Соколов Арсений

Вариант 11

Задание 1

1. Символы 8-ти буквенного алфавита имеют частоты:
2, 5, 5, 8, 15, 17, 22, 26
Вычислить среднюю информационную емкость одного символа по формуле Шенона и по формуле Хартли, сконструировать коды Хаффмана и для них вычислить среднюю информационную емкость одного символа сообщения и избыточность кода.

Для вычисления средней информационной емкости одного символа будем использовать следующий код:

По формуле Хартли

```
import math


def hartley_function(frequencies):
    N = len(frequencies)
    H = math.log2(N)
    return H
```

По формуле Шеннона

```
def shannon_entropy(frequencies):
    N = sum(frequencies)
    probabilities = []
    entropy = 0

    for freq in frequencies:  # считаем вероятности
        probabilities.append(freq / N)

    for p in probabilities:  # считаем значение энтропии
        if p > 0:
            entropy += p * math.log2(p)

    return -entropy
```

Вводные частоты:

```
# частоты символов
frequencies = (2,  5,  5,  8,  15,  17,  22,  26)
```

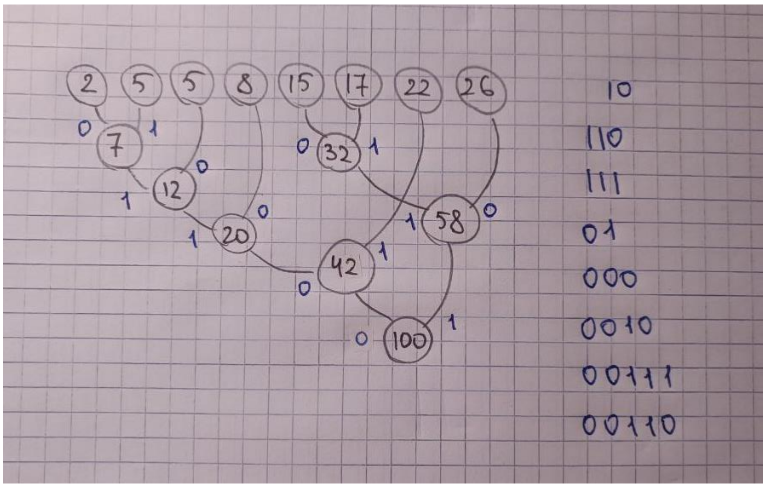
Вывод:

```
# Вывод результата
print("Средняя информационная емкость:")
print(f"По формуле Хартли:  {round(hartley_function(frequencies), 2)} бит")
print(f"По формуле Шеннона: {round(shannon_entropy(frequencies), 2)} бит")
```

Результат работы программы:

```
Средняя информационная емкость:
По формуле Хартли:  3.0 бит
По формуле Шеннона: 2.67 бит
```

Построение кодов Хаффмана:



Средняя информационная емкость одного символа сообщения:

$$2 \times 26 + 22 \times 2 + 15 \times 3 + 17 \times 3 + 8 \times 3 + 5 \times 4 + 5 \times 5 + 2 \times 5 = 271$$

Итого:

$$271 \div 100 = 2{,}71$$

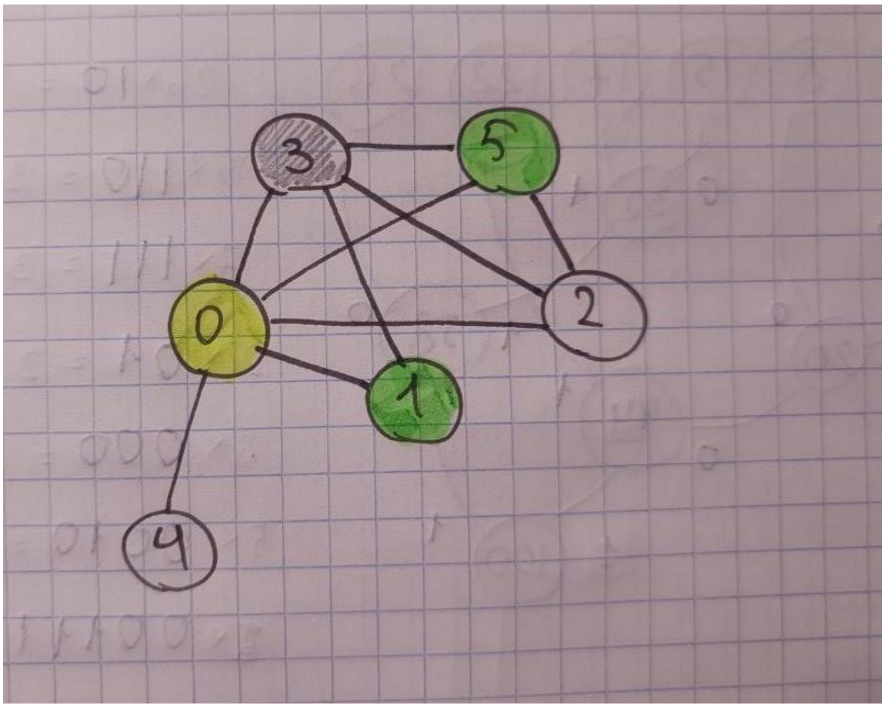
Избыточность кода:

