

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет информационных технологий и управления
Кафедра интеллектуальных информационных технологий

РЕФЕРАТ

по дисциплине «Обработка изображений в интеллектуальных системах»

на тему:

«Класс ортогональных функций в задачах цифровой обработки сигналов. Алгоритм быстрого преобразования Фурье. Функции Радемахера, Хаара, Уолша. Двоичный код и код Грея»

Студенты гр. 321703

Титов А. В
Головач В.Д.

Проверил:

Самодумкин С. А.

Минск 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Роль ортогональных функций в цифровой обработке сигналов	3
2. Алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ)	4
3. Системы ортогональных функций: Радемахера, Хаара, Уолша.....	5
3.1. Функции Радемахера	5
3.2. Функции Хаара.....	7
3.3. Функции Уолша.....	7
4. Практические аспекты кодирования: двоичный код и код Грея.....	8
Заключение	9
Список использованных источников	10

Введение

Цифровая обработка сигналов — это одна из ключевых областей современной науки и техники, охватывающая широкий спектр задач, связанных с анализом, преобразованием и синтезом сигналов с помощью цифровых методов. В основе большинства алгоритмов цифровой обработки лежит использование ортогональных функций, которые позволяют эффективно представлять сигналы в различных базисах. Ортогональные функции обладают уникальным свойством — их скалярное произведение на заданном интервале равно нулю, что обеспечивает минимальную избыточность и упрощает математические операции. Это особенно важно при работе с большими объёмами данных, где требуется высокая производительность и точность вычислений.

Актуальность темы. Цифровая обработка сигналов (ЦОС) и изображений является фундаментом для современных интеллектуальных систем, включая системы компьютерного зрения, распознавания образов и анализа геоданных. Ключевой задачей ЦОС является эффективное представление, анализ и сжатие сигналов. Математический аппарат ортогональных функций и преобразований предоставляет для этого мощные инструменты, позволяя декомпозировать сложный сигнал на простые, информативные составляющие.

Цель реферата – исследовать значение и применение классов ортогональных функций в задачах цифровой обработки сигналов.

Задачи:

1. Раскрыть сущность и преимущества использования ортогональных базисов в ЦОС.
2. Описать принцип работы и значение алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ).
3. Охарактеризовать системы функций Радемахера, Хаара и Уолша, выделив их особенности и области применения.
4. Объяснить практическую связь между функциями Уолша и такими системами кодирования, как двоичный код и код Грея.

Объект исследования – математические методы цифровой обработки сигналов.

Предмет исследования – классы ортогональных функций (Фурье, Радемахера, Хаара, Уолша) и связанные с ними алгоритмы и коды.

Методы исследования: анализ научной литературы, систематизация и сравнение теоретических концепций, обобщение.

Структура работы определяется поставленными задачами и включает введение, четыре главы основной части, заключение и список источников.

1. Роль ортогональных функций в цифровой обработке сигналов

Ортогональные функции образуют базис в функциональном пространстве, аналогично тому, как ортогональные векторы образуют базис в геометрическом пространстве. Их главное свойство – равенство нулю скалярного произведения для любых двух различных функций набора. Это свойство обеспечивает уникальность разложения произвольного сигнала по такому базису и независимость (некоррелированность) полученных коэффициентов.

Применение ортогональных преобразований в ЦОС позволяет решать несколько критически важных задач:

- **Сжатие данных:** Большая часть энергии сигнала часто сосредоточена в небольшом числе коэффициентов разложения. Отбрасывая малозначимые коэффициенты, можно эффективно сжимать изображения и сигналы (как в JPEG).
- **Анализ спектра:** Преобразование Фурье раскладывает сигнал по гармоническим (синусоидальным) функциям, перенося его из временной в частотную область, что необходимо для фильтрации и спектрального анализа.
- **Выделение признаков:** Коэффициенты разложения могут служить компактным и информативным набором признаков для последующего распознавания образов в интеллектуальных системах.
- **Быстрые вычисления:** Существование быстрых алгоритмов (например, БПФ) делает эти преобразования практически применимыми в реальном времени.

2. Алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ)

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) является основным инструментом спектрального анализа. Однако прямое вычисление ДПФ требует $O(N^2)$ операций, что непрактично для больших массивов данных.

Алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ) – это семейство высокоэффективных алгоритмов, вычисляющих ДПФ за $O(N \log N)$ операций. Ключевая идея БПФ, в частности классического алгоритма Кули-Тьюки, заключается в **разделении-и-завоевании**: исходная N -точечная последовательность рекурсивно делится на две подпоследовательности половинной длины (по четным и нечетным отсчетам), ДПФ которых

вычисляются и затем комбинируются с помощью т.н. «поворачивающих множителей».

Значение БПФ для обработки изображений трудно переоценить. Он лежит в основе частотной фильтрации (удаление шума, повышение резкости), анализа текстур, алгоритмов сжатия и многих методов корреляции. Без БПФ работа с цифровыми изображениями и сигналами в реальном времени была бы невозможна.

3. Системы ортогональных функций: Радемахера, Хаара, Уолша

Помимо гармонического базиса Фурье, в ЦОС широко используются системы функций, принимающих значения +1 и -1 (или 0 и 1). Они особенно эффективны для обработки цифровых сигналов, так как их вычисление не требует операций умножения.

