Contenido:

Unidad I

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

1) Definiciones básicas
2) Ecuaciones diferenciales de variables separables
3) Ecuaciones diferenciales exactas
4) Ecuaciones diferenciales homogéneas
5) Ecuaciones diferenciales lineales
6) Ecuaciones diferenciales de Bernoulli
7) Factor integrante
8) Aplicaciones, modelado con ecuaciones diferenciales de primer orden

Unidad II

Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

1) Ecuaciones diferenciales de orden superior
2) Reducción de orden
3) Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes
4) Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas
5) Ecuaciones de Cauchy & Euler
6) Método de coeficientes indeterminados
7) Método de variación de paramentos

Unidad III

Definición de trasformada de la place

1) Propiedades básicas de la trasformada de la place
2) Trasformada de derivadas e integrales
3) Transformada inversa
4) Funciones escalonadas
5) Funciones periódicas
6) Aplicaciones (uso de trasformada de la place para resolver Ecuaciones diferenciales de valor inicial)
7) Sistema de ecuaciones diferenciales lineales

Sistema de evaluación

El curso está dividido en 3 partes:

Parte 1	Prueba escrita Control de lectura Tarea ex-aula Actividades evaluadas en clase	30%
Parte 2	Prueba escrita Control de lectura Tarea ex-aula Actividades evaluadas en clase	35%
Parte 3	Prueba escrita Control de lectura Tarea ex-aula Actividades evaluadas en clase	35%

Bibliografía

1) Ecuaciones diferenciales
   Dennis G.Zill 9º edición, CENGAGE Learning

2) Ecuaciones diferenciales
   Dennis G.Zill 3º edición, Editorial MC Graw Hill

3) Ecuaciones diferenciales elementales y problemas con condiciones de frontera
   C.H. Edward, Jr. David E. Penrey 3º edición, editorial Prentice Hall

4) Ecuaciones diferenciales
   Simons, Editorial Prentice Hall

5) Ecuaciones diferenciales con valores en la frontera
   Boyu, Diprima, Editorial Limusa

6) Ecuaciones diferenciales
   Rainville, Bedient, 8º edición, Editorial Prentice Hall

7) Ecuaciones diferenciales aplicadas
   Marry R. Spiegel, 3º edición, Editorial Prentice Hall

8) Introducción a las ecuaciones diferenciales con problemas de valor de frontera
   Stephen L. Campbell, primera decisión, Editorial Mc Graw Hill

Unidad I

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Ecuaciones diferenciales:

Definición:

Una ecuación diferencial es una ecuación que incluye expresiones o términos que involucran derivadas de una o más expresiones o términos que involucran derivadas de una o más variables independientes (V.D.) con respecto a una o más variables independientes (V.I), es decir, son ecuaciones que contienen derivadas.

Ejemplo 1:

$$y = \int e^x \ dx$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

V.I. = “X”
V.D. = “Y”

Ejemplo 2:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \cos(x)$$

V.I. = X
V.D. = Y

Ejemplo 3:

$$\frac{d^3v}{dt^3} + \frac{d^3v}{dx^3} + \frac{d^3v}{dydxdz} = 20$$

V.I. = “x, y, z, t”
V.D. = “v”

Ejemplo 4:

$$\mathrm{x}^2\mathrm{y} = \sin(x)$$

Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales se pueden clasificar de la siguiente manera:

1) Por el numero de variables independientes que contenga
2) De acuerdo al orden de la ecuación diferencial
3) Según la linealidad de la variable independiente

Clasificación por el número de variables independientes (V.I)

Una ecuación diferencial por el número de variables independientes se clasifica en:

a) Ecuaciones diferenciales ordinarias (con una V.I.)
b) Ecuaciones diferenciales parciales (con más de una V.I.)

Ecuaciones diferenciales ordinarias:

Son aquellas en las que aparecen derivadas de las variables dependientes con respecta a una única variable independiente.

Ejemplo 1:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx} + 4y = \sin(x)$$

Ejemplo 2:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \cos(x)$$

Ecuaciones diferenciales parciales:

Son aquellas ecuaciones en las que aparecen derivadas de la variable dependiente con respecto a un o más variables independientes.

Ejemplo 1:

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}=4$$

V.I. = “x, y”
V.D. = “z”

Ejemplo 2:

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{dw}{dy}+\frac{dw}{dz}=15$$

V.I. = “x, y, z”
V.D. = “w”

Clasificación por el orden de la ecuación diferencial

El orden de una ecuación diferencial se determina por la derivada más alta que exista en la ecuación diferencial t estas pueden ser:

a) De primer orden
b) De orden superior

Nota: El grado de una ecuación diferencial es el exponente de la derivada más alta que contenga la ecuación diferencial.

Ejemplo 1:

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{dy}{dx}=\mathrm{sen(x)}$$

E.D. de cuarto orden, Grado 1

Ejemplo 2:

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^6+\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=e^{x}$$

E.D. de tercer orden, Grado 6

Ejemplo 3:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5+2\frac{dy}{dx}=\mathrm{sen(x)}$$

E.D. de segundo orden, Grado 5

Ejemplo 4:

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{d^3z}{dx^3}=e^{x})$$

E.D. de cuarto orden, Grado 1

Clasificación por la linealidad de la variable dependiente

Se dice que una ecuación diferencia es lineal y de orden “n” en términos de la variable dependiente su pude escribirse en la forma:

Ecuación diferencial en “y”

$$\boxed{a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = \mathrm{g(x)}}$$

La ecuación diferencial anterior cumple con las siguientes condiciones:

1) La variable dependiente y todas sus derivadas estén elevadas a la potencia unidad.

Ejemplo 1:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx} + 4y^2 = \mathrm{sen(x)}$$

No es una E.D. lineal

Ejemplo 2:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 4y = x^2$$

No es una E.D. lineal

2) Que no exista producto de la variable dependiente con sus derivadas.

Ejemplo:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + y\frac{d^2 y}{dx^2} + 6y = \mathrm{e^x}$$

No es una E.D. lineal

3) Que no exista producto de las derivadas entre si

Ejemplo:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2y = 3\mathrm{x}$$

No es E.D. lineal

4) Que la función del lado derecho sea una función solamente en términos de la variable independiente o ser simplemente una constante.

Ejemplo a:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 4y = \mathrm{xy} \longrightarrow \text{No es E.D. lineal}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 4y - \mathrm{xy} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y(4 - \mathrm{x}) = 0 \longrightarrow \text{Ahora es E.D. lineal}$$

Ejemplo b:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y = \mathrm{xy}^2 \longrightarrow \text{No es E.D. lineal}$$

5) La variable dependiente no puede estar de argumento de las funciones: logarítmicas, trigonométricas o de exponente de una función exponencial.

Ejemplo a:	Ejemplo b:
$\frac{dy}{dx} + \cos(y) = \tan(\mathrm{x})$	$\frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{e}^{2\mathrm{y}} = \mathrm{x}^2$
No es E.D. lineal	No es E.D. lineal

Ejemplo c:	Ejemplo d:
$\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{dy}{dx} + ysen(x) = e^x$	$\frac{d^4y}{dx^4} + 4y = \cos(x)$
No es E.D. lineal	Si es E.D. lineal en "y"

Ejemplo:

Determinar si la siguiente ecuación diferencial es lineal.

$(xy - y)dx + x^2dy = 0$ $\longrightarrow$ Dividimos entre dx

$$(xy - y) + x^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$x^2\frac{dy}{dx} + y(x - 1) = 0$ $\longrightarrow$ E.D. lineal

Nota: Toda ecuación lineal es de grado uno, pero no toda ecuación de grado uno es lineal

Solución de una ecuación diferencial

La solución de una ecuación diferencial es una ecuación que no contiene derivadas o diferenciales y que además debe satisfacer la ecuación, conteniendo constates arbitrarias según sea el orden de la ecuación diferencial, resultando ser una relación entre las variables dependientes e independientes.

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$\frac{y}{8}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x}{2}$ $\longrightarrow$ E.D. no lineal, de orden 1

$$\frac{1}{8}(ydy) = \frac{1}{2}(xdx)$$

$$\frac{1}{8}\int y dy = \frac{1}{2}\int x dx \longrightarrow \frac{1}{8}\left(\frac{y^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right) + c$$

$$\frac{y^2}{16} = \frac{x^2}{4} + c \longrightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = c \longrightarrow \text{Hiperbola}$$

Solución particular

c=1 ^ c=-1

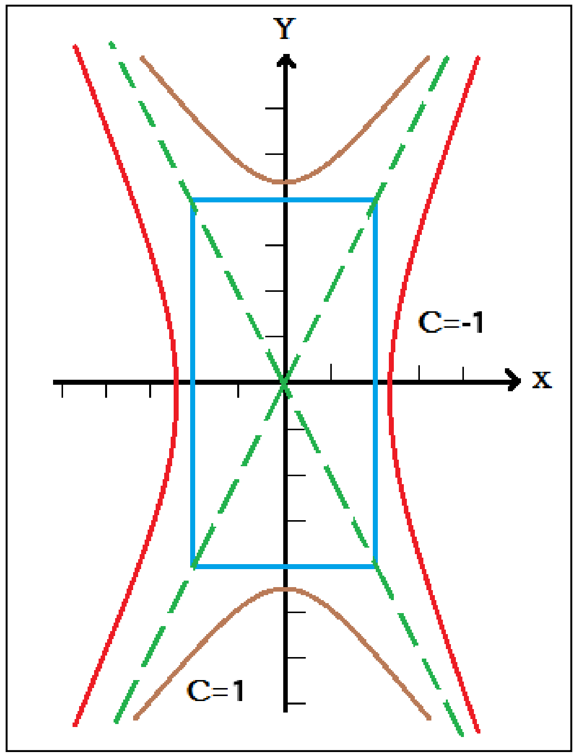
Para c=1

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$$

Para c=-1

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = -1 \text{ (Por -1)}$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$



Todas estas familias infinitas de curvas generadas por diferentes soluciones particulares son soluciones de la ecuación diferencial y es a la que se conoce como “Familia un paramétrica de soluciones” o “Curvas integrales”.

Las soluciones generales y particulares de una ecuación diferencial pueden venir dadas en la forma:

Explicita: Cuando la variable dependiente puede expresarse en términos de la variable independiente.

$$y = f(x) + c$$

Ejemplo:

$y = x^3 + x + 4 + c$ $\longrightarrow$ Explicita

Implícita: Cuando la variable dependiente no puede expresarse en términos de la variable independiente.

$$f(x, y) = c$$

Ejemplo:

$(x, y)^2 = cxe^{\frac{y}{x}}$ $\longrightarrow$ Implícita

Comprobación de la solución de una ecuación diferencial

Para comprobar que una solución determinada es solución de una ecuación diferencial se hace lo siguiente:

1) Derivar la solución general o particular tantas veces como sea el orden de la ecuación diferencial.
2) Sustituir en la ecuación diferencial las derivadas encontradas si la solución está en forma explícita, pero si esta en forma implícita debe trabajarse algebraicamente para llegar a la ecuación diferencial.
3) Verificar que igualdad se cumpla.

Ejemplo a

Comprobar que $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x}$ es solución de la ecuación diferencial: $y'' + y' - 12y = 0$

Solución:

$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x}$ $\longrightarrow$ Forma Explicita

$y' = 3c_1 e^{3x} - 4c_2 e^{-4x}$

$y'' = 9c_1 e^{3x} + 16c_2 e^{-4x}$

$\boldsymbol{y'' + y' - 12y = 0}$

$9c_1 e^{3x} + 16c_2 e^{-4x} + 3c_1 e^{3x} - 4c_2 e^{-4x} - 12c_1 e^{3x} - 12c_2 e^{-4x} = 0$

0=0

R/ Si es una solución de la ecuación diferencial

Ejemplo b

Comprobar que $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$ es solución de la ecuación diferencial: $y'' - 6y' + 6y = 0$

$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$ $\longrightarrow$ Forma Explicita

$y' = 3c_1 e^{3x} + 2c_2 e^{2x}$

$y'' = 9c_1 e^{3x} + 4c_2 e^{2x}$

$\boldsymbol{y'' - 6y' + 6y = 0}$

$9c_1 e^{3x} + 4c_2 e^{2x} - 18c_1 e^{3x} - 12c_2 e^{2x} + 6c_1 e^{3x} + 6c_2 e^{2x} = 0$

$-3c_1 e^{3x} - 2c_2 e^{2x} = 0$

R/ No es una solución de la ecuación diferencial

Ejemplo c

Comprobar que $y = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x$ es solución de la ecuación diferencial: $y'' - 2y' + y = e^x$

$y = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x$ $\longrightarrow$ Forma Explicita

$$y' = c_1e^x + c_2xe^x + c_2e^x + \frac{1}{2}x^2e^x + xe^x$$

$$y'' = c_1e^x + c_2xe^x + c_2e^x + c_2e^x + \frac{1}{2}x^2e^x + xe^x + xe^x + e^x$$

$$y'' = c_1e^x + c_2xe^x + 2c_2e^x + \frac{1}{2}x^2e^x + 2xe^x + e^x$$

$$\boldsymbol{y'' - 2y' + y = e^x}$$

y'' $\longrightarrow$ $c_1e^x + c_2xe^x + 2c_2e^x + \frac{1}{2}x^2e^x + 2xe^x + e^x$

$-2y'$ $\longrightarrow$ $-2c_1e^x - 2c_2xe^x - 2c_2e^x - x^2e^x - 2xe^x$

y $\longrightarrow$ $c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x$

$$e^x = e^x$$

R/ Es una solución de la ecuación diferencial

Ejemplo d

Comprobar que $x + yln(x) = cy$ es solución de la ecuación diferencial: $(y^2 + xy)dx - x^2dy = 0$

$x + yln(x) = cy$ $\longrightarrow$ Forma Implicita

$1 + \frac{y}{x} + ln(x)y' = cy'$ $\longrightarrow$ Despejando “c” para sustituir

$x + yln(x) = cy \longrightarrow c = \frac{x}{y} + ln(x)$

$1 + \frac{y}{x} + ln(x)y' = \left[\frac{x}{y} + \ln(x)\right] y' \longrightarrow 1 + \frac{y}{x} += \frac{x}{y} y'$

$\frac{x+y}{x} = \left(\frac{x}{y}\right) \frac{dy}{dx} \longrightarrow xy + y^2 = x^2 \frac{dy}{dx}$

$(y^2 + xy)dx = x^2dy \longrightarrow$ R/ $(y^2 + xy)dx - x^2dy = 0$

Ejemplo e

Comprobar $\text{en}(\frac{2-x}{1-x})$ =t es solución de la ecuación diferencial: $\frac{dx}{dt} = (2 - x)(1 - x)$

$\ln(\frac{2-x}{1-x})$ =t $\longrightarrow$ Forma Implicita

$\ln(\frac{2-x}{1-x})$ = t $\longrightarrow$ $\ln(2 - \mathrm{x}) - \ln(1 - \mathrm{x})$ = t

$\frac{-t'}{2-x} + \frac{t'}{1-x} = 1 \longrightarrow \frac{-t'(1-x)+t'(2-x)}{(2-x)(1-x)} = 1$

$t[(2 - x)(1 - x)] = (2 - x)(1 - x) \longrightarrow t' = \frac{(2-x)(1-x)}{2-x-1+x}$

R/ $\frac{dx}{dt} = (2 - x)(1 - x) \longrightarrow$ Si es solucion

Ejemplo f

Comprobar que $(x + y)^2 = cxe^{\frac{y}{x}}$ es solución de la ecuación diferencial: $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$

$(x + y)^2 = cxe^{\frac{y}{x}} \longrightarrow$ Forma Implicita

$2(x + y)(1 + y') = cx\left[\frac{xy'-y}{x^2}\right]\left[e^{\frac{y}{x}}\right] + ce^{\frac{y}{x}}$

$2(x+y)(1+y') = cxe^{\frac{y}{x}}\left[\frac{xy'-y}{x^2}+\frac{1}{x}\right] \longrightarrow 2(x+y)(1+y') = cxe^{\frac{y}{x}}\left[\frac{xy'-y+x}{x^2}\right]$

$cx = \frac{(x+y)^2}{e^{\frac{y}{x}}} \longrightarrow$ Despejando "cx" para sustituir

$$2(x+y)(1+y') = \frac{(x+y)^2}{e^{\frac{y}{x}}}e^{\frac{y}{x}}\left[\frac{xy'-y+x}{x^2}\right]$$

$$2(1+y') = (x+y)^2\left[\frac{xy'-y+x}{x^2}\right]$$

$$2x^2(1+y') = (x+y)(xy'-y+x)$$

$$2x^2+2x^2y' = x^2y'-xy+x^2+xyy'-y^2+xy$$

$$x^2y'+xyy' = -y^2-x^2$$

$$y'(x^2+xy) = -(y^2+x^2)$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2+xy) = -(y^2+x^2)$$

$$(x^2+xy)dy = -(y^2+x^2)dx$$

R/ $(y^2+x^2)dx+(x^2+xy)dy = 0 \longrightarrow$ Es solución de la E.D.

Ejemplo g

Comprobar que $(y^2+x^2)\sqrt{1+y^2} = c$ es solución de la E.D. $(2x+2xy^2)dx + (yx^2+2y+3y^3)dy = 0$

$(y^2+x^2)(1+y^2)^{\frac{1}{2}} = c \longrightarrow$ Forma Implicita

$$(y^2+x^2)\left[\frac{1}{2}(1+y^2)^{\frac{1}{2}}(2yy')\right]+(1+y^2)^{\frac{1}{2}}(2x+2yy') = 0$$

$$\frac{(y^2+x^2)yy'}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}+(1+y^2)^{\frac{1}{2}}(2x+2yy') = 0$$

$$\frac{(y^2+x^2)yy' + (1+y^2)(2x+2yy')}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$(y^2+x^2)yy' + (1+y^2)(2x+2yy') = 0$$

$$(y^2+x^2)yy' + 2x + 2yy' + 2xy^2 + 2y^3y' = 0$$

$$y'[(y^2+x^2)y + 2y + 2y^3] + 2x + 2xy^2 = 0$$

$$y'(x^2y + y^3 + 2y + 2y^3) = -(2x + 2xy^2)$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2y + y^3 + 2y + 2y^3) = -(2x + 2xy^2)$$

$$(x^2y + y^3 + 2y + 2y^3)dy = -(2x + 2xy^2)dx$$

$R/\ (2x + 2xy^2)dx + (x^2y + y^3 + 2y + 2y^3)dy = 0 \longrightarrow$ Si solucion de la E.D.

Ecuación diferencial a partir de la solución (problema inverso)

Si tenemos la solución de una ecuación diferencial, es fácil encontrar la ecuación diferencial a partir de esta, para lo cual se hace lo siguiente:

a) Derivar la solución general tantas veces como, constantes arbitrarias tenga la ecuación.
b) Utilizar métodos algebraicos para eliminar las constantes arbitrarias y la ecuación resultante será la ecuación diferencial buscada.

