Создать таблицу значений функции f (x), разбив отрезок [0; 6]

на n частей неравноотстоящими точками x_i вида $\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}*t_i$,

где t_i – корни многочлена Чебышёва $T_{n+1}(t)$ $\left(i=\overline{0, n}\right)$. Для полученной таблично заданной функции f (x), выполнить следующие действия при n = 6 и n = 10 :

а) создать таблицу разделенных разностей функции f (x) по точкам

$(x_i, f(x_i))$, $i=\overline{0, n}$;

б) построить интерполяционный многочлен Ньютона $Pnr_n(x)$ для

неравноотстоящих узлов, проиллюстрировать графически (изобразить точки $(x_i, f(x_i))$ и графики функций f (x) и $Pnr_n(x)$ на одном чертеже);

в) построить интерполирующую функцию $Intf_n(x)$ с помощью функции

Interpolation пакета **Mathematica**, проиллюстрировать графически;

г) вычислить значения функции f (x) и построенных интерполяционных

многочленов Pnr[n] (x) и $Intf_n(x)$ в точке x = 2, 4316;

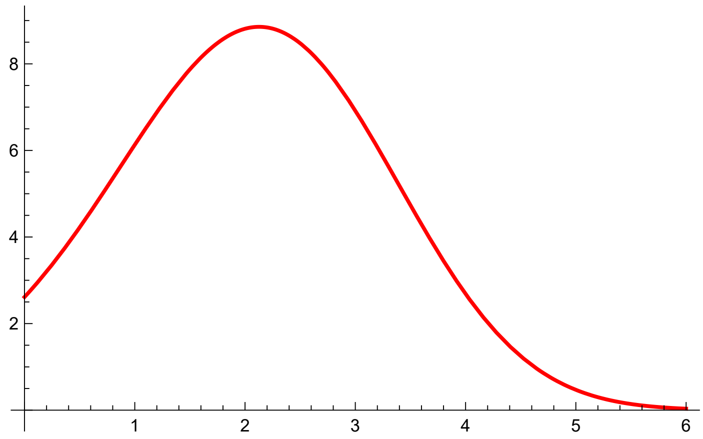
д) найти максимумы абсолютных погрешностей интерполирования

функции f (x) многочленом Ньютона $Pnr_n(x)$ и функцией $Intf_n(x)$ на отрезке [0; 6] с помощью функции **FindMaximum** пакета **Mathematica**.

Функция f (x) :

```
In[◦]:= f[x_] = (x + √(π + 1)) * Exp[-4 / 39 * √(x^5) + 5 * x / 9 + 1 / 4];
                                   показательная функция
a = 0; b = 6; n1 = 6;
x0 = 2.4316;
n2 = 10;
graph = Plot[f[x], {x, a, b}, PlotStyle → {Red, Thick}]
        график функции           стиль графика  кр⋯  жирный
(*Создадим таблицы значений функции для не равноотстоящих узлов на промежутке для n1=
 6 и n2=10. Многочлен Чебышёва для n1 и n2:*)
T1[i_] := Cos[(π * (2 i + 1)) / (2 * n1 + 2)];
          косинус
T2[i_] := Cos[(π * (2 i + 1)) / (2 * n2 + 2)];
          косинус
(*Так как значения корней уменьшаются с увеличением i,
полученные таблицы значений функции перевернём с помощью функции Reverse:*)
                                                          расположить в обратном пор
data1 = Table[{x1 = (a + b) / 2 + (b - a) / 2 * T1[i], f[x1]}, {i, 0, n1}] // N // Reverse;
        таблица значений                                                    чи⋯ расположить в об
data2 = Table[{x2 = (a + b) / 2 + (b - a) / 2 * T2[i], f[x2]}, {i, 0, n2}] // N // Reverse;
        таблица значений                                                    чи⋯ расположить в об
{TableForm[data1], TableForm[data2]}
 табличная форма   табличная форма
```

Out[◦]=



Out[◦]=

		0.0305357	2.69765
		0.271104	3.42906
0.0752163	2.82487	0.732751	5.09374
0.654506	4.79446	1.37808	7.49762
1.69835	8.3756	2.1548	8.85275
3.	6.91907	3.	6.91907
4.30165	1.73311	3.8452	3.26795
5.34549	0.210705	4.62192	1.00307
5.92478	0.0429585	5.26725	0.255078
		5.7289	0.0761712
		5.96946	0.0375059

