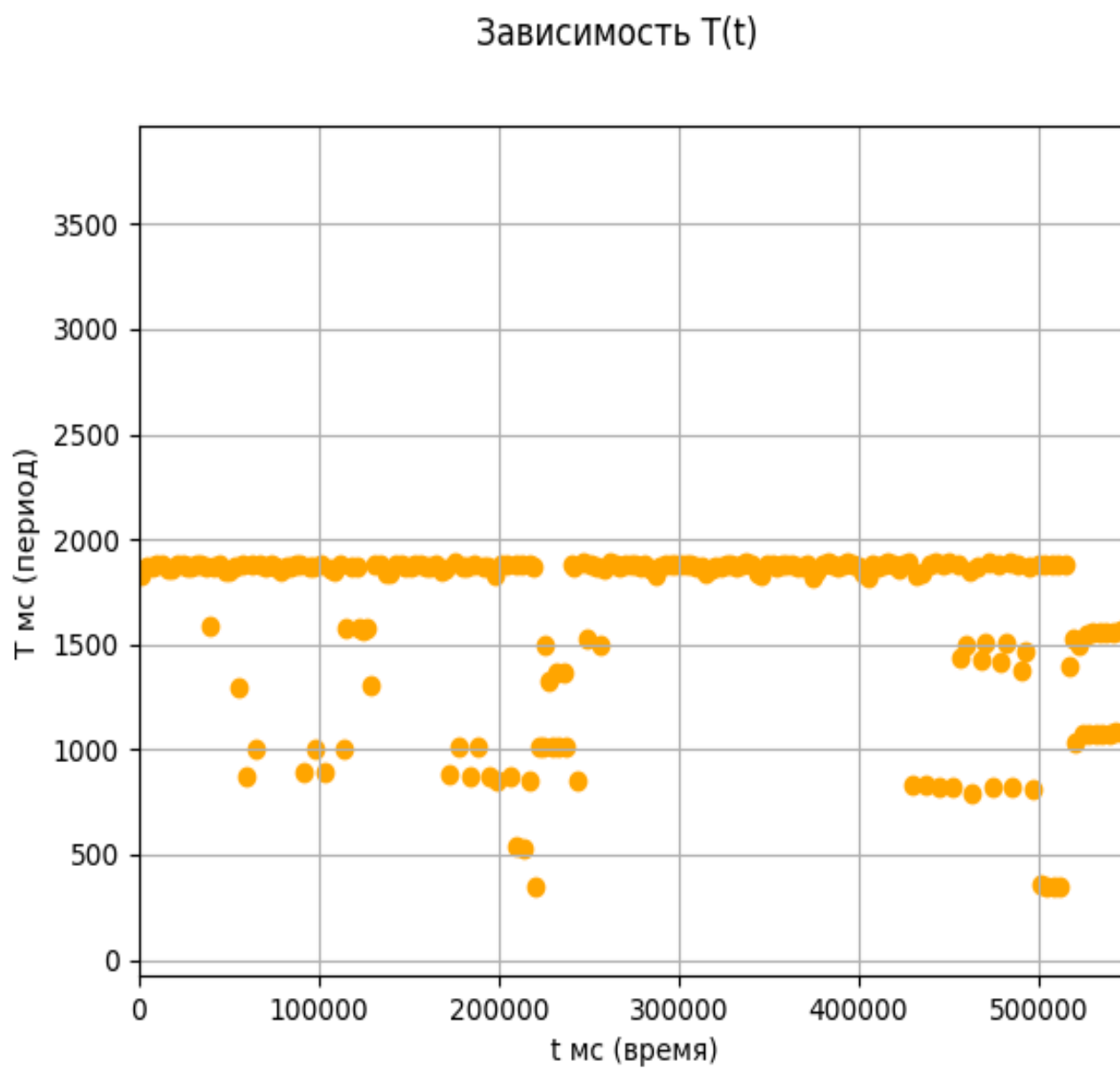


Рис. 3: Зависимость $T(t)$ для конф. 1.1

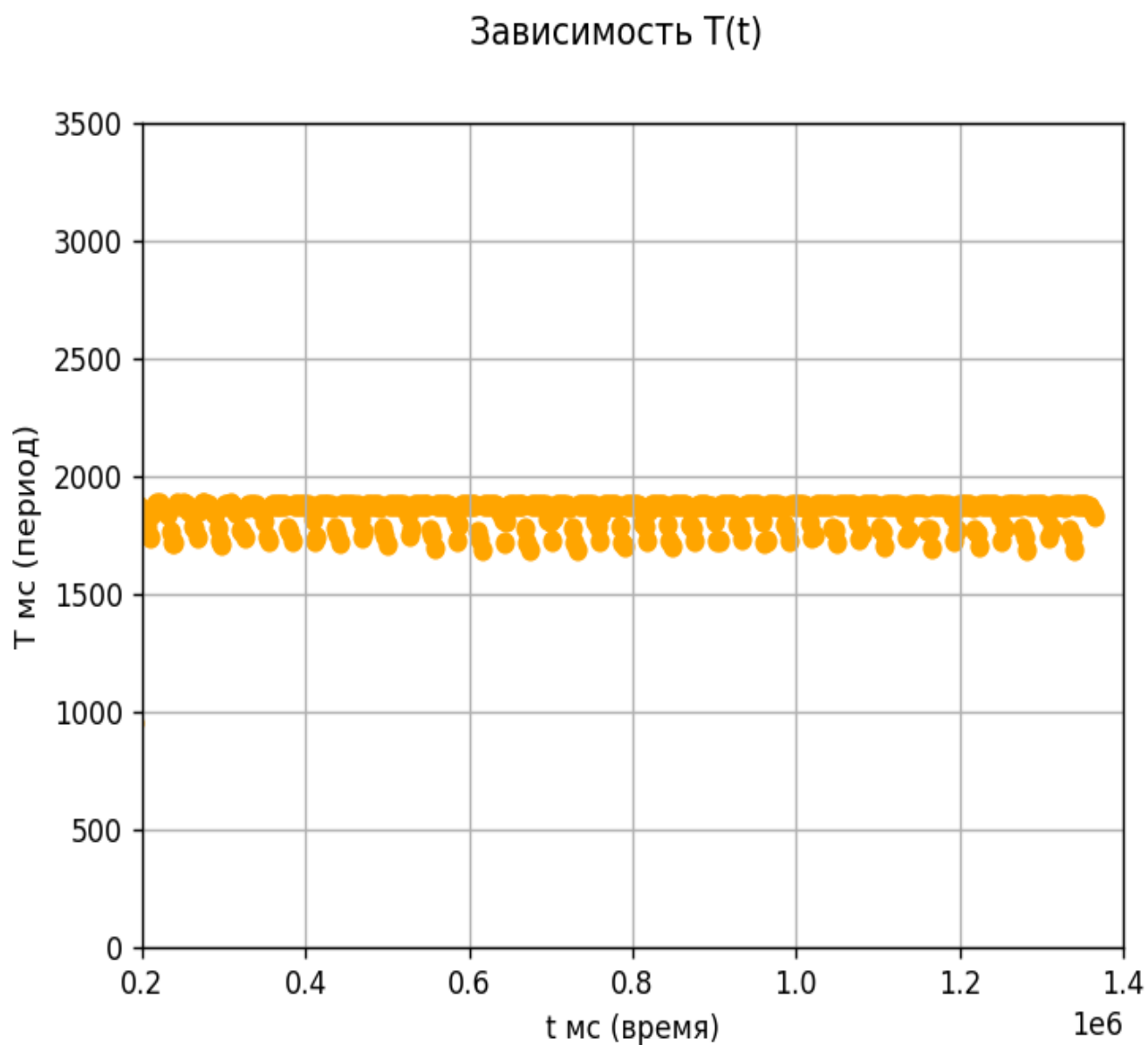


Рис. 4: Зависимость $T(t)$ для конф. 1.2

Теперь, дабы оценить кол-во аномально малых периодов, построим график распределения для T . (Рис. 5)

