Дискретная математика для программистов. (Весна 2024) (МО-2)
Лабораторная № 2. «Элементы комбинаторики»
ВАРИАНТ 9

1. Сколько различных слов из 3-х букв можно составить из букв слова КОМБИНАТОРИКА?

Слово из 3 букв:

* 3 уник. буквы
* 1 пара + 1 уник

$$N_3 = C_9^3 \cdot 3! + C_4^1 \cdot C_8^1 \frac{3!}{2!} = \frac{9! \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot (9-3)!} + \frac{\cancel{4!}^{3\cdot 4} \cdot \cancel{8!}^{7} \cdot \cancel{3!}}{1\,\cancel{(4-1)!}\,\cancel{(8-1)!} \cdot \cancel{2!}} =$$

$$= \frac{\cancel{9!}^{7\cdot 8\cdot 9}}{\cancel{6!}} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{1} = 504 + 84 = 588$$

Ответ: 588 слов

2. Найти решение рекуррентного соотношения
$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$, если $a_1 = 1, a_2 = -7$

Характеристическое уравнение:

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -7$$

1) $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3$$

Общее решение рекуррентного соотношения:

$$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$$

$$\begin{cases} a_1 = C_1 \cdot 2 + C_2 \cdot 3 = 1 \\ a_2 = C_1 \cdot 4 + C_2 \cdot 9 = -7 \end{cases}$$

$$C_1 = 5 \qquad C_2 = -3$$

Искомое решение:

$$a_n = 5 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n$$

Сотый элемент:

```
N = [0] * 101
N[1] = 1
N[2] = -7
for i in range(3, len(N)):
    N[i] = 5 * N[i-1] - 6 * N[i-2]

print("По рекуррентной формуле: ", N[100])
print("По полученной формуле:   ", 5 * (2 ** 100) - 3 * (3 ** 100))
```

Run test

```
C:\Users\User\AppData\Local\Programs\Python\Python310\python.exe "C:\Programming\
По рекуррентной формуле:  -1546132562196033986771130388155716810622806539123
По полученной формуле:    -1546132562196033986771130388155716810622806539123
```

3. Найти производящую функцию для полученной в задаче 2 числовой последовательности.

Рекуррентное соотношение: $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$

В нашем случае: $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$, откуда $p = -5,\ q = 6$

$a_1 = 1$, $a_n = 5 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n$ => $a_0 = 5 - 3 = 2$

$$F(t) = \frac{a_0 + (a_1 + pa_0)t}{1 + pt + qt^2} = \frac{2 + (1 + (-5) \cdot 2)t}{1 + (-5)t + 6t^2} = \frac{2 - 9t}{6t^2 - 5t + 1}$$

4. Доказать для чисел Фибоначчи следующее соотношение
$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$

I База индукции:

Для $n=1$ имеем $u_1^2 = u_1 \cdot u_2$ - верно $(1^2 = 1 \cdot 1)$

II Индукционный шаг:

1) Предположим, что соотношения вып. для $n = k$:

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots u_k^2 = u_k \cdot u_{k+1}$$

2) Докажем, что соотношение вып. для $n = k+1$

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots u_k^2 + u_{k+1}^2 = u_{k+1} \cdot u_{k+2}$$

3) Разделим обе части на u_{k+1}:

$$(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2 + u_{k+1}^2) / u_{k+1} = u_{k+1} \cdot u_{k+2} / u_{k+1}$$

$$\underbrace{(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2)}_{1) \Rightarrow u_k \cdot \cancel{u_{k+1}}} / \cancel{u_{k+1}} + u_{k+1} = u_{k+2}$$

$$u_k + u_{k+1} = u_{k+2}$$ - верно

Таким образом, мы получили, что утверждение верно для $\forall n \in N$ по индукции.

5. Вычислить $C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + \ldots + (n-1)\,C_n^n$

Бином Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$$

Из условия видим, что a = 1, b = x^2

$$(1+x^2)^n = C_n^0 1^n (x^2)^0 + C_n^1 1^{n-1} (x^2)^1 + \ldots + C_n^n 1^0 (x^2)^n$$

$$(1+x^2)^n = C_n^0 + C_n^1 x^2 + \ldots + C_n^n x^{2n} \quad \Big| \cdot x$$

$$x(1+x^2)^n = C_n^0 x + C_n^1 x^3 + \ldots + C_n^n x^{2n+1} \quad \Big| \cdot \frac{d}{dx}$$

$$(1+x^2)^n + 2x^2(1+x^2)^{n-1} n = C_n^0 + 3C_n^1 x^2 + 5C_n^2 + \ldots + C_n^n (2n+1) x^{2n}$$

] $x = 1$, тогда $\quad 2^n + 2^n n = C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + \ldots + (2n+1) C_n^n$

Ответ: $2^n(1+n)$

6. Сколько различных кратчайших путей ведут из левого нижнего угла в правый верхний угол прямоугольника 16 на 13 клеток? Сколько будет путей, если два вертикальных участка не могут идти подряд?

1) $C_{16+13}^{16} = C_{29}^{16} = C_{29}^{13} = \frac{29!}{13!\,(29-13)!} = \frac{29!}{13! \cdot 16!} = 67863915$

2) $C_{16+1}^{13} = C_{17}^{13} = \frac{17!}{13! \cdot (17-13)!} = \frac{17!}{13! \cdot 4!} = 2380$