رضا

به نام خدا
ریشه گیری - توان - رادیکال

درخصوص اپراطورها و یا عملگرهای ریاضی ۴ نوع سوال می توان داشت

① عدد ۲ چند بار با خودش جمع شود تا حاصل ۱۶ شود و یا عدد ۲ را چهار بار جمع بزنیم حاصل چیست ← عمل ضرب پاسخ است

$2+2+2+2 = 4\times 2$

② عدد ۲ را چهار بار در خودش ضرب کنیم ← توان رساندن

$2\times2\times2\times2=2^4$

③ کدام عدد را ۴ بار در خودش ضرب کنیم حاصل ۱۶ می شود ← ریشه چهارم

$\sqrt[4]{16}=2 \longleftrightarrow 2^4=16$

④ عدد ۲ را چند بار در خودش ضرب کنیم (به چه توانی برسانیم) تا ۱۶ حاصل شود ← لگاریتم پاسخگو است

$\log_2^{16}=4 \longleftrightarrow 2^4=16$

* اکنون سوال و جواب شماره ۳ در این درس مورد بررسی قرار می گیرد و شماره ۴ به سال آینده موکول می شود

اکنون تعریف می کنیم

$$x^n=\begin{cases}\underbrace{x\times x\times x\cdots x}_{n\ \text{بار}} & n>0 \quad n\in Z\\ \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdots\times\frac{1}{x} & x\neq 0 \ \text{و}\ n<0\end{cases}$$

و متقابلاً آن ریشه n ام (n طبیعی) تعریف می شود:

$(n>1, n\in N)$ ریشه n ام x = $x^{1/n}=\sqrt[n]{x}$

$\sqrt[n]{x}$ یا $x^{1/n}$ ، عددی حقیقی مانند y است

$\sqrt[n]{x}=y \iff y^n=x$

این تعریف دارای ملزوماتی است تا قابل قبول باشد:

اگر n زوج بود x حتماً باید مثبت باشد در غیر این صورت $\sqrt[n]{x}$ قابل تعریف نیست

مثال: $\sqrt[4]{16}=2$ و $\sqrt[4]{-16}\equiv$ غیرقابل قبول

نکته: تمام قواعدی که برای اعداد توان دار با توان صحیح فرا گرفته اید برای توان های کسری نیز قابل قبول است برای پی گیری مسئله ، فعالیت ص ۹۰ کتاب درسی در مورد وزن باکتری ها را پی گیری کنید

معرفی توان کسری: یک کرم باکتری در مدت یکساعت وزنش ۲ برابر می‌شود.
فرض کنید در مدت نیم ساعت وزن b برابر بشود

$2^1 \leftarrow$ پس از یکساعت $\leftarrow 2^{1/2} \leftarrow$ پس از نیمساعت $\equiv$ $b\cdot b=b^2$ پس از یکساعت $\leftarrow b \leftarrow$ پس از نیم ساعت

$b^2=2 \to b=\sqrt{2}=2^{1/2}$

این نتیجه برای توان‌های دیگر نیز برقرار است
یعنی

$n\geq 2$ و $a>0 \to a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

نکته ①: اگرچه داریم

$8^{\frac{1}{3}}=2 \iff \sqrt[3]{8}=2 \iff 2^3=8$

$-2^3=8 \iff \sqrt[3]{-8}=-2 \not\iff (-8)^{1/3}=-2$

یعنی اگر $a<0$ در اینصورت $a^{1/n}$ تعریف نمی‌شود یعنی $(-8)^{1/3}$ و $(-2)^{1/2}$ و $(-27)^{1/3}$ تعریف نمی‌شوند اگرچه $\sqrt[3]{-1}=-1$ و $\sqrt[3]{-27}=-3$ قابل تعریف است

نکته ②: $a>0$ و $m,n\in N$ و $\frac{m}{n}\notin Z \Rightarrow a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

