Yet Another Math for DS Course

Ульянкин Ппилиф [*]

1 Листочек 1: теория множеств

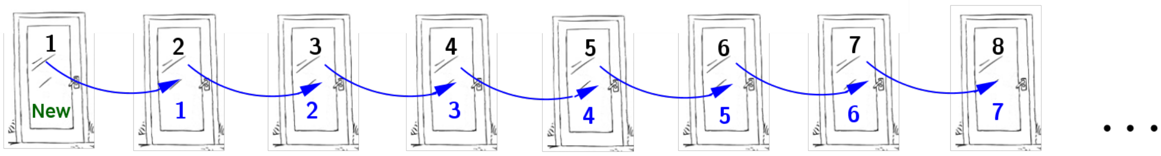
Задача 1.1. В отеле бесконечное счётное количество номеров. Все номера заняты туристами.

а) Приехал еще один турист. Как разместить всех постояльцев, чтобы всем хватило места?
б) Приехало еще счётное количество туристов. Как заново разместить всех постояльцев, чтобы всем хватило места?

Решение:

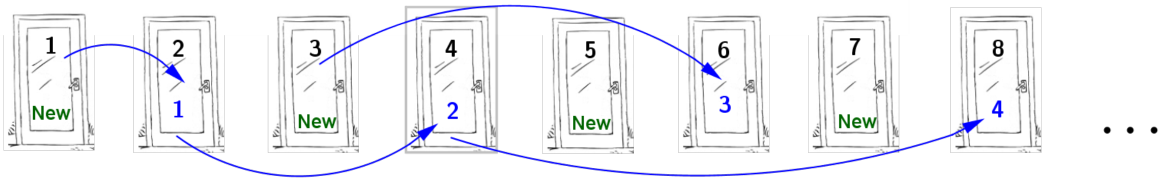
К сожалению, придется доставить жильцам отеля определенный дискомфорт и пересилить их в другие номера.

1. Переселим туриста из 1 номера во 2 номер, туриста из 2 номера в 3 номер, туриста из 3 номера в 4 номер и так далее. В итоге освободится место для еще одного туриста.



2. Переселим туриста из 1 номера во 2 номер, из 2 номера в 4 номер, из 3 номера в 6 номер, из 4 номера в 8 номер, из 5 номера в 10 номер и так далее. В итоге освободится счётное количество номеров для дополнительного счётного количества туристов.

[*] https://github.com/FUlyankin/yet_another_math_for_DS

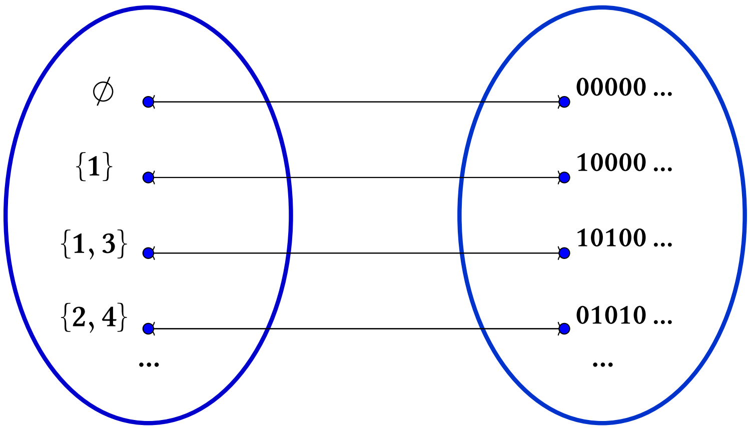


При решении задачи мы неявно оперировали тем фактом, что если из счётного множества удалить конечное или счётное множество, то исходное множество останется счётным. Если в счётное множество добавить конечное или счётное множество, то новое множество снова будет счётным. Чтобы доказать это достаточно построить взаимно-однозначные соответствия по аналогии с тем, как мы сделали это с жильцами.

Задача 1.2. Пусть A — список всех подмножеств натуральных чисел, а S — множество бесконечных последовательностей из 0 и 1. Для примера: $\{5, 6, 178\} \in A$, $0101010101010101\ldots \in S$. Сравните мощности множеств A и S, мощности множеств $\mathbb{N}$ и S.

Решение:

Сопоставим каждой последовательности из нулей и единиц элемент списка A. Если в данный элемент списка входит натуральное число n, то будем ставить в последовательности на месте n единицу.



Таким образом каждой последовательности будет соответствовать единственный элемент списка. Множества A и S равномощны.

Так как мощность списка из подмножеств множества больше мощности множества и $|A| = |S|$, то $|\mathbb{N}| < |S|$.