Гистограмма распределения периодов

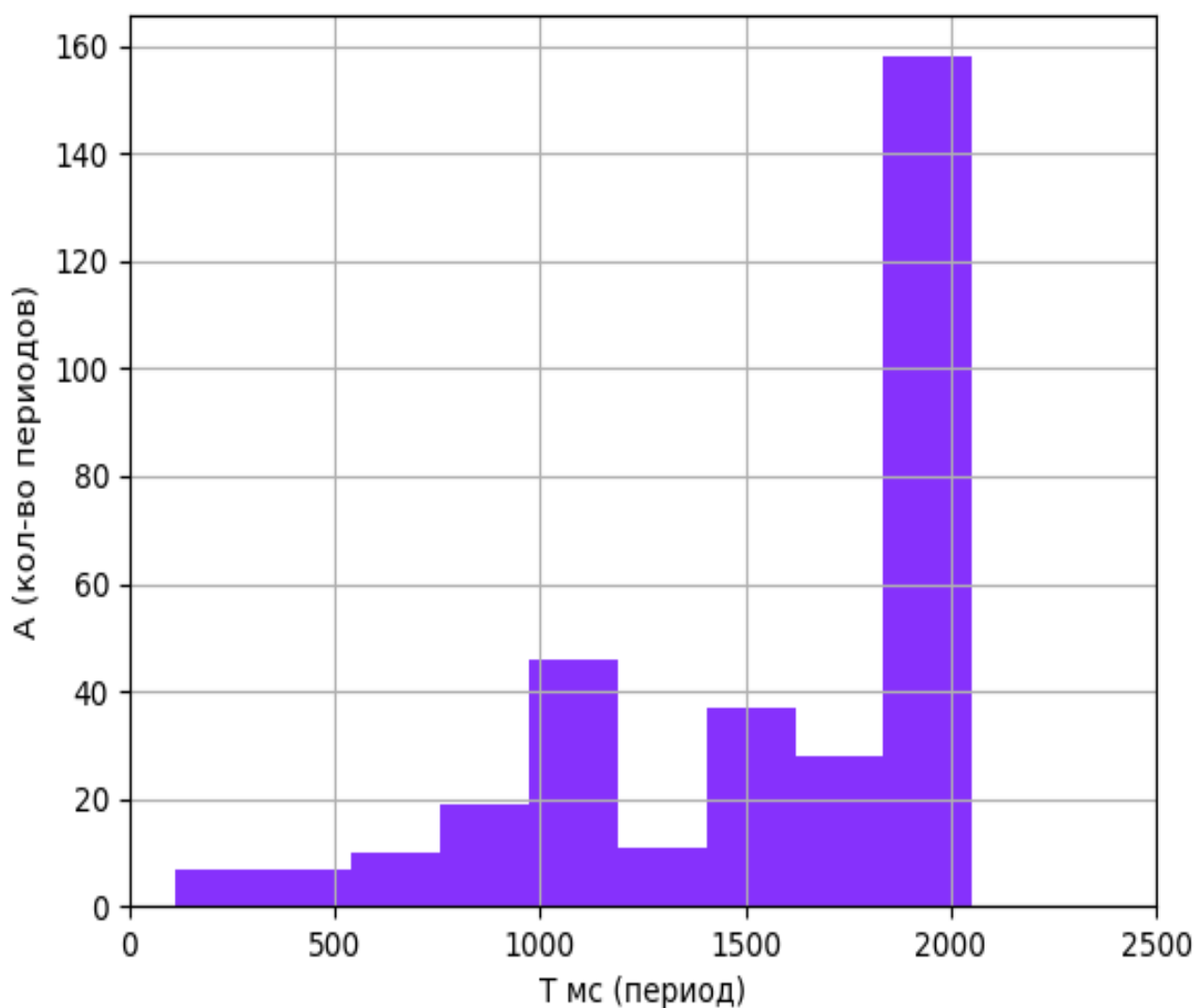


Рис. 5: Распределение величин T

Изучив Рис. 5 условимся считать аномалиями значения периода, не превосходящие 1750 мс. Тогда количество аномалий для конфигурации 1.1 будет составлять от общего числа данных около 26.5%. В таблице, приведенной ниже, указано, какой процент аномалий присущ каждой конфигурации:

Кон- фигу- рация	Критерий аномалии	Кол-во данных (периодов)	Кол-во аномалий	% аномалий
1.1	$T < 1750$ мс	200	53	26.5
1.2	$T < 1850$ мс	326	96	29.448
1.3	$T < 1820$ мс	200	57	28.5
2.1	$T < 1400$ мс	32	8	25
2.2	$T < 1420$ мс	241	62	25.73
2.3	$T < 1430$ мс	260	73	28.08

Таблица 1: Статистика аномалий в зависимости от конфигурации

Теперь изучим скорость маятника в зависимости от времени в нижней точке его траектории. Для начала построим график зависимости $t'(t)$, где t - время, а t' - время пролета мимо датчика. (Рис. 6)

