1. Даны матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_i)$, $i = \overline{1,7}$, $j = \overline{1,7}$. Используя средства пакета **Mathematica** (функции **Norm**, **Inverse**, **LinearSolve**):

а) найти число обусловленности матрицы A в норме-максимум $\|\cdot\|_\infty$;

б) решить точную систему линейных уравнений $AX = B$;

в) решить три возмущенные системы вида $AX = B + \Delta B$, увеличив значение правой части последнего уравнения системы $AX = B$ последовательно на 0,01%; 0,1% и на 1%;

г) найти прогнозируемую предельную относительную погрешность решения каждой возмущенной системы;

д) найти относительную погрешность решения каждой возмущенной системы; сделать вывод о зависимости относительной погрешности от величины возмущения и числа обусловленности матрицы A.

Выполнить задание для двух случаев:

1) $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i > j, \\ i+1, & i = j, \\ 2, & i < j, \end{cases}$ $\quad b_i = 2ki - i^2$; $\qquad$ **2)** $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$ $\quad b_i = 3i - 2k$,

где $i = \overline{1,7}$, $j = \overline{1,7}$, k – номер вашего варианта.

```
In[∘]:= A := Table[If[i > j, 1, If[j == i, 1 + i, If[i < j, 2]]], {i, 7}, {j, 7}]
         таблица значений  условный оператор  условный оператор  условный оператор
        B := Table[2 * 14 * i - i^2, {i, 7}]
             таблица значений
        {MatrixForm[A], MatrixForm[B]}
         матричная форма  матричная форма
        A1 := Inverse[A];
              обратная матрица
        condA = Norm[A, ∞] * Norm[A1, ∞];
                норма         норма
        Print["Число обусловленностей A: ", condA]
        печатать
```

Out[∘]=

$$\left\{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 27 \\ 52 \\ 75 \\ 96 \\ 115 \\ 132 \\ 147 \end{pmatrix}\right\}$$

```
Число обусловленностей A: 25
```

In[◦]:=
```
(*б*)
X := LinearSolve[A, B];
Print["X:", MatrixForm[X]];
```

$$X: \begin{pmatrix} -\frac{4911}{140} \\ -\frac{1411}{140} \\ \frac{199}{140} \\ \frac{1179}{140} \\ \frac{461}{35} \\ \frac{116}{7} \\ \frac{267}{14} \end{pmatrix}$$

In[◦]:=
```
(*в*)
B1 := Table[If[i == 7, (2 * 14 * i - i^2) * 1.0001, 2 * 14 * i - i^2], {i, 7}]
B2 := Table[If[i == 7, (2 * 14 * i - i^2) * 1.001, 2 * 14 * i - i^2], {i, 7}]
B3 := Table[If[i == 7, (2 * 14 * i - i^2) * 1.01, 2 * 14 * i - i^2], {i, 7}]
X1 := LinearSolve[A, B1];
X2 := LinearSolve[A, B2];
X3 := LinearSolve[A, B3];
Print["X1:", MatrixForm[X1], ", X2:", MatrixForm[X2], ", X3:", MatrixForm[X3]];
```

$$X1: \begin{pmatrix} -35.0789 \\ -10.0789 \\ 1.42108 \\ 8.42108 \\ 13.1711 \\ 16.5711 \\ 19.0735 \end{pmatrix}, \ X2: \begin{pmatrix} -35.0821 \\ -10.0821 \\ 1.41793 \\ 8.41793 \\ 13.1679 \\ 16.5679 \\ 19.0924 \end{pmatrix}, \ X3: \begin{pmatrix} -35.1136 \\ -10.1136 \\ 1.38643 \\ 8.38643 \\ 13.1364 \\ 16.5364 \\ 19.2814 \end{pmatrix}$$

In[◦]:=
```
(*в*)
Print["Относительная: δX1: ", condA * (Norm[B - B1, 1] / Norm[B + B - B1, 1]),
 ", δX2: ", condA * (Norm[B - B2, 1] / Norm[B + B - B2, 1]),
 ", δX3: ", condA * (Norm[B - B3, 1] / Norm[B + B - B3, 1])]
```