а) Представим таблицу разделённых разностей функции f (x) в виде матрицы, каждый столбец которой соответствует конечным

разделённым разностям соответствующего порядка от 0 до n –

1 (разделённые разности 0 – го порядка – значения функции в точках x_i).
Для n = 6 :

In[◦]:=
```
diftab1 = Array[dif1, {n1 + 1, n1 + 1}, {0, 0}];
(*Поскольку с увеличением порядка разделённых разностей их количество уменьшается,
заполним пустые клетки таблицы:*)
For[k = 1, k ≤ n1, k++, For[i = n1, i ≥ n1 - k, i--, dif1[i, k] = ""]];
For[i = 0, i ≤ n1, i++, dif1[i, 0] = data1[[i + 1, 2]]];
For[k = 1, k ≤ n1, k++, For[i = 0, i ≤ n1 - k, i++, dif1[i, k] =
    (dif1[i + 1, k - 1] - dif1[i, k - 1]) / (data1[[i + 1 + k, 1]] - data1[[i + 1, 1]])]];
PaddedForm[TableForm[diftab1], {n1, n1 - 1}]
```

Out[◦]//PaddedForm=

2.82487	3.40001	0.01893	-0.66969	0.21289	-0.02555	-0.00369
4.79446	3.43073	-1.93977	0.23009	0.07822	-0.04712	
8.37560	-1.11898	-1.10059	0.59702	-0.17011		
6.91907	-3.98415	1.07683	-0.12195			
1.73311	-1.45846	0.72014				
0.21070	-0.28957					
0.04296						

Аналогичным образом заполним таблицу для n = 10 :

In[◦]:=
```
diftab2 = Array[dif2, {n2 + 1, n2 + 1}, {0, 0}];
For[k = 1, k ≤ n2, k++, For[i = n2, i ≥ n2 - k, i--, dif2[i, k] = ""]];
For[i = 0, i ≤ n2, i++, dif2[i, 0] = data2[[i + 1, 2]]];
For[k = 1, k ≤ n2, k++, For[i = 0, i ≤ n2 - k, i++, dif2[i, k] =
    (dif2[i + 1, k - 1] - dif2[i, k - 1]) / (data2[[i + 1 + k, 1]] - data2[[i + 1, 1]])]];
PaddedForm[TableForm[diftab2 // N], {n2, n2 - 1}]
```

Out[◦]//PaddedForm=

2.697649620	3.040356382	0.805438517	-0.517861329	-0.131132839	0.08291
3.429063106	3.605947876	0.107598692	-0.796422446	0.115086517	0.05795
5.093739073	3.725056780	-1.392620928	-0.482363312	0.322214495	-0.05767
7.497616074	1.744678724	-2.486258530	0.520512030	0.097903863	-0.08093
8.852751275	-2.287839809	-1.202092826	0.838096979	-0.216864570	0.01464
6.919074398	-4.319851922	0.865593094	0.163117631	-0.164518164	0.05671
3.267945617	-2.915927047	1.235421335	-0.285835326	0.003906491	
1.003072817	-1.159094838	0.696993814	-0.277536898		
0.255078468	-0.387541133	0.323001222			
0.076171165	-0.160724635				
0.037505906					

б) Построим интерполяционные многочлены Ньютона для не равноотстоящих узлов при n1 = 6 и n2 = 10.

Введём вспомогательные многочлены P(x) и построим интерполяционные многочлены с их помощью:

In[∘]:=
```
P1[x_] = 1; P2[x_] = 1; Pnr1[x_] = dif1[0, 0]; Pnr2[x_] = dif2[0, 0];
For[i = 0, i < n1, i++, P1[x_] = P1[x] (x - data1[[i + 1, 1]]);
цикл ДЛЯ
 Pnr1[x_] = Pnr1[x] + dif1[0, i + 1] × P1[x]]
Pnr1[x] // Simplify
            упростить
```

Out[∘]=

$$2.68576 + 1.58569\,x + 3.64519\,x^2 - 1.8614\,x^3 + 0.152087\,x^4 + 0.0300246\,x^5 - 0.00368673\,x^6$$