اثبات: $a^{\frac{m}{n}}=(a^m)^{1/n}=\sqrt[n]{a^m}$

نکته ③: قواعد و محاسبات اعداد توان‌دار برای توان‌های r و s (گویا) و $a>0$ و $b>0$ برقرار است

1) $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$ 2) $(a^r)^s=a^{rs}$ 3) $(ab)^r=a^r\cdot b^r$

قضایای محاسبات رادیکالی (همه قضایا بشرط قابل تعریف بودن رادیکال است)

① $a,b\in R \to \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

اثبات: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=a^{1/n}\cdot b^{1/n}=(ab)^{1/n}=\sqrt[n]{ab}$ مثال: $\sqrt[3]{-2}\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{-12}$

سؤال: $\sqrt[n]{ab}\overset{?}{=}\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \xrightarrow{\text{مثال نقض}} \sqrt[4]{(-2)(-8)}\neq\sqrt[4]{-2}\sqrt[4]{-8}$

② $a\neq 0$ و $m\in Z \to (\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

اثبات: $(\sqrt[n]{a})^m=(a^{1/n})^m=(a^m)^{1/n}=\sqrt[n]{a^m}$ $\Big\} \to (\sqrt[n]{a})^n=\sqrt[n]{a^n}=a$

③ $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a & \text{n فرد باشد}\\ a & a>0 \quad \text{n زوج باشد}\\ -a & a<0\end{cases}$

④ $|a|=\sqrt{a^2}=\begin{cases}a & a\geq 0\\ -a & a<0\end{cases}$

⑤ $a,b\geq 0$ و n زوج $\Longrightarrow a\sqrt[n]{b}\overset{?}{=}\sqrt[n]{a^nb}$ ← و اگر n فرد باشد a و b هر عدد حقیقی است

اثبات: $a\sqrt[n]{b}=a^{\frac{n}{n}}\times b^{1/n}=(a^n)^{1/n}\cdot b^{1/n}=(a^nb)^{1/n}=\sqrt[n]{a^nb}$

$= 1-\sqrt{2} \implies (B - B^{-1})^{3} = ?$

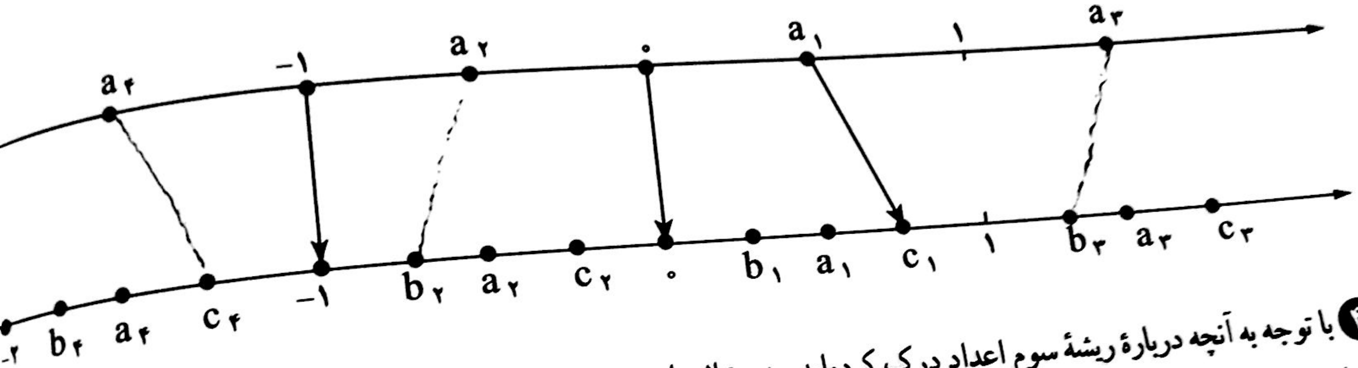
۳

۲ مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید (می‌توانید از ماشین‌حساب استفاده کنید).

