Номер 1

Условие:

Создать таблицу значений функции f(x), разбив отрезок [0; 6] на n равных частей точками x_i (i = $\overline{0,\ n}$). Для полученной таблично заданной в равноотстоящих узлах функции f(x), выполнить следующие действия при n = 6 и n = 10:

а) построить интерполяционный многочлен Лагранжа L_n(x) ,
проиллюстрировать графически (изобразить точки (x_i, f(x_i)) и графики функций f(x) и L_n(x) на одном чертеже);

б) создать таблицу конечных разностей функции f(x) по точкам (x_i, f(x_i)), i = $\overline{0,\ n}$;

в) построить второй интерполяционный многочлен Ньютона P_n(x),
проиллюстрировать графически;

г) построить интерполяционный многочлен Ньютона Np$_n$(x) с помощью функции **InterpolatingPolynomial** пакета **Mathematica**,
проиллюстрировать графически;

д) вычислить значения функции f(x) и всех построенных
интерполяционных многочленов L_n(x) , P_n(x) и Np$_n$(x) в точке
x = 2,4316;

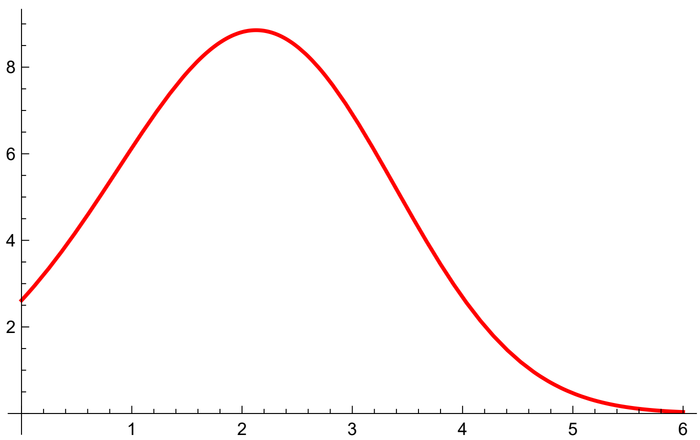
е) построить график погрешности интерполирования многочленом Ньютона R_n(x) = |f(x) - Np$_n$(x)| на отрезке [0; 6], найти максимум погрешности R_n(x) на отрезке [0, 6] с помощью функции **FindMaximum** пакета **Mathematica**;

ж) исследовать зависимость погрешности интерполирования R_n(x) от
числа узлов интерполяции (степени многочлена n).

Функция f(x):

```
In[•]:= f[x_] = (x + √(π + 1)) * Exp[-4 / 39 * √(x^5) + 5 * x / 9 + 1 / 4];
                                  показательная функция

a = 0; b = 6; n1 = 6; n2 = 10; x0 = 2.4316; h1 = (b - a) / n1; h2 = (b - a) / n2;
graph = Plot[f[x], {x, a, b}, PlotStyle → {Red, Thick}]
        график функции         стиль графика  кр···  жирный
Out[•]=
```



Создадим таблицы значений функции для равноотстоящих узлов на промежутке для n1 и n2:

In[ ]:=
```
data1 = N[Table[{a + i * h1, f[a + i * h1]}, {i, 0, n1}]]
```
таблица значений

Out[ ]=
```
{{0., 2.61311}, {1., 6.13023}, {2., 8.81055},
 {3., 6.91907}, {4., 2.68522}, {5., 0.470096}, {6., 0.0341457}}
```

In[ ]:=
```
data2 = N[Table[{a + i * h2, f[a + i * h2]}, {i, 0, n2}]]
```
таблица значений

Out[ ]=
```
{{0., 2.61311}, {0.6, 4.58895}, {1.2, 6.88217},
 {1.8, 8.57075}, {2.4, 8.65092}, {3., 6.91907}, {3.6, 4.29295},
 {4.2, 2.02528}, {4.8, 0.712835}, {5.4, 0.183836}, {6., 0.0341457}}
```

In[ ]:=
```
{TableForm[data1], TableForm[data2]}
```
табличная форма табличная форма

Out[ ]=

		0.	2.61311
		0.6	4.58895
0.	2.61311	1.2	6.88217
1.	6.13023	1.8	8.57075
2.	8.81055	2.4	8.65092
3.	6.91907	3.	6.91907
4.	2.68522	3.6	4.29295
5.	0.470096	4.2	2.02528
6.	0.0341457	4.8	0.712835
		5.4	0.183836
		6.	0.0341457