Ejemplo:

Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$

Solución:

Ecu1 $\longrightarrow$ $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$

Ecu2 $\longrightarrow$ $y' = 2c_1e^{2x} - 2c_2e^{-2x}$

Ecu3 $\longrightarrow$ $y'' = 4c_1e^{2x} + 4c_2e^{-2x}$

Simultaneando 1 y 2

$[y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}]\ 2 \longrightarrow 2y = 2c_1e^{2x} + 2c_2e^{-2x}$

$y' = 2c_1e^{2x} - 2c_2e^{-2x} \longrightarrow y' = 2c_1e^{2x} - 2c_2e^{-2x}$

$y' + 2y = 4c_1e^{2x}$

Ecu4 $\longrightarrow \frac{y' + 2y}{4} = c_1e^{2x}$

Simultaneando 2 y 3

$[y' = 2c_1e^{2x} - 2c_2e^{-2x}]\ 2 \longrightarrow 2y' = 4c_1e^{2x} - 4c_2e^{-2x}$

$y'' = 4c_1e^{2x} + 4c_2e^{-2x} \longrightarrow y'' = 4c_1e^{2x} + 4c_2e^{-2x}$

$2y' + y'' = 8c_1e^{2x}$

Ecu5 $\longrightarrow \frac{2y' + y''}{8} = c_1e^{2x}$

Igualando 4 y 5

$$\frac{2y' + y''}{8} = \frac{y' + 2y}{4}$$

$$4(2y' + y'') = 8(y' + 2y) \longrightarrow 8y' + 4y'' = 8y' + 16y$$

R/ $y'' - 4y = 0$

2) Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es: $y = c_1 e^{\frac{2}{3}x} + c_2 x e^{\frac{2}{3}x}$

Ecu1 $\longrightarrow$ $y = c_1 e^{\frac{2}{3}x} + c_2 x e^{\frac{2}{3}x}$

Ecu2 $\longrightarrow$ $y' = \frac{2}{3} c_1 e^{\frac{2}{3}x} + \frac{2}{3} c_2 x e^{\frac{2}{3}x} + c_2 e^{\frac{2}{3}x}$

Ecu3 $\longrightarrow$ $y'' = \frac{4}{9} c_1 e^{\frac{2}{3}x} + \frac{4}{9} c_2 x e^{\frac{2}{3}x} + \frac{4}{3} c_2 e^{\frac{2}{3}x}$

Simultaneando 1 y 2

$$\left[y = c_1 e^{\frac{2}{3}x} + c_2 x e^{\frac{2}{3}x}\right]\left(-\frac{2}{3}\right) \longrightarrow -\frac{2}{3} y = -\frac{2}{3} c_1 e^{\frac{2}{3}x} - \frac{2}{3} c_2 x e^{\frac{2}{3}x}$$

$$y' = \frac{2}{3} c_1 e^{\frac{2}{3}x} + \frac{2}{3} c_2 x e^{\frac{2}{3}x} + c_2 e^{\frac{2}{3}x} \longrightarrow \underline{y' = \frac{2}{3} c_1 e^{\frac{2}{3}x} + \frac{2}{3} c_2 x e^{\frac{2}{3}x} + c_2 e^{\frac{2}{3}x}}$$

Ecu4 $\longrightarrow$ $y' - \frac{2}{3} y = c_2 e^{\frac{2}{3}x}$

Simultaneando 2 y 3

$$\left[y' = \frac{2}{3} c_1 e^{\frac{2}{3}x} + \frac{2}{3} c_2 x e^{\frac{2}{3}x} + c_2 e^{\frac{2}{3}x}\right]\left(-\frac{2}{3}\right) \longrightarrow -\frac{2}{3} y' = -\frac{4}{9} c_1 e^{\frac{2}{3}x} - \frac{4}{9} c_2 x e^{\frac{2}{3}x} - \frac{2}{3} c_2 e^{\frac{2}{3}x}$$

$$y'' = \frac{4}{9} c_1 e^{\frac{2}{3}x} + \frac{4}{9} c_2 x e^{\frac{2}{3}x} + \frac{4}{3} c_2 e^{\frac{2}{3}x} \longrightarrow \underline{y'' = \frac{4}{9} c_1 e^{\frac{2}{3}x} + \frac{4}{9} c_2 x e^{\frac{2}{3}x} + \frac{4}{3} c_2 e^{\frac{2}{3}x}}$$

$$y'' - \frac{2}{3} y' = \frac{2}{3} c_2 e^{\frac{2}{3}x}$$

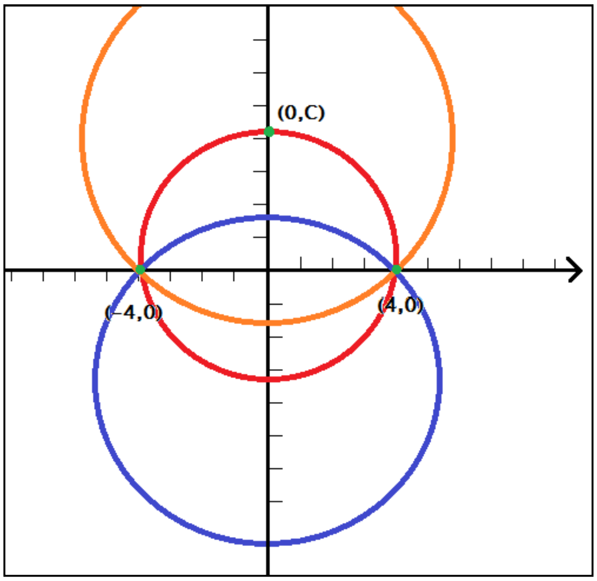
Ecu5 $\longrightarrow$ $c_2 e^{\frac{2}{3}x} = \frac{3}{2} y'' - y'$

Igualando 4 y 5

$$y' - \frac{2}{3} y = \frac{3}{2} y'' - y' \longrightarrow \frac{3}{2} y'' - y' - y' + \frac{2}{3} y = 0$$

$$\left[\frac{3}{2} y'' - 2y' + \frac{2}{3} y = 0\right](6) \longrightarrow \text{R/ } 9y'' - 12y' + 4y = 0$$

3) Encontrar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias que pasa por (-4,0) y (4,0) cuyo centro está sobre el eje “y”



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$(x - 0)^2 + (y - c)^2 = (4 - 0)^2 + (0 - c)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2yc + c^2 = 16 + c^2$$

Ecu1 $\longrightarrow$ $x^2 + y^2 - 2yc = 16$

$$2yc = x^2 + y^2 - 16$$

Ecu2 $\longrightarrow$ $2c = \frac{x^2+y^2-16}{y}$

Ecu3 $\longrightarrow$ $2x + 2yy' - 2y'c = 0$

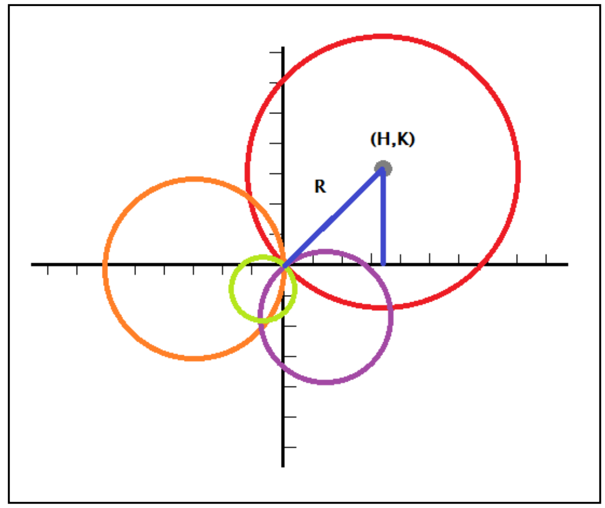
Sustituyendo 2 en 3

$$2x + 2yy' - y'\left(\frac{x^2+y^2-16}{y}\right) = 0 \longrightarrow y'\left[2y - \left(\frac{x^2+y^2-16}{y}\right)\right] = -2x$$

$$y'\left(\frac{2y^2-x^2-y^2+16}{y}\right) = -2x \longrightarrow y' = \frac{-2xy}{2y^2-x^2-y^2+16}$$

$$y' = \frac{-2xy}{y^2-x^2+16} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{y^2-x^2+16}$$

4) Encontrar la ecuación diferencial que describe la familia de circunferencias que pasan por el origen cuyo centro está en cual quier punto.



$(x-h)^2+(y-k)^2 \ \ = \left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2$

$(x-h)^2+(y-k)^2 \ \ = h^2+k^2$

$x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2-h^2-k^2=0$

$x^2-2xh+y^2-2yk=0 \longrightarrow$ Ecu 1

$2x-2h+2yy'-2y'k=0 \ \left(\frac{1}{2}\right)$

$x-h+yy'-y'k=0 \longrightarrow$ Ecu 2

$1+yy''+-y'y'-y''k=0$

$1+yy''+-(y')^2-y''k=0 \longrightarrow$ Ecu 3

De 1

$h=\frac{x^2+y^2-2yk}{2x} \longrightarrow$

Sustituyendo 4 en 2

$$x-\left(\frac{x^2+y^2-2yk}{2x}\right)+yy'-y'k=0$$

$\frac{2x^2-x^2-y^2+2yk+2xyy'-2xy'k}{2x}=0 \longrightarrow k=\frac{y^2-x^2-2xyy'}{2y-2xy'} \longrightarrow$ Ecu 5

Sustituyendo 5 en 3

$$1+yy''+-(y')^2-y''\left(\frac{y^2-x^2-2xyy'}{2y-2xy'}\right)=0$$

$$\frac{(2y-2xy')+(2y-2xy')(yy'')+(2y-2xy')(1+(y')^2)-y''(y^2-x^2-2xyy')}{2y-2xy'}=0$$

$$y''[(2y-2xy')y-(y^2-x^2-2xyy')]+(2y-2xy')(1+(y')^2)=0$$

$y''(2y^2 - 2xyy' - y^2 + x^2 + 2xyy') + 2(y - xy')[(y')^2 + 1] = 0$

R/ $y''(x^2 - y^2) + 2[(y')^2 + 1](y - xy') = 0$

Problemas de valor inicial (I.V.P.)

En las aplicaciones en general, no estaremos interesados en todas las soluciones de una ecuación diferencial. Más bien. Estaremos b buscando una solución "especifica" "y" que en algún punto "x_0" tenga un valor especial "y_0" es decir, estaremos buscando una solución particular que pase por un punto determinado (x_0, y_0) para lo cual se le asignan condiciones a la solución general y a sus derivadas hasta la derivada de un orden anterior de la ecuación diferencial así:

$$\boxed{a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = \mathrm{g(x)}}$$

Condiciones:

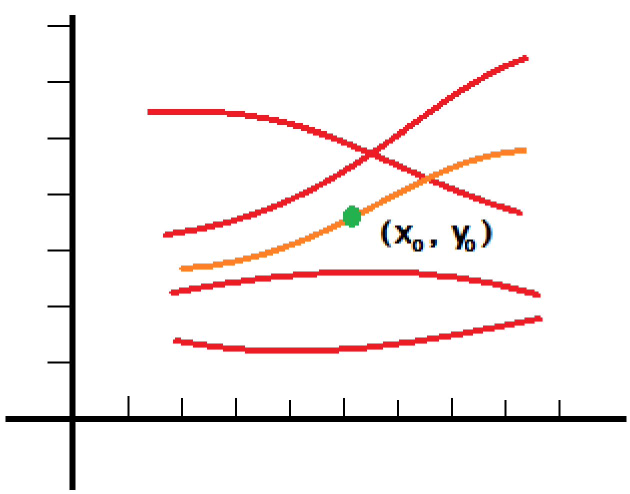
$$y(x_0) = y_0\ ,\quad y'(x_0) = y_1\ ,\quad y''(x_0) = y_2\ ,\ \ldots\ ,\ y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$$

Para una de Segundo Orden:

$$\boxed{a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = \mathrm{g(x)}}$$

Condiciones:

$$y(x_0) = y_0 \ \wedge \ y'(x_0) = y_1$$



1) Dada $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{7x}$ la cual es solución general de la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 14y = 0$ encontrar la solución particular sujeta a:

$y(0) = 4$ **,** $y'(0) = 12$

x=0, y=4

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{7x} \longrightarrow 4 = c_1 e^{2(0)} + c_2 e^{7(0)}$

$4 = c_1 + c_2 \longrightarrow$ Ecu 1

x=0, y'=12

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{7x} \longrightarrow y' = 2c_1 e^{2x} + 7c_2 e^{7x}$

$12 = 2c_1 e^{2(0)} + 7c_2 e^{7(0)} \longrightarrow 12 = 2c_1 + 7c_2 \longrightarrow$ Ecu 2

Simultaneando 1 y 2

$4 = c_1 + c_2$ (-2) $\longrightarrow -8 = -2c_1 - 2c_2$

$12 = 2c_1 + 7c_2 \longrightarrow 12 = 2c_1 + 7c_2$

$4 = 5c_2 \longrightarrow c_2 = \frac{4}{5}$

Sustituyendo c_2 en 1

$$4 = c_1 + \frac{4}{5} \longrightarrow c_1 = \frac{16}{5}$$

Sustituyendo c_1 y c_2 en la solucion

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{7x}$$

$Y = \frac{16}{5} e^{2x} + \frac{4}{5} e^{7x} \longrightarrow$ Solucion Particular

2) Dada $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$ la cual es solución general de la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 0$ encontrar la solución particular sujeta a:

$y(1) = 10$, $y'(1) = 30$

x=1, y=10

$10 = c_1e^{2(1)} + c_2e^{3(1)} \longrightarrow 10 = c_1e^2 + c_2e^3$

$10 = c_1e^2 + c_2e^3 \longrightarrow$ Ecu 1

$y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} \longrightarrow y' = 2c_1e^{2x} + 3c_2e^{3x}$

x=1, y'=30

$30 = 2c_1e^{2(1)} + 3c_2e^{3(1)} \longrightarrow 30 = 2c_1e^2 + 3c_2e^3$

$30 = 2c_1e^2 + 3c_2e^3 \longrightarrow$ Ecu 2

Simultaneando 1 y 2

$10 = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$ (-3) $\longrightarrow -30 = -3c_1e^2 - 3c_2e^3$

12=2c_1+7c_2 $\longrightarrow 30 = 2c_1e^2 + 3c_2e^3$

$0 = -c_1e^2 \longrightarrow c_1 = 0$

Sustituyendo c_1 en 1

$10 = 0e^2 + c_2e^3 \longrightarrow 10 = c_2e^3 \longrightarrow c_2 = \frac{10}{e^3}$

Sustituyendo en la solucion general

$y = 0e^{2x} + \frac{10}{e^3}(e^{3x}) \longrightarrow y = 10e^{3x}e^{-3}$

$y = 10e^{3x-3} \longrightarrow$ R/ $y = 10e^{3(x-1)}$

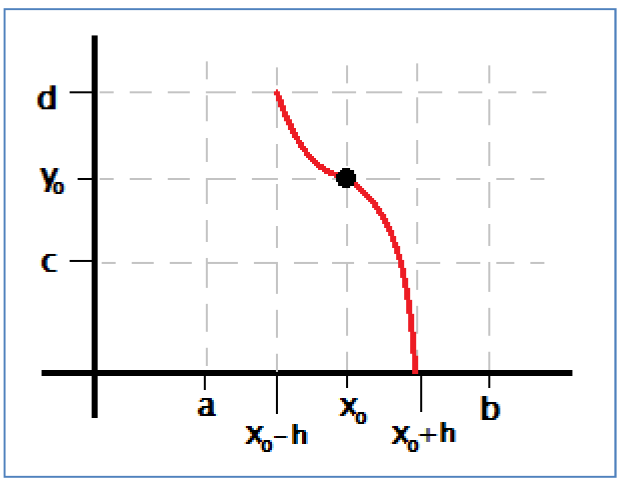
EXISTENCIA Y UNICIDAD (Picard-Lindelof)

Dado un problema de valor inicial (IVP)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{con } y(Xo) = \text{ Yo}$$

Supongamos que hay un rectangulo R= [(x,y)/a<x<b,c<y<d] que contiene al punto (Xo,Yo) en su interior y dentro del cual f(x,y) y$\frac{d}{dy} f\ (x, y)$ son continuas.

Entonces (IVP) tiene solucion unica y= y(k) definida en algun intervalo Xo-h < x < Xo + h para algun h > 0



Existen muchas ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ que no se pueden resolver por metodos de integracion sencilla, por lo que es importante saber cuando existen soluciones y cuando son unicas bajo condiciones iniciales dadas. Luego para determinar si existe una solucion unica para problemas de valores iniciales (IVP) se hace lo siguiente:

1. Se escribe la ecuacion diferencial en la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ y obtener $f(x, y)$ es continua $f(x, y) \longrightarrow$ D f(x,y)

2. Obtener $\frac{d}{dy} = f(x, y)$ y luego encontrar donde esta nueva funcion es continua $\frac{d}{dy} = f(x, y) \longrightarrow D\, \frac{d\, f(x,y)}{dy}$

3. comprobar que el punto (Xo,Yo) se encuentra dentro del dominio f (x,y) como dentro del dominio de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}} = \mathrm{f(x, y)}$, si esta condicion se cumple, la ecuacion diferencial tiene solucion unica para dicho panto; pero si no se cumple no tendria solucion unica, aunque no se puede decir que la ecuacion diferencial no tiene solucion porque puede ser que tenga multiples soluciones.

4. La ecuacion diferencial tendra solucion unica en la intersecion de los dominios es decir

S .U = D f ((x,y) ∩ D $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}} = \mathrm{f(x, y)}$

Ejemplos:

1) Para la ecuacion diferencial $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \ln(\sqrt{xy+1}$ determinar:
   a) Si en el punto (1,2) tiene solucion unica
   b) Determinar y dibujar la region del plano "xy" en la que tiene solucion unica
   c) $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \ln(\sqrt{xy+1} \longrightarrow$ f(x,y) = ln (xy +1)

   F (x,y) = $\frac{1}{2}$ln (xy + 1) $\longrightarrow$ D f (x,y): xy + 1 > 0

   D f(x,y) = {(x,y) / xy +1 >0}

   $\frac{d}{dy}$ f (x,y) = $\frac{1}{2}\ \frac{x}{xy+1} \longrightarrow$ $\frac{d}{dy}$ f (x,y) = $\frac{x}{2\ (xy+1)}$

   D$\frac{d}{dy}$ f (x,y) : 2xy + 2 ≠ 0

   D$\frac{d}{dy}$ f (x,y) : {(x,y) / 2xy + 2 ≠ 0}

Probando punto (1,2)

$Xy + 1 > 0$	$2xy + 2 \neq 0$
$(1)(2) + 1 > 0$	$(1)(2) + 2 \neq 0$
$3 > 0$ SI	$6 \neq 0$ SI

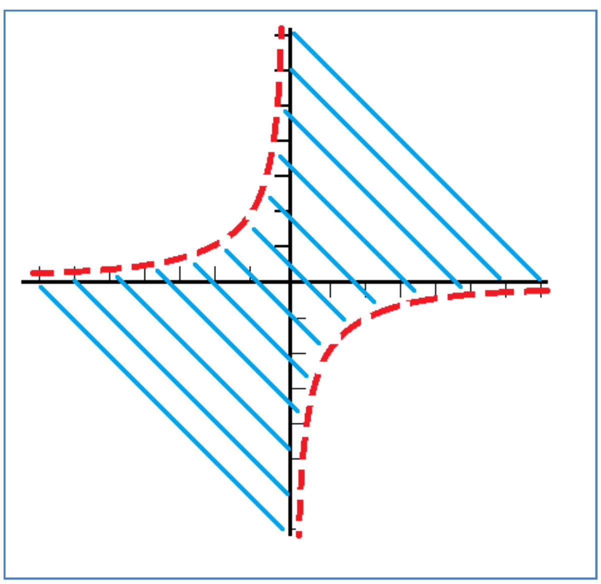
Luego en el punto (1,2) hay solucion unica

b. Solucion unica en la interseccion de los dominios.