Зависимость $t'(t)$

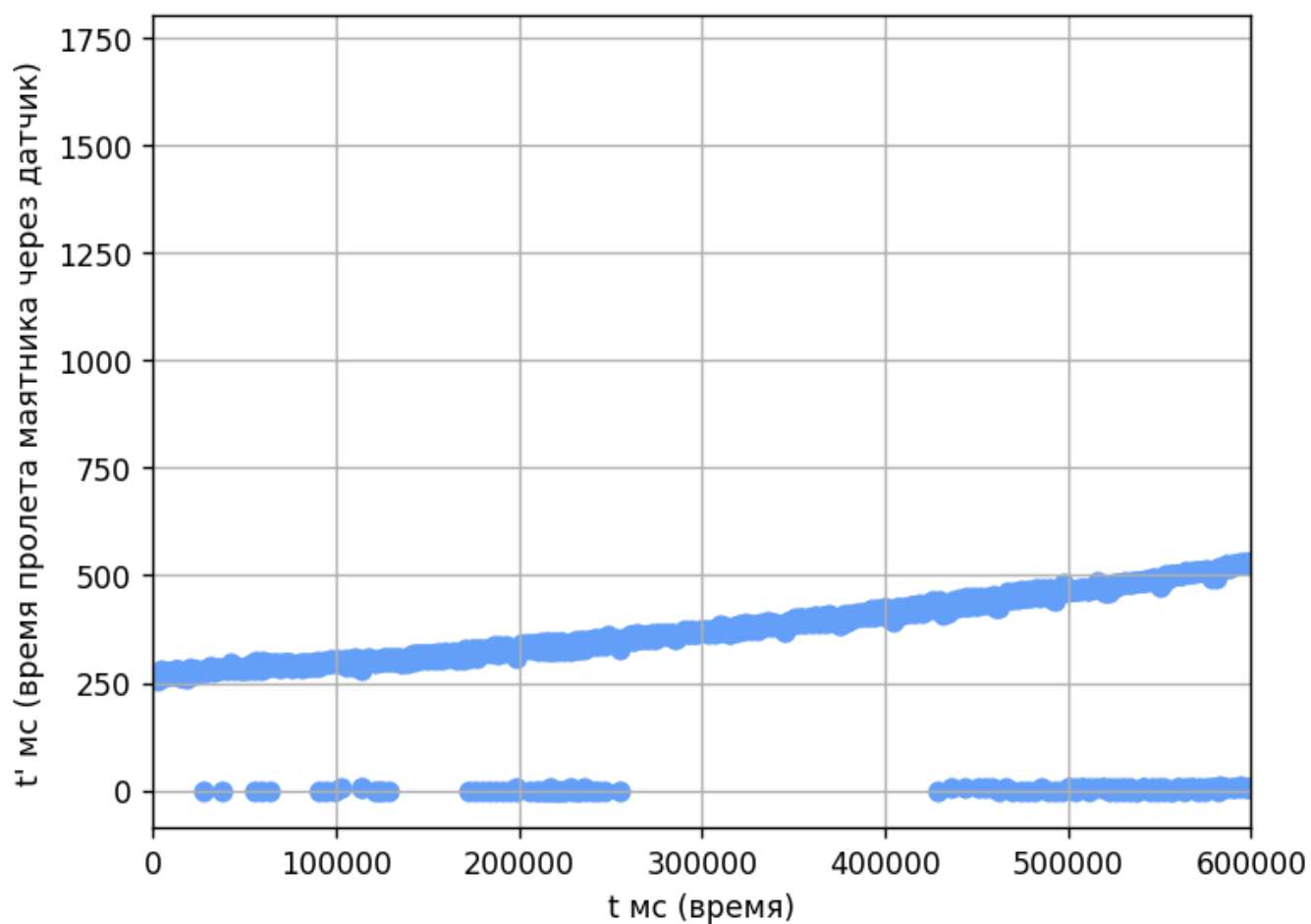


Рис. 6: Зависимость времени пролета датчика от времени

Поскольку рассматриваемые колебания - затухающие, то с течением времени скорость маятника стремится к 0. Тогда согласно формуле

$$t' = \frac{D}{V} \quad (1)$$

где $D = 70$ мм - диаметр шара-маятника, а V - скорость маятника в нижней точке траектории, скорость маятника при уменьшении амплитуды колебаний будет уменьшаться.

3.2 Обработка пропусков, выбросов и аномалий

Проанализировав аномалии обработаем их. Заменяем каждое значение на значение среднего арифметического

$$C_a = \frac{S'}{n'} \quad (2)$$

где S' - сумма всех значений периодов на выбранном интервале времени, не прошедших по критерию аномалии, n' - кол-во таких периодов. В таблице приведены значения C_a для каждой из конфигураций.

Конфигурация	Период времени, мс	значение C_a , мс
1.1	500 000	1873.81
1.2	900 000	1878.357
1.3	550 000	1872.95
2.1	66 000	1459.70
2.2	520 000	1468.12
2.3	560 000	1470.55

Таблица 2: Значения C_a в зависимости от конфигурации

Уже по обработанным данным построим график зависимости периода от времени (Рис. 7) и гистограмму распределения периодов. (Рис. 8)