а) Введём вспомогательные обозначения P1(x) и P2(x):

In[ ]:=

$$P1[x\_] = \prod_{i=0}^{n1} (x - data1[\![i+1, 1]\!])$$

$$P2[x\_] = \prod_{i=0}^{n2} (x - data2[\![i+1, 1]\!])$$

Out[ ]=
```
(-6. + x) (-5. + x) (-4. + x) (-3. + x) (-2. + x) (-1. + x) (0. + x)
```

Out[ ]=
```
(-6. + x) (-5.4 + x) (-4.8 + x) (-4.2 + x) (-3.6 + x)
 (-3. + x) (-2.4 + x) (-1.8 + x) (-1.2 + x) (-0.6 + x) (0. + x)
```

Используя заданные обозначения, зададим формулы интерполяционного многочлена Лагранжа для n1 и n2:

In[ ]:=
```
Ln1[x_] =
 Sum[data1[[i + 1, 2]] × P1[x] / ((x - data1[[i + 1, 1]]) P1'[data1[[i + 1, 1]]]), {i, 0, n1}] //
  Simplify
```
сумма
упростить

Out[ ]=

$$2.61311 + 0.916191\,x + 4.6762\,x^2 - 2.32529\,x^3 + 0.225577\,x^4 + 0.0284719\,x^5 - 0.00402739\,x^6$$

In[∘]:=
```
Ln2[x_] =
 Sum[data2[[i + 1, 2]] × P2[x] / ((x - data2[[i + 1, 1]]) P2'[data2[[i + 1, 1]]]), {i, 0, n2}] //
 сумма
  Simplify
  упростить
```

Out[∘]=

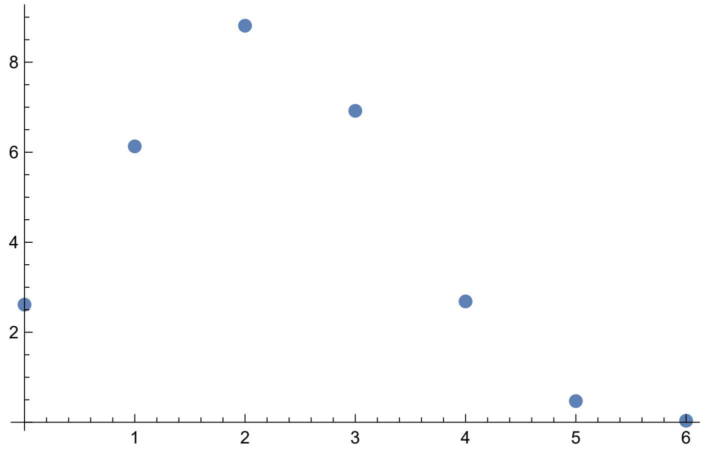
$$2.61311 + 2.36963\, x + 2.73186\, x^2 - 3.19862\, x^3 + 2.86476\, x^4 - 1.70431\, x^5 + 0.537607\, x^6 - 0.087452\, x^7 + 0.00647327\, x^8 - 0.0000741012\, x^9 - 0.0000101178\, x^{10}$$

Изобразим полученные интерполяционные многочлены.

Интерполяционный многочлен Лагранжа для n = 6:

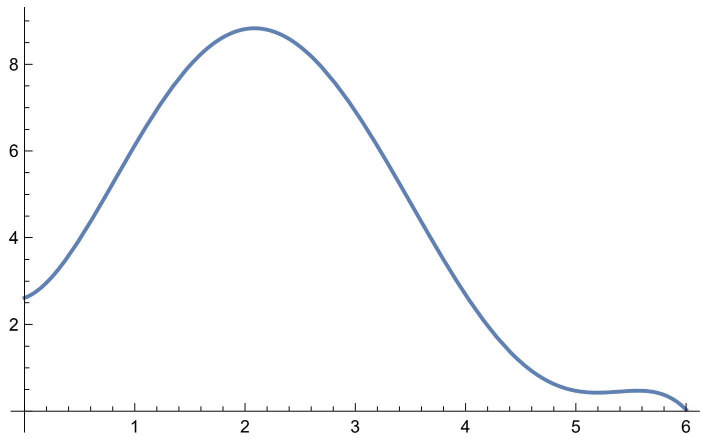
In[∘]:=
```
graph1D = ListPlot[data1, PlotStyle → {Darker, PointSize[0.02]}]
          диаграмма разбро⋯ стиль графика  темнее  размер точки
```