$\sqrt{10}$ $\sqrt[3]{25}$ $\sqrt[3]{7/25}$

$\sqrt[5]{16}$ $\sqrt[5]{64}$ $\sqrt[4]{90}$

۳ مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از اعداد مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که با ریشهٔ سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید).



۴ با توجه به آنچه دربارهٔ ریشهٔ سوم اعداد درک کرده‌اید، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} > a$. a چه عددی می‌تواند باشد؟ $0 < a < 1$

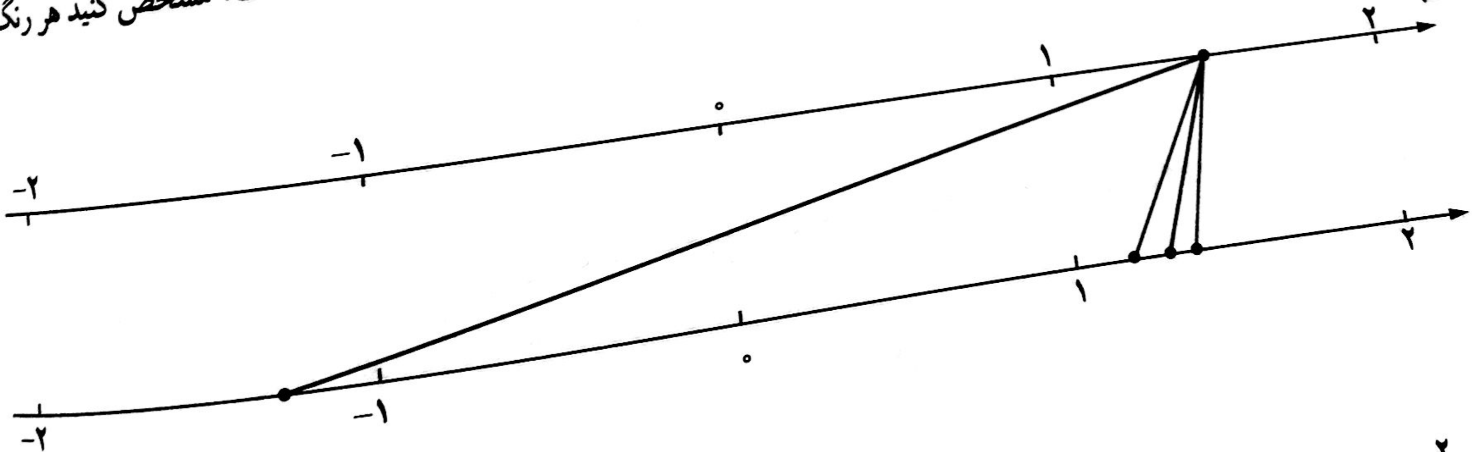
ب) a عددی است که ریشهٔ سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی $\sqrt[3]{a} = a$. a چه اعدادی می‌تواند باشد؟

پ) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} < a$. a چه اعدادی می‌تواند باشد؟