3.1. Функции Радемахера

Функции Радемахера — это последовательность функций, принимающих значения +1 и -1, определённых на интервале. Они задаются следующим образом:

$$r_k(t) = \text{sign}(\sin(2^k \pi t)), k=0,1,2,\dots$$

Эти функции образуют ортогональную систему и используются для построения других систем ортогональных функций. Функции Радемахера особенно удобны для анализа сигналов с резкими переходами и для построения функций Уолша.

Свойства функций Радемахера:

- Ортогональность: скалярное произведение любых двух различных функций Радемахера равно нулю.
- Простота: функции Радемахера легко вычисляются и реализуются на цифровых устройствах.
- Универсальность: функции Радемахера могут использоваться для построения других систем ортогональных функций.

Функции Радемахера находят применение в задачах цифровой обработки сигналов, включая анализ спектра, фильтрацию и сжатие данных.

3.2. Функции Хаара

Функции Хаара — это простейшие ортогональные функции, впервые предложенные Альфредом Хааром. Они определяются рекурсивно и принимают значения +1, -1 и 0. Базис Хаара используется для анализа сигналов

с резкими изменениями, таких как импульсные сигналы и изображения. Преимущество функций Хаара — их простота и эффективность при реализации на цифровых устройствах.

Свойства функций Хаара:

- Ортогональность: скалярное произведение любых двух различных функций Хаара равно нулю.
- Простота: функции Хаара легко вычисляются и реализуются на цифровых устройствах.
- Эффективность: функции Хаара позволяют эффективно анализировать сигналы с резкими переходами.

Функции Хаара широко применяются в задачах цифровой обработки сигналов, включая анализ спектра, фильтрацию и сжатие данных.

3.3. Функции Уолша

Функции Уолша — это система ортогональных функций, построенных на основе функций Радемахера. Каждая функция Уолша представляет собой произведение функций Радемахера, упорядоченных по коду Грея. Функции Уолша широко применяются в анализе, сжатии и фильтрации сигналов, а также в цифровой обработке изображений.

Свойства функций Уолша:

- Ортогональность: скалярное произведение любых двух различных функций Уолша равно нулю.
- Простота: функции Уолша легко вычисляются и реализуются на цифровых устройствах.
- Универсальность: функции Уолша могут использоваться для анализа и сжатия сигналов различного типа.

Функции Уолша находят применение в задачах цифровой обработки сигналов, включая анализ спектра, фильтрацию и сжатие данных.

4. Практические аспекты кодирования: двоичный код и код Грея

Системы функций Уолша и Радемахера тесно связаны с теорией кодирования. Номер функции Уолша n часто представляется в двоичном коде. Однако при переходе между соседними функциями Уолша в естественном порядке (или при сканировании пространства в задачах обработки изображений) изменение сразу нескольких бит в двоичном коде может приводить к ошибкам.

Код Грея – это циклический код, в котором два соседних значения отличаются только **в одном бите**. Это свойство делает его исключительно полезным:

- В **цифровых преобразователях** угла/положения для исключения ошибок при переходе между секторами.
- В построении и индексации **функций Уолша**, где упорядочение по коду Грея соответствует естественному порядку функций Уолша (упорядочение Уолша-Пэли).
- В алгоритмах **последовательного сканирования** и минимизации ошибок квантования в задачах обработки геоизображений и карт.

Таким образом, понимание связи между кодом Грея и функциями Уолша позволяет не только эффективно генерировать и использовать этот ортогональный базис, но и создавать более надежные аппаратные и программные системы для ЦОС.

Заключение

В ходе исследования было установлено, что классы ортогональных функций являются краеугольным камнем современной цифровой обработки сигналов и изображений.

1. **Ортогональные преобразования** (Фурье, Уолша, Хаара) обеспечивают переход в домен, где информация о сигнале представляется в более компактной и анализируемой форме, что критично для сжатия, фильтрации и распознавания.
2. **Алгоритм БПФ** сделал спектральный анализ практически осуществимым, став основным вычислительным инструментом в частотной области.
3. **Дискретные системы функций** (Уолша, Хаара), принимающие значения $+1/-1$, обладают высокой вычислительной эффективностью и особой применимостью для обработки сигналов с резкими перепадами и двоичных данных.
4. **Связь функций Уолша с кодом Грея** демонстрирует глубокое единство математического аппарата ЦОС и теории кодирования, что используется для построения надежных и быстрых алгоритмов.

Изучение этих методов формирует фундаментальную базу для решения прикладных задач в рамках дисциплины «Обработка изображений в интеллектуальных системах», таких как улучшение геоизображений, их сегментация и последующее распознавание объектов.

Список использованных источников

1. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М. : Техносфера, 2019. – 1160 с.
2. Ахмед, Н. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов / Н. Ахмед, К.Р. Рао. – М. : Связь, 1980. – 248 с.
3. Сергиенко, А.Б. Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко. – 3-е изд. – СПб. : Питер, 2011. – 768 с.
4. Яне, Б. Цифровая обработка изображений / Б. Яне. – М. : Техносфера, 2007. – 584 с.
5. Крот, А.М. Быстрые алгоритмы и программы цифровой спектральной обработки сигналов и изображений / А. М. Крот, Е. Б. Миневрина. – Минск: Наука и техника, 1995. – 165 с.