Относительная: δ_{X1}: 0.000570665, δ_{X2}: 0.00570782, δ_{X3}: 0.0571958

In[◦]:=
```
Print["Предельная относительная: δX1: ", Norm[X1 - X, 1] / Norm[X1, 1], ", δX2: ",
 Norm[X2 - X, 1] / Norm[X2, 1], ", δX3: ", Norm[X3 - X, 1] / Norm[X3, 1]]
```

Предельная относительная: δ_{X1}: 0.0000404563, δ_{X2}: 0.000404514, δ_{X3}: 0.00404024

```
(*По определению относительная погрешность решения не превосходит его предельную
 относительную погрешность. Это условие выполнено.Матрица A хорошо обусловлена*)
```

In[ ]:=
```
(*2 пункт*)
A := Table[1 / (i + j - 1), {i, 7}, {j, 7}]
       таблица значений
B := Table[3 * i - 2 * 14, {i, 7}]
       таблица значений
{MatrixForm[A], MatrixForm[B]}
 матричная форма  матричная форма
Norm[A, ∞];
норма
A1 := Inverse[A];
      обратная матрица
condA = Norm[A, ∞] * Norm[A1, ∞];
        норма         норма
Print["Число обусловленностей A: ", condA]
печатать
```

Out[ ]=

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -25 \\ -22 \\ -19 \\ -16 \\ -13 \\ -10 \\ -7 \end{pmatrix}\right\}$$

Число обусловленностей A: $\frac{1\,970\,389\,773}{2}$

```
(*б*)
```

In[ ]:=
```
X := LinearSolve[A, B];
      решить линейные уравнения
Print["X:", MatrixForm[X]];
печатать     матричная форма
```

X: $\begin{pmatrix} 833 \\ -38\,976 \\ 427\,140 \\ -1\,848\,000 \\ 3\,707\,550 \\ -3\,459\,456 \\ 1\,213\,212 \end{pmatrix}$

```
In[∘]:= (*B*)
B1 := Table[If[i == 7, (3 * i - 2 * 14) * 1.0001, 3 * i - 2 * 14], {i, 7}]
         табл··· условный оператор
B2 := Table[If[i == 7, (3 * i - 2 * 14) * 1.001, 3 * i - 2 * 14], {i, 7}]
         табл··· условный оператор
B3 := Table[If[i == 7, (3 * i - 2 * 14) * 1.01, 3 * i - 2 * 14], {i, 7}]
         табл··· условный оператор
X1 := LinearSolve[A, B1];
      решить линейные уравнения
X2 := LinearSolve[A, B2];
      решить линейные уравнения
X3 := LinearSolve[A, B3];
      решить линейные уравнения
Print["X1:", MatrixForm[X1], ", X2:", MatrixForm[X2], ", X3:", MatrixForm[X3]];
печатать     матричная форма          матричная форма          матричная форма
```

$$X1: \begin{pmatrix} 824.592 \\ -38622.8 \\ 423608. \\ -1.83387\times10^{6} \\ 3.68106\times10^{6} \\ -3.43615\times10^{6} \\ 1.20544\times10^{6} \end{pmatrix}, X2: \begin{pmatrix} 748.916 \\ -35444.5 \\ 391825. \\ -1.70674\times10^{6} \\ 3.44269\times10^{6} \\ -3.22638\times10^{6} \\ 1.13552\times10^{6} \end{pmatrix}, X3: \begin{pmatrix} -7.84 \\ -3660.72 \\ 73987.2 \\ -435389. \\ 1.0589\times10^{6} \\ -1.12865\times10^{6} \\ 436276. \end{pmatrix}$$

```
In[∘]:= (*B*)
Print["Относительная: δX1: ", condA * (Norm[B - B1, 1] / Norm[B + B - B1, 1]),
печатать                                норма               норма
 ", δX2: ", condA * (Norm[B - B2, 1] / Norm[B + B - B2, 1]),
                     норма               норма
 ", δX3: ", condA * (Norm[B - B3, 1] / Norm[B + B - B3, 1])]
                     норма               норма
```