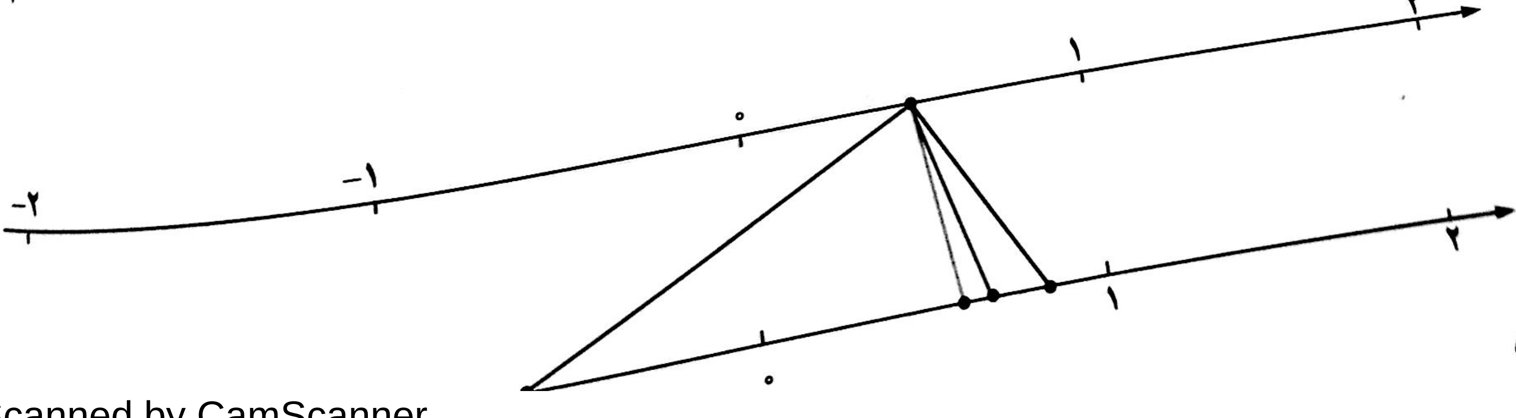
ت) به موارد (الف) و (پ) برای حالتی که a عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.

۵ در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.

(الف)

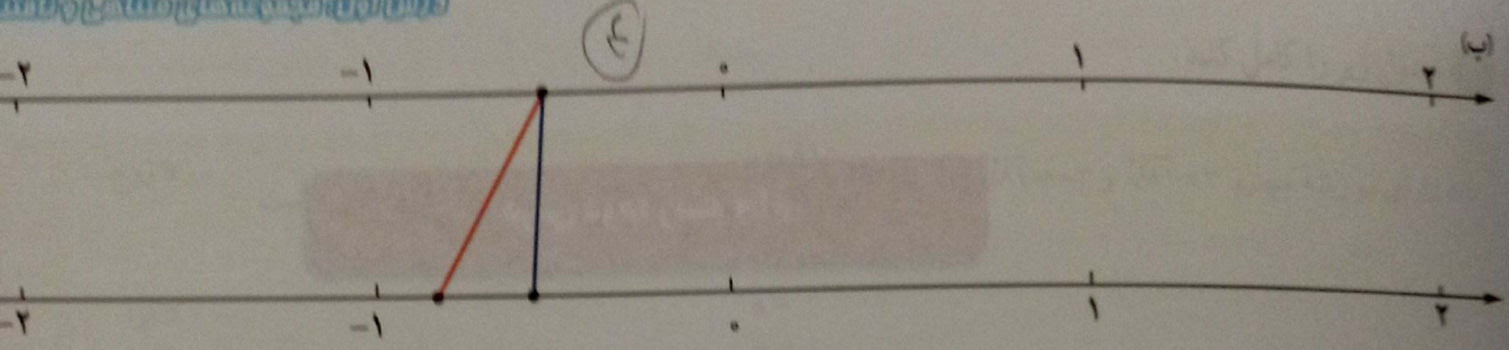


(ب)

