Шевченко, Гулин

№ 6

$$f(x, u, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{x^{\lambda-1} e^{-x/u}}{u^{\lambda} \Gamma(\lambda)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Вариант 6:

$\lambda = 2 \Rightarrow \Gamma(\lambda) = 1$

$$f(x, u, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{x e^{-x/u}}{u^2 \cdot 1}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

1) $\cancel{L}$

$$L = \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)/u}}{u^{2n}}$$

, пусть $\prod_{i=1}^{n} x_i = p$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = S$

Необходимое условие

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{p e^{-S/u}(S - 2nu)}{u^{2n+2}} = 0 \Rightarrow S - 2nu = 0$$

$$\Rightarrow u = \frac{S}{2n} = \frac{\bar{x} \cdot \cancel{n}}{2 \cdot \cancel{n}} = \frac{\bar{x}}{2}$$

Достаточное условие

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} = \frac{p \cdot e^{-S/u}(-2S(2nu + u) + 2n(2n+1)u^2 + S^2)}{u^{2n+2}} < 0$$

Подставим найденный u

$$-2\bar{x}n\left(2n\frac{\bar{x}}{2} + \frac{\bar{x}}{2}\right) + 2n(2n+1)\left(\frac{\bar{x}}{2}\right)^2 + (\bar{x}n)^2 =$$

$$= -\cancel{2n^2\bar{x}^2} - \bar{x}^2 n + \cancel{n^2\bar{x}^2} + \frac{n\bar{x}^2}{2} + \cancel{\bar{x}^2 n^2} = \boxed{-\frac{\bar{x}^2 n}{2} < 0}$$

удовлетворяет

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{\bar{x}}{2} \text{ — ОМП для } u.}$$

2) $E_x = \lambda a = 2a$

$D_x = \lambda a^2 = 2a^2$

$E_x \frac{\overline{x}}{2} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} E x_i = \frac{1}{2\cancel{n}} 2a\cancel{n} = a$

Оценка не смещена

$R_2(\hat{a}, a) = D_x \left(\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}{2} \right) = \frac{1}{4n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} D_x x_i =$

$= \frac{1}{4n^2} \cdot n \cdot 2a^2 = \boxed{\frac{a^2}{2n}}$

3) $I_n(a) = n(I(a)) = n \cdot E\left(\frac{\partial \ln(f(a, x))}{\partial a} \right)^2 =$

$= n \cdot E\left(\frac{x - 2a}{a^2} \right)^2$

$E_x(x - 2a)^2 = D_x$

$I_n(a) = n \cdot D_x \cancel{x} \cdot \frac{1}{a^4} = n \cdot 2a^2 \cdot \frac{1}{a^4} = \boxed{\frac{2n}{a^2}}$

4) $R_2\left(\frac{\overline{x}}{2}, a \right) = \frac{1}{I_n(a)} = \frac{a^2}{2n}$ Сравним квадр. риск и инф. Фишера.

Неравенство Рао-Крамера становится равенством

=> можно сделать вывод, что оценка $\frac{\overline{x}}{2}$ имеет наименьший возможный квадратичный вид.