$$2{,}71 - 2{,}67 = 0{,}04$$

Задание 2

2. Дан простой неориентированный граф. Найти хроматическое число графа и выяснить, является ли он Эйлеровым:
(3, 5); (2, 5); (0, 3); (0, 1); (1, 3); (0, 2); (0, 4); (2, 3); (0, 5)

Граф имеет вид:



Хроматическое число графа = 4 (минимальное число цветов, в которые можно раскрасить вершины графа так, чтобы концы любого ребра имели разные цвета)

Чтобы неориентированный граф, был **Эйлеровым**:

1) Степени вершин должны быть четными

2) Он должен быть связным

В нашем случае вершины 2, 4, 5 имеют нечетное количество ребер => граф не является Эйлеровым

Задание 3

3. Может ли для простого неориентированного графа вектор степеней вершин иметь вид: (5, 5, 4, 4, 3, 2, 1)

В простом неориентированном графе сумма степеней вершин равна четному числу (если точнее - удвоенному числу его рёбер). В нашем случае сумма степеней ребер равна:

5 + 5 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1 = 24

Таким образом, вектор (5, 5, 4, 4, 3, 2, 1) может представлять степени вершин простого неориентированного графа с 7 вершинами.

Задание 4

4. Двумя способами решить диофантовое
линейное уравнение:
307 x - 239 y = 4

Линейное диофантовое уравнение вида $ax + by = c$ имеет решения тогда и только тогда, когда c делится нацело на НОД(a,b)

В нашем случае НОД(*307*,*239*) = 1, так как 307 – простое число => имеем бесконечно много решений.

По алгоритму Евклида:

1)

$307 = 1 \cdot 239 + 68 \qquad 1 = 11 \cdot (307 - 239) - 3 \cdot 239 = 11 \cdot 307 - 14 \cdot 239$

$239 = 3 \cdot 68 + 35 \qquad 1 = 2 \cdot 68 - 3(239 - 3 \cdot 68) = 11 \cdot 68 - 3 \cdot 239$

$68 = 1 \cdot 35 + 33 \qquad 1 = 2(68 - 35) - 35 = 2 \cdot 68 - 3 \cdot 35$

$35 = 1 \cdot 33 + 2 \qquad 1 = 33 - 2(35 - 33) = 2 \cdot 33 - 35$

$33 = 16 \cdot 2 + 1 \qquad 1 = 33 - 16 \cdot 2$

$2 = 2 \cdot 1 + 0$

2) $1 = 11 \cdot 307 - 14 \cdot 239 \quad | \cdot 4$

$4 = 44 \cdot 307 - 56 \cdot 239$

$x_ч = 44 \quad y_ч = 56$ – частное решени

3) $x = x_ч + \left(\frac{b}{d}\right)k$, где $d = НОД(a,b)$, $k \in Z$

$y = y_ч - \left(\frac{a}{d}\right)k$

Общее решение: $x = 44 + 239k$, $y = 56 + 307k$

Метод относительно одного неизвестного.

