

Лабораторная работа № 5
Дискретная математика для программистов

Циклические коды

Алексенко Анна 2МО

Вариант 95

*Дискретная математика для программистов.
Лабораторная работа № 5. 01.03.2024. (ПМ-2)*
Предметом исследования являются *циклические коды*.

Цели работы:

изучить основные принципы помехоустойчивого кодирования; правила построения циклических кодов; обнаруживающие и исправляющие свойства циклических кодов.

Индивидуальное задание, вариант 95

Пусть $n = 31$ – общее число элементов, $m = 26$ – число информационных элементов, $k = 5$ – число избыточных элементов, $d_{min} = 3$. Порождающий многочлен, символическая запись – 45; двоичная запись – 100101.

1. Найдите все кодовые слова заданного кода и постройте таблицу с разрешенными кодовыми комбинациями и с минимальными расстояниями Хемминга для разрешенных комбинаций, в отчете привести фрагменты таблиц и порождающую матрицу кода.
2. Определите характеристики заданного кода в режиме исправления ошибок:
 - а. Определите кратность гарантированно исправляемых кодом ошибок.
 - б. Найдите число различных векторов ошибок, которые код может исправить.
 - в. Для одного из векторов ошибок, исправляемых кодом, найдите соответствующий этому вектору синдром. Найдите несколько из возможных векторов ошибок, при декодировании которых получается тот же синдром, и, следовательно, происходит ошибочное декодирование.
3. Определите возможности заданного кода в режиме обнаружения ошибок:
 - а. Определите кратность σ гарантированно обнаруживаемых кодом ошибок.
 - б. Найдите вектора ошибок, которые не могут быть обнаружены заданным кодом.

Пусть $n = 31$ – общее число элементов, $m = 26$ – число информационных элементов, $k = 5$ – число избыточных элементов, $d_{min} = 3$

Порождающий многочлен: символическая запись – 45; двоичная запись – 100101

Согласно параметрам заданного кода, возможно закодировать двоичные числа от нуля до $2^m = 2^{26} = 67\,108\,864$. Кодовые слова будем находить умножением векторов-строк размера $(1, m) = (1, 26)$ на порождающую матрицу размера $(m, n) = (26, 31)$

[illegible]

Все кодовые слова не были найдены в связи с высокой вычислительной сложностью задачи. Фрагменты таблиц представлены ниже

output2

output1

×

+

ФайлИзменитьПросмотр

Разрешённые кодовые комбинации:

Информационное слово	Кодовое слово
000000000000000000000000	00000000000000000000000000000000
0000000000000000000000001	0000000000000000000000000100101
00000000000000000000000010	00000000000000000000000001001010
00000000000000000000000011	00000000000000000000000001101111
000000000000000000000000100	000000000000000000000000010010100
000000000000000000000000101	000000000000000000000000010110001
000000000000000000000000110	000000000000000000000000011011110
000000000000000000000000111	00000000000000000000000001111011
0000000000000000000000001000	0000000000000000000000000100101000
0000000000000000000000001001	0000000000000000000000000100001101
0000000000000000000000001010	0000000000000000000000000101100010
0000000000000000000000001011	00000000000000000000000001011001010
0000000000000000000000001001	0000000000000000000000000100111100101111
0000000000000000000000001010	000000000000000000000000010011111010100100
0000000000000000000000001011	000000000000000000000000010011111010000001
0000000000000000000000001010	000000000000000000000000010011111011101110
0000000000000000000000001011	000000000000000000000000010011111011001011
0000000000000000000000001000	000000000000000000000000010011111100011000
0000000000000000000000001001	000000000000000000000000010011111100111101
0000000000000000000000001010	000000000000000000000000010011111101010010
0000000000000000000000001011	00000000000000000000000001001111110110111
0000000000000000000000001000	00000000000000000000000001001111110001100
0000000000000000000000001001	00000000000000000000000001001111110101001
0000000000000000000000001010	000000000000000000000000010011111110001100
0000000000000000000000001011	000000000000000000000000010011111110101001
0000000000000000000000001000	000000000000000000000000010011111111000110
0000000000000000000000001001	00000000000000000000000001001111111100011

Таблица кодовых расстояний:

[0	3	3	6	3	4	6	7	3	4	4	5	6	5	7	6	3	6	4	7	4	5	5	6
	6	7	5	6	7	6	6	5	3	4	6	7	4	3	7	6	4	7	5	8	5	6	6	7
	6	7	7	8	5	4	6	5	7	10	6	9	6	7	5	6	3	6	4	7	6	7	7	8
	4	5	3	4	7	6	6	5	4	7	7	10	5	6	8	9	5	6	6	7	6	5	7	6
	6	7	7	8	7	6	8	7	5	8	4	7	6	7	5	6	7	8	10	11	6	5	9	8
	6	9	7	10	5	6	6	7	3	6	6	9	4	5	7	8	6	7	7	8	7	6	8	7
	4	7	5	8	3	4	4	5	7	8	6	7	6	5	5	4	4	5	7	8	7	6	10	9
	5	8	6	9	8	9	9	10	5	6	6	7	6	5	7	6	6	9	5	8	7	8	6	7
	6	9	7	10	7	8	8	9	7	8	6	7	8	7	7	6	5	8	8	11	4	5	7	8
	6	7	7	8	5	4	6	5	7	8	8	9	10	9	11	10	6	9	5	8	9	10	8	9
	6	7	9	10	7	6	10	9	5	8	6	9	6	7	7	8	3	6	6	9	6	7	9	10
	4	5	5	6	7	6	8	7	6	9	7	10	7	8	8	9	7	8	6	7	8	7	7	6
	4	5	7	8	5	4	8	7	3	6	4	7	4	5	5	6	7	8	8	9	6	5	7	6
	6	9	5	8	5	6	4	5	4	7	5	8	7	8	8	9	7	8	6	7	10	9	9	8
	5	8	8	11	6	7	9	10	8	9	9	10	9	8	10	9	5	6	6	7	6	5	7	6
	6	9	5	8	7	8	6	7	6	7	9	10	5	4	8	7	7	10	8	11	6	7	7	8
	6	9	9	12	7	8	10	11	7	8	8	9	8	7	9	8	7	10	8	11	6	7	7	8
	8	9	7	8	7	6	6	5	5	6	8	9	8	7	11	10	4	7	5	8	7	8	8	9
	6	7	7	8	7	6	8	7	5	8	4	7	6	7	5	6	7	10	8	11	8	9	9	10
10	11	9	10	11	10	10	9	6	9	9	12	5	6	8	9	9	10	10	11	8	7	9	8	8
	6	7	7	8	9	8	10	9	7	10	6	9	10	11	9	10	5	6	8	9	6	5	9	8
	6	9	7	10	7	8	8	9	3	6	6	9	6	7	9	10	6	7	7	8	9	8	10	9
	4	7	5	8	5	6	6	7	7	8	6	7	8	7	7	6	6	7	9	10	7	6	10	9
	7	10	8	11	8	9	9	10	7	8	8	9	6	5	7	6	8	11	7	10	7	8	6	7
	4	7	5	8	3	4	8	7	5	6	4	5	8	7	7	6	3	6	6	7	4	5	7	6

output2

Файл Изменить Просмотр

```

6 7 5 6 9 8 8 8 7 10 9 9 8 11 8 10 7 9 10 6 7 10 9 7 6
6 7 7 8 7 6 8 7 7 6 6 5 8 5 7 4 9 10 8 9 8 7 7 6
10 9 7 6 9 6 6 3 9 8 8 7 10 7 9 6 8 9 5 6 9 8 6 5
10 9 11 10 9 6 10 7 9 10 8 9 8 7 7 6 8 9 7 8 11 10 10 9
9 8 6 5 12 9 9 6 9 10 10 11 10 9 11 10 10 9 9 8 11 8 10 7
6 5 7 6 7 4 8 5 7 8 6 7 8 7 7 6 9 8 8 7 8 5 7 4
10 11 7 8 9 8 6 5 5 6 6 7 8 7 9 8 8 7 7 6 11 8 10 7
8 9 7 8 9 8 8 7 11 10 8 7 12 9 9 6 8 7 7 6 11 8 10 7
7 8 4 5 10 9 7 6 7 6 8 7 8 5 9 6 6 7 5 6 7 6 6 5
9 10 8 9 10 9 9 8 10 9 7 6 11 8 8 5 8 9 9 10 7 6 8 7
9 8 8 7 8 5 7 4 5 4 6 5 8 5 9 6 6 7 5 6 9 8 8 7
6 5 5 4 7 4 6 3 7 8 4 5 8 7 5 4 6 7 7 8 7 6 8 7
9 8 8 7 10 7 9 6 7 8 6 7 6 5 5 4 10 9 7 6 9 6 6 3
8 7 7 6 9 6 8 5 9 10 6 7 10 9 7 6 9 8 10 9 8 5 9 6
10 11 9 10 9 8 8 7 5 6 4 5 8 7 7 6 8 7 5 4 11 8 8 5
6 7 7 8 7 6 8 7 9 8 8 7 10 7 9 6 7 6 8 7 8 5 9 6
6 7 5 6 7 6 6 5 10 9 9 8 9 6 8 5 9 10 6 7 8 7 5 4
4 5 5 6 7 6 8 7 5 4 4 3 8 5 7 4 7 8 6 7 8 7 7 6
8 7 5 4 9 6 6 3 7 6 6 5 10 7 9 6 8 9 5 6 11 10 8 7
6 5 7 6 7 4 8 5 7 8 6 7 8 7 7 6 6 7 5 6 7 6 6 5
9 8 6 5 10 7 7 4 5 6 6 7 4 3 5 4 8 7 7 6 7 4 6 3
6 5 7 6 9 6 10 7 5 6 4 5 8 7 7 6 7 6 6 5 8 5 7 4
6 7 3 4 7 6 4 3 5 6 6 7 6 5 7 6 6 5 5 4 7 4 6 3
6 7 5 6 5 4 4 3 7 6 4 3 6 3 3 0]

```

Минимальное кодовое расстояние:
3

2. Определите характеристики заданного кода в режиме исправления ошибок:

2.a. Определите кратность гарантированно исправляемых кодом ошибок

Утверждение. Код исправляет в сообщении t ошибок, если кодовое расстояние d_{min} не меньше, чем $2t + 1$, то есть $d_{min} \geq 2t + 1$

$d_{min} = 3 \geq 2t + 1 \Rightarrow t \leq 1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow$ код гарантированно исправляет одну ошибку

2.b. Найдите число различных векторов ошибок, которые код может исправить

Утверждение. Общее число различных векторов ошибок, которые может исправить циклический код, равно $2^{n-m} = 2^k$

$2^5 = 32$ – число различных векторов ошибок, которые может исправить данный код

2.с. Для одного из векторов ошибок, исправляемых кодом, найдите соответствующий этому вектору синдром. Найдите несколько из возможных векторов ошибок, при декодировании которых получается тот же синдром, и, следовательно, происходит ошибочное декодирование

$e \in \{0, 1\}^n$ – вектор ошибки:

$$e_i = \begin{cases} 1, & \text{в } i - \text{ом бите произошла ошибка} \\ 0, & \text{ошибки нет} \end{cases}$$

Пусть вектор ошибки $e = 00000000000100000000000000000000$, то есть ошибка произошла в 21-ом бите

Рассмотрим следующее кодовое слово:

$$u_{30}(x) = 0000000000011100011101101011110$$

После передачи по каналу связи оно примет вид:

$$u'_{30}(x) = 00000000000111100011101101011110$$

Найдём синдром ошибки

$$I. \quad u'_{30}(x) = q(x)g_5(x) \oplus s(x)$$

Найдём $u'_{30}(x) : g_5(x)$

$x^{20} + x^{19} + x^{18} + x^{17} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2$ $+ x$	$x^5 + x^2 + 1$
$x^{20} + x^{17} + x^{15}$	$x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{11} +$
$x^{19} + x^{18} + x^{15} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x$	$+ x^9 + x^8 + x^7 + x^6 +$
$x^{19} + x^{16} + x^{14}$	$+ x^5 + x^4 + x^3 + x$
$x^{18} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2$ $+ x$	
$x^{18} + x^{15} + x^{13}$	
$x^{16} + x^{14} + x^{12} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x$	

$$\begin{array}{r}
x^{16} + x^{13} + x^{11} \\
\hline
x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^9 + x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x \\
x^{14} + x^{11} + x^9 \\
\hline
x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x \\
x^{13} + x^{10} + x^8 \\
\hline
x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x \\
x^{12} + x^9 + x^7 \\
\hline
x^{11} + x^{10} + x^9 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x \\
x^{11} + x^8 + x^6 \\
\hline
x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + x \\
x^{10} + x^7 + x^5 \\
\hline
x^9 + x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x \\
x^9 + x^6 + x^4 \\
\hline
x^8 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x \\
x^8 + x^5 + x^3 \\
\hline
x^6 + x^2 + x \\
x^6 + x^3 + x \\
\hline
x^3 + x^2
\end{array}$$

II. $e(x) = q(x)g_5(x) \oplus s(x)$

Найдём $e(x) : g_5(x)$

$$\begin{array}{r|l}
x^{20} & x^5 + x^2 + 1 \\
\hline
x^{20} + x^{17} + x^{15} & x^{15} + x^{12} + x^{10} + x^9 + \\
x^{17} + x^{15} & + x^6 + x^5 + x^4 + \\
x^{17} + x^{14} + x^{12} & + x^3 + x^2 \\
\hline
x^{15} + x^{14} + x^{12} & \\
x^{15} + x^{12} + x^{10} & \\
\hline
x^{14} + x^{10} & \\
x^{14} + x^{11} + x^9 & \\
\hline
\end{array}$$

	$x^{11} + x^{10} + x^9$
	$x^{11} + x^8 + x^6$
	$x^{10} + x^9 + x^8 + x^6$
	$x^{10} + x^7 + x^5$
	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5$
	$x^9 + x^6 + x^4$
	$x^8 + x^7 + x^5 + x^4$
	$x^8 + x^5 + x^3$
	$x^7 + x^4 + x^3$
	$x^7 + x^4 + x^2$
	$x^3 + x^2$

Таким образом, $s(x) = 1100$

3. Определите возможности заданного кода в режиме обнаружения ошибок:

3.a. Определите кратность σ гарантированно обнаруживаемых кодом ошибок

Утверждение. Код обнаруживает в сообщении t ошибок, если кодовое расстояние d_{min} не меньше, чем $t + 1$, то есть $d_{min} \geq t + 1$

$d_{min} = 3 \geq t + 1 \Rightarrow t \leq 2 \Rightarrow t = 2$ – код гарантированно обнаруживает две ошибки

3.b. Найдите векторы ошибок, которые не могут быть обнаружены заданным кодом

Так как слова любого линейного кода обладают свойством замкнутости по отношению к операции сложения, то есть сумма двух и более кодовых слов тоже является кодовым словом, то векторы ошибок, совпадающие с кодовыми словами, не могут быть обнаружены декодером циклического кода