Комбинаторика

Мы сказали, что $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

$\Rightarrow$ надо научиться

считать число эл.

① Правило умн. и слож.

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$B = \{b_1, \dots, b_m\}$

хотим взять из A или из B

$$m + n \quad \text{способов}$$

хотим взять 2 объекта сначала
из A, потом из B $m \cdot n$ способ

<u>Упражнение</u>

| A 777 УЕ | 777 |

$12 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12$

$n = 12^3 \cdot 10^3 - 12^3$

$m = 10^3 - 1$

$$\underline{\mathbb{P}(AУЕ)} = \frac{m}{n}$$

Сколько $\exists$ пятизначных чисел?

$$\underline{\;\;}\;\underline{\;\;}\;\underline{\;\;}\;\underline{\;\;}\;\underline{\;\;}$$
$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^4$$

Упр.-е

A - алф. 33 буквы

B - цифри 10

C - англ. 26

$$\underline{\;\;} \; (33 + 10 + 26)$$

② Принцип Дирихле

Если у нас есть n ящиков и n+1 кролик, тогда хотябы в одном ящике будет 2 кролика

Упражнение

12 носков
6 б. 6 ч.

3 штуки

Ящик 101 пуговица одного из 11 цветов

Доказать:

найдется либо 11 пуговиц одного цвета

либо 11 пуговиц разного

Предположим, что нет 11 пуг. &

и нет 11 разн.

10 штук на 1 краску   100

③ Размещения

A_n^m → без повторений $\quad n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots (n-(m-1))$

$\overline{A}_n^m$ → с повторением $\quad n \cdot n \cdot n \cdot n \ldots \cdot n = n^m$

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$

хотим отобрать m штук и важен

порядок отбора

Упражнение

16 команд

способов распр. места с призом

$$A_{16}^3 = 16 \cdot 15 \cdot 14$$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

Сколько $\exists$
3-х значных чисел
из этих цифр

$\overline{A}_4^3 = 4^3$

⊔ ⊔ ⊔

④ Перестановки

→ без повторений $\quad A_n^n = P(n) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

→ с повторениями $\quad P(n_1, \ldots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$

■ ■ △ △ ■ ○ △ ■ *

$9!$ $\qquad \dfrac{8!}{4! \, 3! \, 1! \, 1!}$

Упражнение

40 книг

$A_{40}^{40} = 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Упражнение

кебабы — 3
лдицы — 4
пахлава — 2

$\dfrac{9!}{3! \, 4! \, 2!}$

→ без повторений
$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(m-1)) \cdot \overset{n-m+1}{(n-m)!}}{m! \cdot (n-m)!} =$$

$$= \frac{n!}{m! \, (n-m)!}$$

→ с повторениями $\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$

m штук, но порядок неважен

Упражнение

2 друга

1-ый   9 монет
2-ой   7 штук

хотят обмен   2 монеты ⟷ 2 марки
сколько есть способов?   2

$$C_9^2 \cdot C_7^2 = \frac{9!}{7! \, 2!} \cdot \frac{7!}{2! \, 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{4} = 12 \cdot 63$$

Упражнение

магазин 4 вида ичромных

7 шту купить

→ лукум
→ пахлава
→ баурсак
→ кюнчфе

Закодируем покупки:

1 1 0 1 1 1 0 0 1 1
1 1 1 0 1 1 0 1 0 1

$$\frac{10!}{7! \ 3!} = C_{10}^7 = C_{4+7-1}^7 =$$

$$= \bar{C}_4^7$$

из n объекто взять 4
тс повторениями 7

$m + (n-1)$ 10

$$\frac{[m + n - 1]!}{m! \cdot (n-1)!} = C_{m+n-1}^m$$

Упражнение

Остановка   10 чел.
Поезд   10 вагонов

$$\mathbb{P}(1 \text{ вагон пустой}) = \frac{m}{n}$$

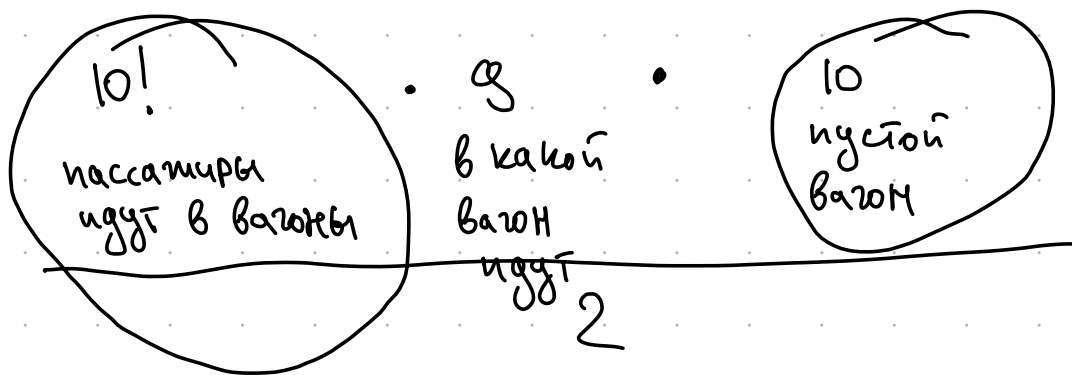$$n = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \ldots 10 = 10^{10} = \bar{A}_{10}^{10}$$

всего способов
посадить людей
в вагоны

$$m = 10 \cdot 9 \cdot 8! \cdot C_{10}^2$$

1 1 1 1 1 1 1 1 2 | 0
                 1
$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{8!}$ ↑
                 C_{10}^2 C_{10}^2

$$C_{10}^2 \cdot 8! \cdot 10 \cdot 9$$

$10! \cdot \mathcal{G} \cdot 10$

пассажиры
идут в вагоны

в какой
вагон
идут

2

пустой
вагон

5 львов
4 тигра } → арена

нельзя чтобы 2
тигра шло рядом

| Т | Л | Т | Л | Т | Л | Т | Л | Л

$\boxed{4! \cdot 5} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 9$

Т Л · Л Т Л · Л Т Л Т

$\boxed{\begin{array}{cc} Т & Т \\ Т & Т \end{array}}$

$5! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

$P(5) \cdot A_6^4$

Упражнение

12 книг
5 из них никакие 2 не были рядом

▮▯▮▯ ...

7 нулей | сколько способов расставить их?
5 единиц | чтобы 1 не стояли рядом ?

$$C_6^5 + C_6^5$$

$$\overset{1}{\text{ш}} \ \overset{}{\text{ш}} \ \overset{4}{\text{ши}} \ \overset{}{\text{ш}} \ \overset{6}{\text{ш}} \ \text{ш} \qquad \overset{11}{\underline{}}$$

. ○ . ○ . ○ . ○ . ○ . ○ . ○ .

$$C_8^5$$

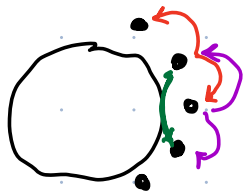## Упражнение

круглый стол   Артур   рыцари   12 человек

5 штук

9 человек

Антолий

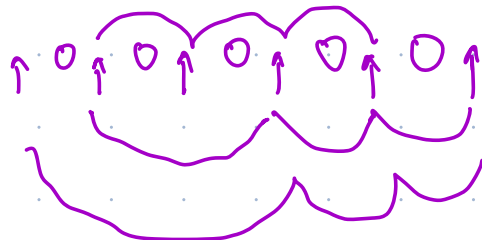### Анатолий

$$15 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = C_6^4$$

~~Анатолий~~   11 человек

C

$$C_7^5 = \frac{7!}{5!\,2!} = 21$$

$$15 + 21 = 36$$

<u>**Упражнение**</u>

Домино   4 игрока

28 костей   ∀ игрока 7 костяшек

сколько есть способов это сделать?

$$C_{28}^7 \cdot C_{21}^7 \cdot C_{14}^7 \cdot C_7^7 = \frac{28!}{7!\,21!} \cdot \frac{21!}{14!\,7!} \cdot \frac{14!}{7!\,7!} =$$

$$= \frac{28!}{(7!)^4}$$

$$\overbrace{\square\square\square\ldots\square\square}^{28!}$$

$$\underset{7!}{1}\bigm|\underset{7!}{2}\bigm|\underset{7!}{3}\bigm|\underset{7!}{4}$$

Упражнение

2 человека   собрали   10 ромашек
                             15 васильков
                             14 незабудок

а) сколько способов
    разделить
       цветы?

$11 \cdot 16 \cdot 15$

б) Каждый должен получить ≥ 3 цветков

$2 + 6 + 12$

$$\left. \begin{array}{ll} PP & PP \quad 3 \\[20pt] PB & PB \quad 3 \end{array} \right\} \times 2$$

$11 \cdot 16 \cdot 15 - (2 + 6 + 12)$