Решаем это уравнение относительно того из неизвестных, при котором наименьший (по модулю) коэффициент

Код перебора фиксированных значений переменных:

```python
def solve_equation(a, b, c):
    if abs(a) < abs(b):
        y = 1
        while y < b:
            x = (c - b * y) / a
            if x.is_integer():
                return int(x), y
            y += 1
    else:
        x = 1
        while x < a:
            y = (c - a * x) / b
            if y.is_integer():
                return x, int(y)
            x += 1
```

```python
# Пример использования
a = 307
b = -239
c = 4
x, y = solve_equation(a, b, c)

print(f"x = {x}, y = {y}")
```

Результат работы программы:

```
x = 225, y = 289
```

Подставив в исходное уравнение, получим тождество. Таким образом, мы получили частное решение

Задание 5

5. С помощью символа Якоби выяснить, имеет ли решение квадратное сравнение:
x^2 = 403 (mod 989)

Символ Якоби (a/n) помогает определить, является ли a квадратичным вычетом по модулю n. Если символ Якоби равен 1, это означает, что a может быть квадратичным вычетом по модулю n, и квадратное сравнение может иметь решение.

1. Разложение n на простые множители

989 = 23*43

2. Использование мультипликативности символа Якоби:

$$\left(\frac{403}{989}\right) = \left(\frac{403}{23\cdot 43}\right) = \left(\frac{403}{23}\right)\cdot\left(\frac{403}{43}\right)$$

3. Вычисление символа Якоби отдельно:

$$403 \bmod 23 = 12$$

$$\left(\frac{12}{23}\right) = \left(\frac{4}{23}\right)\cdot\left(\frac{3}{23}\right)$$

$$\left(\frac{4}{23}\right) = \left(\frac{2^2}{23}\right) = 1$$

$$\left(\frac{3}{23}\right) = \left(\frac{23}{3}\right)\cdot(-1)^{\frac{3-1}{2}\cdot\frac{23-1}{2}}$$

$$\left(\frac{23}{3}\right) = 23 \bmod 3 = 2$$

$$\left(\frac{2}{3}\right) = (-1)^{\frac{3^2-1}{8}} = -1$$

$$\left(\frac{3}{23}\right) = -\left(\frac{2}{3}\right) = 1$$

$$\left(\frac{12}{23}\right) = 1\cdot 1 = 1$$

$$403 \bmod 43 = 16$$

$$\left(\frac{16}{43}\right) = \left(\frac{4^2}{43}\right) = 1$$

$$\left(\frac{403}{43}\right) = 1$$

4. Объединение результатов

$$\left(\frac{403}{989}\right) = \left(\frac{403}{23}\right) \cdot \left(\frac{403}{43}\right) = 1 \cdot 1 = 1$$

Так как символ Якоби равен 1, наше уравнение **имеет решение**.

Задание 6

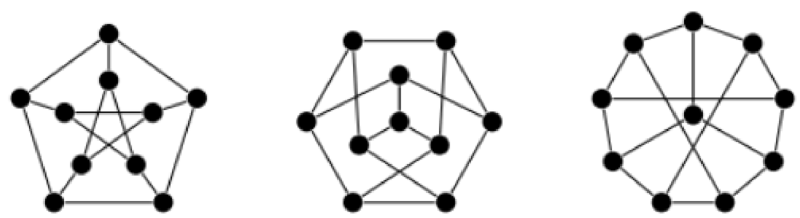
6. Дать описание или перечисление и привести примеры для темы:
Изоморфизм графов.

Изоморфизм графов – это отношение между двумя графами, при котором каждому узлу первого графа соответствует узел второго графа, а каждому ребру первого графа соответствует ребро второго графа, сохраняя при этом связи и структуру графа.

Простыми словами – два графа изоморфны, если это один и тот же граф, просто представленный по-другому.

Например:

Другой пример:



Задание 7

7. Дать определение и привести примеры для понятия:
Абелева группа.

Абелева группа – это математическая структура, состоящая из множества элементов и операции, удовлетворяющих определенным:

- *Закон замыкания*: для любых элементов a и b из G, $a + b$ также принадлежит G.
- *Ассоциативность*: для любых элементов a, b и c из G, $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- *Существование нейтрального элемента*: существует элемент 0 в G, такой что для любого элемента a из G, $a + 0 = 0 + a = a$.
- *Существование обратного элемента*: для каждого элемента a из G, существует элемент $-a$ в G, такой что $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
- *Коммутативность*: для любых элементов a и b из G, $a + b = b + a$.

Примеры:

1) Группа ненулевых вещественных чисел относительно умножения
2) Множество всех матриц одинакового размера с операцией сложения