Зависимость $T(t)$ без аномалий

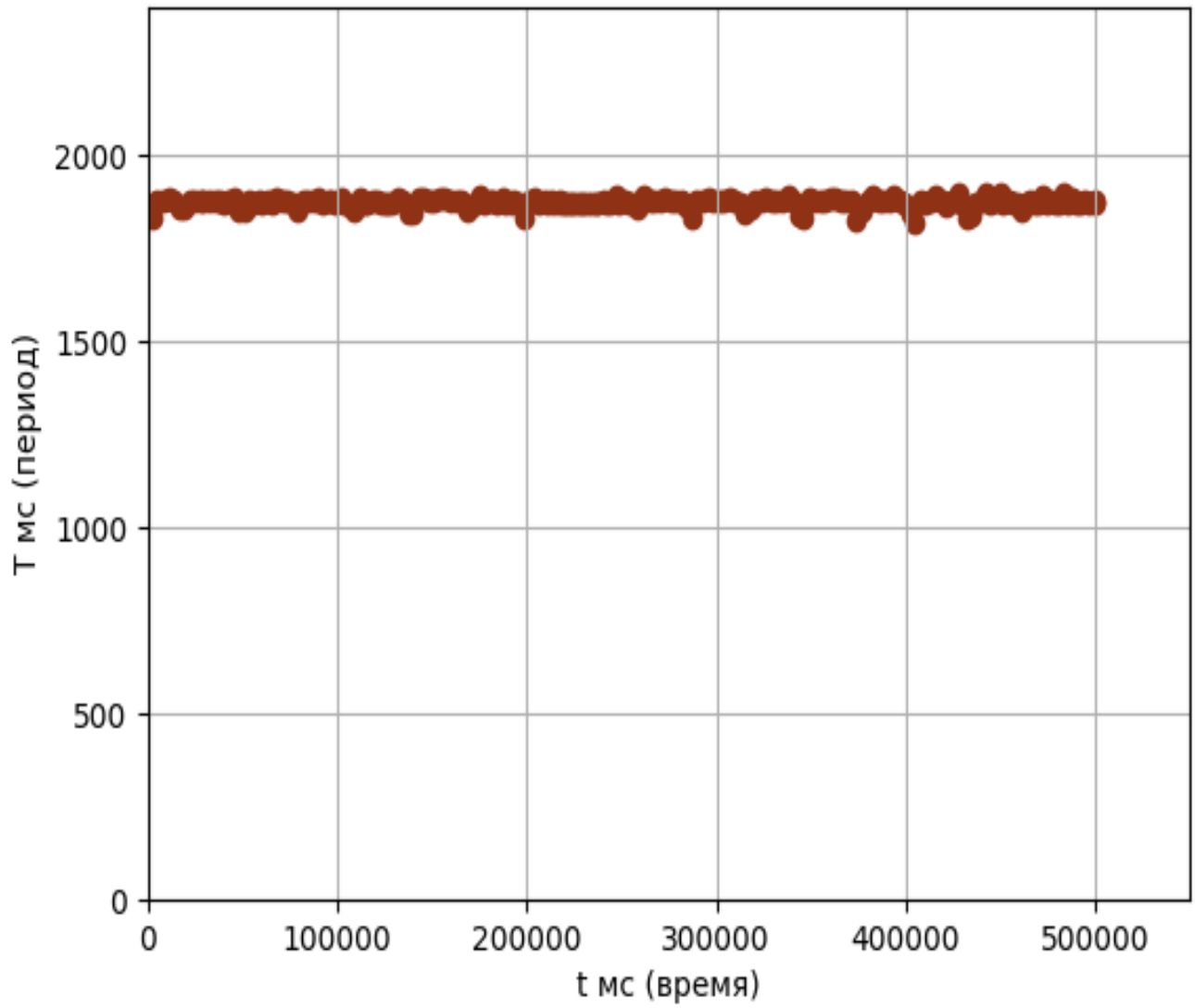


Рис. 7: $T(t)$ с обработанными аномалиями

Гистограмма распределение обработанных периодов

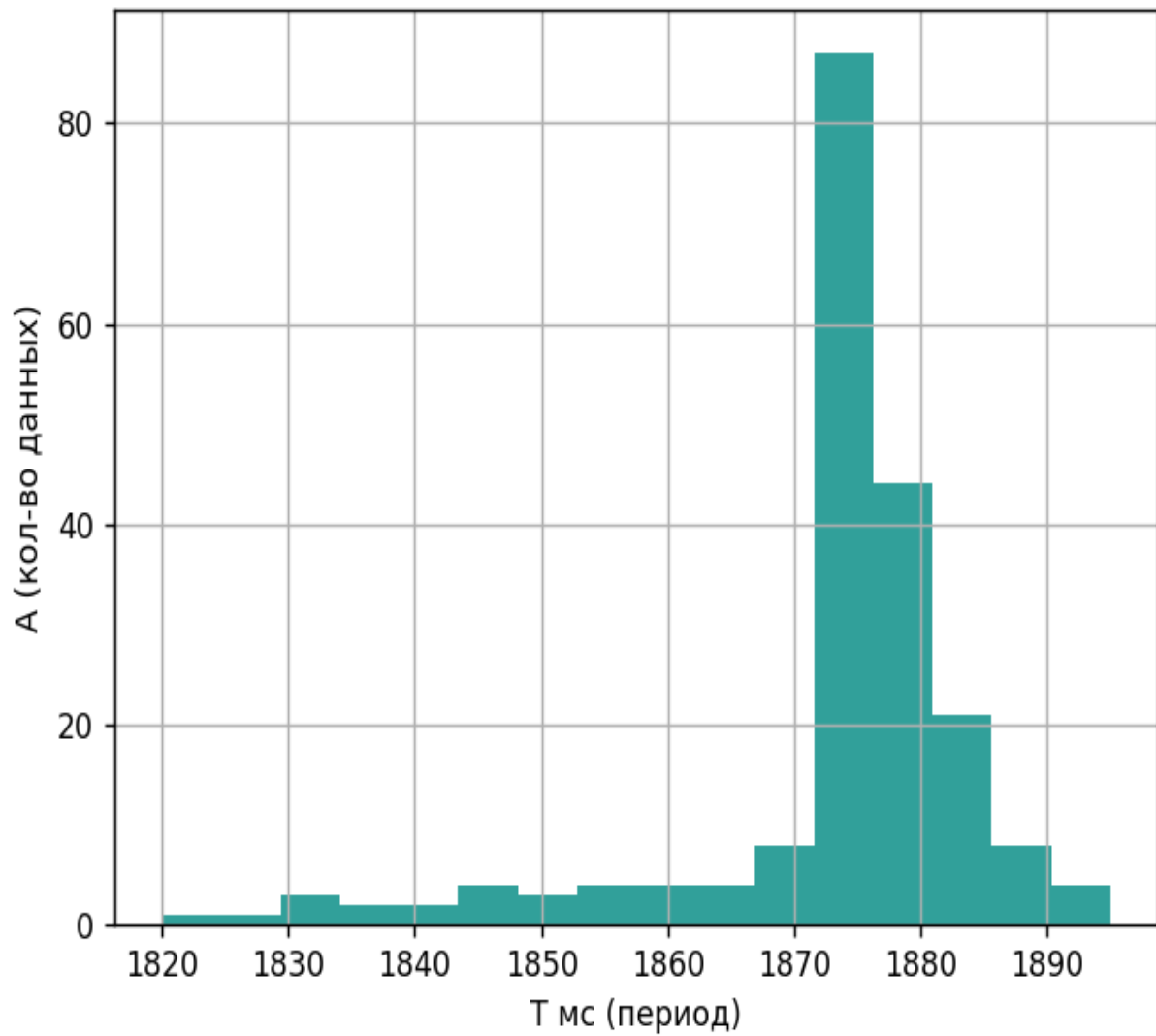


Рис. 8: Распределение обработанных величин T

Теперь обработаем данные графика 6. Заменяем каждое нулевое значение на предыдущее не нулевое, дабы при построении графика скорости $V(t)$ избежать деления на 0. Обработанный график $t'(t)$ изображен на Рис. 9