Задача 1.3. Аргументированно ответьте на следующие вопросы:

а) Верно ли, что если из бесконечного множества удалить счётное, то оставшаяся часть будет равномощна исходному множеству?
б) Правда ли, что множество иррациональных чисел счётно?
в) Сравните мощности множеств A и B, если $A = \mathbb{Q}$ — рациональные числа, $B = \mathbb{Q}^2$ — пары рациональных чисел.
г) Декартово произведение конечного количества счётных множеств является счётным множеством. Да или нет?
д) Правда ли, что множество всех последовательностей натуральных чисел — множество мощности континуум? А множество вещественных числовых последовательностей — множество мощности континуум?

Решение:

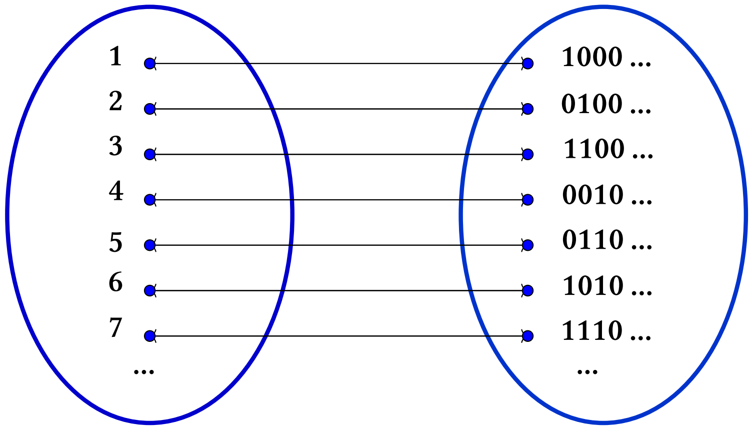
а) Да, это верно! Пусть M — бесконечное множество. Удалим из него счётные множества B и A. Тогда с одной стороны $N = (M \square A) \square B \Rightarrow (M \square A) = N \cap B$. С другой стороны $N = M \square (B \cup A) \Rightarrow M = N \cap (A \cap B)$. Установим между множествами $M \square A$ и M взаимно-однозначное соответствие.
Если $x \in N$, то во множестве $M \square A$ он будет соответствовать самому себе. Если же $x \in A \cap B$, то учитывая что множества A и B счётные, то их объединение тоже является счётным множеством и можно установить взаимно-однозначное соответствие между $A \cap B$ и B. Таким образом, каждому элементу из $M \square A$ соответствует единственный элемент из M.
б) Нет! Это враньё! Множество иррациональных чисел можно получить, выбросив из множества действительных чисел все рациональные. Полученное множество равномощно исходному.
в) $|A| = |B|$
г) Да. Все элементы этого множества можно пересчитать змейкой.
д) Да, это чистая правда в обоих случаях. Множество всех последовательностей натуральных чисел — это ни что иное, как декартово произведение счётного числа счётных множеств. Это означает, что множество последовательностей натуральных чисел имеет мощность континуум. Можно сопоставить каждой последовательности бесконечную последовательность из нулей и единиц.
Множество всех вещественных числовых последовательностей совпадает с декартовым произведением $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$

Задача 1.4. Назовем две бесконечных вправо последовательности из нулей и единиц «похожими», если они отличаются на конечное число членов. Например, $101111111\ldots$ и $000111111\ldots$ похожа, а $101010101\ldots$ и $010101010\ldots$ не похожи.

а) Какова мощность множества последовательностей похожих на последовательность из одних нулей?
б) Это отношение «похожести» разбивает все последовательности на классы похожих последовательностей. Какова мощность множества классов похожих последовательностей?