Относительная: δ_{X1}: 6157.51, δ_{X2}: 61578.5, δ_{X3}: 616132.

```
In[∘]:= Print["Предельная относительная: δX1: ", Norm[X1 - X, 1] / Norm[X1, 1], ", δX2: ",
        печатать                                 норма             норма
 Norm[X2 - X, 1] / Norm[X2, 1], ", δX3: ", Norm[X3 - X, 1] / Norm[X3, 1]]
 норма             норма                   норма             норма
```

Предельная относительная: δ_{X1}: 0.00711733, δ_{X2}: 0.0760444, δ_{X3}: 2.40951

(*По определению относительная погрешность решения не превосходит его предельную относительную погрешность. Это условие выполнено. Матрица А плохо обусловлена*)

2. Решить методом прогонки трехдиагональную систему, составить таблицу прогоночных коэффициентов L_i, M_i, $i=\overline{1,5}$.

$$2.14.\quad \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 2, \\ x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 5, \\ 8x_2 + 12x_3 + 2x_4 = 22, \\ 10x_3 + 13x_4 - x_5 = 22, \\ x_4 - 2x_5 = -1. \end{cases}$$

```
In[ ]:= A := {{7, -5, 0, 0, 0, 2}, {1, 10, -4, 0, 0, 5},
           {0, 8, 12, 2, 0, 22}, {0, 0, 10, 13, -1, 22}, {0, 0, 0, 1, -2, -1}};
        Subscript[L, 1] = -A[[1, 2]] / A[[1, 1]];
        |с нижним индексом
        Subscript[M, 1] = A[[1, 6]] / A[[1, 1]];
        |с нижним индексом
        Do[Subscript[L, i] = -A[[i, i + 1]] / (A[[i, i]] + A[[i, i - 1]] * Subscript[L, i - 1]);
        |··· |с нижним индексом                                            |с нижним индексом
          Subscript[M, i] = (A[[i, 6]] - A[[i, i - 1]] * Subscript[M, i - 1]) /
          |с нижним индексом                               |с нижним индексом
            (A[[i, i]] + A[[i, i - 1]] * Subscript[L, i - 1]), {i, 2, 5}];
                                         |с нижним индексом
        Subscript[L, 5] = 0;
        |с нижним индексом
        Print["Lᵢ: ", Table[Lᵢ, {i, 1, 5}], ", Mᵢ: " , Table[Mᵢ, {i, 1, 5}]]
        |печатать      |таблица значений                  |таблица значений
        Subscript[x, 5] = Subscript[M, 5];
        |с нижним индексом  |с нижним индексом
        Do[Subscript[x, i] = Subscript[L, i] * Subscript[x, i + 1] + Subscript[M, i],
        |··· |с нижним индексом  |с нижним индексом  |с нижним индексом  |с нижним индексом
         {i, 4, 1, -1}]
        Print["xᵢ: ", Table[xᵢ, {i, 1, 5, 1}]]
        |печатать      |таблица значений
```

L_i: $\left\{\frac{5}{7}, \frac{28}{75}, -\frac{75}{562}, \frac{281}{3278}, 0\right\}$, M_i: $\left\{\frac{2}{7}, \frac{11}{25}, \frac{693}{562}, \frac{247}{298}, \frac{1199}{1255}\right\}$

x_i: $\left\{\frac{225}{251}, \frac{1073}{1255}, \frac{279}{251}, \frac{1143}{1255}, \frac{1199}{1255}\right\}$

3. Решить систему n-го порядка $AX = B$ методом Якоби и методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ при $n = 10$ и $n = 20$. Сравнить число итераций, необходимых для достижения точности ε этими методами. Здесь $A = (a_{ij})$ – матрица с диагональным преобладанием, $B = (b_i)$ – вектор-столбец,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j, \\ 2n, & i = j, \end{cases} \qquad b_i = (2n-1)i + \frac{n(n-1)}{2} + (3n-1)(k-1),$$