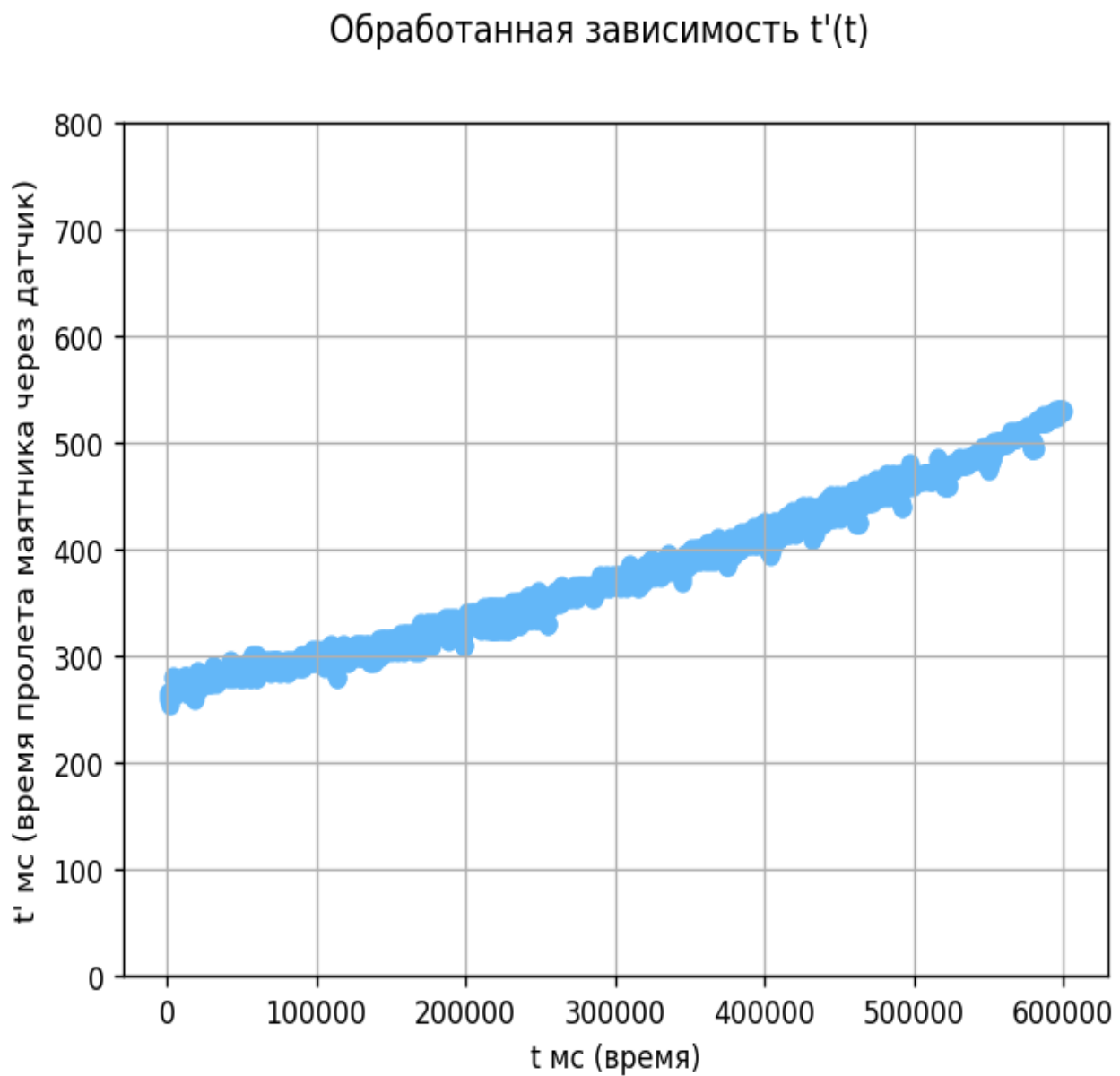


Рис. 9: Обработанная зависимость времени пролета маятника через датчик от времени

По этим данным построим график зависимости скорости $V(t)$ (Рис. 10) используя формулу (2):

