

# ПРИКЛАДНАЯ СТАТИСТИКА



## Листочек 1: теория множеств

Ппилиф Ульяновкин



**Задача 1** В отеле бесконечное счётное количество номеров. Все номера заняты туристами.

- а) Приехал еще один турист. Как разместить всех постояльцев, чтобы всем хватило места?
- б) Приехало еще счётное количество туристов. Как заново разместить всех постояльцев, чтобы всем хватило места?

**Задача 2** Пусть  $A$  — список всех подмножеств натуральных чисел, а  $S$  — множество бесконечных последовательностей из 0 и 1. Для примера:  $\{5, 6, 178\} \in A$ ,  $01010101010101 \dots \in S$ . Сравните мощности множеств  $A$  и  $S$ , мощности множеств  $\mathbb{N}$  и  $S$ .

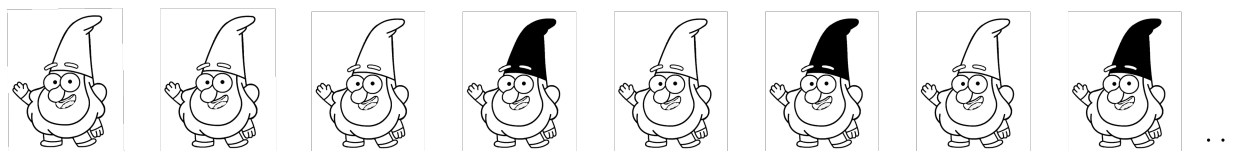
**Задача 3** Аргументированно ответьте на следующие вопросы:

- а) Верно ли, что если из бесконечного множества удалить счётное, то оставшаяся часть будет равномощна исходному множеству?
- б) Правда ли, что множество иррациональных чисел счётно?
- в) Сравните мощности множеств  $A$  и  $B$ , если  $A = \mathbb{Q}$  — рациональные числа,  $B = \mathbb{Q}^2$  — пары рациональных чисел.
- г) Декартово произведение конечного количества счётных множеств является счётным множеством. Да или нет?
- д) Правда ли, что множество всех последовательностей натуральных чисел — множество мощности континуум? А множество вещественных числовых последовательностей — множество мощности континуум?

**Задача 4** Назовем две бесконечных вправо последовательности из нулей и единиц «похожими», если они отличаются на конечное число членов. Например,  $101111111 \dots$  и  $000111111 \dots$  похожа, а  $101010101 \dots$  и  $010101010 \dots$  не похожи.

- Какова мощность множества последовательностей похожих на последовательность из одних нулей?
- Это отношение «похожести» разбивает все последовательности на классы похожих последовательностей. Какова мощность множества классов похожих последовательностей?

**Задача 5** Злобный Дракон поймал бесконечное счётное количество гномов. Расставил их в шеренгу так, что первый видит всех остальных, второй — всех, начиная с третьего гнома, третий — всех, начиная с четвертого и т.д. Далее Дракон надевает каждому гному либо чёрный, либо белый колпак.



Гномы одновременно пытаются угадать цвет своего колпака. Гномы, не угадавшие цвет своего колпака, съедаются Драконом. Есть ли у гномов<sup>1</sup> стратегия, позволяющая им иметь конечные боевые потери при встрече со Злобным Драконом?

**Hints:** Воспользуйтесь результатом из предыдущей задачи!

**Задача 6** Злобный Дракон поймал всего лишь  $n$  гномов. Расставил их в шеренгу так, что первый видит всех остальных, второй — всех, начиная с третьего гнома, третий — всех, начиная с четвертого и т.д. Далее Дракон надевает каждому гному либо чёрный, либо белый колпак. Гномы одновременно пытаются угадать цвет своего колпака. Гномы, не угадавшие цвет своего колпака, съедаются Драконом. Есть ли у гномов какая-то оптимальная стратегия, которая позволит противостоять дракону? Сколько гномов погибнет в лучшем и в худшем исходах?

**Задача 7** Постройте взаимно-однозначное соответствие между множествами  $(0; 1) \times (0; 1)$  и  $\mathbb{R}^2$ . С помощью построенного соответствия докажите, что множества  $[0; 1] \times [0; 1]$  и  $\mathbb{R}^2$  равномощны.

<sup>1</sup>Подробнее о гномах, изображенных на картинке можно узнать, например, по ссылке <http://gravityfalls.ru/>