Разложение в сумму

Задача 1

Над озером взлетело 20 уток. Каждый из 10 охотников стреляет в утку по своему выбору.

- Каково ожидаемое количество уцелевших уток, если охотники стреляют без промаха?
- Как изменится ответ, если вероятность попадания равна 0.7?
- Каким будет ожидаемое число охотников, попавших в цель?

Задача 2

По 10 коробкам раскладывают 7 карандашей. Каково среднее количество пустых коробок? Какова дисперсия числа пустых коробок?

Задача 3

k различных космонавтов собираются высадиться на m различных планет. Каждый космонавт выбирает себе планету независимо и равновероятно. Пусть X — количество планет, на которые никто не высадился. Найдите $E(X)$.

Задача 4

В ряд стоят n гномов. Издали на них смотрит дракон. Гномы разной высоты. Сколько в среднем гномов видит дракон? Какова дисперсия числа увиденных гномов?

Задача 5

У Маши 30 разных пар туфель. И она говорит, сто мало! Пёс Шарик утащил без разбору на левые и правые 17 туфель. Какова вероятность того, что у маши останется ровно 13 полных пар? Пусть случайная величина X — число полных пар у Маши. Найдите $E(X)$ и $Var(X)$.

Кто должен сделать первый шаг?

Задача 6

Саша и Таня по очереди подбрасывают кубик. Посуду будет мыть тот, кто первым выбросит шестёрку. Саша бросает первым. Какова вероятность того, что Тане удастся отдохнуть за новым номером "Cosmo"?

Задача 7

Саша и Таня (на самом деле Таня) решили, что будут рожать нового ребёнка до тех пор, пока в их семье не появится мальчик. Пусть X — число детей в семье Саши и Тани. Найдите $E(X)$. Отыщите $Var(X)$.

Задача 8

Ира — принцесса. Чтобы всем доказать этот неоспоримый факт, она лопает киндеры. При этом, Ира лопает киндеры не просто так. Она хочет собрать набор для прицесс из 30 игрушек. Предположим, что все игрушки равновероятны. Пусть случайная величина X — количество шоколадок, которое нужно слопать Ире, чтобы собрать всю коллекцию игрушек. Найдите ожидаемое количество шоколадок, которое надо скушать, $E(X)$, а также дисперсию этого числа, $Var(X)$.

Задача 9

Четыре человека играют в игру «белая ворона платит». Они одновременно подкидывают монетки. Если три монетки выпали одной стороной, а одна по-другому, то «белая ворона» оплачивает всей четвёрке ужин в ресторане. Если « беля ворона» не определилась, то монетки подбрасывают снова. Сколько в среднем нужно подбрасываний, чтобы определить «белую ворону»?

Задача 10

ЛСП постоянно подбрасывает монетку и орёт «орёл - решка».

- Пусть ЛСП успокаивается только в тот момент, когда появляется комбинация $OPOP$. Сколько в среднем раз ему нужно подбросить монетку, чтобы получить такую комбинацию?
- Пусть ЛСП успокаивается только в тот момент, когда появляется комбинация $POPP$. Сколько в среднем раз ему нужно подбросить монетку, чтобы получить такую комбинацию?
- Пусть теперь ЛСП успокаивается, когда видит одну из этих двух комбинаций. Какова вероятность того, что $POPP$ появится раньше, чем $OPOP$?

Задача 11

Найдём математическое ожидание геометрического распределения ещё разок!

Испытания Бернулли проводятся до первого успеха, вероятность успеха в отдельном испытании равна p.

- Чему равно ожидаемое количество испытаний?
- Чему равно ожидаемое количество неудач?
- Чему равна дисперсия числа неудач?

Задача 12

На «Летящем сквозь ночь» появилась амёба. Учёный Д'Бранин уверен, что с помощью этой амёбы таинственная расса волкринов передают какое-то сообщение со своего корабля. Остальная команда уверена, что это диверсия, и волкрины собираются убить всех на корабле с помощью амёбного вируса.

Беда в том, что амёба каждую минуту с вероятностью $\frac{2}{4}$ делится на две, с вероятностью $\frac{1}{4}$ умирает и с вероятностью $\frac{1}{4}$ остаётся собой же. В следующую минуту каждая из новоиспечённых амёб ведёт себя аналогично.

Пусть случайная величина X — это количество минут, прошедшее до смерти всей популяции амёб.

Найдите $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, а также $P(X = \infty)$.

Задача 13

Илье Муромцу предстоит дорога к камню. И от камня начинаются ещё три дороги. Каждая из тех дорог снова оканчивается камнем. И от каждого камня начинаются ещё три дороги. И каждые три дороги кончаются камнем.... И так далее до бесконечности. На каждой дороге можно встретить живущего на ней трёхголового Змея Горыныча с вероятностью (хм, вы не поверите!) одна третья. Какова вероятность того, что у Ильи Муромца существует возможность пройти свой бесконечный жизненный путь, так ни разу и не встретив Змея Горыныча?

Сумма случайностей неслучайна

Задача 14

Кубик подбрасывается n раз. Величина X_1 — число выпадений 1, а X_6 — число выпадений 6. Найдите $\mathrm{Corr}(X_1, X_6)$.

Задача 15

Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимо одинаково распределены и принимают только положительные значения. Каждая случайная величина имеет дисперсию 9 и математическое ожидание 5. Пусть

$$Z = \frac{X_1 + \ldots + X_m}{X_1 + \ldots + X_m + X_{m+1} + \ldots + X_n}.$$

Найдите $E(Z)$.

Задача 16

Предположим, что рост 100 второкурсников распределен нормально со средним 175 см и стандартным отклонением 8 см.

Если сделать выборку в 5 человек и посчитать по ней средний рост $\bar{x}$, то какими будут $E(\bar{x})$ и $\mathrm{Var}(\bar{x})$, если выборки делаются

- с возвращением, то есть наблюдения $x_1, \ldots, x_5$ производятся независимо;
- без возвращения, то есть наблюдения зависимы.

Беспорядки

Задача 17