Out[∘]=



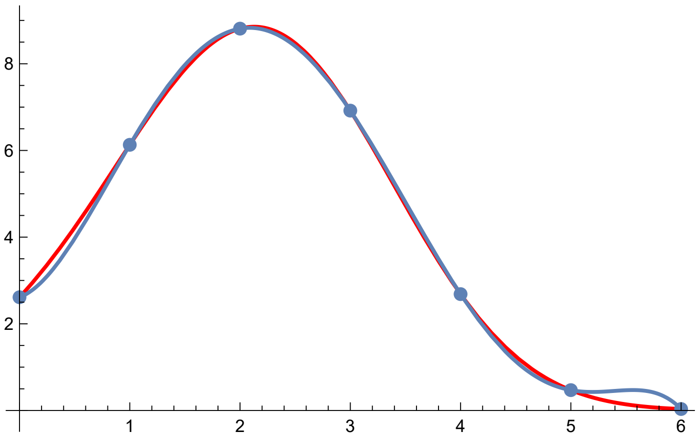
In[∘]:=
```
graph1Ln = Plot[Ln1[x], {x, a, b}]
           график функции
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
Show[graph, graph1D, graph1Ln]
```
показать

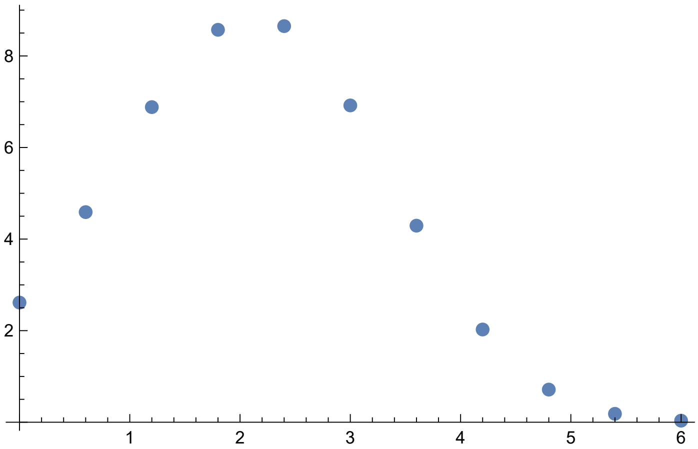
Out[∘]=



Интерполяционный многочлен Лагранжа для n = 10:

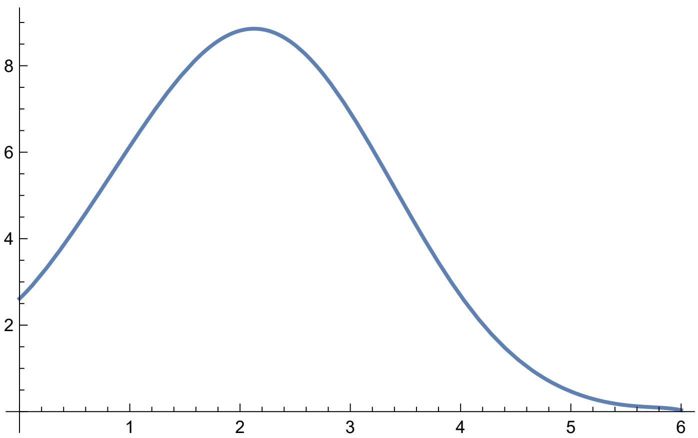
In[∘]:=
```
graph2D = ListPlot[data2, PlotStyle → {Darker, PointSize[0.02]}]
```
диаграмма разбро··· стиль графика темнее размер точки

