

Р для тервера и матстата

Эконом РАНХиГС

25 апреля 2019 г.

Разложение в сумму

Задача 1

Над озером взлетело 20 уток. Каждый из 10 охотников стреляет в утку по своему выбору.

- Каково ожидаемое количество уцелевших уток, если охотники стреляют без промаха?
- Как изменится ответ, если вероятность попадания равна 0.7?
- Каким будет ожидаемое число охотников, попавших в цель?

Задача 2

По 10 коробкам раскладывают 7 карандашей. Каково среднее количество пустых коробок? Какова дисперсия числа пустых коробок?

Задача 3 (в домашке)

k различных космонавтов собираются высадиться на m различных планет. Каждый космонавт выбирает себе планету независимо и равновероятно. Пусть X — количество планет, на которые никто не высадился. Найдите $E(X)$.

Задача 4 (в домашке)

В ряд стоят n гномов. Издали на них смотрит дракон. Гномы разной высоты. Сколько в среднем гномов видит дракон? Какова дисперсия числа увиденных гномов?

Задача 5 (в домашке)

У Маши 30 разных пар туфель. И она говорит, сто мало! Пёс Шарик утащил без разбору на левые и правые 17 туфель. Какова вероятность того, что у Маши останется ровно 13 полных пар? Пусть случайная величина X — число полных пар у Маши. Найдите $E(X)$ и $\text{Var}(X)$.

Кто должен сделать первый шаг?

Задача 6

Саша и Таня по очереди подбрасывают кубик. Посуду будет мыть тот, кто первым выбросит шестёрку. Саша бросает первым. Какова вероятность того, что Тане удастся отдохнуть за новым номером "Cosmo"?

Задача 7

Саша и Таня (на самом деле Таня) решили, что будут рожать нового ребёнка до тех пор, пока в их семье не появится мальчик. Пусть X — число детей в семье Саши и Тани. Найдите $E(X)$. Отыщите $\text{Var}(X)$.

Задача 8

Ира — принцесса. Чтобы всем доказать этот неоспоримый факт, она лопаёт киндеры. При этом, Ира лопаёт киндеры не просто так. Она хочет собрать набор для принцесс из 30 игрушек. Предположим, что все игрушки равновероятны. Пусть случайная величина X — количество шоколадок, которое нужно слопать Ире, чтобы собрать всю коллекцию игрушек. Найдите ожидаемое количество шоколадок, которое надо скушать, $E(X)$, а также дисперсию этого числа, $\text{Var}(X)$.

Задача 9 (в домашке)

ЛСП постоянно подбрасывает монетку и орёт «орёл - решка».

- Когда выпадает ОРОР, ЛСП успокаивается и ныряет в ванну. Сколько в среднем раз ему нужно подбросить монетку, чтобы нырнуть?
- Когда выпадает комбинация РОРР, ЛСП просто теряется в мире цифрового глянца. Сколько в среднем раз ему нужно подбросить монетку, чтобы потеряться?
- Пусть теперь ЛСП ЛСП хочет получить любую из этих двух комбинаций. Какова вероятность того, что ЛСП потеряется, а не нырнёт, то есть что РОРР появится раньше, чем ОРОР?

Задача 10 (если успеем)

Найдём математическое ожидание геометрического распределения ещё разок!

Испытания Бернулли проводятся до первого успеха, вероятность успеха в отдельном испытании равна p .

- Чему равно ожидаемое количество испытаний?
- Чему равно ожидаемое количество неудач?
- Чему равна дисперсия числа неудач?

Задача 11 (если успеем)

На «Летающем сквозь ночь» появилась амёба. Учёный Д'Бранин уверен, что с помощью этой амёбы таинственная раса волкринов передают какое-то сообщение со своего корабля. Остальная

команда уверена, что это диверсия, и волкрины собираются убить всех на корабле с помощью амёбного вируса.

Беда в том, что амёба каждую минуту с вероятностью $\frac{2}{4}$ делится на две, с вероятностью $\frac{1}{4}$ умирает и с вероятностью $\frac{1}{4}$ остаётся собой же. В следующую минуту каждая из новоиспечённых амёб ведёт себя аналогично.

Пусть случайная величина X — это количество минут, прошедшее до смерти всей популяции амёб.

Найдите $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, а также $P(X = \infty)$.

Задача 12 (в домашке)

Илье Муромцу предстоит дорога к камню. И от камня начинаются ещё три дороги. Каждая из тех дорог снова оканчивается камнем. И от каждого камня начинаются ещё три дороги. И каждые три дороги кончаются камнем.... И так далее до бесконечности. На каждой дороге можно встретить живущего на ней трёхголового Змея Горыныча с вероятностью (хм, вы не поверите!) одна третья. Какова вероятность того, что у Ильи Муромца существует возможность пройти свой бесконечный жизненный путь, так ни разу и не встретив Змея Горыныча?

Задача 13 (в домашке)

Удав Анатолий любит французские багеты. Длина французского багета равна 1 метру. За один загллот Удав Анатолий заглатывает кусок случайной длины равномерно распределённый на отрезке $[0; 1]$. Для того, чтобы съесть весь багет удаву потребуется случайное количество N заглотов.

Найдите $E(N)$ и $Var(N)$. Как поменяются ответы, если багет имеет длину 2 метра?

Сумма случайностей неслучайна

Задача 14

Кубик подбрасывается n раз. Величина X_1 — число выпадений 1, а X_6 — число выпадений 6. Найдите $Corr(X_1, X_6)$.

Задача 15

Случайные величины X_1, \dots, X_n независимо одинаково распределены и принимают только положительные значения. Каждая случайная величина имеет дисперсию 9 и математическое ожидание 5. Пусть

$$Z = \frac{X_1 + \dots + X_m}{X_1 + \dots + X_m + X_{m+1} + \dots + X_n}.$$

Найдите $E(Z)$.

Задача 16 (в домашке)

Предположим, что рост 100 второкурсников распределен нормально со средним 175 см и стандартным отклонением 8 см.

Если сделать выборку в 5 человек и посчитать по ней средний рост \bar{x} , то какими будут $E(\bar{x})$ и $\text{Var}(\bar{x})$, если выборки делаются

- с возвращением, то есть наблюдения x_1, \dots, x_5 производятся независимо;
- без возвращения, то есть наблюдения зависимы.

Беспорядки

Задача 17

Вова обеспокоен. На его плечи взвалилась организация похода в бар. Идут туда целых 100 человек. Вова довольно давно думал над рассадкой и придумал идеальную. Этот вечер должен стать незабываемым. Для каждого есть свой именной подписанный стул. Правда Вова забыл всех об этом предупредить. Экономовская орава вваливается в бар. Все садятся на стулья случайно.

1. Какова вероятность того, что все сядут на свои места?
2. Какова вероятность того, что ни один человек не сядет на своё место?
3. Какова вероятность того, что только один человек сядет на своё место? Только двое сядут на своё место?