S.U : $xy + 1 > 0 \cap 2xy + 2 \neq 0$

Dibujando region

$Xy + 1 > 0$	$2xy + 2 \neq 0$
$Xy + 1 = 0$	$2xy + 2 = 0$
$Y = -\frac{1}{x}$	$2xy = -2$
$(0,0) \longrightarrow 1 > 0$	$y = \frac{-2}{dy2x} \longrightarrow y = -\frac{1}{x}$



2) Para la ecuacion diferencial $\frac{dy}{dx} = 6\ xy^{2/3}$ determinar

a) Si en el punto (0,0) tiene solucion unica

b) Dibujar la region en la que tiene solucion unica

c) $\frac{dy}{dx}\ 6\ xy^{2/3} \longrightarrow$ f (x,y) $6xy^{2/3} \longrightarrow$ D f(x,y) = R

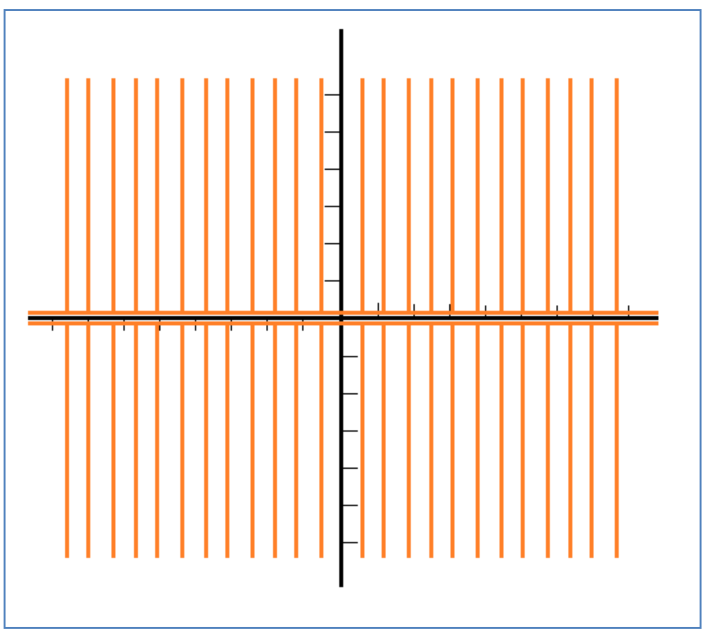
$$\frac{d}{dy}f(x,y) = \frac{2}{3}6xy^{-\frac{1}{3}} \longrightarrow \frac{d}{dy}f(x,y) = \frac{4x}{y^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{df(x,y)}{dy} = \frac{4x}{\sqrt[3]{y}} \longrightarrow \frac{df(x,y)}{dy} = \{(x,y)/y \neq 0\}$$

$y \neq 0$

$(0,0) \longrightarrow 0 \neq 0 \longrightarrow$ No

Solucion Unica R∩y≠ 0



Ejercicios:

1) Determinar si $\frac{dy}{dx} = \ln(x + y - 1)$tiene solucion unica en $y(2) = 2$

2) $\frac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{2}}$ en $y(0) = 2\ \ \wedge\ \ y(2) = 0$

Ecuciones diferenciales de primer orden

Los tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden para las cuales se puede obtener una solcuion exacta medieante metodos diferenciales son:

a) Ecuaciones diferenciales exacatas
b) Ecuaciones diferenciales separables
c) Ecuaciones diferenciales homogeneas
d) Ecuaciones diferenciales lineales
e) Ecuaciones diferenciales de Bernoulli

Todas las ecuaciones diferenciales anteriores pueden venir escritass en forma de:

a) Derivdas

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

b) Difrenciales

$$d[f(x,y)] = \frac{d\{f(x,y)]}{dx}dx + \frac{d\{f(x,y)]}{dy}dy$$

$$m(x,y) = \frac{d[f(x,y)]}{dx} \wedge n(x,y) = \frac{d[f(x,y)]}{dy}$$

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$$

Ejemplo 1:

1) Escribir en forma de derivada la ecuacion diferencial:

$$(3x^2 + 2y - 2)dx - (4xy + y^3)dy = 0$$

V.D: Y ^ V.I: X

$$[(3x^2 + 2y - 2)dx - (4xy + y^3)dy = 0] \left(\frac{1}{dx}\right)$$

$$(3x^2 + 2y - 2) - (4xy + y^3)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2 + 2y - 2)}{4xy + y^3}$$

V.D: X ^ V.I: Y

$$[(3x^2+2y-2)dx-(4xy+y^3)dy=0]\ \left(\frac{1}{dY}\right)$$

$$(3x^2+2y-2)\frac{dx}{dy}-(4xy+y^3)=0$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{4xy+y^3}{3x^2+2y-2}$$

2) Escribir en forma de diferncial la ecuacion

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-y^3}{2xy+y}$$

$$(2xy+y)dy=(3x^2-y^3)dx \longrightarrow (2xy+y)dy-(3x^2-y^3)dx=0$$

$$M(x,y)=3x^2-y^3\ \wedge\ N(x,y)=2xy+y$$

Ecuaciones diferenciales exactas

Una ecuacion diferencial de pimer orden escrita en forma de diferencales $m(x,y)dx+n(x,y)dy=0$ es una ecuacion diferencial exacta, Si existe una funcion f(x,y) talq ue al aplicarle el difernecial total resulte la ecuacion diferencial su solucion es una solucion implicita de la forma f(x,y)=c.

$$d[f(x,y)]=0$$

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

Criterio de exactitud

Para determinar si una ecuaion diferencial es exacata sin llegar a conocer la funcion f(x,y) se va a utilizar el criterio de exactitud el cual dice:

"Una ecuacion diferencial es exacta considerando a M(x,y) ^ N(x,y) como funciones continuas y derivables en una region R del plano "xy" si y solo si se cumple que:"

$$\frac{d[M(x,y)]}{dy}=\frac{d[N(x,y)]}{dx} \qquad \text{ó} \qquad \frac{d}{dy}\frac{d[f(x,y)]}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{d[f(x,y)]}{dy}$$

Ejemplo:

1) Determinar si la siguiente ecuacion diferencial es exacata:

$$\left(1+\ln(x)+\frac{y}{x}\right)dx-(1-\ln(x))dy=0$$

M(x,y) = $1+\ln(x)+\frac{y}{x}$

$$\frac{dM}{dy}=\frac{x(1)-y(0)}{x^2} \longrightarrow \frac{dM}{dy}=\frac{1}{x}$$

N(x,y) = $-(1-\ln(x))$

$$\frac{dN}{dx}=-\left(-\frac{1}{x}\right) \longrightarrow \frac{dM}{dy}=\frac{1}{x}$$

$\frac{dM}{dy}=\frac{dM}{dy}$ Es una ecuacion difencial exacta

2) Determinar si la siguiente ecuacion diferencial es exacata:

$$(yln(y)-e^{-xy})dx-\left(\frac{1}{y}+x\ln(x)\right)dy=0$$

M(x,y) = $yln(y)-e^{-xy}$

$$\frac{dM}{dy}=y\frac{1}{y}+ln(y)+xe^{-xy} \longrightarrow \frac{dM}{dy}=1+\ln(y)+xe^{-xy}$$

N(x,y) = $-\left(\frac{1}{y}+x\ln(x)\right)$

$\frac{dN}{dx}=\ln(y) \longrightarrow$ Es una ecuacion difencial exacta

Ejercicios:

Encontrar el valor de "k" para que la E.D. sea exacta $(1-4x^2-2y)dy=(4x^3+kxy)dx$

Determinar si la siguiente ecuacion diferencial es exacata

$$(-2\mathrm{xy}+\tan(\mathrm{y})+\mathrm{xe^x})\mathrm{dx}-\left(\mathrm{x}^2-\mathrm{xsec}^2(\mathrm{y})\right)\mathrm{dy}=0$$

Método de solución de las ecuaciones diferenciales exactas

Para resolver una ecuación diferencial exacta se utilizan los siguientes métodos

a) Método normal con constante
b) Método normal sin constante

METODO NORMAL CON CONSTANTE

Para encontrar la solución general de una ecuación diferencial exacta por este método, la cual tiene la forma $f(x,y) = c$ se hace lo siguiente:

1) Escribir la ecuación diferencial en la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ y luego aplicar el criterio de exactitud $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$
2) Obtener la antiderivada ya sea utilizando $M(x,y)$ ó $N(x,y)$
   Si se utiliza $M(x,y)$se debe integrar respecto a "x" y agregarle una constante en función de "y"
   $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \rightarrow f(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y)$$
   Si se utiliza $N(x,y)$ se debe integrar respecto a "y" y agregarle una constante en función "x"
   $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \rightarrow f(x,y) = \int N(x,y)dy + C(x)$$
3) Derivar la función encontrada con respecto a la variable no utilizada en la integración e igualarla ya sea a $M(x,y)$ o $N(x,y)$ según sea el caso para poder encontrar la constante arbitraria.
   $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ ó $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$
4) Sustituir la constante encontrada en la ecuación del paso 2 para encontrar la solución general la cual debe ser de la forma. $f(x,y) = C$

EJEMPLOS

1) Resolver la siguiente ecuación diferencial $(4x^3y - 15x^2 - y)dx + (x^4 + 3y^2 - x)dy = 0$
   Criterio de exactitud:
   $M(x,y) = 4x^3y - 15x^2 - y$ $\qquad$ $N(x,y) = x^4 + 3y^2 - x$
   $\frac{\partial M}{\partial y} = 4x^3 - 1$ $\qquad$ $\frac{\partial N}{\partial x} = 4x^3 - 1$

   Son Exactas

$$F(x,y) = \int (x^4 + 3y^2 - x)dy + C(y)$$
$$F(x,y) = x^4y + y^3 - xy + C(x)$$
$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 4x^3y - y + \frac{d}{dx}C(x) = 4x^3y - 15x^2 - y$$
$$4x^3y - y + \frac{d}{dx}C(x) = 4x^3y - 15x^2 - y$$
$$\frac{d}{dx}\ C(x) = \ -15x^2 \ \rightarrow \ C(x) = -15\int x^2dx$$
$$C(x) = \ \frac{-15x^3}{3} = \ -5x^3$$
$$f(x,y) = \ x^4y + y^3 - xy - 5x^3 = C$$

2) Resolver la ecuación diferencia $\left(2ye^{2x} + 2xcos(y)\right)dx + (e^{2x} - x^2sen(y)) = 0$ sujeta a $y(0) = \frac{\pi}{2}$

Criterio de exactitud:

$M(x,y) = 2ye^{2x} + 2xcos(y)$ $\quad$ $N(x,y) = (e^{2x} - x^2sen(y)$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2x} - 2xsen(y)$ $\quad$ $\frac{\partial N}{\partial x} = 2e^{2x} - 2xsen(y)$

Son Exactas

$$f(x,y) = \int (e^{2x} - x^2sen(y)\ dy + C(x)$$
$$f(x,y) = ye^{2x} + x^2\cos{(y)} + C(x)$$
$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2ye^{2x} + 2xcos(y) + \frac{d}{dx}C(x) = \ 2ye^{2x} + 2xcos(y)$$
$$\frac{d}{dx}C(x) = \ 0$$
$$f(x,y) = \ ye^{2x} + x^2\cos(y) + 0 = C$$
$$e^{2x} + x^2\cos(y) = C$$

X = 0 , Y=$\frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{2}e^0 + 0\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = C$$
$$C = \frac{\pi}{2}$$
$$e^{2x} + x^2\cos(y) = \frac{\pi}{2}$$

Método normal sin constante

Para resolver una ecuación diferencia exacta por este método se hace lo siguiente:

1) Integrar la función $M(x,y)$ con respecto a "x" sin agregar constante arbitraria

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx$$

2) Integrar la función $N(x,y)$ con respecto a "y" sin agregar constante arbitraria

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy$$

3) Comparar las dos funciones encontradas y los términos repetidos colocarlos una solo vez en la solución general y solo aparecerán los términos diferentes, los que deben ser funciones de una sola variable

EJEMPLO

1) Resolver la siguiente ecuación diferencia

$$\frac{x+y}{1+x^2}\,dx + (ye^y + \arctan(x))dy = 0$$

Criterio de exactitud:

$M(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2}$ $\qquad$ $N(x,y) = ye^y + \arctan(x)$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}$

Son exactas

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx$$

$$f(x,y) = \int \frac{x+y}{1+x^2}dx = \int \frac{x}{1+x^2}dx + \int \frac{y}{1+x^2}dx$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + y\int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\boldsymbol{f(x,y) = \frac{1}{2} ln\, u + y\, arctan\, x}$$

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy$$

$$f(x,y) = \int ye^y + \arctan(x)\,dy$$

$$f(x,y) = ye^y - \int e^y dy + \int \arctan(x)\,dy$$

$$f(x,y) = ye^y - e^y + y\arctan x$$

$$f(x,y) = C$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2} ln\, u + y\, arctan\, x + ye^y - e^y + y\arctan x = C}$$

Ecuaciones diferenciales de variables separables.

Las E.D. de variables separables pueden ser escritas:

a) En formade diferencial
b) En forma de derivadas

Forma de firenciales

Si una ecuacion difercial esta escrita en forma de diferenciales: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es separable si es posibles escirbir $M(x,y)dx$ ^ $N(x,y)dy$ como el producto de una funcion de "x" por una funcion de "y" asi:

$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$

Ejemplo:

Identificar si la siguientes E.D. Es de variables separables:
$(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)dy = y^2dx$

$y^2dx - (1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)dy = 0$
$y^2dx - [(1 + x^2) + y^2(1 + x^2)]dy = 0$
$y^2dx - (1 + x^2)(1 + x^2)dy = 0$ --- > E.D. de variables separables

$f_1(x) = 1$	$f_2(x) = -(1 + x^2)$
$g_1(y) = y^2$	$g_2(y) = (1 + y^2)$

Ejercicios:

Verificar si las sigueintes E.D. son de varaibles separables:

1) $(x^2y + 2 + 2xy + 4x + y + 2x^2)dx + (2y - x - 2 + xy)dy = 0$
2) $e^{2x-3y}dx + e^{2y-4x}dy = 0$
3) $(xy + 12 - 4x - 3y)dx + (yx^2 + 4y + 8 + 2x^2)dy = 0$
4) $\sqrt{x^2y^4 + y^4}dx + (xy + 2y + 3x + 6)dy = 0$

Metodo de solucion de E.D. de varaibles separables

Forma de diferenciales

Para resolver una ecuacion diferncial de varibles separbles escrita en forma de difenciales se hace lo siguiente:

1) Escribir la ecuacion diferencial en la forma: $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$
2) Encontrar un factor integrante para separar las funciones con su respectivo diferncial, el cual estara formado por la funcion de "y" que acompaña al diferncial de "dx" y la funcion de "x" que acompaña al diferncial de "dy".
$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$
F.I.= $\frac{1}{g_1(y)f_2(x)}$
3) Multiplicar el factor integrante (F.I.) por la ecuacion diferencial.
$$\frac{1}{g_1(y)f_2(x)}\ [f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy] = 0$$
$$\frac{1}{g_1(y)f_2(x)}\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(x)}dy\right] = 0$$
4) Integrar ambos lados de la ecuacion diferencial.
$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(x)}dy = c$$

Ejemplo: Resolver las siguientes ecuasiones diferenciales

1) $(\mathrm{x}^2\mathrm{y} - 6 - 3\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{y} + 3\mathrm{xy} - 9\mathrm{x})\mathrm{dx} + (\mathrm{x}^2\mathrm{y} + 36 + 9\mathrm{y} + 4\mathrm{x}^2)\mathrm{dy} = 0$

$[y(\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} + 2) - 3(\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} + 2)]\mathrm{dx} + [\mathrm{x}^2(\mathrm{y} + 4) + 9(\mathrm{y} + 4)]\mathrm{dy} = 0$

$[(y - 3)(\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} + 2)]\mathrm{dx} + [(\mathrm{x}^2 + 9)(\mathrm{y} + 4)]\mathrm{dy} = 0$

F.I.= $\frac{1}{(y-3)(\mathrm{x}^2+9)}$

$$\frac{1}{(y - 3)(\mathrm{x}^2 + 9)}\left[[(y - 3)(\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} + 2)]\mathrm{dx} + [(\mathrm{x}^2 + 9)(\mathrm{y} + 4)]\mathrm{dy} = 0\right]$$
$$\frac{\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} + 2}{\mathrm{x}^2 + 9}dx + \frac{y + 4}{y - 3}dy = 0$$
$$\int \frac{\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} + 2}{\mathrm{x}^2 + 9}dx + \int \frac{y + 4}{y - 3}dy = c$$

$$\int \frac{\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}+2}{\mathrm{x}^2+9}dx+\int \frac{y+4}{y-3}dy=c$$

$$I_1=\int \frac{\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}+2}{\mathrm{x}^2+9}dx= \int \left(1+\frac{3x}{x^2+9}-\frac{7}{x^2+9}\right)dx$$

$$I_1=\int\ (1)dx+\frac{3}{2}\int \frac{du}{u}-7\int \frac{dx}{x^2+9}$$

$$I_1=x+\frac{3}{2}\ln(x^2+9)-\frac{7}{3}arctoan\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$I_2=\int \frac{y+4}{y-3}dy= \int \left(1+\frac{7}{y-3}\right)dy$$

$$I_1=\int \left(1+\frac{7}{y-3}\right)dy=y+7\ln(y-3)$$

$$C=x+\frac{3}{2}\ln(x^2+9)-\frac{7}{3}arctoan\left(\frac{x}{3}\right)+y+7\ln(y-3)$$

$$C=x+\ln(x^2+9)^{\frac{3}{2}}-\frac{7}{3}arctoan\left(\frac{x}{3}\right)+y+\ln(y-3)^7$$

$$C=x+\ln\left[(x^2+9)^{\frac{3}{2}}(y-3)^7\right]-\frac{7}{3}arctoan\left(\frac{x}{3}\right)+y$$

$$e^C=e^xe^{\ln\left[(x^2+9)^{\frac{3}{2}}(y-3)^7\right]}e^{-\frac{7}{3}arctoan\left(\frac{x}{3}\right)}e^y$$

$$c=e^xe^y(x^2+9)^{\frac{3}{2}}(y-3)^7e^{-\frac{7}{3}arctoan\left(\frac{x}{3}\right)}$$