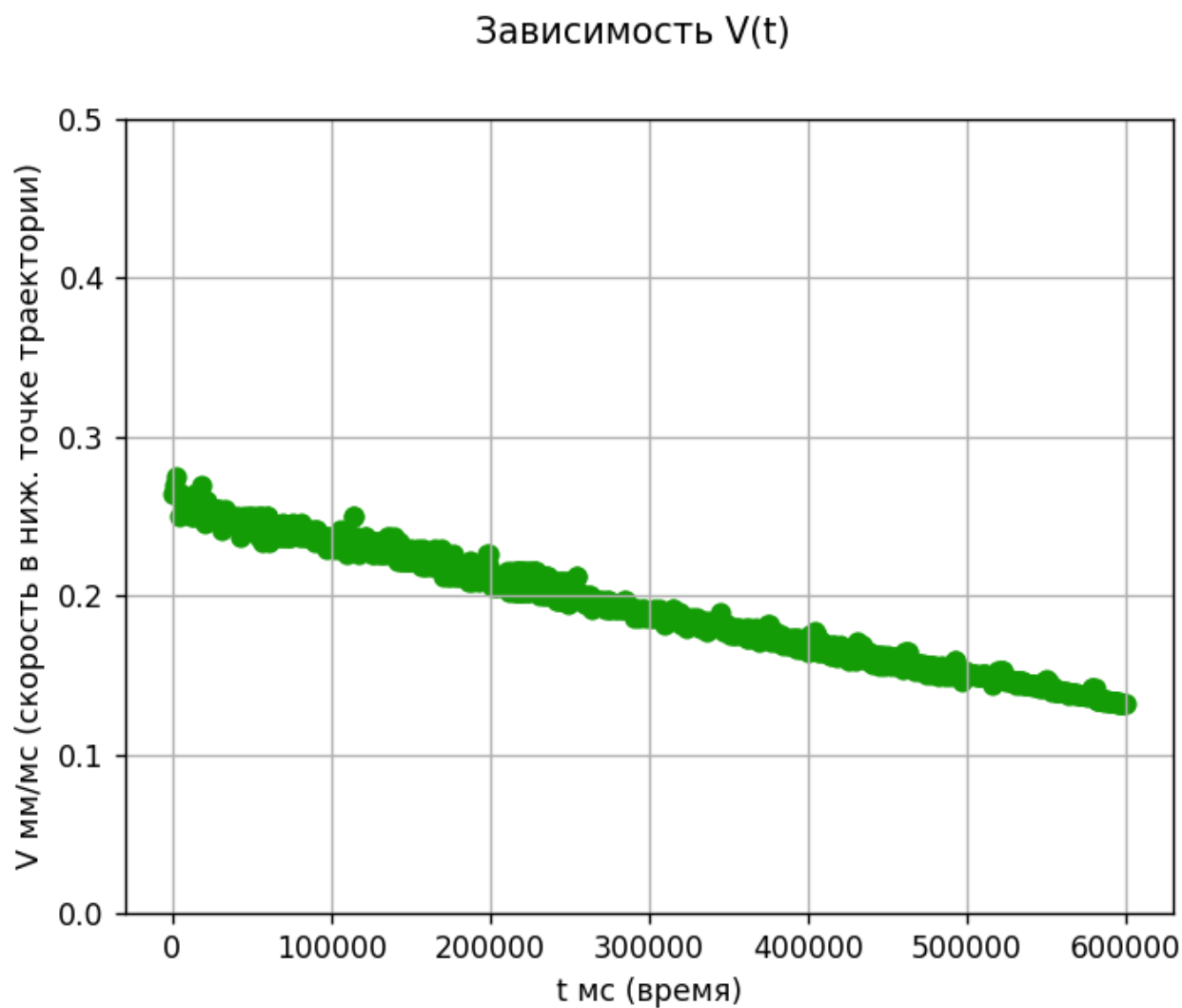


Рис. 10: Скорость в нижней точке траектории маятника в зависимости от времени

Теперь для каждой конфигурации рассчитаем ускорение свободного падения g . Из формулы

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}} \quad (3)$$

где l - см, высота подвеса маятника. В таблице (3) приведены данные расчетов g для каждой из конфигураций.

Конфигурация	g, м/с ²
1.1	9.671±0.009
1.2	9.623±0.002
1.3	9.680±0.010
2.1	9.453±0.038
2.2	9.343±0.010
2.3	9.312±0.007

Таблица 3: Ускорения свободных падений

Изучим зависимость коэффициента затухания маятника от длины подвеса. При малом затухании полная энергия изменяется по закону:

$$E(t) = E_0 e^{-2\gamma t} \quad (4)$$

где γ - коэффициент затухания колебаний, E_0 - энергия маятника при начале колебаний, t - время. При прохождении маятником нижней точки равновесия, его полная энергия будет равняться:

$$E = \frac{mV^2}{2} \quad (5)$$

где V - скорость прохождения маятника мимо датчика. Тогда для любых двух моментов времени t_1 и t_2 справедливы следующие выкладки:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_0 e^{-2\gamma t_1}}{E_0 e^{-2\gamma t_2}} = \frac{V_1^2}{V_2^2} \quad (6)$$

отсюда получаем:

$$\gamma = \frac{\ln(\frac{V_1}{V_2})}{t_2 - t_1} \quad (7)$$

В таблице приведены значения коэффициента затухания в зависимости от конфигурации:

Конфигурация	$\gamma, 1/\text{с}$
1.1	$2.492 * 10^{-6} \pm 6.536 * 10^{-7}$
1.2	$1.528 * 10^{-6} \pm 2.363 * 10^{-7}$
1.3	$3.124 * 10^{-6} \pm 1.021 * 10^{-6}$
2.1	$2.456 * 10^{-6} \pm 1.925 * 10^{-6}$
2.2	$1.742 * 10^{-6} \pm 1.072 * 10^{-7}$
2.3	$3.104 * 10^{-6} \pm 1.186 * 10^{-6}$

Таблица 4: Коэффициенты затухания

4 Подсчет погрешностей

Для подсчёта погрешности при прямых измерениях использована формула для среднего квадратического отклонения среднего арифметического значения результатов измерений:

$$\Delta S_{\text{изм}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{\text{ср}})^2}{n(n-1)}} \quad (8)$$

где:

- $S_{\text{изм}}$ – измеряемая величина,
- n – количество измерений,
- x_i – значение измеренной величины в каждом отдельном случае,
- $x_{\text{ср}}$ – среднее значение измеренной величины.