Out[∘]=



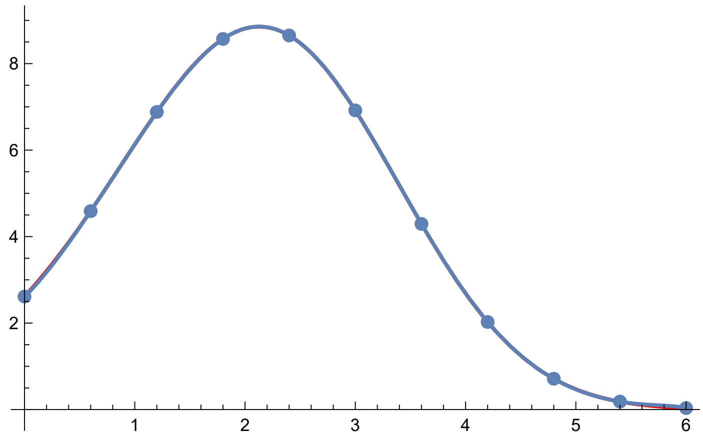
In[∘]:=
```
graph2Ln = Plot[Ln2[x], {x, a, b}]
```
график функции

Out[∘]=



In[ ]:=
```
Show[graph, graph2D, graph2Ln]
```
показать

Out[ ]=



б) Представим таблицу конечных разностей функции f(x) в виде матрицы, каждый столбец которой соответствует конечным разностям соответствующего порядка от 0 до n - 1 (конечные разности 0-го порядка - значения функции в точках x_i).
Для n = 6:

```
Array[dif1, {n1 + 1, n1 + 1}, {0, 0}];
```
массив

Поскольку с увеличением порядка конечных разностей их количество уменьшается, заполним пустые клетки таблицы:

In[ ]:=
```
For[k = 1, k ≤ n1, k++,
  For[i = n1, i ≥ n1 - k, i--, dif1[i, k] = ""]];
For[i = 0, i ≤ n1, i++, dif1[i, 0] = data1[[i + 1, 2]]];
For[k = 1, k ≤ n1, k++,
  For[i = 0, i ≤ n1 - k, i++,
   dif1[i, k] = dif1[i + 1, k - 1] - dif1[i, k - 1]]];
diftab1 = Array[dif1, {n1 + 1, n1 + 1}, {0, 0}];
PaddedForm[TableForm[diftab1], {n1, n1 - 1}]
```
цикл ДЛЯ / массив / форма чисел / табличная форма

Out[ ]//PaddedForm=

2.61311	3.51712	-0.83681	-3.73498	5.96439	-3.83267	-2.89972
6.13023	2.68032	-4.57179	2.22941	2.13171	-6.73239	
8.81055	-1.89147	-2.34238	4.36112	-4.60068		
6.91907	-4.23386	2.01873	-0.23956			
2.68522	-2.21512	1.77917				
0.47010	-0.43595					
0.03415						

Аналогичным образом заполним таблицу для n = 10:

In[•]:=
```
Array[dif2, {n2 + 1, n2 + 1}, {0, 0}];
массив
For[k = 1, k ≤ n2, k++,
цикл ДЛЯ
  For[i = n2, i ≥ n2 - k, i--, dif2[i, k] = ""]];
  цикл ДЛЯ
For[i = 0, i ≤ n2, i++, dif2[i, 0] = data2[[i + 1, 2]]];
цикл ДЛЯ
For[k = 1, k ≤ n2, k++,
цикл ДЛЯ
  For[i = 0, i ≤ n2 - k, i++,
  цикл ДЛЯ
   dif2[i, k] = dif2[i + 1, k - 1] - dif2[i, k - 1]]];
diftab2 = Array[dif2, {n2 + 1, n2 + 1}, {0, 0}];
          массив
PaddedForm[TableForm[diftab2], {n2, n2 - 1}]
форма числ··· табличная форма
```

Out[•]//PaddedForm=

2.613107710	1.975837993	0.317391059	-0.922043222	-0.081714132	0.88186
4.588945703	2.293229052	-0.604652164	-1.003757354	0.800154887	0.32118
6.882174755	1.688576888	-1.608409518	-0.203602468	1.121338859	-0.78635
8.570751644	0.080167370	-1.812011986	0.917736391	0.334982624	-0.99091
8.650919014	-1.731844616	-0.894275595	1.252719015	-0.655928388	-0.11265
6.919074398	-2.626120211	0.358443420	0.596790627	-0.768580158	0.53623
4.292954187	-2.267676791	0.955234047	-0.171789531	-0.232347465	
2.025277396	-1.312442744	0.783444515	-0.404136996		
0.712834651	-0.528998229	0.379307519			
0.183836423	-0.149690710				
0.034145713					

в) Построим вторые интерполяционные многочлены Ньютона Pn1 (x) и Pn2 (x) для n1 = 6 и n2 = 10 :