Ejemplo

2) $(y^2x+4x)dx+(x^4y^2-3x^3y^2)dy=0$

$x(y^2+4)dx+y^2(x^4-3x^3)dy=0$

$f_1(x)=x$ $\quad$ $f_2(x)=x^4-3x^3$

$g_1(y)=y^2+4$ $\quad$ $g_2(y)=y^2$

$$F.I. = \frac{1}{(y^2+4)(x^4-3x^3)}$$

$$\frac{1}{(y^2+4)(x^4-3x^3)}[x(y^2+4)dx + y^2(x^4-3x^3)dy = 0]$$

$$\frac{x}{x^3(x-3)}dx + \frac{y^2}{y^2+4}dy = 0$$

$$\int \frac{x}{x^3(x-3)}dx + \int \frac{y^2}{y^2+4}dy = c$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-3}$$

$$\frac{1}{x^2(x-3)} = \frac{A(x)(x-3) + B(x-3) + Cx^2}{x^2(x-3)}$$

$1 = Ax^2 - 3Ax + Bx - 3B + Cx^2 \longrightarrow \quad 1 = (a+c)x^2 + (-3A+B)x - 3B$

$A + C = 0 \longrightarrow$ Ecu 1

$-3A + B = 0 \longrightarrow$ Ecu 2

$B = -\frac{1}{3}$

Sutituyendo "B" en 2

$-3A - \frac{1}{3} = 0$

$A = -\frac{1}{9}$

Sustituyendo "A" en 1

$-\frac{1}{9} + C = 0$

$C = \frac{1}{9}$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2(x-3)} = -\frac{1}{9}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x-3}$$

$$I_1 = -\frac{1}{9}\ln(x) + \frac{1}{3x} + \frac{1}{9}ln(x-3)$$

$$I_2 = \int \frac{y^2}{y^2+4}dy = \int 1 - \frac{4}{y^2+4}dy = y - 4\arctan\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$I_2 = y - 4\arctan\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{9}\ln(x) + \frac{1}{3x} + \frac{1}{9}ln(x-3) + y - 4\arctan\left(\frac{y}{2}\right) = c$$

$$\frac{1}{9}ln\left(\frac{x-3}{x}\right) + \frac{1}{3x} + y - 4\arctan\left(\frac{y}{2}\right) = c$$

$$ln\left(\frac{x-3}{x}\right)^{\frac{1}{9}} + \frac{1}{3x} + y - 4\arctan\left(\frac{y}{2}\right) = c$$

$$e^{ln\left(\frac{x-3}{x}\right)^{\frac{1}{9}}} e^{\frac{1}{3x}}\, e^{y} e^{-4\arctan\left(\frac{y}{2}\right)} \quad = c$$

$$\left(\frac{x-3}{x}\right)^{\frac{1}{9}}\; e^{\frac{1}{3x}+y-4\arctan\left(\frac{y}{2}\right)} \quad = c$$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1) $(x+4)dy - (x^2\, y^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}dx = 0$
2) $(x^2y + 8 + 2x^2 + 4y)dx + (yx^2 - 27 - 3x^2 + 9y)dy = 0$
3) $(x^2y + 4 + 4y + x^2 +)dy + (y^3x^2 - 3y^2x^2)dx = 0$

Forma de derivada

Una ecuacion diferencial en forma de derivadas es separable si f(x,y) puede escribirse como el producto de una funcion de “x” por una funcion “y”.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = g(x)h(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \longrightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + c$$

Ejemplo:

Resolver la sigueinte ecuacion diferncial: $\frac{dy}{dx} = \frac{(xy-y)+(3x-3)}{(xy+4y)-(2x+8)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(xy-y)+(3x-3)}{(xy+4y)-(2x+8)} = \frac{(x-1)(y+3)}{(x+4)(y-2)}$$

$$\frac{(y-2)}{(y+3)}dy = \frac{(x-1)}{(x+4)}dx$$

$$\int \frac{(y-2)}{(y+3)}dy = \int \frac{(x-1)}{(x+4)}dx$$

$$\int 1 - \frac{5}{(y+3)}dy = \int 1 - \frac{5}{(x+4)}dx$$

$$y - 5\ln(y+3) = 1 - 5\ln(x+4) + c$$

Ejercicio:

Resolver la sigueinte ecuacion diferencial: $\frac{dy}{dx} = x^2y^2 - 4x^2 - y^2 + 4$

Problemas de apliacacion

Se sabe que una poblacion de cierta comunidad aumenta con una razon proporcional a la cantidad de personas qe tienen cualquier momento. Si la poblacion se triplica en 8 años en cuanto tiempo se quintuplicara.

P = poblacion

T= tiempo

$$\frac{dp}{dt} \propto p \longrightarrow \frac{dp}{dt} = kp \longrightarrow \frac{dp}{p} = kdt$$

$$\int \frac{dp}{p} = k\int dt + c \longrightarrow \ln(p) = kt + c$$

$$e^{\ln(p)} = e^{kt+c} \longrightarrow p = e^{kt+c} \longrightarrow p = c_1e^{kt}$$

$p(0) = p_0$

$p(8) = 5p_0$

Para t =0 $\longrightarrow$ p=p_0

$p_0 = c_1 e^{k(0)} \longrightarrow p_0 = c_1$

Para t =8 $\longrightarrow$ p=5p_0

$5p_0 = c_1 e^{k(8)} \longrightarrow 5p_0 = p_0 e^{k(8)}$

$5 = e^{8k} \longrightarrow \ln(5) = \ln(e^{8k})$

8k = ln(5) $\longrightarrow$ k = 0.20

$p_0 = p_0 e^{0.20t}$

T = ? para $p = 5p_0$

$5p_0 = p_0 e^{0.20t} \longrightarrow e^{0.20t} = 5$

$\ln(e^{0.20t}) = \ln(5) \longrightarrow$ 0.20t = ln(5) $\longrightarrow t = \frac{\ln(5)}{0.20} \longrightarrow$ t = 8-05 años

Al sacar una tasa de café del microondas su temperatura es de 80°c, 5 minutos despues su temperatura es de 45°c, ¿Cuánto tiempo tardaea en enfriarse hsata una temperatura ambiente 28°c?

Ley de enfriamiento de Newton:

La rapidez con la que la temperatura T(t) cambia es proporcional a la diferencia entre lka temperatura del cuerpo y la temperatura con state del medio que la rodea.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0) \longrightarrow \frac{dT}{dt} = k(T - 28)$$

$$\int \frac{dT}{T - 28} = \int kdt + c \longrightarrow \ln(T - 28) = kt + c$$

$$e^{\ln(T-28)} = e^{kt+c} \longrightarrow T - 28 = e^{kt+c} e^{c}$$

$$T = 28 + e^{kt} c$$

Condiciones

T(0)=80 ^ T(5)=45

T=0=> T=80

T=28+C1*e^(kt)

80=28+C1*e^(0) => 80-28=C1 => **C1=52**

T=5 => T=45

T=28+52*e^(kt)

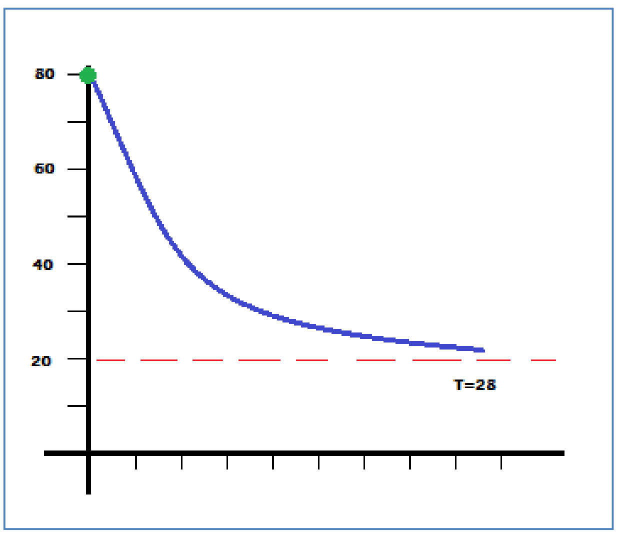
45=28+52*e^(k5) => 45-28=52*e^(5k)   => e^(5k)=(45-28)/52

Ln(e^(5k))=Ln((45-28)/52)

K=(1/5)*Ln((45-28)/52) => **K=-0.2236060**

T(t)=25+52*e^(-0.2236060*t)

t=Ln((T-28)/52)/-0.2236060



T	t
28.5	20.77
28.4	21.77
28.3	23.05
28.2	24.86
28.1	27.96
28.09	31.23

∴La taza de café estaría casi a la temperatura ambiente después de 27 minutos.

ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Una ecuación es homogénea cuando todos los términos son del mismo grado, ya sea porque el exponente de una sola variables es igual al exponente de la suma de los exponentes de otro término formado por dos variables, además de una función que tiene funciones trigonométricas, exponenciales o logarítmicas el argumento debe ser de grado cero, así:

1) $f(x,y) = x^2y + x^3 + y^3 \rightarrow Es\ homogénea$

$$\begin{array}{ccc} 2+1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}$$

2) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^8 + y^8} + xy + y^2 \rightarrow Es\ homogénea$

$$\begin{array}{ccc} (8)^{\frac{1}{3}} & 1+1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}$$

3) $f(x,y) = x\ln(y) - x\ln(x) + x + y \rightarrow No\ es\ homogénea$

$$x\,(\ln(y) - \ln(x)) + x + y$$

$f(x,y) = x\ln\left(\frac{y}{x}\right) + x + y \rightarrow Es\ homogénea$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1-1 & 1 & 1 \\ 1 & +\ 0 & 1 & 1 \end{array}$$

4) $f(x,y) = x^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 \ln\left(\frac{x}{y}\right) \rightarrow Es\ homogénea$

$$\begin{array}{cccc} 2 & +0 & 2 & +0 \end{array}$$

5) $f(x,y) = x^2\tan(x) + y^2 \rightarrow No\ es\ homogénea$

$$\begin{array}{ccc} 2 & +1 & 2 \end{array}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

MÉTODO DEL EXPONENTE

Una ecuación diferencial es homogénea si escrita en forma de diferenciales M(x, y)dx+ N(x, y)dy =0

Todos los términos de M ^N son del mismo grado. Ejemplo:

1) $(x^3y + y^4 + x^4 + x^2y^2)dx + (x^3y + y^4)dy = 0 \rightarrow E.D.H$

$3+1 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \qquad\qquad 3+1 \quad 4$

$4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \qquad\qquad 4 \quad 4$

2) $\left(x^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + xy\right)dx + \left(y^2 \cot\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x}{y}\right)dy = 0 \rightarrow No\ es\ E.D.H$

$2 \quad + \quad 0 \quad 1+1 \qquad\qquad 2 \ + \quad 0 \quad 0$

$2 \qquad\quad 2 \qquad\qquad\qquad 2 \qquad 0$

MÉTODO DE SOLUCIÓN

Para resolver E.D.H se utiliza un tipo de sustitución especial para convertirla en una E.D de variables separables y estos son:

a) Sustitución y=ux
b) Sustitución x=vy

Donde u ^ v son dos nuevas variables dependientes.

SUSTITUCIÓN Y=UX

Se hace ésta sustitución cuando la E.D es homogénea y la función N(x, y) sea mucho más sencilla que M(x, y). Para encontrar la solución utilizando esta sustitución se hace lo siguiente:

1) Hacer la sustitución y=ux y derivar y ^u con respecto a "x"
   y=ux --> V.D: y; u V.I: x

   $$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = u + \frac{xdu}{dx}} \text{ ... (I)}$$

2) Escribir la ecuación diferencial en forma de derivadas y hacer la sustitución para obtener una función solamente en términos de "u"

   $$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f(x, y) = g(u)} \text{ ...(II)}$$

3) Igualar la ecuación (I) y la (II) para convertirla en una ecuación diferencial separable en términos de “u” ^ “x”

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$u + x\frac{du}{dx} = g(u) => \frac{xdu}{dx} = g(u) - u \quad E.D\ de\ V.S$$

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

4) Resolver la ecuación diferencial separable

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{g(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + c$$

SUSTITUCIÓN X=VY

Se va hacer este tipo de sustitución cuando la función M(x, y) sea más sencilla que N(x, y) y para obtener su solución se hace lo siguiente:

1) Hacer la sustitución x=vy y derivar x ^v con respecto a “y”
   x=vy --> V.D: x; v V.I: y

$$\frac{dx}{dy} = v + \frac{ydv}{dy} \text{ ...(I)}$$

2) Escribir la ecuación diferencial en forma de derivadas y hacer la sustitución para obtener una función solamente en términos de “v”

$$\frac{dx}{dy} = f(x, y) = g(v) \text{ ...(II)}$$

3) Igualar la ecuación (I) y la (II) para convertirla en una ecuación diferencial separable en términos de “v” ^ “x”

$$v + y\frac{dv}{dy} = g(v) => \frac{ydv}{dy} = g(v) - v \quad E.D\ de\ V.S$$

$$\frac{dv}{g(v)-v}=\frac{dy}{y}$$

4) Resolver la ecuación diferencial separable

$$\int\frac{dv}{g(v)-v}=\int\frac{dy}{y}+c$$

Ejemplo: resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

$$1)\ x\frac{dy}{dx}-y=\ -\sqrt{x^2+9y^2}\rightarrow Es\ E.D.Homog\acute{e}nea$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1/2+1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

N(x, y)=x --> es más sencillo.

1) Sustituir y=ux

$$\frac{dy}{dx}=u+\frac{xdu}{dx}\ ...(I)$$

2) $$x\frac{dy}{dx}=\ -\sqrt{x^2+9y^2}+y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y-\sqrt{x^2+9y^2}}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ux-\sqrt{x^2+9(ux)^2}}{x}\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{ux-\sqrt{x^2(1+9u^2)}}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ux-x\sqrt{1+9u^2}}{x}\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x(u-\sqrt{1+9u^2})}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\ u-\sqrt{1+9u^2}\ \ ...\ (II)$$

IGUALANDO (I) ^ (II)

$$u+\frac{xdu}{dx}=\ u-\sqrt{1+9u^2}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1+9u^2}}=\ -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+9u^2}} = -\int \frac{dx}{x} + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+(3u)^2}} = -\int \frac{dx}{x} + c$$

$w = 3u$
$dw = 3du$
$\frac{dw}{3} = du$

$$\frac{1}{3}\int \frac{dw}{\sqrt{1+w^2}} = -\ln\ |x| + c$$

$w = \tan(\theta)$
$dw = \sec(\theta)^2\, d\theta$
$\sqrt{1+w^2} = \sqrt{1+\tan(\theta)^2} = \sqrt{\sec(\theta)^2} = \sec\,(\theta)$

$\frac{1}{3}\int \frac{\sec(\theta)^2\, d\theta}{\sec(\theta)} = -\ln|x| + c$
$\frac{1}{3}\int \sec(\theta)\, d\theta = --\ln|x| + c$
$\frac{1}{3}\ln\ |\sec(\theta) + \tan(\theta)\,| = -\ln|x| + c$
$\frac{1}{3}\ln\ |\sqrt{w^2+1} + \mathrm{w}| = -\ln|x| + c$
$y = ux \Rightarrow u = \frac{y}{x}$
$\frac{1}{3}\ln\ |\sqrt{9\frac{y}{x^2}^2 + 1}\ + \frac{3y}{x}| = -\ln|x| + c$

$\frac{1}{3}\ln\ |\sqrt{\frac{9y^2+x^2}{x}}\ + \frac{3y}{x}| = -\ln|x| + c$

$\frac{1}{3}\ln\ |\frac{\sqrt{9y^2+x^2} + 3y}{x}| = -\ln|x| + c$

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9y^2+x^2}+3y}{x}\right|+\ln|x|=c$$

$$\ln\left|\frac{\sqrt{9y^2+x^2}+3y}{x}\right|^{1/3}*x=c$$

$$e^{\ln\left|\frac{\sqrt{9y^2+x^2}+3y}{x}\right|^{1/3}*x}=e^{c}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{9y^2+x^2}+3y}{x}\right)^{1/3}*x=c1}$$

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Para determinar si una ecuación diferencial es homogénea se puede utilizar los siguientes métodos:

a) Método del cociente (y/x)
b) Método de sustitución especial
c) Método del exponente

MÉTODO DEL COCIENTE (Y/X)

Una ecuación diferencial escrita en forma de derivadas $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=f(x,y)}$ es homogénea si la función f(x, y) puede escribirse como una división de “y/x” cada uno de sus término, y en aquellos términos en los que no aparezca la división, debe aparecer solamente una constante.

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=f(x,y)=g\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Ejemplo: Determinar si la siguiente E.D es homogénea

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3-2y^3}{xy^2+y^3}\ \textit{División entre } x^3}$$

$$\boldsymbol{f(x,y)=\frac{4x^3/x^3-2y^3/x^3}{xy^2/x^3+y^3/x^3}=\frac{4-2\left(\frac{y}{x}\right)^3}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^3}\ \therefore \textit{Es E.D. Homogénea}}$$

MÉTODO DEL EXPONENTE

Para determinar si una ecuación diferencial escrita en forma de diferenciales M(x, y) dx + N(x, y) dy=0 es homogénea se hace la sustitución especial x=xt ^ y=yt y si al hacer esta sustitución "t" puede sacarse como factor tanto de M(x, y) como de N(x, y) entonces la ecuación diferencial es homogénea.

$$\boldsymbol{M(xt, yt) = t^m\, M(x, y)}$$
$$\boldsymbol{N(xt, yt) = t^m\, N(x, y)}$$

Ejemplo: Determinar si la siguiente E.D es homogénea: $\boldsymbol{(2x^2y)dx = (3x^3 + y^3)dy}$

$\boldsymbol{M(x, y) = 2x^2y}$
$\boldsymbol{M(tx, ty) = 2(tx)^2(ty) = 2t^2x^2ty = t^3(2x^2y) \rightarrow Es\ homogénea}$

$\boldsymbol{N(x, y) = -(3x^3 + y^3)}$
$\boldsymbol{N(tx, ty) = -[3t^3x^3 + t^3y^3] = t^3[-(3x^3 + y^3)] \rightarrow Es\ homogénea}$

$$\boldsymbol{\therefore Es\ una\ E.D.H}$$

2) $xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$ E.D.H.