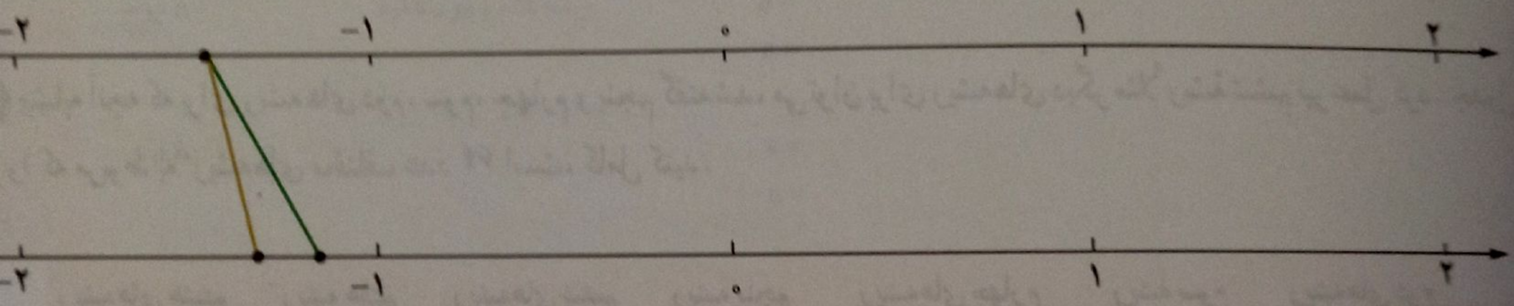


Scanned by CamScanner

پ)



ت)



۶ جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۳ و .... ریشه‌های چهارم عدد .... می‌باشند.

ب) اگر $a = \sqrt[4]{16}$ باشد، در این صورت حاصل عبارت $a^3 + 5$ را بیابید.

۷ می‌دانیم $\sqrt[5]{161051} = 11$ ، $\sqrt[5]{1700000}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۸ در جاهای خالی یکی از علامت‌های « > » ، « < » یا « = » را قرار دهید.

$2^5 \bigcirc 2^2$ $(0/1)^5 \bigcirc (0/1)^3$ $(-0/1)^5 \bigcirc (-0/1)^3$

$0/1 \bigcirc \sqrt[5]{0/00001}$ $(-2)^5 \bigcirc (-2)^3$ $(-2)^5 \bigcirc (-2)^4$

۹ قرار دهید $\square = \sqrt[5]{a}$. اکنون با توجه به تعریف مشخص کنید $\square^5$ برابر چه عددی است؟ بنابراین داریم $(\sqrt[5]{a})^5 = \cdots$ دربار $(\sqrt[4]{a})^4$ چه می‌توان گفت؟

۵

تمرین

۱ الف) یکی از علامت‌های < یا > را در □ قرار دهید.

$\sqrt{۰/۲۵}\ \square\ \sqrt[۳]{۰/۱۲۵}$ $\qquad$ $(۰/۵)^۲\ \square\ (۰/۵)^۳$

ب) وقتی $۰<a<۱$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در □ قرار دهید.

$\sqrt{a}\ \square\ \sqrt[۳]{a}$ $\qquad$ $a^۲\ \square\ a^۳$

۲ فرض کنیم $a=-۱$ است، در □ علامت مناسب را قرار دهید.

$\sqrt[۵]{a}\ \square\ \sqrt[۱۱]{a}$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{a}\ \square\ \sqrt[۵]{a}$

$a^۳\ \square\ a^۵$ $\qquad$ $a^۲\ \square\ a^۳$

۳ با توجه به تعریف ریشهٔ (اگر $\sqrt[n]{a}=b$ آنگاه $b^n=a$)، نشان دهید برای هر عدد a و هر عدد طبیعی n (به‌شرط با معنا بودن رادیکال) رابطه زیر برقرار است:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$$

۴ آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$ برقرار است؟ n را برابر ۴،۳ یا ۵ بگیرید و به‌جای a و b مقدارهای عددی بدهید.

۵ عددهای زیر را مانند نمونه محاسبه کنید.

$$۵^{-۳}=\frac{۱}{۵^۳}=\left(\frac{۱}{۵}\right)^۳ \rightarrow \sqrt[۳]{۵^{-۳}}=\frac{۱}{۵}$$

$\sqrt[۴]{۳^{-۴}}=$

$\sqrt[۵]{۲^{-۵}}=$ $\qquad$ $\sqrt[۷]{\frac{۱}{۱۲۸}}=$

۶ به‌جای a و b و عدد طبیعی n عددهایی قرار دهید؛ به‌طوری که:

الف) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار باشد.