In[•]:=
```
q1 = (x - b) / h1; Pn1[x_] = dif1[n1, 0]; P1[q_] = 1;
For[k = 1, k ≤ n1, k++, P1[q_] = P1[q1] * (q1 + k - 1);
цикл ДЛЯ
  Pn1[x_] = Pn1[x] + P1[q1]/k! dif1[n1 - k, k]];
Pn1[x] // Simplify
          упростить
```

Out[•]=

$$2.61311 + 0.916191\, x + 4.6762\, x^2 - 2.32529\, x^3 + 0.225577\, x^4 + 0.0284719\, x^5 - 0.00402739\, x^6$$

In[•]:=
```
q2 = (x - b) / h2; Pn2[x_] = dif2[n2, 0]; P2[q_] = 1;
For[k = 1, k ≤ n2, k++, P2[q_] = P2[q2] * (q2 + k - 1);
цикл ДЛЯ
  Pn2[x_] = Pn2[x] + P2[q2]/k! dif2[n2 - k, k] ];
Pn2[x] // Simplify
          упростить
```

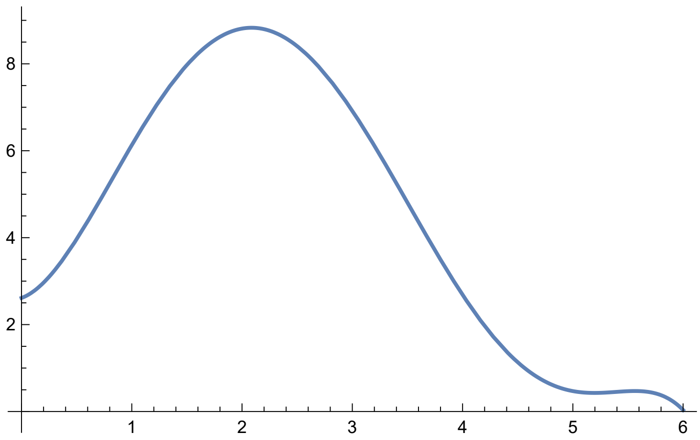
Out[•]=

$$2.61311 + 2.36963\, x + 2.73186\, x^2 - 3.19862\, x^3 + 2.86476\, x^4 - 1.70431\, x^5 + 0.537607\, x^6 - 0.087452\, x^7 + 0.00647327\, x^8 - 0.0000741012\, x^9 - 0.0000101178\, x^{10}$$

Изобразим полученные интерполяционные многочлены .
Второй интерполяционный многочлен Ньютона для n = 6:

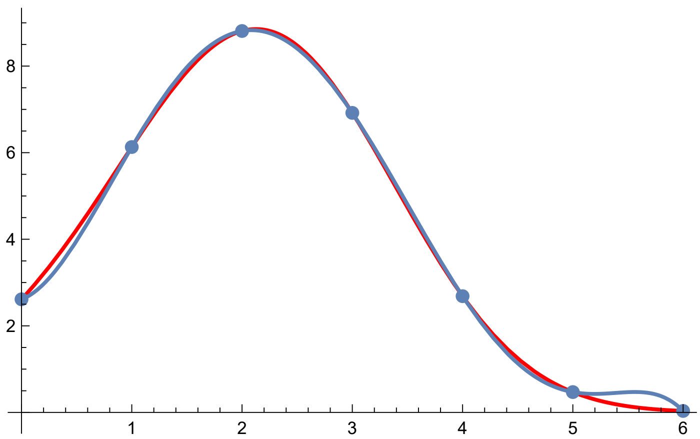
In[∘]:=
```
graph1Pn = Plot[Pn1[x], {x, a, b}]
```
график функции

Out[∘]=



In[∘]:=
```
Show[graph, graph1D, graph1Pn]
```
показать

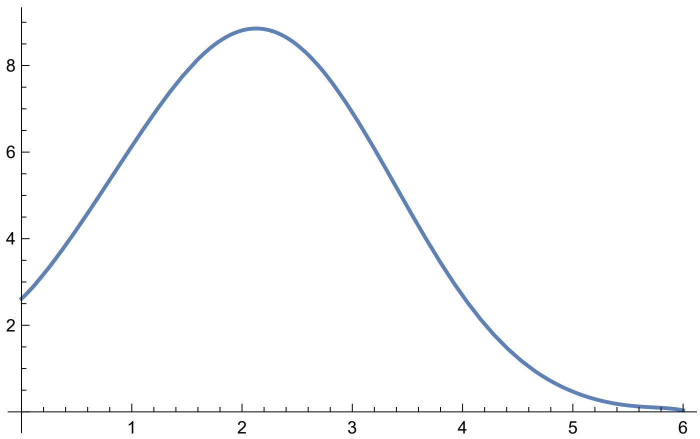
Out[∘]=



Второй интерполяционный многочлен Ньютона для n = 10 :