Mas facil M(x,y) combiene sustituir por x = v y

x = vy

$\frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$ $\longrightarrow$ Ecu 1

$$[xydx + (x^2 + y^2)dy = 0]\left(\frac{1}{dy}\right)$$

$xy\frac{dx}{dy} = -(x^2 + y^2)$ $\longrightarrow$ $\frac{dx}{dy} = -\frac{(x^2+y^2)}{xy}$

Sustituyendo x = vy

$\frac{dy}{dx} = -\frac{(v^2y^2+y^2)}{vyy}$ $\longrightarrow$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2(v^2+1)}{vy^2}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{(v^2+1)}{v}$ $\longrightarrow$ Ecu 2

Igualando 1 y 2

$$v + y\frac{dv}{dy} = -\frac{(v^2+1)}{v} \longrightarrow y\frac{dv}{dy} = -v - \frac{(v^2+1)}{v} = \frac{-v^2-v^2-1}{v}$$

$$y\frac{dv}{dy} = \frac{-2v^2-1}{v} \longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{vdv}{-2v^2-1}$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{vdv}{-2v^2-1} \longrightarrow ln(y) = -\frac{1}{4}\int\frac{du}{u} + c$$

$$\ln(y) = -\frac{1}{4}\ln(1+2v^2) + c$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{4}\ln\left|1+2\left(\frac{x}{y}\right)^2\right| + c$$

$$\ln|y| + \ln\left|1+2\left(\frac{x}{y}\right)^2\right|^{\frac{1}{4}} = C$$

$$\ln\left|y\left(1+2\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}\right| = C$$

$$e^{\int \ln\left|y\left(1+2\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)\right|^{\frac{1}{4}}} = e^{c}$$

$$\boxed{y\left(1+2\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}} = C_1}$$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1) $y^2dx + xydy = x^2dy$
   $R/\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2y}{x}\right| = \ln|y| + C$

2) $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$
   $R/\ -\frac{y}{x} + \ln\left|1-\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + C$

3) $(y^2 + 5xy - 4x^2)dx - (9x^2 - y^2)dy = 0$
4) $R/\ x = \left(\frac{y}{x} - 2\right)^{\frac{5}{12}}\left(\frac{y}{x} + 2\right)^{\frac{5}{4}}.C_1$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Una ecuación diferencial lineal de orden “n” tiene la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x) = g(x)$$

Por lo tanto una ecuación diferencial lineal en “y” de primer orden tiene por ecuación.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad Ecuacion\ diferencial\ lineal\ en\ \text{"y"}$$

De manera similar una ecuación diferencial lineal en “x” tendrá la forma:

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y) \quad Ecuacion\ diferencial\ lineal\ en\ "x"$$

Ejemplo:

Determinar si las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales

a) $x^2dy + x^2ydx = xydx + x^4dx$

$$x^2dy + x^2ydx = xydx + x^4dx \qquad dividiendo\ entre\ "dx"$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + x^2y - xy = x^4$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + y(x^2 - x) = x^4 \qquad dividiendo\ entre\ "x^2"$$

$$\frac{x^2dy}{x^2dx} + \frac{yx}{x^2}(x-1) = \frac{x^4}{x^2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + \frac{y(x-1)}{x} = x^2 \qquad ecuacion\ diferencial\ en\ "y"}$$

b) $[\mathrm{x} - \mathrm{ysen(y)} + \mathrm{xycot(y)}]\mathrm{dy} + \mathrm{ydx} = 0$

$$[\mathrm{x} - \mathrm{ysen(y)} + \mathrm{xycot(y)}]\mathrm{dy} + \mathrm{ydx} = 0 \qquad dividiendo\ entre\ "dy"$$

$$[\mathrm{x} - \mathrm{ysen(y)} + \mathrm{xycot(y)}] + \mathrm{y}\frac{dx}{dy} = 0 \qquad dividiendo\ entre\ "y"$$

$$\frac{x}{y} - \mathrm{sen(y)} + \mathrm{xcot(y)} + \frac{dx}{dy} = 0$$

$$\frac{x}{y} + \mathrm{xcot(y)} + \frac{dx}{dy} = sen(y)$$

$$\boxed{\frac{dx}{dy} + x\left[\frac{1}{y} + \cot(y)\right] = sen(y) \qquad ecuacion\ diferencial\ en\ "x"}$$

METODO DE SOLUCION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Para resolver una ecuación diferencial lineal en términos de "y" se hace lo siguiente:

1) Escribir la ecuación diferencial en la forma: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

2) Encontrar un factor integrante que convierta la ecuación diferencial en exacta.

$$dy + [P(x)y - Q(x)]dx = 0$$

$$N_{(x,y)} = 1 \qquad\qquad M_{(x,y)} = P(x)y - Q(x)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} \neq \frac{\partial M}{\partial y} \qquad\qquad 0 \neq P(x)\ No\ es\ exacta$$

Multiplicando por $\mu(x)$

$$\mu(x)dy + [\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)]dx = 0 \qquad para\ que\ sea\ ecuacion\ diferencial\ exacta$$

$$M_{(x,y)} = \mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \mu(x)P(x)$$

$$N_{(x,y)} = \mu(x)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{d\big(\mu(x)\big)}{dx}$$

$$\mu(x)P(x) = \frac{d(\mu(x))}{dx}$$

$$P(x)dx = \frac{d(\mu(x))}{\mu(x)}$$

$$\int P(x)dx = \int \frac{d(\mu(x))}{\mu(x)}$$

$$\int P(x)dx = \ln(\mu(x)) \qquad e^{\ln(\mu(x))} = e^{\int P(x)dx}$$

$$F.I = \boxed{\mu(x) = e^{\int P(x)dx}} \quad factor\ integrante$$

Sustituyendo el factor integrante.

$$e^{\int P(x)dx}\, dy + \left(e^{\int P(x)dx}\, P(x)y - e^{\int P(x)dx}Q(x)\right) dx = 0$$

$$N_{(x,y)} = e^{\int P(x)dx} \qquad M_{(x,y)} = e^{\int P(x)dx}\, P(x)y - e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = e^{\int P(x)dx}\, P(x) \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = e^{\int P(x)dx}\, P(x)$$

$$\therefore es\ una\ ecuacion\ diferencial\ exacta.$$

3) El lado izquierdo de la ecuación diferencial multiplicado por el factor integrante forma un diferencial exacto el cual está formado por el producto del factor integrante y por la V.D

$$\underbrace{e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}\, P(x)y}_{\text{Diferencial Total}} = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

$$d\left[e^{\int P(x)dx} \,.\, y\right] = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

4) $\int d\left[e^{\int P(x)dx} \,.\, y\right] = \int e^{\int P(x)dx}Q(x) + c$

$$\boxed{e^{\int P(x)dx} \,.\, y = e^{\int P(x)dx}Q(x) + c}$$

Ejemplo:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $[\mathrm{y}-\mathrm{xsen(x)}+\mathrm{xycot(x)}]\mathrm{dx}+\mathrm{xdy}=0$

$$[\mathrm{y}-\mathrm{xsen(x)}+\mathrm{xycot(x)}]\mathrm{dx}+\mathrm{xdy}=0 \qquad Dividiendo\ entre\ "dx"$$

$$[\mathrm{y}-\mathrm{xsen(x)}+\mathrm{xycot(x)}]+\mathrm{y}\frac{dy}{dx}=0 \qquad dividiendo\ entre\ "x"$$

$$\frac{y}{x}-\mathrm{sen(x)}+\mathrm{ycot(x)}+\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}+\left[\frac{1}{x}+\cot(x)\right]y=sen(x) \qquad ecuacion\ diferencial\ en\ "y"$$

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

$$P(x)=\frac{1}{x}+\cot(x)$$

$$\mu(x)=e^{\int P(x)dx} \qquad \mu(x)=e^{\int(\frac{1}{x}+\cot(x))dx}$$

$$\mu(x)=e^{\ln|x|+\ln|sen(x)|} \qquad \mu(x)=e^{\ln|xsen(x)|}$$

$$\mu(x)=xsen(x)$$

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{x}+\cot(x)\right)y=sen(x)$$

$$xsen(x)\frac{dy}{dx}+xsen(x)\left(\frac{1}{x}+\cot(x)\right)y=xsen^2(x)$$

$$d[xsen(x)\,.\,y]=xsen^2(x)$$

$$\int d[xsen(x)\,.\,y]=\int xsen^2(x)\ dx\ +c$$

$$xsen(x)\,.\,y=\int x\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)dx+c$$

$$xsen(x)\,.\,y=\int\frac{x}{2}dx-\int\frac{xcos(2x)}{2}\ dx+c$$

$$u=x \qquad v=\int\frac{\cos(2x)}{2}dx$$

$$du=dx \qquad v=\frac{1}{4}sen(2x)$$

$$xsen(x).\,y=\frac{x^2}{4}-\left[\frac{1}{4}xsen(2x)-\frac{1}{4}\int sen(2x)dx\right]+c$$

$$\boxed{xsen(x).y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\,xsen(2x) - \frac{1}{8}\cos(2x) + c}$$

b) $yln(y)dx + (x - \ln(y))dy = 0$

$$yln(y)dx + (x - \ln(y))dy = 0 \qquad dividiendo\ entre\ "dy"$$

$$yln(y)\frac{dx}{dy} + x - \ln(y) = 0$$

$$yln(y)\frac{dx}{dy} + x = \ln(y) \qquad dividiendo\ entre\ "yln(y)"$$

$$\frac{dx}{dy} + \left(\frac{1}{yln(y)}\right)x = \frac{1}{y} \qquad ecuacion\ diferencial\ en\ "x"$$

$$P(y) = \frac{1}{yln(y)}$$

$$\mu(y) = e^{\int P(y)dy} \quad \rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int (\frac{1}{yln(y)})dy}$$

$$u = \ln(y) \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{y}dy$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{du}{u}} \quad \rightarrow \quad \mu(y) = e^{\ln|u|}$$

$$\mu(y) = e^{\ln|\ln(y)|} \quad \rightarrow \quad \mu(y) = \ln(y)$$

$$\underbrace{\ln(y)\frac{dx}{dy} + \ln(y)\left(\frac{1}{yln(y)}\right)}_{d[F.I.V.D]} x = \ln(y)\frac{1}{y}$$

$$d[\ln(y).\ x] = \frac{\ln(y)}{y}$$

$$\int d[\ln(y).\ x] = \int \frac{\ln(y)}{y}dy + c$$

$$u = \ln(y) \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{y}dy$$

$$\ln(y)\,x = \int udu + c$$

$$\ln(y)\,x = \frac{u^2}{2} + c$$

$$\boxed{\ln(y)\,x = \frac{1}{2}\,(\ln y)^2 + c}$$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 2x + 1$
2) $(y^2 + 1)dx + (4xy - 8y^2)dy = 0$
3) $x^2dy + x^2ydx = xydx + x^4e^{2x}dx$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE BERNOULLI

Estas son ecuaciones diferenciales no lineales pero pueden reducirse a una ecuación diferencial lineal utilizando una sustitución especial.

Su ecuación tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \qquad \rightarrow \quad E.D\ de\ B.\ en\ \text{"y"} \qquad \text{ó}$$

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)x^n \qquad \rightarrow \quad E.D\ de\ B.en\ \text{"x"}$$

Donde “n” puede ser positivo o negativo siempre que sea diferente de cero y uno porque para estos valores la E.D es lineal así:

Para n=0

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^0 \qquad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \rightarrow E.D.L$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^1 \qquad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + [P(x) - Q(x)]y = 0 \rightarrow E.D.L$$

Ejemplo:

a) Determine si la siguiente E.D es una E.D. de B. $dy + (3x^2y - x^3y^3)dx = 0$

$$dy + (3x^2y - x^3y^3)dx = 0 \qquad dividiendo\ entre\ dx$$

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y - x^3y^3 = 0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + 3x^2y = x^3y^3} \qquad E.D.de\ B.en\ \text{"y"}$$

Determinar si las siguientes E.D son E.D de B.

1) $(x+y)dy + [(y^2+xy) - (x^2y^3+xy^4)]dx = 0$
2) $(y+1)dx = (e^y - x)dy$

METODO DE SUSTITUCION DE E. D. DE BERNOULLI

Para resolver una E.D de Bernoulli se hace lo siguiente:

1) Escribir la E.D en la forma:
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$
2) Multiplicar la E.D por y^{-n} para convertir la parte derecha de la E. D en una función solamente en términos de "x"
$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \ \rightarrow I$$
3) Utilizar la sustitución especial $v = y^{1-n}$ y derivar con respecto a "x" en forma implícita ya que "v" es la nueva V.D
$$v = y^{1-n}$$
$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx} \ \rightarrow \ II$$
4) Sustituir la ecuación II en la I para convertir la E. D en una E. D. L en términos de "v"
$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$
$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$
$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x) \quad multiplicando\ por\ (1-n)$$
$$\frac{dv}{dx} + P(x)(1-n)v = Q(x)(1-n)$$
$$\boxed{\frac{dv}{dx} + P_1(x)v = Q_1(x)} \ \rightarrow E.D.L$$
5) Resolver la ecuación diferencial lineal.

Ejemplo.

Resolver las siguientes ecuaciones

a) $y' = y + x\sqrt[3]{y^2}$

$$\frac{dy}{dx} - y = xy^{\frac{2}{3}} \qquad \rightarrow \quad E.D.\, de\, B.\, en\, y$$

$$n = \frac{2}{3} \rightarrow debemos\ multiplicar\ por\ y^{-\frac{2}{3}}$$

$$y^{-\frac{2}{3}}\frac{dy}{dx} - y^{\frac{1}{3}} = x \quad \dots \ I$$

$$v = y^{1-\frac{2}{3}} \quad \rightarrow \quad v = y^{\frac{1}{3}} \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\frac{dy}{dx}$$

$$3\frac{dv}{dx} = y^{-\frac{2}{3}}\frac{dy}{dx} \quad \dots II$$

$$sustituyendo\ II\ en\ I$$

$$3\frac{dv}{dx} - v = x \qquad dividiendo\ entre\ 3$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{3}v = \frac{1}{3}x \qquad E.D.\ en\ "v"$$

$$P(x) = -\frac{1}{3} \qquad \rightarrow \qquad \mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{3}dx} \qquad \rightarrow \qquad \mu(x) = e^{-\frac{1}{3}x}$$

$$e^{-\frac{1}{3}x}\frac{dv}{dx} - e^{-\frac{1}{3}x}\frac{1}{3}v = \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}x$$

$$\underbrace{d\left[e^{-\frac{1}{3}x} \,.\, v\right]}_{d\,[F.I\,.V.D]} = \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}x$$

$$\int d\left[e^{-\frac{1}{3}x} \,.\, v\right] = \frac{1}{3}\int e^{-\frac{1}{3}x}x\,dx + c$$

$$u = x \qquad dv = \int e^{-\frac{1}{3}x}\,dx$$

$$du = dx \qquad v = -3e^{-\frac{1}{3}x}$$

$$e^{-\frac{1}{3}x}\,.\ v = \frac{1}{3}[-3xe^{-\frac{1}{3}} + 3\int e^{-\frac{1}{3}x}\,dx]$$

$$e^{-\frac{1}{3}x}\,.\ v = -xe^{-\frac{1}{3}x} - 3e^{-\frac{1}{3}x} + c$$

$$e^{-\frac{1}{3}x}\,.y^{\frac{1}{3}} = -xe^{-\frac{1}{3}x} - 3e^{-\frac{1}{3}x} + c \qquad dividiendo\ entre\ e^{-\frac{1}{3}x}$$

$$\boxed{y^{\frac{1}{3}} = -x - 3 + ce^{\frac{1}{3}x}}$$

b) $y = \frac{dx}{dy} + 4x = (xy^3)^2e^{3y}$

$$y\frac{dx}{dy} + 4x = x^2y^6e^{3y} \qquad dividiendo\ entre\ "y"$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{4}{y}x = x^2y^5e^{3y} \qquad E.D\ de\ B\ en\ "x"$$

$$multiplicando\ por\ x^{-2}$$

$$x^{-2}\frac{dx}{dy} + \frac{4}{y}x^{-1} = y^5e^{3y}\ \ \ldots\ \ I$$

$$v = x^{1-2} \quad \rightarrow \quad v = x^{-1} \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dy} = -1x^{-2}\frac{dx}{dy} \quad \rightarrow \quad -\frac{dv}{dy} = x^{-2}\frac{dx}{dy}\ \ldots\ \ II$$

$$sustituyendo\ II\ en\ I$$

$$-\frac{dv}{dy} + \frac{4}{y}v = y^5e^{3y}\ \ multiplicando\ por(-1)$$

$$\frac{dv}{dy} - \frac{4}{y}v = -y^5e^{3y} \qquad E.D.L\ en\ \mathrm{v}$$

$$P(y) = \frac{-4}{y} \quad \rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int P(y)dy} \quad \rightarrow \quad \mu(x) = e^{-4\int\frac{dy}{y}}$$

$$\mu(x) = e^{-4\ln|y|} \qquad \rightarrow \qquad \mu(x) = y^{-4}$$

$$y^{-4}\frac{dv}{dy} - \frac{4}{y}y^{-4}v = -ye^{3y}$$

$$d[y^{-4}.v] = -ye^{3y}$$

$$\int d[y^{-4}.v] = -\int ye^{3y}\ dy + c$$

$$u = y \qquad\qquad dv = \int e^{3y}\,dy$$

$$du = dy \qquad\qquad v = \frac{e^{3y}}{3}$$

$$y^{-4}.v = -\left[\frac{ye^{3y}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3y}\,dy\right] + c$$

$$y^{-4}.v = \frac{-ye^{3y}}{3} + \frac{1}{9}e^{3y} + c$$

$$\boxed{y^{-4}.x^{-1} = \frac{-ye^{3y}}{3} + \frac{1}{9}e^{3y} + c}$$

FACTOR INTEGRANTE

Para resolver E.D de primer orden que no cumplen algunos de las características de las ecuaciones antes vistas pero se pueden transformar en un a E.D exacta a través de un factor integrante el cual será una función solamente en términos de "x" o en términos de "y" para lo cual se van a presentar los siguientes casos:

Caso I Función en términos de "X"

Si la función encontrada a través de la expresión $\frac{1}{N_{(x,y)}}[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}]$ depende únicamente de "x" o es simplemente una constante entonces el factor integrante que convierte una exacta la ecuación diferencial es:

$$e^{\int \frac{1}{N_{(x,y)}}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]dx}$$

Dicho F.I convierte en exacta la E. D y se va a utilizar cuando $N_{(x,y)}$ sea mucho más sencilla que $M_{(x,y)}$.

Caso II Función en términos de "y"

Si la función encontrada a través de la expresión $\frac{1}{M_{(x,y)}}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right]$ dependen únicamente de "y" o es simplemente una constante entonces el factor integrante que convierte en exacta la E. D es:

$$e^{\int \frac{1}{M_{(x,y)}}[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}]\mathrm{dy}}$$

El cual se va a utilizar cuando la función $M_{(x,y)}$ sea mucho más sencilla que $N_{(x,y)}$.