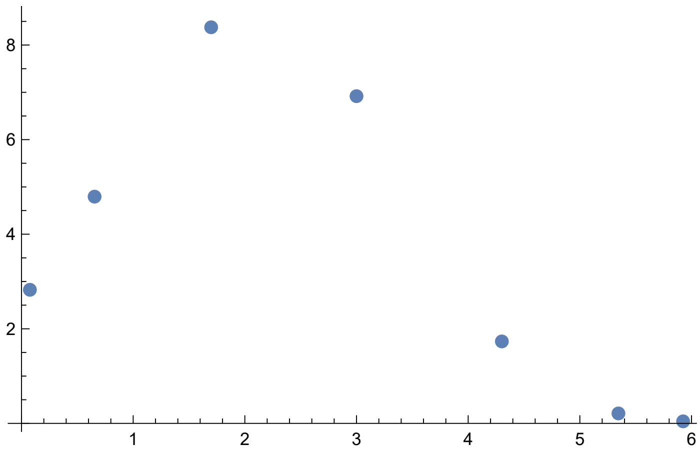
In[∘]:=
```
For[i = 0, i < n2, i++, P2[x_] = P2[x] (x - data2[[i + 1, 1]]);
цикл ДЛЯ
 Pnr2[x_] = Pnr2[x] + dif2[0, i + 1] × P2[x]]
Pnr2[x] // Simplify
            упростить
```

Out[∘]=

$$2.61524 + 2.65132\,x + 1.60146\,x^2 - 1.47419\,x^3 + 1.51446\,x^4 - 1.10096\,x^5 + 0.379121\,x^6 - 0.063787\,x^7 + 0.00475427\,x^8 - 0.0000521902\,x^9 - 7.45465 \times 10^{-6}\,x^{10}$$

In[∘]:=
```
(*Изобразим полученные интерполяционные многочлены.*)
graph1D = ListPlot[data1, PlotStyle → {Darker, PointSize[0.02]}]
          диаграмма разбро⋯ стиль графика  темнее   размер точки
```

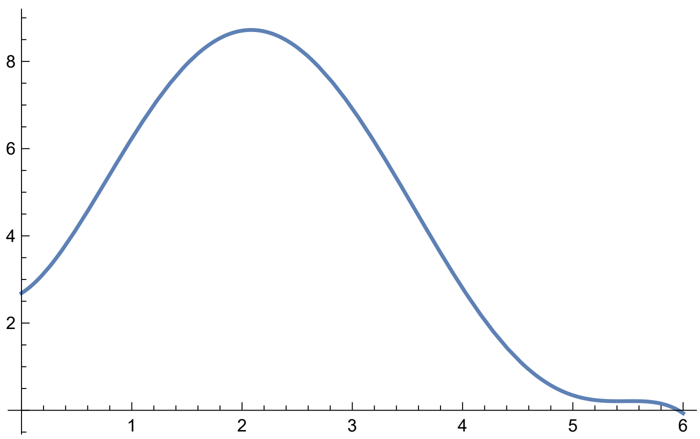
Out[∘]=



(*Интерполяционный многочлен Ньютона для не равноотстоящих узлов при n=6:*)

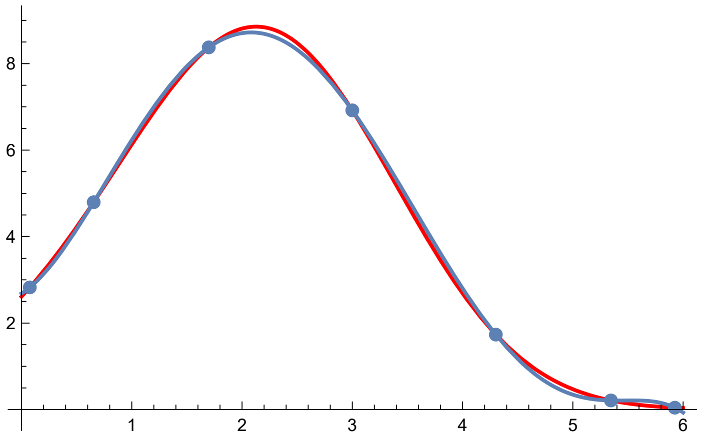
In[∘]:=
```
graph1Pnr = Plot[Pnr1[x], {x, a, b}]
            график функции
```