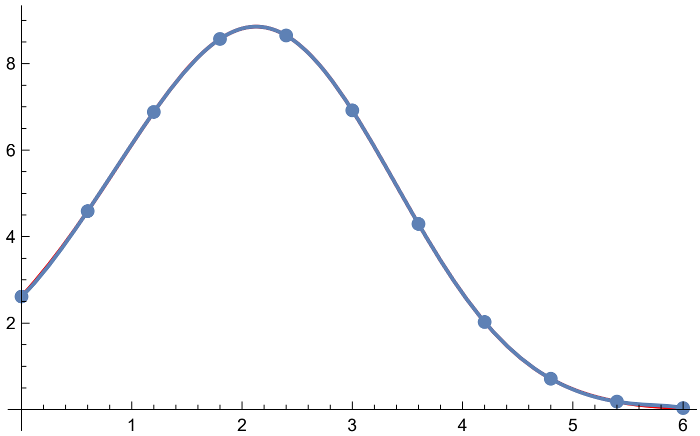
In[∘]:=
```
graph2Pn = Plot[Pn2[x], {x, a, b}]
```
график функции

Out[∘]=



In[∘]:=
```
Show[graph, graph2D, graph2Pn]
```
показать

Out[∘]=



г) Интерполяционные многочлены Ньютона функции f(x) для n1 = 6 и n2 = 10, построенные встроенной функцией пакета **Mathematica**:

In[∘]:=
```
Npn1[x_] = InterpolatingPolynomial[data1, x] // Simplify
```
интерполяционный многочлен | упростить

Out[∘]=

$$2.61311 + 0.916191\, x + 4.6762\, x^2 - 2.32529\, x^3 + 0.225577\, x^4 + 0.0284719\, x^5 - 0.00402739\, x^6$$

In[∘]:=
```
Npn2[x_] = InterpolatingPolynomial[data2, x] // Simplify
```
интерполяционный многочлен | упростить

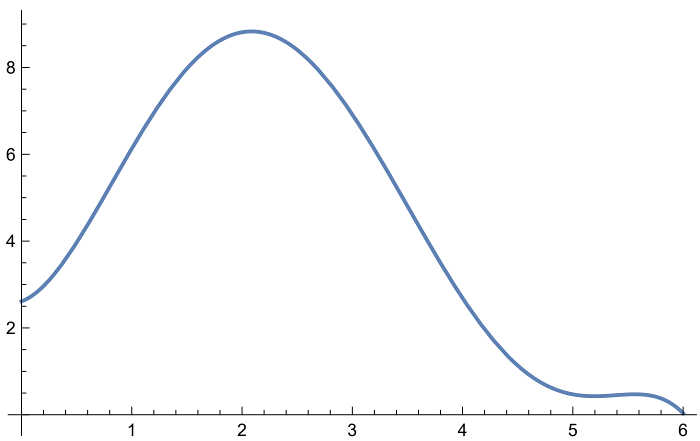
Out[∘]=

$$2.61311 + 2.36963\, x + 2.73186\, x^2 - 3.19862\, x^3 + 2.86476\, x^4 - 1.70431\, x^5 + 0.537607\, x^6 - 0.087452\, x^7 + 0.00647327\, x^8 - 0.0000741012\, x^9 - 0.0000101178\, x^{10}$$

Изобразим полученные интерполяционные многочлены .
Интерполяционный многочлен Ньютона для n = 6:

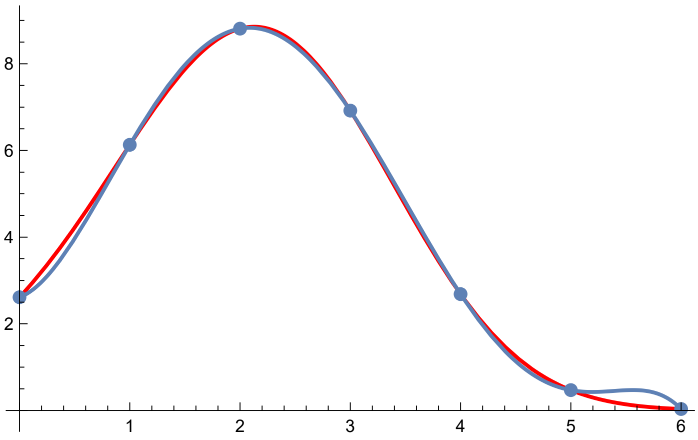
In[∘]:=
```
graph1Npn = Plot[Npn1[x], {x, a, b}]
```
график функции

Out[∘]=



In[•]:=
```
Show[graph, graph1D, graph1Npn]
```
показать

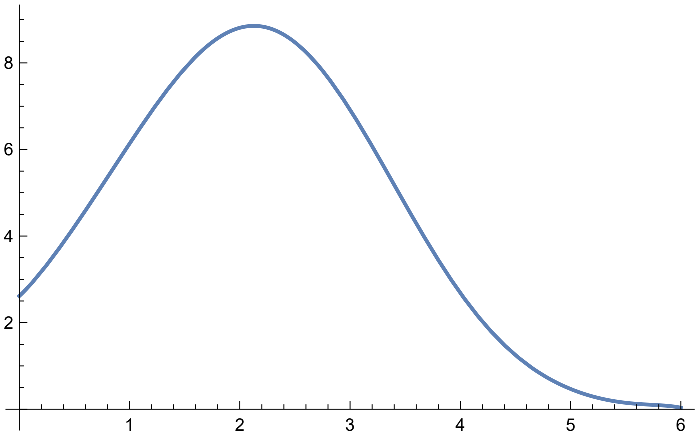
Out[•]=



Интерполяционный многочлен Ньютона для n = 10 :

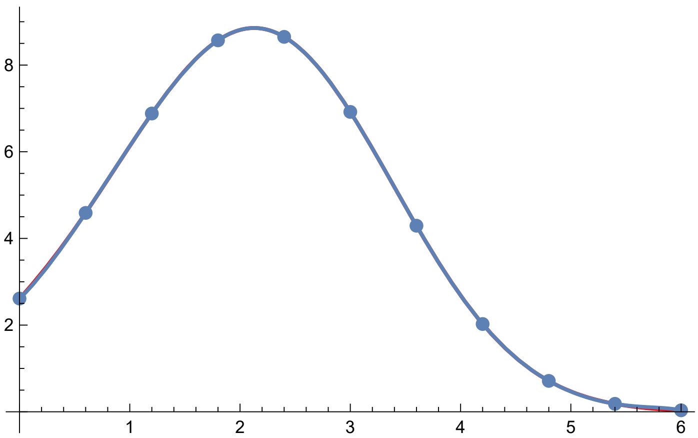
In[•]:=
```
graph2Npn = Plot[Npn2[x], {x, a, b}]
```
график функции

Out[•]=



In[•]:=
```
Show[graph, graph2D, graph2Npn]
```
показать

Out[•]=



д)

In[∘]:=
```
Print["f[x0]=", f[x0]]
```
печатать

f[x0]=8.60116

Значения интерполяционных многочленов Лагранжа в точке x0 :

In[∘]:=
```
Print["Ln1[x0]=", Ln1[x0], ", Ln2[x0]=", Ln2[x0]]
```
печатать

Ln1[x0]=8.53244, Ln2[x0]=8.60107

Значения вторых интерполяционных многочленов Ньютона в точке x0:

In[∘]:=
```
Print["Pn1[x0]=", Pn1[x0], ", Pn2[x0]=", Pn2[x0]]
```
печатать

Pn1[x0]=8.53244, Pn2[x0]=8.60107

Значения интерполяционных многочленов Ньютона в точке x0 :

In[∘]:=
```
Print["Npn1[x0]=", Npn1[x0], ", Npn2[x0]=", Npn2[x0]]
```
печатать

Npn1[x0]=8.53244, Npn2[x0]=8.60107

Исходя из полученных графиков и значений в точке x0, отметим, что интерполяционные многочлены, полученные различными способами, либо совпадают полностью, либо имеют незначительные отличия .