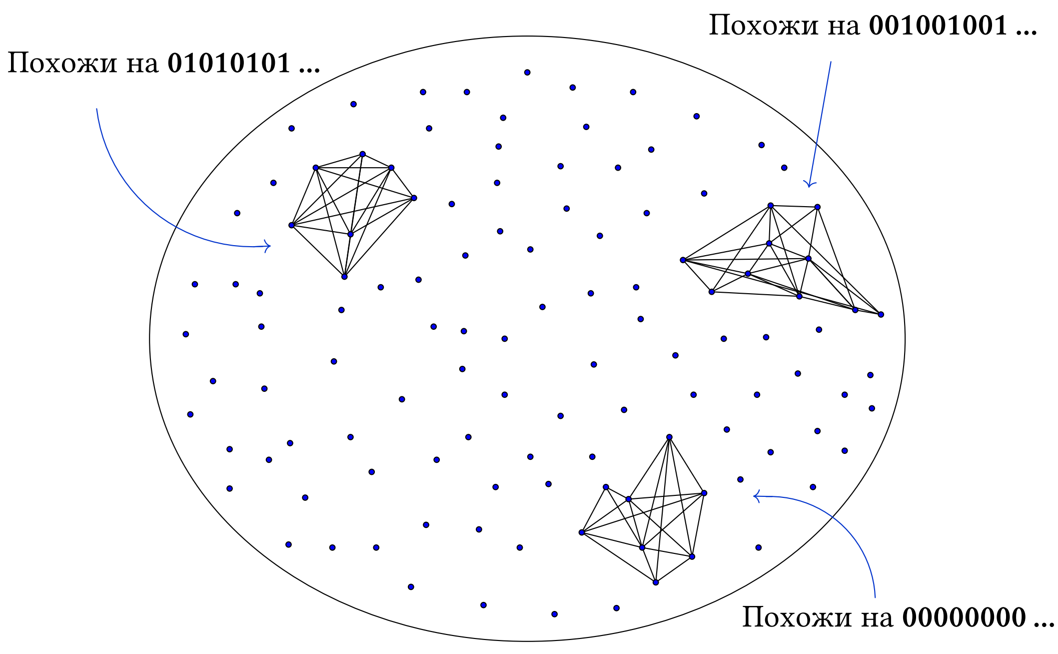
Решение:

Множество последовательностей «похожих» на последовательность из одних нулей будет либо счетным, либо континуальным. Среди всех этих последовательностей есть такие, которые отличаются от нулевой только первой цифрой. Есть такие, которые отличаются от нулевой первой или второй цифрой, есть такие, которые отличаются первой или второй или третьей цифрой и так далее. Все такие отличия можно занумеровать.



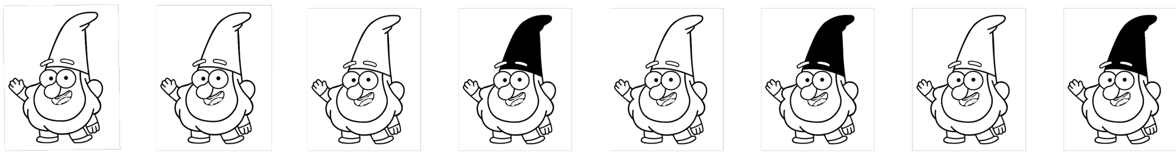
Таким образом последовательностей, отличающихся от нулевой счётное количество.

Гораздо более интересным вопросом является вопрос о количестве таких счетных классов.



Допустим, что классов счётное количество. Тогда объединение всех классов должно дать все возможные последовательности из нулей и единиц. Счётное объединение счётного количества множеств — счётное множество, а множество последовательностей из нулей и единиц, в свою очередь — континуальное множество, значит множество классов не может быть счётным и является континуальным.

Задача 1.5. Злобный Дракон поймал бесконечное счётное количество гномов. Расставил их в шеренгу так, что первый видят всех остальных, второй — всех, начиная с третьего гнома, третий — всех, начиная с четвертого и т.д. Далее Дракон надевает каждому гному либо чёрный, либо белый колпак.



...

Гномы одновременно пытаются угадать цвет своего колпака. Гномы, не угадавшие цвет своего колпака, съедаются Драконом. Есть ли у гномов[1] стратегия, позволяющая им иметь конечные боевые потери при встрече со Злобным Драконом?

Hints: Воспользуйтесь результатом из предыдущей задачи!

Решение:

Пусть чёрные колпаки — единица, а белые колпаки — ноль. В этом случае дракон, надевая на гномов колпаки создает бесконечную последовательность из нулей и единиц. Созданная последовательность будет относится к какому-то определенному классу «похожих» — отличающихся в счетном числе точек последовательностей.

Гномам, чтобы потерять конечное число своих собратьев необходимо заранее из каждого класса выбрать образцовую последовательность. Глядя на колпаки впереди стоящих гномов можно идентифицировать класс, которому принадлежит фактическая последовательность колпаков.

Первый гном, поняв к какому классу относится последовательность, назовет первый элемент образцовой последовательности. Второй гном назовет второй и так далее. Так как все последовательности одного класса различаются в конечном числе точек, то погибнет конечное число гномов.

[1]Подробнее о гномах, изображенных на картинке можно узнать, например, по ссылке http://gravityfalls.ru/

Задача 1.6. Злобный Дракон поймал всего лишь n гномов. Расставил их в шеренгу так, что первый видят всех остальных, второй — всех, начиная с третьего гнома, третий — всех, начиная с четвертого и т.д. Далее Дракон надевает каждому гному либо чёрный, либо белый колпак. Гномы одновременно пытаются угадать цвет своего колпака. Гномы, не угадавшие цвет своего колпака, съедаются Драконом. Есть ли у гномов какая-то оптимальная стратегия, которая позволит противостоять дракону? Сколько гномов погибнет в лучшем и в худшем исходах?