ب) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار نباشد. (وقتی n زوج است، a و b هر دو مثبت‌اند).

ص ۷۰

۶

دبیر: آفرین حمیده، جواب شما درست است. البته می‌توانید، همان‌گونه که قبلاً گفتیم چون ۴ عددی زوج است از الگوی زیر نیز استفاده کنید.

$\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$

۲ با توجه به فعالیت ۱ در صفحهٔ قبل تساوی‌ها را کامل کنید.

الف) $(5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = (\sqrt{5})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{5}} = \qquad = \qquad = 5^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}$

ب) $(4^{\frac{1}{7}})^{\frac{1}{5}} = (\sqrt[7]{4})^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\quad} = \sqrt[5\times7]{4} = 4^{\frac{1}{35}} = 4^{\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}}$

پ) اکنون برای هر عدد $a>0$، به ازای هر دو عدد گویای غیرصحیح r و s درستی تساوی $(a^r)^s=a^{rs}$ را برای $r=\frac{1}{4}$ و $s=\frac{1}{2}$، تحقیق کنید.

$(a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[4]{a})^{\frac{1}{3}} = \qquad = a^{\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}$

تمرین

۱ هر یک از توان‌های کسری زیر را به‌صورت رادیکال بنویسید.

$(4^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} =$

$4^{\frac{3}{7}} =$ $\quad 5^{\frac{1}{2}} =$ $\quad 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} =$ $\quad 16^{\frac{1}{2}} =$

$4^{\frac{2}{3}} =$ $\quad 3^{\frac{1}{2}} =$ $\quad a^{\frac{2}{7}} =$

$17^{-\frac{1}{2}} =$ $\quad 32^{\frac{2}{5}} =$ $\quad 32^{-\frac{1}{5}} =$

۲ هر یک از رادیکال‌ها را به‌صورت توان کسری بنویسید. توجه داشته باشید که نمای کسری وقتی معنا دارد که پایهٔ عدد مثبت باشد.

$\sqrt[7]{a} =$ $\quad \sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}} =$ $\quad \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt[5]{2^{10}} =$ $\quad \sqrt[n]{a^2} =$ $\quad \sqrt[4]{a^3} =$

۳ می‌دانیم

$\sqrt[12]{a^4} = (a^4)^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{4}{12}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

$\sqrt[6]{a^2} = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

آیا تساوی $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$ همواره برقرار است (a>0)؟ n،m و k طبیعی‌اند نتیجه بگیرید که هر سه عدد $\sqrt{2}$، $\sqrt[4]{2^2}$ و $\sqrt[6]{2^3}$ برابرند.

۴ فرض کنیم a=64، $r=\frac{1}{2}$ و $s=\frac{1}{3}$ مقدارهای عددی $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای r، a و s انتخاب کنید و بار دیگر مقدارهای $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید. می‌توانید از ماشین حساب کمک بگیرید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵ حساب کنید.

$\sqrt{\sqrt{81}} =$ $\quad \sqrt{\sqrt[3]{64}} =$ $\quad \sqrt[3]{\sqrt{5}} =$

تفضیه ۶: بشرط قابل تعریف بودن $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \overset{?}{=} \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\xleftarrow{\text{اثبات}}$ ⑥ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

⑦ $a \geq 0$ و $k \in N \longrightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$

اثبات: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n} = a^{\frac{k}{kn}} = (a^k)^{\frac{1}{kn}} = \sqrt[kn]{a^k}$

تبصره ← k, n فرد ، $a \in R \longrightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$

مثال: حاصل A را به ساده ترین صورت بنویسید

$$A = \sqrt[6]{16 \times 18^5 \times 24^7} = \cdots = 288\sqrt[6]{243}$$

⑧ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ $\xrightarrow{\text{اثبات}}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (\sqrt[n]{a})^{1/m} = (a^{1/n})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$