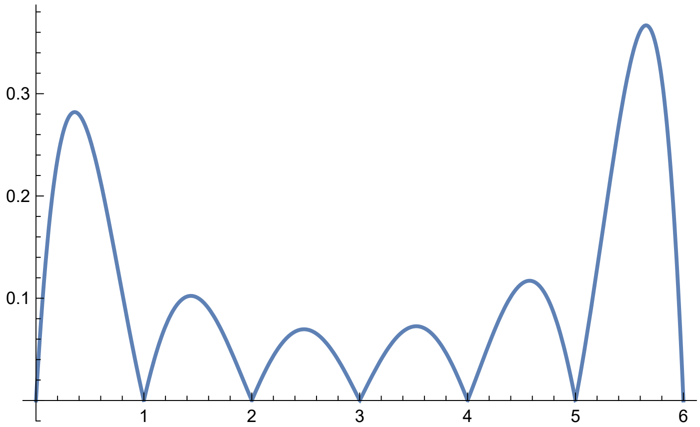
e) Исследуем погрешность интерполирования многочленом Ньютона при n = 6.

In[∘]:=
```
Rn1[x_] = Abs[f[x] - Npn1[x]];
```
абсолютное значение

График погрешности Rn1 (x) :

In[∘]:=
```
graphErr1 = Plot[Rn1[x], {x, a, b}, PlotRange → Full]
```
график функции · отображаем··· · в полно

Out[∘]=



In[∘]:=
```
maxErr1 = FindMaximum[Rn1[x], {x, a, b}]
```
найти максимум

Out[∘]=

{0.281977, {x → 0.358822}}

Как видно из графика, максимальная погрешность интерполирования многочленом Ньютона при n = 6 находится на отрезке x ϵ [5.4; 6] . В силу погрешности машинного сравнения рациональных чисел функция FindMaximum дала некорректный ответ . Для получения более точного результата сузим промежуток .

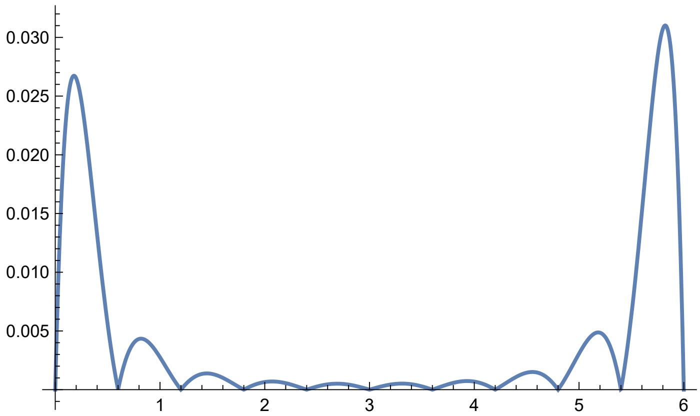
```
In[•]:= maxErr1 = FindMaximum[Rn1[x], {x, 5.4, b}]
                  найти максимум
Out[•]=
{0.366789, {x → 5.6539}}
```

Исследуем погрешность интерполирования многочленом Ньютона при n = 10.

```
In[•]:= Rn2[x_] = Abs[f[x] - Npn2[x]];
                  абсолютное значение
```

График погрешности Rn2 (x) :

```
In[•]:= graphErr2 = Plot[Rn2[x], {x, a, b}, PlotRange → Full]
                    график функции              отображаем··· в полнс
Out[•]=
```




```
In[•]:= maxErr2 = FindMaximum[Rn2[x], {x, a, b}]
                  найти максимум
Out[•]=
{0.0267321, {x → 0.178828}}
```

Как видно из графика, максимальная погрешность интерполирования многочленом Ньютона при n = 10 принадлежит отрезку x ϵ [5.4; 6] . В силу погрешности машинного сравнения рациональных чисел функция FindMaximum дала некорректный ответ .
Для получения более точного результата сузим промежуток значений аргумента:

```
In[•]:= maxErr2 = FindMaximum[Rn2[x], {x, 5.6, b}]
                  найти максимум
Out[•]=
{0.0310142, {x → 5.82281}}
```

ж) Исходя из полученных графиков погрешностей, можно сделать вывод, что с увеличением степени интерполяционного многочлена n погрешность интерполирования уменьшается (значение maxErr1 значительно больше значения maxErr2).