Ejemplo: Resolver las siguientes E.D utilizando factor integrante.

a) $\underbrace{(y^2 + x^2 + x)dx}_{M_{(x,y)}} + \underbrace{(yx)dy}_{N_{(x,y)}} = 0$

$N_{(x,y)} \quad es\ mas\ sencilla$

$$F.I = e^{\int \frac{1}{N_{(x,y)}}[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}]\mathrm{dy}}$$

$N_{(x,y)} = xy\,, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2y$

$\frac{1}{M_{(x,y)}}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{xy}[2y - y] = \frac{1}{xy}[y] = \frac{1}{x}$

$F.I = e^{\int \frac{1}{x}dx} \quad \rightarrow \quad F.I = e^{\ln(x)} \quad \rightarrow \quad F.I = x$

Multiplicando por el F.I = x la ecuación diferencial

$x(y^2 + x^2 + x)dx + x(yx)dy = 0$

$(xy^2 + x^3 + x^2)dx + (yx^2)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy \qquad \rightarrow \qquad es\ una\ E.D.exacta$

$M = f_{(x,y)} = \int (xy^2 + x^3 + x^2)\,dx$

$f_{(x,y)} = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$

$N_{(x,y)} = f_{(x,y)} = \int yx^2\,dy$

$f_{(x,y)} = \frac{1}{2}\, y^2x^2$

$$\boxed{f_{(x,y)} = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 = c}$$

b) $(2xy)dx + (2x^2 + 3y)dy = 0$

$M_{(x,y)} \quad \rightarrow \quad es\ la\ mas\ sencilla$

$F.I = e^{\int \frac{1}{M_{(x,y)}}[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}]\mathrm{dy}}$

$M_{(x,y)} = 2xy\,, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2x$

$F.I = e^{\int \frac{1}{2xy}[4x - 2x]\mathrm{dx}} \quad \rightarrow \quad F.I = e^{\int \frac{2x}{2xy}dx} \quad \rightarrow \quad F.I = e^{\int \frac{1}{y}dx} \quad \rightarrow \quad F.I = e^{\ln(y)}$

$F.I = y$

$y(2xy)dx + y(2x^2 + 3y)dy = 0$

$(2xy^2)dx + (2x^2y + 3y^2)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy \quad \rightarrow \quad es\ una\ E.D\ exacta$

$M = f_{(x,y)} = \int (2xy^2)\, dx$

$f_{(x,y)} = x^2y^2$

$N_{(x,y)} = f_{(x,y)} = \int (2x^2y + 3y^2)\, dy$

$f_{(x,y)} = x^2y^2 + y^3$

$$\boxed{f_{(x,y)} = x^2y^2 + y^3 = c}$$

c) $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx \ + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$

$M_{(x,y)} \quad \rightarrow \quad es\ la\ mas\ sencilla$

$F.I = \ e^{\int \frac{1}{M_{(x,y)}}[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}]\mathrm{dy}}$

$M_{(x,y)} = 2xy^4e^y + 2xy^3 + y\ , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3,$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy^4e^y + e^y8xy^3 + 6xy^2 + 1$

$\frac{1}{2xy^4e^y+2xy^3+y}[2xy^4e^y - 2xy^2 - 3 - 2xy^4e^y - e^y8xy^3 - 6xy^2 - 1]$

$\frac{1}{2xy^4e^y+2xy^3+y}[-8xy^2 - 8x^3e^y - 4] \quad \rightarrow \quad \frac{-8xy^2-8x^3e^y-4}{2xy^4e^y+2xy^3+y} \quad \rightarrow \quad \frac{-4(2xy^2+2x^3e^y+1)}{y(2xy^3e^y+2xy^2+1)} \quad \rightarrow \quad \frac{-4}{y}$

$F.I = \ e^{-\int \frac{4}{y}dy} \ \rightarrow \ F.I = \ e^{-4\ln(y)} \ \rightarrow \ F.I = \ e^{\ln(y^{-4})} \ \rightarrow \ F.I = y^{-4}$

$y^{-4}(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + y^{-4} + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$

$(2xe^y + 2xy^{-1} + y^{-3})dx \ + (x^2e^y - x^2y^{-2} - 3xy^{-4})dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xe^y - \frac{2x}{y^2} \quad - \frac{3}{y^4} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \ 2xe^y - \frac{2x}{y^2} \quad - \frac{3}{y^4} \qquad es\ una\ E.D.exacta$

$M = f_{(x,y)} = \ \int(2xe^y + 2xy^{-1} + y^{-3})\,dx$

$f_{(x,y)} = \ x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \ \frac{x}{y^3}$

$N_{(x,y)} = \ f_{(x,y)} = \int(x^2e^y - x^2y^{-2} - 3xy^{-4})\,dy$

$f_{(x,y)} = \ x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \ \frac{3x}{3y^3}$

$$\boxed{f_{(x,y)} = \ x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \ \frac{x}{y^3} = c}$$

Resolver las siguientes E. D

1) $(4x + 3y^3)dx + (3xy^2)dy = 0$
2) $(4xy^2 + y)dx + (6y^2 - x)dy = 0$
3) $(4y^2 + 3\cos(x))dy - \big(ysen(x)\big)dx = 0$
4) $ydx + \ (3 + 3x - y)dy = 0$
5) $(y^2\cos(x) - y)dx + (x + y^2)dy = 0$
6) $(2x^3 - y)dx + xdy = 0$
7) $(y^3 + 2e^x y)dx + (e^x + 3y^2)dy = 0$
8) $(y^2\cos(x))dx + \big(4 + 5ysen(x)\big)dy = 0$

UNIDAD II

ECUACIONDES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

Una ecuación diferencial de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \ a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \ a_0(x) = g(x)$$

Es lineal y de orden superior si n>1 donde “n” indica sus derivadas y puede tomar cualquier entero n=1, 2, 3, 4…

La E.D.L de orden superior más pequeña tiene la forma:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \ a_0(x) = g(x)$$

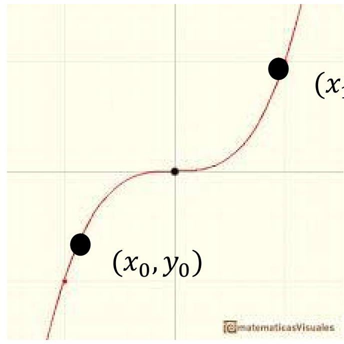
Al resolver estas E.D se va a necesitar encontrar una solución particular que pase por un punto específico, por lo que se hace necesario recordar el problema de valores iniciales (I.V.P) en el cual se le asignan condiciones según el orden de la E.D hasta un orden menor del orden de la E.D así:

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y_1$$

PROBLEMA DE VLORES EN LA FRONTERA

El problema de valores en la frontera consiste en encontrar una solución particular que pase por dos puntos diferentes (x_0, y_0) y (x_1, y_1) para lo cual se van a dar condiciones a la solución general y a sus derivadas en los dos puntos y solo se utiliza para ecuaciones diferenciales de orden superior.



$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + a_0(x) = g(x)$$

1) $y(x_1) = y_0$; $y(x_1) = y_1$
2) $y(x_0) = y_0$; $y'(x_1) = y_3$
3) $y'(x_0) = y_2$; $y'(x_1) = y_3$
4) $y'(x_0) = y_2$; $y(x_1) = y_1$

DIFERENCIA ENTRE I.V.P Y F.V.P

- F.V.P es solo para E.D de orden superior
- I.V.P es solo un punto en cambio en F.V.P son dos

Ejemplo

1) Encontrar un miembro de la familia $y = C_1e^{2X} + C_2e^{-2x}$ la cual es solución de la E. D $y'' - 4y = 0$
   a) $y(0) = 6$, $y'(0) = 20 \rightarrow I.V.P: (0,6)\ (0,20)$
   b) $y(0) = 6$, $y'(2) = 10 \rightarrow F.V.P: (0,6)\ (2,10)$

$y = C_1e^{2X} + C_2e^{-2x}$

a) $x = 0$, $y = 6$
$6 = C_1e^{2(0)} + C_2e^{-2(0)}$
$6 = C_1 + C_2 \ldots I$

$x = 0$, $y' = 20$
$y' = 2C_1e^{2X} - 2C_2e^{-2x}$
$20 = 2C_1 - 2C_2 \ldots II$

Simultaneando I Y II

$$(6 = C_1 + C_2)(2) \rightarrow \quad 12 = 2C_1 + 2C_2$$
$$20 = 2C_1 - 2C_2 \quad \rightarrow \quad \underline{20 = 2C_1 - 2C_2}$$
$$32 = 4C_1 \qquad C_1 = 8$$

Sustituyendo $C_1 = 8$ en I

$8 + C_2 = 6 \qquad C_2 = -2$

$$\boxed{y = 8e^{2X} - 2e^{-2x}}$$

$y = C_1e^{2X} + C_2e^{-2x}$

b) $x = 0 \ , y = 6$

$6 = C_1e^{2(0)} + C_2e^{-2(0)}$

$6 = C_1 + C_2 \ldots I$

$x = 2 \ , \ y' = 10$

$y' = 2C_1e^{2X} - 2C_2e^{-2x}$

$10 = 2C_1e^{4} - 2C_2e^{-4} \ldots II$

Simultaneando I Y II

$$(6 = C_1 + C_2)(2\,e^{-4}) \rightarrow \quad 12e^{-4} = 2C_1e^{-4} + 2C_2e^{-4}$$
$$10 = 2C_1e^{4} - 2C_2e^{-4} \quad \rightarrow \quad \underline{10 = 2C_1e^{4} - 2C_2e^{-4}}$$
$$12e^{-4} + 10 = 2C_1(e^{-4} + e^{-4})$$

$C_1 = \frac{12e^{-4}+10}{2(e^{-4}+e^{-4})} \quad \rightarrow \quad C_1 = 0.094$

Sustituyendo $C_1 = 0.094$ en I

$0.094 + C_2 = 6 \quad \rightarrow \quad C_2 = 5.90$

$$\boxed{y = 0.094e^{2X} - 5.90e^{-2x}}$$

2) Encuentre un miembro de la familia que satisfaga las condiciones iniciales dadas, si la solución general es: $y = C_1e^{X} + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$ y $y(0) = 4$; $y'(0) = 6$; $y''(0) = 16$

$y = C_1e^{X} + C_2e^{2x} + C_3e^{3x} \qquad y' = C_1e^{X} + 2C_2e^{2x} + 3C_3e^{3x}$

$y'' = C_1e^{X} + 4C_2e^{2x} + 9C_3e^{3x}$

$x = 0\ , y = 4$ $\qquad$ $x = 0\ ,\ y' = 6$

$4 = C_1e^0 + C_2e^{2(0)} + C_3e^{3(0)}$ $\qquad$ $6 = C_1e^{2(0)} + 2C_2e^{2(0)} + 3C_3e^{3(0)}$

$4 = C_1 + C_2 + C_3 \dots I$ $\qquad$ $6 = C_1 + 2C_2 + 3C_3 \dots II$

$y'' = 16\ , x = 0$

$16 = C_1e^0 + 4C_2e^{2(0)} + 9C_3e^{3(0)}$

$16 = C_1 + 4C_2 + 9C_3 \dots III$

Simultaneando I y II

$(4 = C_1 + C_2 + C_3)(-3) \quad \rightarrow \quad -12 = -3C_1 - 3C_2 - 3C_3$

$6 = C_1 + 2C_2 + 3C_3 \quad \rightarrow \quad \underline{6 = \quad C_1 + 2C_2 + 3C_3}$

$-6 = -2C_1 - C_2 \dots IV$

Simultaneando I y III

$(4 = C_1 + C_2 + C_3)(-9) \quad \rightarrow \quad -36 = -9C_1 - 9C_2 - 9C_3$

$16 = C_1 + 4C_2 + 9C_3 \quad \rightarrow \quad \underline{16 = \quad C_1 + 4C_2 + 9C_3}$

$-20 = -8C_1 - 5C_2 \dots V$

Simultaneando IV y V

$(-6 = -2C_1 - C_2)(-5) \quad \rightarrow \quad 30 = 10C_1 + 5C_2$

$-20 = -8C_1 - 5C_2 \quad \rightarrow \quad \underline{-20 = -8C_1 - 5C_2}$

$10 = 2C_1 \quad \rightarrow \quad C_1 = 5$

Sustituyendo $C_1 = 5$ en IV

$-6 = -2(5) - C_2 \qquad C_2 = -4$

Sustituyendo $C_1 = 5$ y $C_2 = -4$ en I

$5 - 4 + C_3 = 4$ $\qquad\qquad$ $C_3 = 3$

$$\boxed{y = 5e^{X} - 4e^{2x} + 3e^{3x}}$$

EXISTENCIA DE UNA SOLUCION UNICA

Para determinar si una ecuación diferencial de orden superior tiene solución única para un I.V.P se hace lo siguiente:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x) = g(x)$$

1) Seleccionar el $a_n(x)$ hasta el $a_0(x)$ y obtener el dominio de cada uno de ellos.

2) Obtener el dominio de la función $g(x)$.

3) Si se trata de un problema de valores iniciales comprobar que el punto (x_0, y_0) este dentro de los dominios de todas las funciones.

4) Determinar para que valores $a_n(x)$ es igual a cero $a_n = 0$.

5) La solución única se va a dar en la intercepción de los dominios de $a_n(x)$ hasta $a_0(x)$ con $g(x)$ menos el valor donde $a_n(x) = 0$.

$$s.u = Da_n(x) \cap Da_{n-1}(x) \ldots \cap Da_0(x) \cap Dg(x) - (a_n(x) = 0)$$

Ejemplo.

a) Determinar si la E.D tiene solución única en el punto indicado y además determinar donde tiene solución única.

$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 6y = x^2 \qquad y(0) = 1 \,;\ \ y'(0) = 12 \,;\ \ y''(0) = 4$

$a_3 = x^3 \,, \qquad a_2 = x^2 \,, \qquad a_1 = 4x \,, \qquad a_0 = 6 \,, \qquad g(x) = x^2$

$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$

$R \qquad R \qquad R \qquad R \qquad R$

$a_n(x) = a_3(x) = x^3$
$x^3 = 0$
$x = 0$
$S.U = R - \{0\}$
$\therefore$ *en el punto* $(0,1)$ *no hay solucion única*

b) $(4 - x^2) \frac{d^3y}{dx^3} + x^2 \frac{dy}{dx} + \ln(x-1)\, y = e^x$

$a_3 = (4 - x^2) \,, \qquad a_2 = 0 \,, \qquad a_1 = x^2 \,, \qquad a_0 = \ln(x-1) \,, \qquad g(x) = e^x$

$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$

$R \qquad R \qquad R \qquad x > 1 \qquad R$

$S.U = x > 1$
$a_3 = (4 - x^2) = 0$
$a_3 = (2 - x)(2 + x) = 0$
$x = 2 \ ;\ x = -2$

$\boxed{S.U. =]\,1,2\,[\cup]\,2,\infty\,[}$

c) $(x^2 - 1) \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 6y = \ln(x) \qquad y(2) = 0 \ \ ; \ \ y'(2) = 4$

$a_2 = (x^2 - 1) \,, \qquad a_1 = 4x \,, \qquad a_0 = 6 \,, \qquad g(x) = \ln(x)$

$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$

$R \qquad R \qquad R \qquad x > o$

$a_2 = (x^2 - 1) = 0$
$a_2 = (x + 1)(x - 1) = 0$
$x = 1 \ \ ; \ \ x = -1$
$S.U = X > 0 - \{1\}$
en el punto $y = 0$ *y* $x = 2$ *hay solucion unica.*

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \ldots\ f_n(x)$ son linealmente dependientes en un intervalo I si existen constantes C1, C2, C3… Cn no todas nulas tales que la siguiente combinación lineal sea igual a ser para todo valor dentro del intervalo de su dominio.

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + C_3 f_3(x) + \cdots + C_n f_n(x) = 0 \qquad \textit{linealmente dependietne.}$$

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + C_3 f_3(x) + \cdots + C_n f_n(x) \neq 0 \qquad \textit{linealmente independiente.}$$

Por lo tanto un conjunto de funciones son linealmente dependientes si al menos una de ellas es una combinación lineal de la otra.

Ejemplo.

Determinar si las siguientes funciones son linealmente independientes o dependientes.

a) $f_1(x) = x + 2\ ;\ f_2(x) = x + 3\ ;\quad f_3(x) = 2x + 4$

$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + C_3 f_3(x) = 0$
$C_1(x + 2) + C_2(x + 3) + C_3(2x + 4) = 0$
$C_1 = -2, \qquad C_2 = 0, \qquad C_3 = 1$
$-2x - 4 + 2x + 4 = 0$
$0 = 0$
$\therefore\ f_1(x)\quad f_2(x)\quad f_3(x)\ \textit{ son linealmente dependientes.}$

b) $f_1(x) = x^2\ ;\ f_2(x) = 2 - x^2\ ;\quad f_3(x) = 4 + 2x;\quad f_4(x) = x^2 + 2x$

$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + C_3 f_3(x) + C_4 f_4(x) = 0$
$C_1(x^2) + C_2(2 - x^2) + C_3(4 + 2x) + C_4(x^2 + 2x) = 0$
$C_1 = 1, \qquad C_2 = 2, \qquad C_3 = -1, \qquad C_4 = 1$
$(1)x^2 + 2(2 - x^2) - (4 + 2x) - (x^2 + 2x) = 0$
$x^2 + 4 - 2x^2 - 4 - 2x + x^2 + 2x = 0$
$0 = 0$
$\therefore\ f_1(x)\quad f_2(x)\quad f_3(x)\quad f_4(x)\ \textit{ son linealmente dependientes.}$

c) $y_1 = e^x\ ;\ y_2 = e^{2x}\ ;\quad y_3 = e^{3x}$
$C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} = 0$
$C_1 = 1, \qquad C_2 = 1, \qquad C_3 = -1$
$e^x + e^{2x} - e^{3x} \neq 0$
$\therefore\ y_1\ ;\ y_2\ ;\ y_3 \qquad \textit{son linealmente independientes}$

EL WRONSKIANO

El Wronskiano es un método para determinar si un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x) \ldots\ f_n(x)$ son linealmente dependientes o independientes ya que por este método no tenemos que estar encontrando constantes si no que se va a resolver un determinante de orden n x n que va a estar formado por las funciones y sus derivadas hasta llegar a la derivada n-1. Si al resolver ducho determinante es igual a cero entonces las funciones son linealmente dependientes y si es diferente de cero son linealmente independientes.

$$W = \begin{vmatrix} f1 & f2 & f3 & \ldots & fn \\ f'1 & f'2 & f'3 & \ldots & f'n \\ f''1 & f''2 & f''2 & \ldots & f''n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ f^{n-1}1 & f^{n-1}2 & f^{n-1}3 & \ldots & f^{n-1}n \end{vmatrix}$$

si es igual a cero es L.D
Si es diferente de cero es L.I

Ejemplo.

a) Demuestre que las funciones $f_1(x) = e^{2x}$; $f_2(x) = e^{3x}$; $f_3(x) = x$ son linealmente independientes en el intervlo de $]-\infty, +\infty[$

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} & x \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} & 1 \\ 4e^{2x} & 9e^{3x} & 0 \end{vmatrix} = e^{2x}(-9e^{3x}) - e^{3x}(-4e^{2x}) + x(18e^{5x} - 12e^{5x})$$

$$= -9e^{5x} + 4e^{5x} + 6xe^{5x} - 5e^{5x} + 6xe^{5x}$$

$$= (6x-5)e^{5x}$$

$$L.I\ en\ R - \{\tfrac{5}{6}\}$$

b) Verificar si $f_1(x) = x^2$; $f_2(x) = 2 - x^2$; $f_3(x) = 4 + 2x$; $f_4(x) = x^2 + 2x$ son L.I o L.D

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & 2-x^2 & 4+2x & x^2+2x \\ 2x & -2x & 2 & 2x+2 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$por\ la\ prodiedades\ de\ los\ determinantes\ (toda\ una\ fila\ de\ ceros)$$
$$\therefore las\ funciones\ don\ L.I$$

d) Verificar si las siguientes funciones $f_1(x) = x$; $f_2(x) = x\ln(x)$; $f_3(x) = x^2$ son L.I o L.D

$$W = \begin{vmatrix} x & x\ln(x) & x^2 \\ 1 & 1+\ln(x) & 2x \\ 0 & \frac{1}{x} & 2 \end{vmatrix} = x[2(1+\ln(x)) - 2] - x\ln(x)\,(2) + x^2\,\frac{1}{x}$$

$$= 2x + 2x\ln(x) - 2x - 2x\ln(x) + x$$

$$W = x$$

$$\therefore las\ funciones\ son\ L.I\ para\ \ R - \{0\}$$

Verificar si las siguientes funciones son L.I o L.D

a) $f_1(x) = 1$; $f_2(x) = x$; $f_3(x) = e^x$; $f_4(x) = e^{2x}$
b) $f_1(x) = e^x$; $f_2(x) = xe^x$; $f_3(x) = x^2e^x$
c) $f_1(x) = e^x$; $f_2(x) = e^{2x}$; $f_3(x) = e^{3x}$

SOLUCION DE E.D. LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

Las soluciones de una E.D lineal de orden superior tienen que ser linealmente independiente y va a contener constantes de acuerdo al orden de la E.D. así:

$y'' - 4y` + 4y = 0$

$y = C_1e^{2x} + C_2e^{2x}$

Primero probar si son L.I

$C_1 = 1 \qquad C_2 = -1$

$y = e^{2x} - e^{2x} = 0 \ \rightarrow es\ L.D$ Por lo tanto no puede ser solución de la E.D

Las E.D de orden superior pueden ser:

1) E.D lineales homogéneas

2) E.D lineales no homogéneas

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGENEAS

Son aquellas E.D donde la función $g(x) = 0$ y tiene la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x) = 0$$

Ejemplo.