مثال:

$$A = \sqrt{\sqrt[3]{2} \times \sqrt{\sqrt{2}}} = \cdots = \sqrt[24]{128}$$

⑨ $\sqrt[m]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n \cdot b^m}$ به شرط قابل تعریف بودن

اثبات: $\sqrt[m]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n} \cdot \sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{a^n b^m}$

مثال:

$$A = (17 + 12 \times 2^{0.5})^{0.25} \times (48 - 32 \times 2^{0.5})^{0.5} = \sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}} \times \sqrt{48 - 32\sqrt{2}} =$$

$$\sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}} \times \sqrt{16(3 - 2\sqrt{2})} = 4\sqrt[4]{(3 + 2\sqrt{2})^2} \times \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = 4\sqrt{(3 + 2\sqrt{2})}\sqrt{(3 - 2\sqrt{2})}$$

$$= 4\sqrt{(9 - 8)} = 4$$

⑩ $A, B > 0$ و $C = \sqrt{A^2 - B}$ قابل تعریف

$$\begin{cases} \sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}} \\ \sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}} \end{cases}$$

⟵ مثال: $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \overset{C=1}{=} \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$

⟵ مثال: $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{7 - \sqrt{48}} \overset{C=1}{=} \sqrt{\frac{7+1}{2}} - \sqrt{\frac{7-1}{2}}$

گویا کردن مخرج کسرها

در بسیاری از عبارتهای جبری کسری، در مخرج کسر عبارتهای رادیکالی موجود است که به کمک راهکارهایی می‌توان مخرج کسر را گویا کرد

مثال $A = \frac{3 + \sqrt{5}}{7 - \sqrt{3}} \longrightarrow A = \frac{3 + \sqrt{5}}{7 - \sqrt{3}} \cdot \frac{7 + \sqrt{3}}{7 + \sqrt{3}} = \frac{21 + 3\sqrt{3} + 7\sqrt{5} + \sqrt{15}}{49 - 3}$

سایر راهکارهای گویا کردن را بعد از مبحث اتحادها و عبارات جبری خواهیم دید

تمرین های تکلیفی از مبحث رادیکالها

(۴۶) $A=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{1-\sqrt{2}} \Longrightarrow A^3-3A=?$

(۴۷) $B=1-\sqrt{2} \Longrightarrow (B-B^{-1})^{\frac{1}{3}}=?$

(۴۸) $x\geqslant 0 \Longrightarrow A=x^2\sqrt{x^2\sqrt{x^3}} \div \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=?$

(۴۹) $A=\sqrt{x^2-6\sqrt{x^2}+9}$ و $0\leqslant x<3 \Longrightarrow A=?$

(۵۰) $x=3-\sqrt{2} \Longrightarrow x^2=\frac{49}{11+6\sqrt{2}}$

تمرینهای ۵۱ الی ۶۰ را پس از مباحث اتحادهای جبری پی می‌گیریم

(۵۱) $A=(9+4\sqrt{5})^{1/3}\cdot(9-4\sqrt{5})^{1/3}=?$

(۵۲) $A=\left(\sqrt[5]{3\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}\right)^{10}=?$

(۵۳) $A=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}+\sqrt[3]{(1-\sqrt{3})^3}+\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^3}$

(۵۴) $A=\frac{1}{3-\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}-2}$

(۵۵) $A=\left(\frac{4^{0/75}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+9^{0/25}\right)(2^{0/5}-1)=?$

(۵۶) $A=\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}-\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}=?$

(۵۷) $x=2-\sqrt{3} \longrightarrow A=x^5-\frac{x^3}{7+4\sqrt{3}}+\frac{x}{2+\sqrt{3}}-x^2+1=?$

(۵۸) $A=\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}+1}}}=?$

(۵۹) گویا کنید مخرج کسر را: $A=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{15}}$

(۶۰) عدد $\sqrt{2}$ را با تقریب دو رقم اعشار به روش مدرج کردن محور اعداد حقیقی تعیین کنید