

Yet Another Math for DS Course

Ульянкин Ппилиф *



1 Листочек 1: теория множеств

Задача 1.1. В отеле бесконечное счётное количество номеров. Все номера заняты туристами.

- а) Приехал еще один турист. Как разместить всех постояльцев, чтобы всем хватило места?
- б) Приехало еще счётное количество туристов. Как заново разместить всех постояльцев, чтобы всем хватило места?

Задача 1.2. Пусть A — список всех подмножеств натуральных чисел, а S — множество бесконечных последовательностей из 0 и 1. Для примера: $\{5, 6, 178\} \in A$, $01010101010101 \dots \in S$. Сравните мощности множеств A и S , мощности множеств \mathbb{N} и S .

Задача 1.3. Аргументированно ответьте на следующие вопросы:

- а) Верно ли, что если из бесконечного множества удалить счётное, то оставшаяся часть будет равномощна исходному множеству?
- б) Правда ли, что множество иррациональных чисел счётно?
- в) Сравните мощности множеств A и B , если $A = \mathbb{Q}$ — рациональные числа, $B = \mathbb{Q}^2$ — пары рациональных чисел.
- г) Декартово произведение конечного количества счётных множеств является счётным множеством. Да или нет?
- д) Правда ли, что множество всех последовательностей натуральных чисел — множество мощности континуум? А множество вещественных числовых последовательностей — множество мощности континуум?

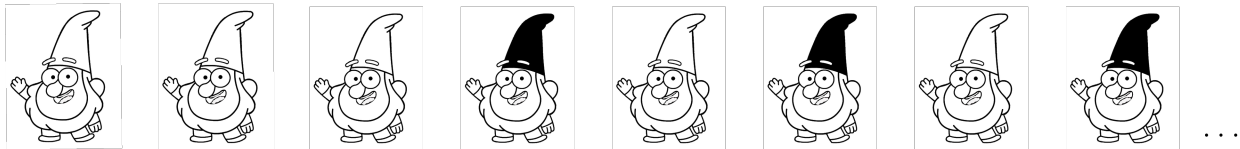
Задача 1.4. Назовем две бесконечных вправо последовательности из нулей и единиц «похожими», если они отличаются на конечное число членов. Например, $10111111 \dots$ и $00011111 \dots$ похожа, а $10101010 \dots$ и $01010101 \dots$ не похожи.

- а) Какова мощность множества последовательностей похожих на последовательность из одних нулей?

*https://github.com/FUlyankin/yet_another_math_for_DS

- б) Это отношение «похожести» разбивает все последовательности на классы похожих последовательностей. Какова мощность множества классов похожих последовательностей?

Задача 1.5. Злобный Дракон поймал бесконечное счётное количество гномов. Расставил их в шеренгу так, что первый видит всех остальных, второй — всех, начиная с третьего гнома, третий — всех, начиная с четвертого и т.д. Далее Дракон надевает каждому гному либо чёрный, либо белый колпак.



Гномы одновременно пытаются угадать цвет своего колпака. Гномы, не угадавшие цвет своего колпака, съедаются Драконом. Есть ли у гномов¹ стратегия, позволяющая им иметь конечные боевые потери при встрече со Злобным Драконом?

Hints: Воспользуйтесь результатом из предыдущей задачи!

Задача 1.6. Злобный Дракон поймал всего лишь n гномов. Расставил их в шеренгу так, что первый видит всех остальных, второй — всех, начиная с третьего гнома, третий — всех, начиная с четвертого и т.д. Далее Дракон надевает каждому гному либо чёрный, либо белый колпак. Гномы одновременно пытаются угадать цвет своего колпака. Гномы, не угадавшие цвет своего колпака, съедаются Драконом. Есть ли у гномов какая-то оптимальная стратегия, которая позволит противостоять дракону? Сколько гномов погибнет в лучшем и в худшем исходах?

Задача 1.7. Постройте взаимно-однозначное соответствие между множествами $(0; 1) \times (0; 1)$ и \mathbb{R}^2 . С помощью построенного соответствия докажите, что множества $[0; 1] \times [0; 1]$ и \mathbb{R}^2 равномощны.

Задача 1.8. Поезд едет по целочисленным значениям числовой прямой в каком-то направлении с неизвестной скоростью (целое число точек в минуту). Вам неизвестны позиция и скорость поезда.

Вы хотите ограбить поезд. В вашей шайке есть неограниченное количество бандитов. Вы можете каждую минуту посылать в какую-либо целочисленную точку числовой прямой бандита. Если поезд в данный момент находится в этой точке, бандит его ограбит. Время не ограничено. Придумайте стратегию, которая поможет гарантированно ограбить поезд.

¹Подробнее о гномах, изображенных на картинке можно узнать, например, по ссылке <http://gravityfalls.ru/>