

Кодирование

Введем образующую матрицу и отправляемый вектор:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

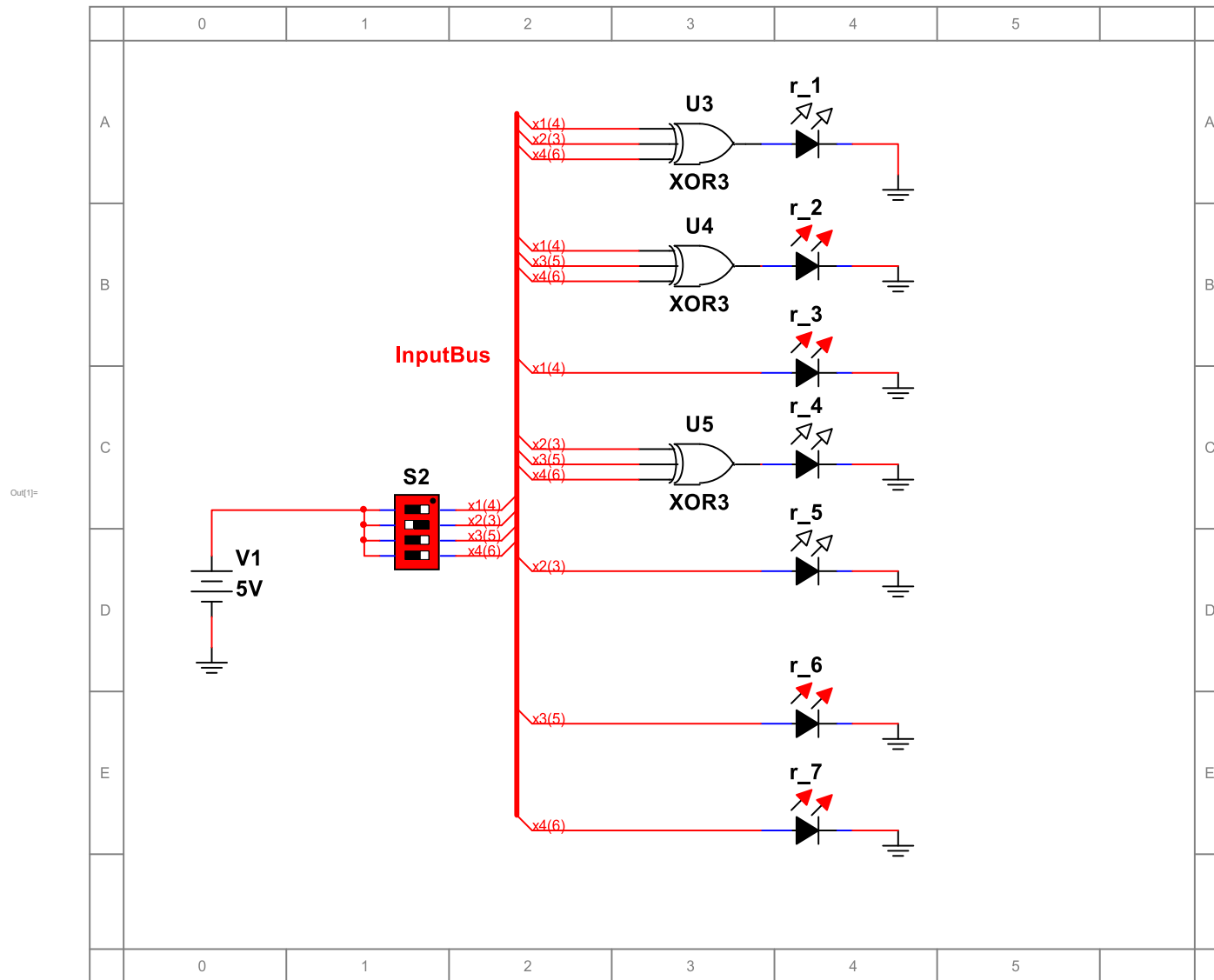
Тогда кодируемый вектор получается умножением отправляемого вектора на образующую матрицу:

$$\text{encoded} = Gx = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2 + x_4) \bmod 2 \\ (x_1 + x_3 + x_4) \bmod 2 \\ x_1 \bmod 2 \\ (x_2 + x_3 + x_4) \bmod 2 \\ x_2 \bmod 2 \\ x_3 \bmod 2 \\ x_4 \bmod 2 \end{pmatrix}$$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Остается реализовать СФЭ:



Декодирование

Проверка ошибок

Обозначим полученный вектор следующим образом:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \end{pmatrix}$$

Введем проверочную матрицу:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Перемножением проверочной матрицы и полученного блока получим синдром:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} (r_1 + r_3 + r_5 + r_7) \bmod 2 \\ (r_2 + r_3 + r_6 + r_7) \bmod 2 \\ (r_4 + r_5 + r_6 + r_7) \bmod 2 \end{pmatrix}$$

Например

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ненулевое значение синдрома означает наличие как минимум одной ошибки.

Ненулевой синдром совпадает с одним из столбцов проверочной матрицы, в случае одной ошибки номер столбца равен номеру неверного бита.

В **первом** примере ошибок в кодовом слове **не обнаружено**.

Во **втором** примере синдром совпадает с **третьим** столбцом проверочной матрицы, следовательно **третий** бит передан с ошибкой.

Декодирование исправленного вектора

Введем матрицу декодирования:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ее роль сводится к выбору битов r_3 , r_5 , r_6 и r_7 :

$$Rr = \begin{pmatrix} r_3 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \end{pmatrix}$$