Out[∘]=



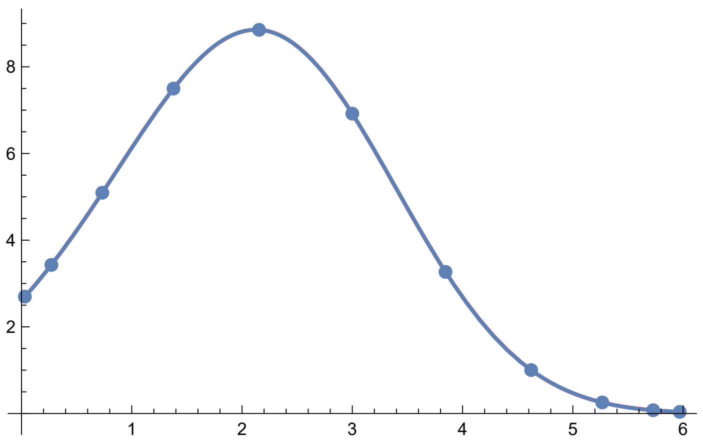
In[ ]:=
```
Show[graph, graph1D, graph1Pnr]
```
показать

Out[ ]=



In[ ]:=
```
(*Интерполяционный многочлен Ньютона для не равноотстоящих узлов при n=10:*)
graph2Pnr = Plot[Pnr2[x], {x, a, b}];
```
график функции
```
graph2D = ListPlot[data2, PlotStyle → {Darker, PointSize[0.02]}];
```
диаграмма разбро··· стиль графика темнее размер точки
```
Show[graph, graph2D, graph2Pnr]
```
показать

Out[ ]=



в) Интерполирующие функции функции f(x) при n1 = 6 и n2 = 10, построенные встроенной функцией пакета **Mathematica**:

In[ ]:=
```
Intf1 = Interpolation[data1]
```
интерполировать

Out[ ]=
```
InterpolatingFunction[ Domain: {{0.0752, 5.92}} Output: scalar ]
```

In[ ]:=
```
Intf2 = Interpolation[data2]
```
интерполировать

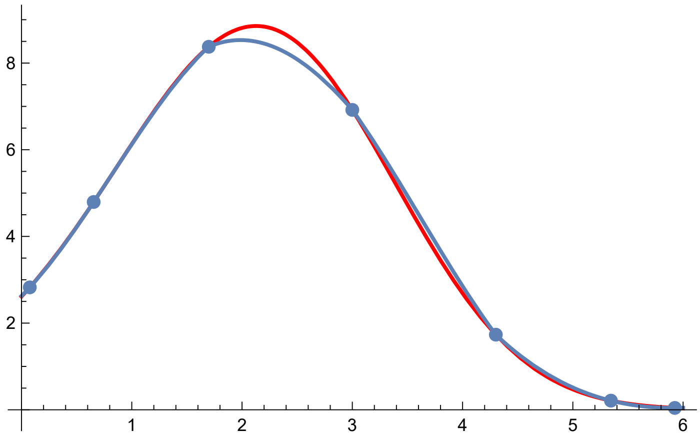
Out[ ]=
```
InterpolatingFunction[ Domain: {{0.0305, 5.97}} Output: scalar ]
```

```
(*Изобразим полученные интерполирующие функции.
   Интерполирующая функция при n=6:*)
```

In[∘]:=
```
graph1Intf = Plot[Intf1[x], {x, a, b}];
```
график функции

```
Show[graph, graph1D, graph1Intf]
```
показать

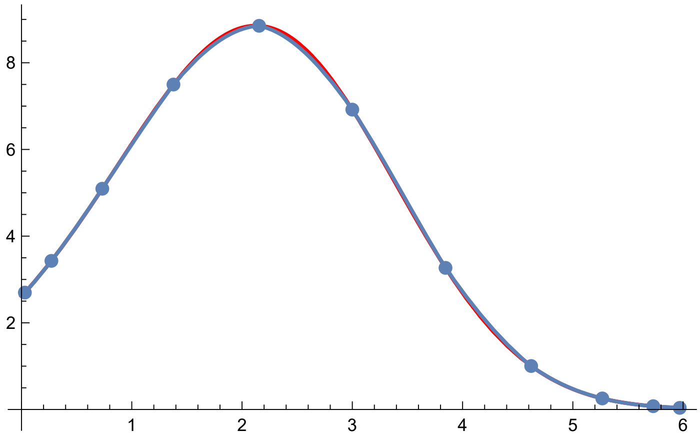
Out[∘]=



In[∘]:=
```
(*Интерполирующая функция при n=10:*)
graph2Intf = Plot[Intf2[x], {x, a, b}];
```
график функции

```
Show[graph, graph2D, graph2Intf]
```
показать