где $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, k – номер вашего варианта.

```
In[ ]:= k = 14;
        eps = 10^-3;
        Do[
        |оператор цикла
          Print["Решение для системы n = ", n];
          |печатать
          A := Table[If[i ≠ j, 1, 2 n], {i, 1, n}, {j, 1, n}];
                |табл··· |условный оператор
          B := Table[(2 n - 1) * i + n * (n - 1) / 2 + (3 n - 1) * (k - 1), {i, 1, n}];
                |таблица значений
```

```
Coef = ((1 - Norm[Table[-1, {i, n}, {j, n - 1}] / (2 n)]) / (Norm[Table[-1, {i, n}, {j, n - 1}] / (2 n)])) * eps;

X0 = B / (2 n); X1 = B; dX = 1; nit = 0;
While[dX > Coef,

 Do[X1[[i]] =

   -1/A[[i, i]] * (Sum[If[j ≠ i, A[[i, j]] * X0[[j]], 0], {j, 1, n}] - B[[i]]), {i, 1, n}];

 dX = Norm[X1 - X0];
 X0 = X1;
 nit++];
Print["Количество итераций для метода Якоби: ", nit]
 Print["Решение методом Якоби : ", X1 // N]

 X0 = B / (2 n); X1 = B; dX = 1; nit = 0;
While[dX > Coef,

 Do[X1[[i]] = -1/A[[i, i]] * (Sum[ A[[i, j]] * X1[[j]], {j, 1, i - 1}] +

      Sum[A[[i, j]] * X0[[j]], {j, i + 1, n}] - B[[i]]), {i, 1, n}];

 dX = Norm[X1 - X0];
 X0 = X1;
 Increment[nit]];

Print["Количество итераций для метода Зейделя: ", nit]
 Print["Решение методом Зейделя : ", X1 // N]
 Print["Решение через LinearSolve : ", MatrixForm[LinearSolve[A, B] // N]],
 {n, 10, 20, 10}];
Print["Вывод: Метод Зейделя сходится быстрее метода Якоби"]
```

Решение для системы n = 10

Количество итераций для метода Якоби: 15

Решение методом Якоби :
{13.6551, 14.6551, 15.6551, 16.6551, 17.6551, 18.6551, 19.6551, 20.6551, 21.6551, 22.6551}

Количество итераций для метода Зейделя: 6

Решение методом Зейделя :
{13.6552, 14.6552, 15.6552, 16.6552, 17.6552, 18.6552, 19.6552, 20.6552, 21.6552, 22.6552}

Решение через LinearSolve : $\begin{pmatrix} 13.6552 \\ 14.6552 \\ 15.6552 \\ 16.6552 \\ 17.6552 \\ 18.6552 \\ 19.6552 \\ 20.6552 \\ 21.6552 \\ 22.6552 \end{pmatrix}$

Решение для системы n = 20

Количество итераций для метода Якоби: 16

Решение методом Якоби :
{13.6611, 14.6611, 15.6611, 16.6611, 17.6611, 18.6611, 19.6611, 20.6611, 21.6611, 22.6611, 23.6611, 24.6611, 25.6611, 26.6611, 27.6611, 28.6611, 29.6611, 30.6611, 31.6611, 32.6611}

Количество итераций для метода Зейделя: 6

Решение методом Зейделя : {13.661, 14.661, 15.661, 16.6611, 17.6611, 18.6611, 19.6611, 20.661, 21.661, 22.661, 23.661, 24.661, 25.661, 26.661, 27.661, 28.661, 29.661, 30.661, 31.661, 32.661}

Решение через LinearSolve : $\begin{pmatrix} 13.661 \\ 14.661 \\ 15.661 \\ 16.661 \\ 17.661 \\ 18.661 \\ 19.661 \\ 20.661 \\ 21.661 \\ 22.661 \\ 23.661 \\ 24.661 \\ 25.661 \\ 26.661 \\ 27.661 \\ 28.661 \\ 29.661 \\ 30.661 \\ 31.661 \\ 32.661 \end{pmatrix}$

Вывод: Метод Зейделя сходится быстрее метода Якоби