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4y = 0 \quad \rightarrow E.D.L.H$$

$$y'' + 4y' + 4y = x \quad \rightarrow no\ es\ E.D.L.H$$

Las E.D.L homogéneas pueden ser:

a) De coeficiente constante
b) De coeficiente variable.

E.D.L.H DE COEFICIENTES CONSTANTES

Una ecuación homogénea es de coeficientes constantes cuando los coeficientes desde $a_n(x)$ hasta $a_0(x)$ son constantes cualesquiera así:

$$3\frac{d^3 y}{dx^3} + 4\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 10y = 0$$

Toda E.D de coeficientes constantes tiene solución única en los reales.

E.D.L.H DE COEFICIENTES VARIBLES

Una E.D homogénea es de coeficientes varibles cuando por lo menos uno de los coeficientes desde $a_n(x)$ hasta $a_0(x)$ está en función de la V.I así:

$$x^2\frac{d^3 y}{dx^3} + 4\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

Toda E.D.L. homogénea que su S.U sean los reales es de coeficientes constantes.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICION DE E.D.L HOMOGENEA

Sean y1, y2, y3 ….yk soluciones de la E.D.L.H de orden "n" en un intervalo I del eje "x" Dado que las soluciones son linealmente independientes la solución general va a venir dada por la siguiente combinación lineal.

$$y = \underbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) + \cdots + C_n y_k(x)}$$

Conjunto fundamental de soluciones

Esta solución cumple la ecuación diferencial para todos los valores en el dominio de la ecuación diferencial y va a contener constantes arbitrarias de acuerdo al orden de la E.D. y es a lo que llamamos conjunto fundamental de soluciones.

Ejemplo:

a) Dadas las funciones $Y_1 = e^x$, $Y_2 = e^{-2x}, Y_3 = xe^{-2x}$ las cuales son soluciones de la E.D. $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{3d^2y}{dx^2} - 4y = 0$. Escribir la solución general y determinar si forma un conjunto fundamental de soluciones.

$$Y_{(x)} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 X e^{-2x}$$

Y_1, Y_2, Y_3 deben ser L.I

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} & Xe^{.2x} \\ e^x & -2e^{-2x} & -2Xe^{-2x} + e^{-2x} \\ e^x & 4e^{-2x} & \underbrace{4Xe^{-2x} - 2e^{-2x} - 2e^{-2x}}_{4xe^{.2x} - 4e^{-2x}} \end{vmatrix}$$

$$W = e^x e^{-2x} e^{-2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & -2 & 1-2x \\ 1 & 4 & 4x-4 \end{vmatrix}$$

$$w = e^{-3x}\{1[(-2)(4x-4) - 4(1-2x)] - [1(4x-4) - (1-2x)] + 6x\}$$

$$W = e^{-3x}(-\cancel{8x} + 8 - 4 + \cancel{8x} - \cancel{4x} + 4 + 1 - \cancel{2x} + \cancel{6x})$$

$W = 9e^{-3x}$ $\quad\therefore$ Es L.I en los R.

Entonces la E.D tiene S.U en R

b) Escribir la solución general de la E.D $X^3y''' - X^2y'' + 2Xy' - 2y = 0$ Si las soluciones son $y_1 = X, y_2 = x\ln(x), y_3 = x^2$ además decir en que intervalo tiene S.U y en que intervalo forma un conjunto fundamental de soluciones.

$$y_{(x)} = C_1e^x + C_2X\ln(x) + C_3X^2$$

$$W = \begin{vmatrix} X & X\ln(x) & X^2 \\ 1 & \underbrace{X\frac{1}{x} + \ln(x)}_{1+\ln(x)} & 2x \\ 0 & \frac{1}{x} & 2 \end{vmatrix}$$

$$= X[2(1+\ln(x)) - 2] - X\ln(x)(2) + X^2\frac{1}{x}$$

$$= \cancel{2x} + \cancel{2x\ln(x)} - \cancel{2x} - \cancel{2x\ln(x)} + x$$

$W = X$ L.I

S.U = R-$\{0\}$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGENEAS

Las E.D.L no homogéneas son aquellas donde la función $g_{(x)}$ puede ser cualquier función diferente de cero, su ecuación tiene la forma:

$$a_{n(x)}\frac{d^ny}{dx^n} + \cdots + a_{0(x)}y = g_{(x)}\begin{cases} \cot x \\ \sin x \\ e^x \\ x^2 \\ 0 \end{cases}$$

Estas E.D pueden se de coeficientes constantes y de coeficientes variables.

Al resolver estas E.D se van a encontrar dos soluciones:

1. Solución complementaria $Y_{c(x)}$
2. Solución particular $Y_{p(x)}$

$$Y_{(x)} = \overbrace{Y_c + Y_p}^{L.I}$$

SOLUCIÓN COMPLEMENTARIA $Y_{c(x)}$

Es la solución de la parte homogénea de la E.D y contiene constantes arbitrarias según el orden de la E.D

$Y_{c(x)} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$

SOLUCIÓN PARTICULAR ________$Y_{(P)}$

La solución particular es la solución de la parte no homogénea y no va a contener constantes arbitrarias y para encontrarla se van utilizar los siguientes métodos:

1. Coeficientes intermediarios
2. Variación de parámetros

Ejemplo:

Dada la E.D $x^2 y''' + xy' - y = 3x^2$ cuya solución es $y_{(x)} = C_1 x + \frac{C_2}{x} + x^2$; identificar el y_c ^ el y_p comprobar que el y_p es solución de la E.D

$y_p = x^2$ ^ $y_c = C_1 x + \frac{C_2}{x}$

Comprobando que el y_p es solución de la E.D

$y_p = x^2, y_p' = 2x, y''' = 2$

Sust. en E.D : $2x^2 + 2x^2 - x^2 = 3x^2$

$3x^2 = 3x^2$

$y_c = C_1 x + \frac{C_2}{x}, \quad y_c' = C_1 - \frac{C_2}{x^2}, \quad y_c'' = \frac{2C_2}{x^3}$

Sust. en E.D : $\frac{2x^2 C_2}{x^3} + C_1 x - \frac{x C_2}{x^2} - C_1 x - \frac{C_2}{x} = 0$

0=0

METODO DE SOLUCION DE LAS E.D.L HOMOGENEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES.

Consideremos la E.D homogénea de orden "n" donde los coeficientes $a_n \ldots a_{(0)}$ son constantes reales tales que $a_n \neq 0$ y la ecuación es de la forma:

$$a_{n(x)} \frac{d^n y}{dx^n} + \cdots a_{1(x)} \frac{dy}{dx} + a_{0(x)} y = 0$$

La cual tiene "n" soluciones linealmente independientes. Para resolver las E.D.L homogéneas de coeficientes constantes de orden "n" se va tomar de base la solución de una E.D de primer orden que cumpla con las características de las E.D de orden superior.

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+ay=0}\begin{cases} E.D\ de\ orden\ 1 \\ E.D\ de\ V.S \\ E.D.L \end{cases}$$

Por variables separadas.

$\frac{dy}{dx}=-ay \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y}=-a\,dx \quad \rightarrow \int\frac{dy}{y}=-\int adx$

$\ln(y)=-ay+C \quad \rightarrow e^{\ln(y)}=e^{-ax+c}$

$\boxed{y=C_1e^{-ax}}$ si m=-a, mϵR

$\boxed{y=C_1e^{mx}}$ ó $\boxed{y=e^{mx}}$

Luego para encontrar la solución de E.D de orden "n":

$$a_{n(x)}\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1(x)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots a_0y=0$$

Se hace lo siguiente:

1. Tomar la solución $y=e^{mx}$ y derivarla según el orden de la E.D
   $y=e^{mx} \quad y^{'}=me^{mx} \quad y^{''}=m^2e^{mx} \quad y^{'''}=m^3e^{mx} \quad \ldots \quad y^n=m^n\,e^{mx}$

2. Sustituir las derivadas y la solución en la E.D
   $$a_nm^ne^{mx}+a_{n-1}m^{n-1}e^{mx}+\cdots a_1me^{mx}+ae^{mx}=0$$
   $$e^{mx}(a_nm^n+a_{n-1}m^{n-1}+\cdots a_1m+a)=0$$
   $$e^{mx}\neq 0$$
   $\boxed{a_nm^n+a_{n-1}m^{n-1}+\cdots+a_1m+a=0}$ → Ec. característica

3. Resolver la ecuación característica y los diferentes valores de "m" van a representar las diferentes soluciones de la E.D. Al resolver ésta ecuación se presentan tres tipos de raíces:
   a) Raíces reales diferentes
   b) Raíces reales múltiples
   c) Raíces complejas conjugadas

RAICES REALES DIFERENTES

Si las "n" soluciones $m_1,\ m_2,\ m_3\ldots\ m_n$ de la ecuación característica son raíces reales distintas la solución general de la E.D se va a escribir de la siguiente forma:

$$Y_{(x)}=\underbrace{C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x}+C_3e^{m_3x}+\cdots C_ne^{m_nx}}_{son\ linealmente\ independientes}$$

Ejemplo:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $y''' - y'' - 14y' + 24y = 0$

$y = e^{mx}$

$y' = me^{mx}$

$y'' = m^2e^{mx}$

$y''' = m^3e^{mx}$

Sust. en E.D

$m^3e^{mx} - m^2e^{mx} - 14me^{mx} + 24e^{mx} = 0$

$e^{mx}(m^3 - m^2 - 14m + 24) = 0$

$\boxed{m^3 - m^2 - 14m + 24 = 0}$ → Ec. característica

$$Es\ equivalente \begin{cases} y''' = m^3 \\ y'' = m^2 \\ y' = m \\ y = 1 \end{cases}$$

P: 24: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$

Q: 1 : ± 1

$\frac{P}{Q}: 1$

1	-1	-14	24	3
	3	6	-24	
1	2	-8	0	

$m^2 + 2m - 8 = 0$

$(m + 4)(m - 2) = 0$

$m_2 = -4 \ \ \wedge \ \ m_3 = 2$

$\boxed{y_{(x)} = C_1e^{3x} + C_2e^{-4x} + C_3e^{2x}}$

b) $36\frac{d^4y}{dx^4} - 13\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$
$y = e^{mx}$
$y^{'} = me^{mx}$
$y^{''} = m^2e^{mx}$
$y^{'''} = m^3e^{mx}$
$y^{Iv} = m^4e^{mx}$

$36m^4e^{mx} - 13m^2e^{mx} + e^{mx} = 0$
$e^{mx}(36m^4 - 13m^2 + 1) = 0$
$36m^4 - 13m^2 + 1 = 0$ → Ec. característica

36	0	-13	0	1	1/3
	12	4	-3	-1	
36	12	-9	-3	0	
	-12	0	3	-1/3	
36	0	-9	0		

P=1: ± 1
Q= 36: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$
$\frac{P}{Q} = \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{9}, \pm\frac{1}{12}, \pm\frac{1}{8}$

$m_1 = \frac{1}{3}$ ^ $m_2 = -\frac{1}{3}$

$36m^2 - 9 = 0$

$m = \frac{3}{6}$ $\quad m = -\frac{3}{6}$
$m_3 = \frac{1}{2}$ $\quad m = -\frac{1}{2}$

$$\boxed{Y_{(x)} = C_1e^{\frac{1}{3}x} + C_2e^{-\frac{1}{3}x} + C_3e^{\frac{1}{2}x} + C_4e^{-\frac{1}{2}x}}$$

c) Resolver el siguiente problema de valores iniciales
$y^{''} - 8y^{'} + 15y = 0$, $\;y_{(0)} = 2$ ^ $y^{'}_{(0)} = 3$
x=0 ; y=2 ; x=0; $y^{'} = 3$
$m^2 - 8m + 15 = 0$
$(m-3)(m-5) = 0$
$m_1 = 3$ ^ $m_2 = 5$

$\underline{Y_{(x)} = C_1e^{3x} + C_2e^{5x}}$ → $2 = C_1e^{3(0)} + C_2e^{5(0)}$

$\underline{Y^{'}_{(x)} = 3C_1e^{3x} + 5C_2e^{5x}}$ → $3 = 3C_1e^{3(0)} + 5C_2e^{5(0)}$

$C_1 + C_2 = 2$ ... i
$3C_1 + 5C_2 = 3$ ...ii

Simultaneando i ^ ii

$(C_1 + C_2 = 2)(-5) \rightarrow \quad -5C_1 - \cancel{5C_2} = -10$
$3C_1 + \ 5C_2 = 3 \quad \rightarrow \quad 3C_1 + \cancel{5C_2} = 3$
$-2C_1 = \ -7$

$\boxed{C_1 = \frac{7}{2}}$

Sust C_1 en i
$\frac{7}{2} + C_2 \quad \rightarrow \quad C_2 = \ -\frac{3}{2}$

$\boxed{Y_{(x)} = \frac{7}{2}e^{3x} - \frac{3}{2}e^{5x}}$

d) Escribir la E.D cuya solución es: $Y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + C_3e^{x} + C_4e^{-5x}$

$m_1 = 3, \quad m_2 = 4, \quad m_3 = 1, \quad m_4 = -5$

(m-3)(m-4)(m-1)(m+5)= 0
.
.
.
$m^4 + 10m^3 + 15m^2 + 5m + 16 = 0$
$y^{iv} + 10y^{'''} + 15y^{''} + 5y^{'} + 16y = 0$

RAICES REALES MULTIPLES

Si la ecuación característica tiene raíces reales múltiples de multiplicidad “k” entonces la solución general de la ecuación diferencial se escribe en base a la expresión:

$$Y_{(x)} = C_kX^{k-1}e^{mx}$$

La cual convierte las soluciones en linealmente independiente donde K toma valores mayores que uno (K>1)
Así si se tiene que $\underbrace{m_1}_{k=1} = \underbrace{m_2}_{k=2} = \underbrace{m_3}_{k=3} = \underbrace{m_4}_{k=4} \dots \underbrace{m_n}_{k=n} = m$
La solución tendrá la forma:
$Y_{(x)} = C_1X^0e^{mx} + C_2Xe^{mx} + C_3X^2e^{mx} + C_4X^3e^{mx} + \cdots C_nX^{k-n}e^{mx}$

$$\boxed{Y_{(x)} = C_1e^{mx} + C_2Xe^{mx} + C_3X^2e^{mx} + C_4X^3e^{mx} + \cdots C_nX^{k-n}e^{mx}}$$

Por ejemplo si se tiene que $\underbrace{m_1}_{k=1} = 3,\quad \underbrace{m_2}_{k=2} = 3,\quad \underbrace{m_3}_{k=3} = 3,\quad \underbrace{m_4}_{k=4} = 3$ la solución se escribirá:

$$Y_{(x)} = C_1e^{3x} + C_2Xe^{3x} + C_3X^2e^{3x} + C_4X^3e^{3x}$$

Ejemplo: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

$\underbrace{m^3}_{m} - 6m^2 + 12m - \underbrace{8}_{2} = 0$

$(m-2)^3 = m^3 - 3m^2(2) + 3m(-2)^2 + (-2)^3$

$(m-2)^3 = m^3 - 6m^2 + 12m - 8$

$(m-2)^3 = 0$

$(m-2)(m-2)(m-2) = 0$

$m - 2 = 0 \qquad m - 2 = 0 \qquad m - 2 = 0$

$\underbrace{m_1 = 2}_{k=1} \qquad \underbrace{m_2 = 2}_{k=2} \qquad \underbrace{m_3 = 2}_{k=3}$

$$\boxed{Y_{(x)} = C_1e^{2x} + C_2Xe^{2x} + C_3X^2e^{2x}}$$

b) $\frac{d^6y}{dx^6} - 3\frac{d^5y}{dx^5} - 6\frac{d^4y}{dx^4} + 28\frac{d^3y}{dx^3} - 24\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$m^6 - 3m^5 - 6m^4 + 28m^3 - 24m^2 = 0$

$m^2(m^4 - 3m^3 - 6m^2 + 28m - 24) = 0$

$m^2 = 0$

(m)(m)=0

$m_1 = 0 \quad$ ^ $\quad m_2 = 0$

k=1 k=2

$m^4 - 3m^3 - 6m^2 + 28m - 24 = 0$

1	-3	-6	28	-24	2
	2	-2	-16	24	
1	-1	-8	12	0 2	
	2	2	-12		
1	1	-6	0 2		
	2	6			
1	3	0			

P= 24: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$

m+3=0

m=-3

$\underbrace{m_1}_{K=1} = 0, \quad \underbrace{m_2}_{K=2} = 0, \quad \underbrace{m_3}_{K=1} = 2, \quad \underbrace{m_4}_{K=2} = 2, \quad \underbrace{m_5}_{K=3} = 2, \quad m_6 = -3$

$Y_{(x)} = C_1x^0e^{0x} + C_2xe^{0x} + C_3x^0e^{2x} + C_4xe^{2x} + C_5x^2e^{2x} + C_6e^{-3x}$