Out[∘]=



г) Значения интерполяционных многочленов Ньютона для не равноотстоящих узлов в точке x0:

In[∘]:=
```
Print["f[x]=", f[x0]]
```
печатать

```
f[x]=8.60116
```

In[∘]:=
```
Print["Pnr1[x0]=", Pnr1[x0], ", Pnr2[x0]=", Pnr2[x0]]
```
печатать

```
Pnr1[x0]=8.43968, Pnr2[x0]=8.59789
```

In[•]:=
```
(*Значения интерполирующих функций в точке x0:*)
Print["Intf1[x0]=", Intf1[x0], ", Intf2[x0]=", Intf2[x0]]
```
печатать

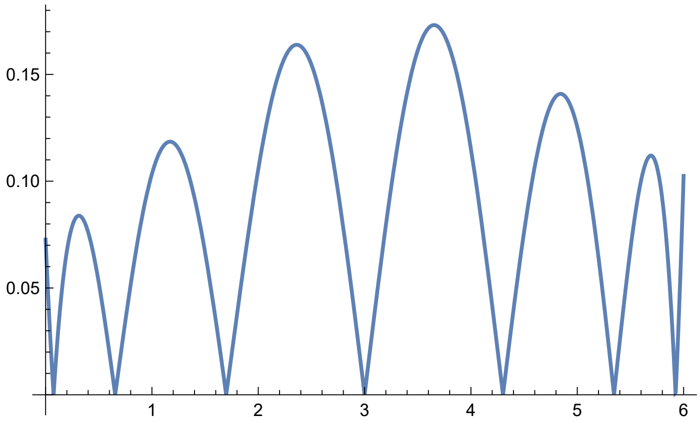
```
Intf1[x0]=8.19314, Intf2[x0]=8.52437
```

д) Исследуем погрешность интерполяционного многочлена Ньютона для неравноотстоящих узлов и интерполирующей функции при n = 6.

In[•]:=
```
Rnp1[x_] = Abs[f[x] - Pnr1[x]] // Simplify;
```
абсолютное значение | упростить

```
(*График погрешности Rnp1(x):*)
graphErrp1 = Plot[Rnp1[x], {x, a, b}, PlotRange → Full]
```
график функции | отображаем⋯ | в полнс

Out[•]=



In[•]:=
```
maxErrp1 = FindMaximum[{Rnp1[x], 0 ≤ x ≤ 6}, x]
```
найти максимум

Out[•]=
```
{0.0838514, {x → 0.31325}}
```

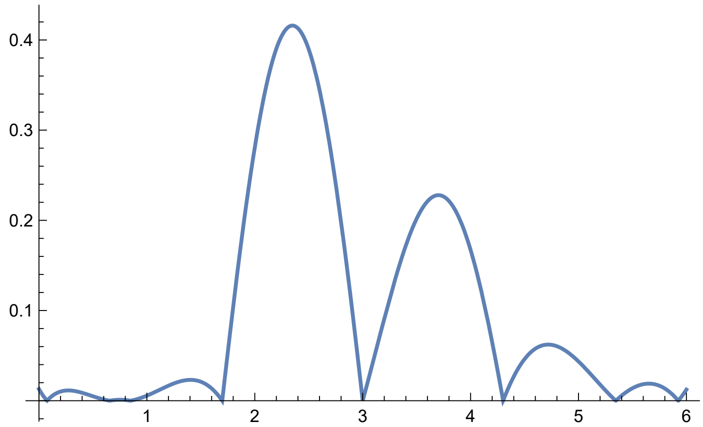
```
(*Результат не соответствует графику, надо уточнить*)
```

In[•]:=
```
maxErrp1 = FindMaximum[{Rnp1[x], 3 ≤ x ≤ 6}, x]
```
найти максимум

Out[•]=
```
{0.1731, {x → 3.65346}}
```

In[∘]:=
```
RnI1[x_] = Abs[f[x] - Intf1[x]] // Simplify;
           абсолютное значение       упростить
(*График погрешности RnI1(x):*)
graphErrI1 = Plot[RnI1[x], {x, a, b}, PlotRange → Full]
                  график функции          отображаем··· в полно
```