Решение:

Пусть чёрные колпаки — единица, а белые колпаки — ноль. В этом случае дракон, надевая на гномов колпаки создает конечную последовательность из нулей и единиц. Сумма всех чисел в последовательности будет либо чётной либо нечётной.

Первый гном видит всех остальных. Если количество белых колпаков перед ним чётное, он называет белый цвет. Если количество нечетноё, чёрный. Если первый гном назвал белый цвет, а второй гном видит перед собой чётное количество белых колпаков, то он делает вывод, что на нём одет чёрный колпак. Остальные гномы внимательно анализируют что именно скажет их товарищ, стоящий за их спиной и выживают.

При этом, если первый гном угадает цвет своего колпака, то никто не погибнет.

Задача 1.7. Постройте взаимно-однозначное соответствие между множествами $(0;1) \times (0;1)$ и $\mathbb{R}^2$. С помощью построенного соответствия докажите, что множества $[0;1] \times [0;1]$ и $\mathbb{R}^2$ равномощны.

Решение:

Для того, чтобы каждому элементу из множества $(0;1) \times (0;1)$ поставить единственным образом в соответствие элемент из $\mathbb{R}^2$ нужно найти такое отображение, что:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty \text{ и } \lim_{x\to 1} f(x) = +\infty.$$

Аналогичное отображение нужно подобрать для переменной y. Первое, что приходит в голову — начать экспериментировать с экспонентами и тангенсами, но это плохая идея.

Попробуем не заморачиваться. Чтобы $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ достаточно взять функцию $-\dfrac{1}{x^2}$. Чтобы получить $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$ достаточно взять функцию $\dfrac{1}{(x-1)^2}$. Тогда для функции $-\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$ получаем:

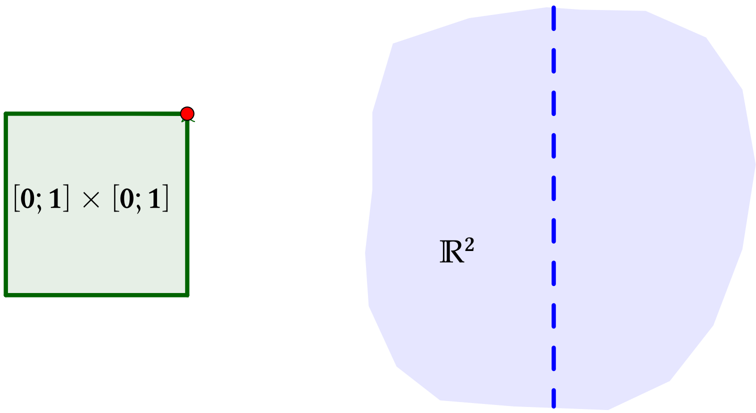
$$\lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) = -\infty - 1 = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) = -1 + \infty = +\infty,$$

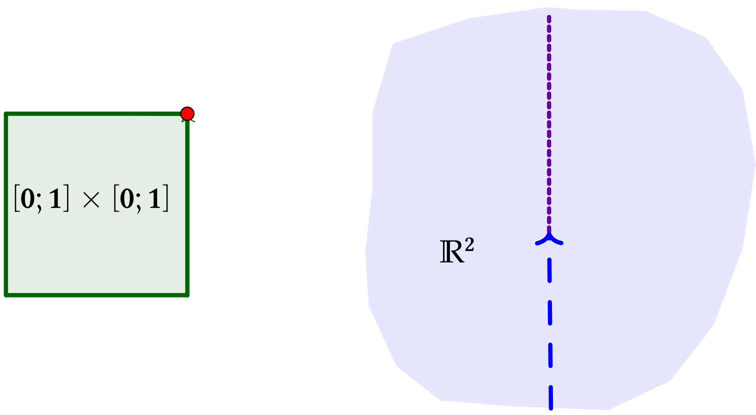
.

Таким образом по правилу $(x, y) \leftrightarrow \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}, -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{(y-1)^2}\right)$ мы каждому элементу из $(0;1) \times (0;1)$ поставим в соответствие элемент из $\mathbb{R}^2$.