Неточность измерений может обуславливаться тем, что при написании программы для считывания данных с датчика не учитывалось время работы самой программы. Мы полагаем, что каждое значение, поступающее с датчика на компьютер приходит ровно раз в 1 или 5 мс.

Так же при расчете коэффициента затухания для некоторых моментов t_1 и t_2 γ выходила меньше 0. Это связано с "дроблением" графика скорости. (т.е. скорость в какой-то момент времени может оказаться больше, чем скорость в предыдущий момент времени, что противоречит тому факту, что маятник тормозит). В связи с этим подсчет коэффициента затухания происходил на меньшем кол-ве данных, что тоже могло сказаться на точности.

5 Заключение

Сняв серию измерений, были построены графики, описывающие зависимость периода колебания маятника и его скорость в нижней точке в зависимости от времени. При анализе полученных графиков стала очевидна справедливость утверждения о независимости периода колебаний от угла отклонения для малых колебаний.

По данным скорости были подсчитаны коэффициенты затухания. Наименьший коэф. затухания достигался при отклонении маятника на 6 градусов, наибольший на 9, вне зависимости от длины подвеса маятника.

Для каждой из конфигураций было рассчитано среднее значение ускорения свободного падения, которое достаточно сильно отличается от реального значения g .

6 Приложение с кодом

6.1 Программа для снятия данных с эксперимент. установки

```
import matplotlib.pyplot as plt
import time as tme
import serial

com = "COM7"
ser = serial.Serial(com, 9600)
fig = plt.figure(figsize=(20, 10))
ax1 = plt.subplot(2, 1, 1)
file_name = input()
t = []
v = []
ct = 0
line, = ax1.plot(t, v)
start_time = tme.time()
Trise = []
```

```

Period = []
datastr = []
signal_prev = 0
trise_prev = 0
tfall_prev = 0
Velocity = []

def update(frame):
    st1 = tme.time()
    global ct, signal_prev, trise_prev, tfall_prev
    try:
        ct = tme.time() - start_time
        if not ser == None:
            bytesToRead = ser.inWaiting()
            line_str = ser.read(bytesToRead).decode().strip()
            if not line_str == None:
                a = line_str.split("\r\n")
                signal = float(a[0])
                print(a)
                with open(file_name, "a") as fh:
                    fh.write(" ".join(a) + "\t")
                t.append(ct)
                v.append(signal)
                ax1.set_xlim(min(t) - 1, max(t) + 1)
                ax1.set_ylim(min(v) - 1, max(v) + 1)
                line.set_data(t, v)
    except Exception as e:
        print(f"error {e}")
    return line,

```

6.2 Построение графиков периода

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```

file_name = input()
data = open(file_name).readline()
nums = list(map(int, data.split()))
counter = 0
time = []
for i in range(len(nums)):
    time.append(counter * 1)
    counter += 1

t1 = 0
periods = []
time_of_periods = []
counter = 0
for i in range(len(nums) - 1):
    if nums[i] == 1 and nums[i + 1] == 0:
        counter += 1
        if counter == 1:
            t1 = time[i + 1]
        if counter == 3:
            periods.append(time[i + 1] - t1)
            t1 = time[i + 1]
            time_of_periods.append(time[i + 1])
            counter = 0

plt.scatter(time_of_periods, periods, color="orange")
plt.grid()
plt.suptitle("Зависимость T(t)")
plt.xlabel("t мс (время)")
plt.ylabel("T мс (период)")
plt.show()

```

6.3 Графики скорости

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```

file_name = input()
data = open(file_name).readline()
nums = list(map(int, data.split()))
counter = 0
time = []
for i in range(len(nums)):
    time.append(counter * 5)
    counter += 1
periods = []
time_of_periods = []
for i in range(len(nums) - 10000):
    if nums[i] == 1 and nums[i + 1] == 0:
        t1 = time[i + 1]
    if nums[i] == 0 and nums[i + 1] == 1:
        periods.append(time[i] - t1)
        time_of_periods.append(time[i])

# для каждой данных индивидуально
time_of_periods = time_of_periods[:757]
periods = periods[:757]
# для каждой данных индивидуально
good_periods = list(filter(lambda x: x > 50, periods))
obr_periods = []
for i in range(len(periods)):
    if periods[i] in good_periods:
        obr_periods.append(periods[i])
        pred = periods[i]
    else:
        obr_periods.append(pred)

speed = [70 / i for i in obr_periods]

```

```
plt.plot(time_of_periods, speed, color="#149C07")
plt.suptitle("Зависимость  $V(t)$ ")
plt.ylabel("V мм/мс (скорость в ниж. точке траектории)")
plt.xlabel("t мс (время)")
# для каждой данных индивидуально
plt.ylim(0, 0.5)
plt.grid()
plt.show()
```