Out[∘]=



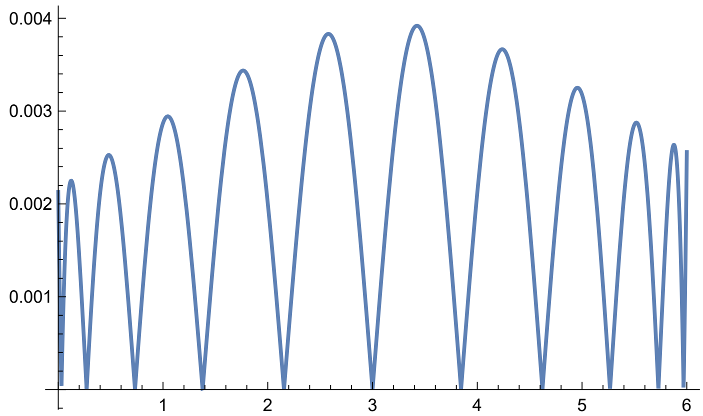
In[∘]:=
```
maxErrI1 = FindMaximum[RnI1[x], {x, 1, 3}]
           найти максимум
```

Out[∘]=

```
{0.415942, {x → 2.34888}}
```

In[∘]:=
```
(*Аналогимчным образом исследуем погрешность интерполяционного многочлена
  Ньютона для неравноотстоящих узлов и интерполирующей функции при n=10.*)
Rnp2[x_] = Abs[f[x] - Pnr2[x]] // Simplify;
           абсолютное значение      упростить
(*График погрешности Rnp2(x):*)
graphErrp2 = Plot[Rnp2[x], {x, a, b}, PlotRange → Full]
                  график функции          отображаем··· в полном объеме
```

Out[∘]=

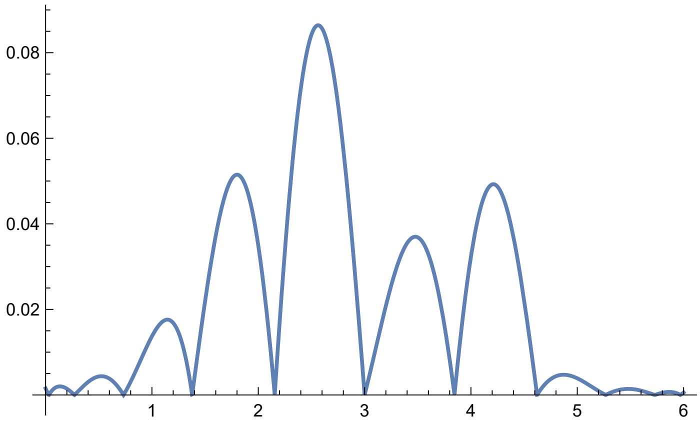


In[∘]:=
```
maxErrp2 = FindMaximum[Rnp2[x], {x, 3, 5}]
           найти максимум
```

Out[∘]=

```
{0.00391923, {x → 3.42477}}
```

In[∘]:=
```
RnI2[x_] = Abs[f[x] - Intf2[x]] // Simplify;
           абсолютное значение      упростить
(*График погрешности RnI2(x):*)
graphErrI2 = Plot[RnI2[x], {x, a, b}, PlotRange → Full]
                  график функции          отображаем⋯  в полнс
```
Out[∘]=



In[∘]:=
```
maxErrI2 = FindMaximum[RnI2[x], {x, 2.5, 4}]
           найти максимум
```
Out[∘]=

{0.0864096, {x → 2.5628}}

Для равностоящих :

1) maxErr1: {0.366789, {x → 5.6539}}

2)maxErr2: {0.0310142, {x → 5.82281}}

Для неравностоящих :

1) maxErr1: {0.415942, {x → 2.34888}}

2)maxErr2: {0.00391923, {x → 3.42477}}

Из сравнения результатов вычисления максимальных погрешностей можно сделать вывод о том, что с увеличением количества узлов интерполяции возрастает точность построения интерполяционных многочленов (в обоих случаях значение погрешности при n2 = 10 значительно меньше значения при n1 = 6).

Неравностоящие узлы демонстрируют более низкие максимальные погрешности, что позволяет сделать вывод о преимуществах использования адаптивных методов интерполяции.