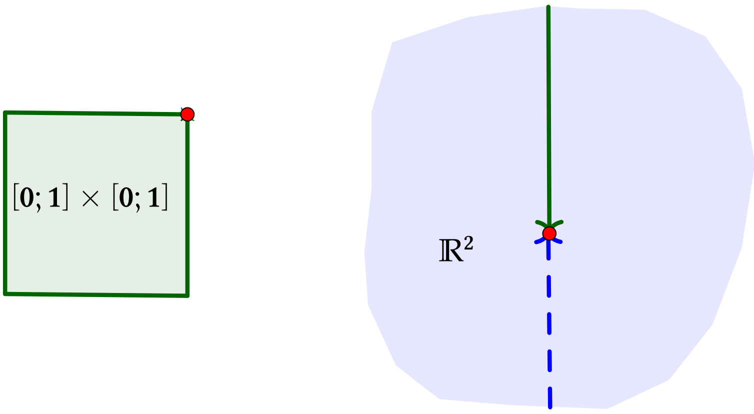
Для того, чтобы доказать, что множества $[0;1] \times [0;1]$ и $\mathbb{R}^2$ равномощны, нам нужно построить взаимно-однозначное соответствие между этими двумя множествами.



В предыдущем пункте задачи мы нашли отображение, которое переводит все точки квадрата в точки плоскости, но при этом мы не нашли ни одной точки, которой в соответствие можно было бы поставить границу квадрата. Возьмем на плоскости произвольную прямую. Прямая равномощна полупрямой с выколотым началом. То есть между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие.



Любой интервал равномощен полупрямой. Сопоставим между собой границу квадрата и незанятую полупрямую с включённым началом.



Проделав всё это мы сопоставили плоскости квадрат с его границей. Заметим, что, используя это отображение, можно доказать равномощность $[0;1]$ и $\mathbb{R}$.

Задача 1.8. Поезд едет по целочисленным значениям числовой прямой в каком-то направлении с неизвестной скоростью (целое число точек в минуту). Вам неизвестны позиция и скорость поезда.

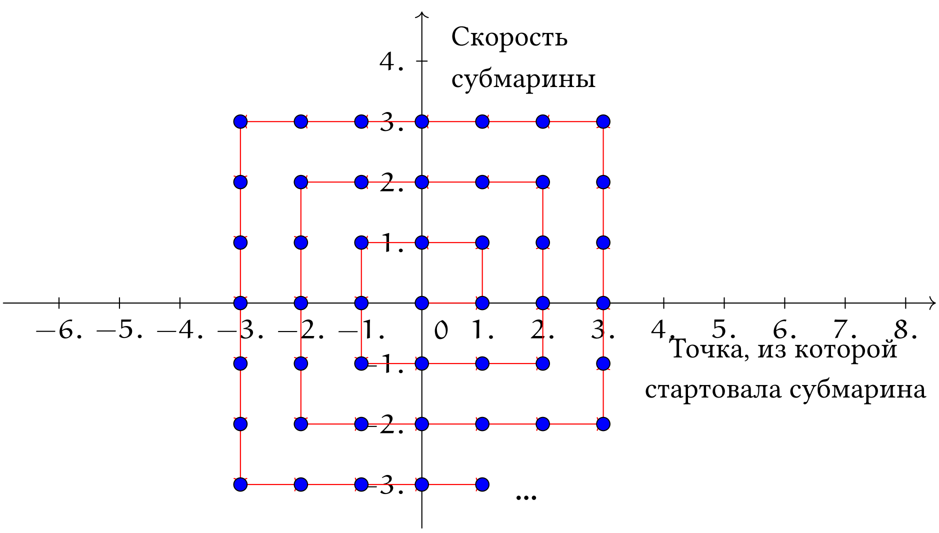
Вы хотите ограбить поезд. В вашей шайке есть неограниченное количество бандитов. Вы можете каждую минуту посылать в какую-либо целочесленную точку числовой прямой бандита. Если поезд в данный момент находится в этой точке, бандит его ограбит. Время не ограничено. Придумайте стретегию, которая поможет гарантированно ограбить поезд.

Решение:

Поезд начинает свое движение из неизвестной нам точки и движется с постоянной скоростью. Нанесем все возможные комбинации (начало движения, скорость) на плоскость.

Тогда если поезд движется со скоростью 2 и начинает движение из точки -4 мы можем ограбить его несколькими способами. Послав бандита в точку -4 в нулевую минуту, в точку -2 в первую минуту, в точку 0 во вторую минуту и так далее.

Аналогично для любой другой точки старта поезда. Перечислим все возможные комбинации (старт, скорость) и нанесём их на плоскость.



Все возможные положения поезда представляют собой объединение счётного количества счётных множеств. Количество элементов этого объединения мы можем пересчитать змейкой.