$\boxed{Y_{(x)} = C_1 + C_2x + C_3e^{2x} + C_4xe^{2x} + C_5x^2e^{2x} + C_6e^{-3x}}$

<u>RAICES COMPLEJAS CONJUGADAS (E.D.L.H de coeficiente constante)</u>

Si la ecuación característica tiene raíces complejas estas deben aparecer en pares conjugados de la forma $m_1 = a + bi$ ^ $m_2 = a - bi$ donde a ^ b son números reales y b≠0

Para una E.D de segundo orden la solución general vendrá dada por:

$Y_{(x)} = C_1e^{(a+bi)x} + C_2e^{(a-bi)x}$

$Y_{(x)} = C_1e^{ax}e^{bix} + C_2e^{ax}e^{-bix}$

FORMULAS DE EULER

$e^{\theta t} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{-\theta i} = \cos\theta - i\sin\theta$

$e^{bix} = \cos(bix) + i\sin(bx)$

$e^{-bix} = \cos(bx) - i\sin(bx)$

$e^{\frac{\pi}{2}i} = i \quad \wedge \quad e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$

$Y_{(x)} = C_1e^{ax}[\cos(bx) + i\sin(bx)] + C_2e^{ax}[\cos(bx) - i\sin(bx)]$

$Y_{(x)} = C_1e^{ax}\cos(bx) + C_2e^{ax}\cos(bx) + C_1e^{ax}i\sin(bx) - C_2e^{ax}i\sin(bx)$

$Y_{(x)} = e^{ax}\cos(bx)\,(C_1 + C_2) + e^{ax}\sin(bx)\,(C_{1i} + C_{2i})$

$\boxed{Y_{(x)} = \underbrace{C_3e^{ax}\cos(bx)}_{PARTE\ REAL} + \underbrace{C_4e^{ax}\sin(bx)}_{PARTE\ IMAGINARIA}}$

Ejemplo: resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y^{iv} + 3y'' - 4y = 0$

$m^4 + 3m^2 - 4 = 0$

P= 4: $\pm1, \pm2, \pm4$

Q= 1: ±1

1	0	3	0	-4	1 → $m_1 = 1$
	1	1	4	4	
1	1	4	4	0	-1 → $m_2 = -1$
	-1	0	-4		
1	0	4	0		

$m^2 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 = -4 \quad \rightarrow \quad m = \sqrt{-4} \;\; ; \quad i^2 = -1$

$m = \sqrt{4i^2} \;\; \rightarrow$ m=2i

a=0, b=2

$$\boxed{Y_{(x)} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x)}$$

b) $\frac{d^4 y}{dx^4} + 4y = 0$

$m^4 + 4 = 0$

$\underbrace{m^4}_{m^2} + 4m^2 + \underbrace{4}_{2} - 4m^2 = 0$

$(m^2 + 2)^2 - 4m^2 = 0$

$(m^2 + 2 - 2m)(m^2 + 2 + 2m) = 0$

$(m^2 - 2m + 2)(m^2 + 2 + 2m) = 0$

$(m^2 - 2m + 2)(m^2 + 2m + 2) = 0$

$$m^2 - 2m + 2 = 0$$

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$m = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

$$m = 1 \pm i$$

a=1, b=1

$$m^2 + 2m + 2 = 0$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2}$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$m = \frac{-2 \pm 2i}{2}$$

$$m = -1 \pm i$$

a=-1, b=1

$$\boxed{Y_{(x)} = C_1 e^{x} \cos(x) + C_2 e^{x} \sin(x) + C_3 e^{-x} \cos(x) + C_4 e^{-x} \sin(x)}$$

c) $7\frac{d^7 y}{dx^7} + 4\frac{d^6 y}{dx^6} + 35\frac{d^5 y}{dx^5} + 20\frac{d^4 y}{dx^5} + 63\frac{d^3 y}{dx^3} + 36\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$

$7m^7 + 4m^6 + 35m^5 + 20m^4 + 63m^3 + 36m^2 = 0$

$m^2(7m^6 + 4m^4 + 35m^3 + 20m^2 + 63m + 36 = 0)$

$m^2 = 0 \;\; \rightarrow$ (m)(m)=0 $\;\; \rightarrow m_1 = 0 \;\; ^\wedge \; m_2 = 0$

$7m^5 + 4m^4 + 35m^3 + 20m^2 + 63m + 36 = 0$

$(7m^5 + 35m^3 + 63m) + (4m^4 + 20m^2 + 36) = 0$

$7m(m^4 + 5m^2 + 9) + 4(m^4 + 5m + 9) = 0$

$(7m + 4)(m^4 + 5m^2 + 9) = 0$

$7m + 4 = 0$

$m_3 = -\frac{4}{7}$

$m^4 + 5m^2 + 9 = 0$

$m^4 + 5m^2 + m^2 + 9 - m^2 = 0$

$$(m^4+6m^2+9)-m^2=0$$
$$(m^2+3)^2-m^2=0$$
$$(m^2+3-m)(m^2+3+m)=0$$
$$(m^2-m+3)(m^2+m+3)=0$$
$$m^2-m+3=0$$
$$m=\frac{1\pm\sqrt{1-4(1)(3)}}{2(1)}$$
$$m=\frac{1\pm\sqrt{-11}}{2}$$
$m_{4,5}=\frac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$ $\rightarrow$ $m_{4,5}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{11}}{2}i$ a=1/2 , b=$\frac{\sqrt{11}}{2}$

$$m^2+m+3$$
$$m=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(1)(3)}}{2(1)}$$
$$m=\frac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}$$
$$m_{6,7}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{11}}{2}i$$

a=- ½ , b=$\frac{\sqrt{11}}{2}$

$$Y_{(x)}=C_1e^{0x}+C_2xe^{0x}+C_3e^{-\frac{4}{7}x}+C_4e^{\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{11}}{2}x)+C_5e^{\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{11}}{2}x)+C_6e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{11}}{2}x+C_7e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{11}}{2}x$$

$$\boxed{Y_{(x)}=C_1+C_2x+C_3e^{-\frac{4}{7}x}+C_4e^{\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{11}}{2}x)+C_5e^{\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{11}}{2}x)+C_6e^{-\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{11}}{2}x)+C_7e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{11}}{2}x)}$$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1) $\frac{d^3y}{dx^3}+8y=0$
   $R/\ Y_{(x)}=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}\cos(\sqrt{3}x)+C_3e^{x}\sin(\sqrt{3}x)$

2) $2\frac{d^5y}{dx^5}-3\frac{d^4y}{dx^4}+16\frac{d^3y}{dx^3}-24\frac{d^2y}{dx^2}+32\frac{dy}{dx}-48y=0$
   R/ $Y_{(x)}=C_1e^{\frac{3}{2}x}+C_2\cos(2x)+C_3\sin(2x)+C_{4x}\cos(2x)+C_{5x}\sin(2x)$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES VARIABLES (ecuaciones de Cauchy-Euler)

Al resolver una E.D.H de orden superior y de coeficientes variables podrían resultar tres tipos de raíces y estas son:

a) Raíces reales diferentes
b) Raíces reales múltiples
c) Raíces complejas

Para encontrar estas raíces se va a considerar que la solución es de la forma $Y = x^m$ la que debemos derivar según el orden de la ecuación diferencial.

Una de las características de este tipo de ecuaciones es que el grado del coeficiente coincide con el orden de la E.D o siempre va de mayor a menor así:

a) $\overbrace{x^2}^{2}\overbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}^{2} + \overbrace{x}^{1}\overbrace{\frac{dy}{dx}}^{1} + 2y = 0$

b) $\overbrace{x^3}^{3}\overbrace{\frac{d^3y}{dx^3}}^{3} + y = 0$

c) $\overbrace{x}^{1}\overbrace{\frac{d^4y}{dx^4}}^{4} + \overbrace{\ }^{0}y = 0$ → aunque "x" no tiene exponente 4 pero va en disminución

RAICES REACLES DISTINTAS

Sean $m_1, m_2, m_3 \dots m_n$ raíces de la ecuación característica las cuales son diferentes entre si, entonces la solución general vendrá dada por:

$$Y_{(x)} = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2} + C_3x^{m_3} + \cdots + C_nx^{m_n}$$

Ejemplo: resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $x^2\frac{d^2y}{x^2} - 2y = 0$

$y = x^m$

$y^{´} = mx^{m-1}$

$y^{´´} = m(m-1)x^{m-2} = (m^2 - m)x^{m-2}$

$x^2(m^2 - m)x^{m-2} - 2x^m = 0$

$(m^2 - m)x^m - 2x^m = 0$

$x^m(m^2 - m - 2) = 0$

$x^m \neq 0 \qquad m^2 - m - 2 = 0$

(m-2)(m+1)=0

m-2=0 m+1=0

$m_1 = 2 \qquad m_2 = -1$

$$\boxed{Y_{(x)} = C_1x^2 + C_2x^{-1}}$$

b) $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 3y = 0$

$y = x^m$

$y' = mx^{m-1}$

$y'' = m(m-1)x^{m-2}$

$y''' = (m^2 - m)(m-2)x^{m-3}$

$x^3(m^3 - 2m^2 - m^2 + 2m)x^{m-3} + 2x^2(m^2 - m)x^{m-2} - 3x(mx^{m-1}) + 3x^m = 0$

$(m^3 - 3m^2 + 2m)x^m + (2m^2 - 2m)x^m - 3mx^m + 3x^m = 0$

$x^m(m^3 - 3m^2 + 2m + 2m^2 - 2m - 3m + 3) = 0$

$x^m \neq 0$

$m^3 - m^2 - 3m + 3 = 0$

$m^2(m-1) - 3(m-1) = 0$

$(m-1)(m^2 - 3) = 0$

$m - 1 = 0 \qquad m^2 - 3 = 0$

$m_1 = 1 \qquad m^2 = 3 \quad \rightarrow \quad m = \pm\sqrt{3}$

$m_2 = \sqrt{3} \quad \wedge \quad m_3 = -\sqrt{3}$

$$\boxed{Y_{(x)} = C_1x + C_2x^{\sqrt{3}} + C_3x^{-\sqrt{3}}}$$

RAICES REALES MULTIPLES

Si al resolver la ecuación característica de la E.D las raíces son iguales y de multiplicidad K

$m_1 = m_2 = m_3 = \cdots = m_n = m$

k=1 k=2 k=3 …..kn

La solución general se escribe de la siguiente forma

$$\boxed{Y_{(x)} = C_1x^m + C_2x^m\ln(x) + C_3x^m(\ln(x))^2 + \cdots + C_nx^m(\ln(x))^{n-1}}$$

Ejemplo: resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} + y = 0$

$y = x^m$

$y' = mx^{m-1}$

$y'' = (m-1)mx^{m-2} \quad \rightarrow \quad y'' = (m^2-m)x^{m-2}$

$4x^2(m^2-m)x^{m-2} + 8x(mx^{m-1}) + x^m = 0$

$(4m^2-4m)x^m + 8mx^m + x^m = 0$

$x^m(4m^2-4m+8m+1) = 0$

$x^m \neq 0$

$\underbrace{4m^2}_{2m} + 4m + \underbrace{1}_{1} = 0$

$(2m+1)^2 = 0$

$(2m+1)(2m+1) = 0$

$2m+1 = 0 \qquad\qquad 2m+1 = 0$

$m_1 = -\frac{1}{2} \qquad\qquad m_2 = -\frac{1}{2}$

$k = 1 \qquad\qquad$ k=2

$$Y_{(x)} = C_1x^{-\frac{1}{2}}(\ln(x))^0 + C_2x^{-\frac{1}{2}}\ln(x)$$

$$\boxed{Y_{(x)} = C_1x^{-\frac{1}{2}} + C_2x^{-\frac{1}{2}}\ln(x)}$$

b) $x^3\frac{d^3y}{dx^3} - 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$

$y = x^m$

$y' = mx^{m-1}$

$y'' = (m-1)mx^{m-2} = (m^2-m)x^{m-2}$

$y''' = (m^2-m)(m-2)x^{m-3} = (m^3-2m^2-m^2+2m)x^{m-3}$

$y''' = (m^3-3m^2+2m)x^{m-3}$

$x^3(m^3-3m^2+2m)x^{m-3} - 2x^2(m^2-m)x^{m-2} + 4x(mx^{m-1}) - 4x^m = 0$

$(m^3-3m^2+2m)x^m - 2m^2 + 2mx^m + 4mx^m - 4x^m = 0$

$x^m(m^3-3m^2+2m-2m^2+2m+4m-4) = 0$

$x^m(m^3-5m^2+8m-4) = 0$

$x^m \neq 0 \qquad\qquad m^3-5m^2+8m-4 = 0$

1	-5	8	-4		2
	2	-6	4		
1	-3	2	0	1	
	1	-2			
1	-2	0			

$m - 2 = 0$

$\underline{m_3 = 2}$

$\underbrace{m_1}_{k=1} = 2, \quad \underbrace{m_3}_{k=2} = 2, \quad \underbrace{m_2}_{k=3} = 1$

$Y_{(x)} = C_1 x^2 (\ln(x))^0 + C_2 x^2 \ln(x) + C_3 x$

$\boxed{Y_{(x)} = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln(x) + C_3 x}$

RAICES COMPLEJAS CONJUGADAS

Si las raíces de la ecuación característica son complejas de la forma $m_1 = a + bi \ \wedge \ m_2 = a - bi$ la solución general se va a escribir de la siguiente forma:

$Y_{(x)} = C_1 x^a \cos(b\ln(x)) + C_2 x^a \sin(b\ln(x))$

Si fueran raíces complejas conjugadas múltiples de multiplicidad "k" la solución general se va a escribir de la siguiente forma:

$Y_{(x)} = C_k x^a (\ln(x))^{k-1} \cos(b\ln(x)) + C_k x^a \, (\ln(x))^{k-1} \sin(b\ln(x))$

Ejemplo: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $x^4 \frac{d^4y}{dx^4} + 6x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 9x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = 0$

$y = x^m$

$y' = mx^{m-1}$

$y'' = (m^2 - m)x^{m-2}$

$y''' = (m-2)(m^2 - m)x^{m-3} \qquad = (m^3 - m^2 - 2m^2 + 2m)x^{m-3}$

$y''' = (m^3 - 3m^2 + 2m)x^{m-3}$

$y^{iv} = (m^3 - 3m^2 + 2m)(m-3)x^{m-4}$

$y^{iv} = \quad (m^4 - 3m^3 - 3m^3 + 9m^2 + 2m^2 - 6m)x^{m-n}$

$y^{iv} = (m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m)x^{m-4}$

$$x^4(m^4-6m^3+11m^2-6m)x^{m-4}+6(m^3-3m^2+2)x^{m-3}+9^{x^2}(m^2-m)x^{m-2} + 3x(mx^{m-1})+x^m=0)$$

$$x^m(m^4-6m^3+11m^2-6m+6m^3-18m^2+12m+9m^2+3m+1)=0$$

$$x^m \neq 0$$

$$\underbrace{m^4}_{m^2}+2m^2+\underbrace{1}_{1}=0$$

$$(m^2+1)^2=0$$

$m^2+1=0$	$m^2+1=0$
$m^2=-1$	$m^2=-1$
$m=0\pm i$	$m_{3,4}=0\pm i$
a=0,b=1	a=0,b=1
k=1	k=2

$$Y_{(x)}=C_1x^0(\ln(x))^0\cos(\ln(x))+C_1x^0\,(\ln(x))^0\sin(\ln(x))+C_2x\ln(x)\cos(\ln(x)) + C_2x\ln(x)\sin(\ln(x))$$

$$Y_{(x)}=C_1(\cos(\ln(x))+\sin(\ln(x)))+C_{2(}x\ln(x)\cos(\ln(x))+x\ln(x)\sin(\ln(x)))$$

b) $3x^2y'' + 6xy' + y = 0$
$y=x^m$
$y' = mx^{m-1}$
$y'' = (m^2-m)x^{m-2}$

$$3x^2(m^2-m)x^{m-2}+6xmx^{m-1}+x^m=0$$

$$3(m^2-m)x^m+6mx^m+x^m=0$$

$$x^m \neq 0$$

$$3m^2+3m+1=$$

$$m=\frac{-3\pm\sqrt{9-4(3)(1)}}{2(3)} \quad \rightarrow \quad m_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{-3}}{6}=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{6}$$

$$m_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{6}i$$

$$a=-\frac{1}{2},b=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\boxed{Y_{(x)} = C_1 x^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\ln(x)\right) + C_2 x^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\ln(x)\right)}$$

METODO DE SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO HOMOGENEAS

Para resolver las ecuaciones diferenciales no homogéneas se utilizan los siguientes métodos

a) Método de coeficientes indeterminados
b) Método de variación de parámetros.

METODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Este método se utiliza solamente para ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes y funciones cuyas derivadas son cíclicas, así como también para aquellas funciones que al derivarlas se hacen cero; es decir, para funciones polinomicas, exponenciales y trigonométricas (seno y coseno) así:

$$a_{n(x)}\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1(x)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots a_1\frac{dy}{dx} + a_{0(x)}y = g(x)\begin{cases} polinomica \\ exponencial \\ trigonometrica \end{cases}$$

Por lo tanto el método de coeficientes indeterminado es un modo directo para encontrar el y_p para lo cual se utilizan los siguientes métodos:

a) Método de superposición
b) Método del anulador

METODO DE SUPERPOSICION

En este método para encontrar el y_p se hace una superposición sobre las funciones ya mencionadas en la que esta superposición va a contener constantes desconocidas las cuales van a variar según la función g(x), por lo que para resolver estas E.D tenemos que considerar las siguientes suposiciones.

1) SUPOSICION SOBRE UNA FUNCION POLINOMICA

   Cuando g(x) sea un polinomio de grado "n" entonces dado que las derivadas son también polinomios de un grado menor es razonable esperar que la solución particular es:

   Si $g(x) = x^m$

   $Yp = A_1x^m + A_2x^{m-1} + A_3x^{m-2} + \cdots + A_n \quad \rightarrow \quad Donde \quad m \geq 0$

Ejemplo.

a) $g(x) = x^3$
$Yp = A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4$

b) $g(x) = x^3 + 10x^2 + 20$
$Yp = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

c) $g(x) = 15 - x^5$
$Yp = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$

d) $g(x) = 20$
$Yp = A$

e) $g(x) = 2x + 1$
$Yp = Ax + B$

2) SUPOSICION SOBRE LA FUNCION EXPONENCIAL

Cuando g(x) es una función exponencial de la forma: $g(x) = e^{ax}$ es razonable decir que: $Yp = Ae^{ax}$ Pero si la función tiene la forma $g(x) = x^k e^{ax}$ entonces:
$Yp = \left(A_1x^k + A_2x^{k-1} + \cdots + A_n\right)e^{ax}$

Ejemplo.

a) $g(x) = x^2e^{2x}$
$Yp = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$

b) $g(x) = xe^{3x} + 10e^{3x}$
$Yp = (Ax + B)e^{3x}$

c) $g(x) = xe^{3x} - 10e^{-3x}$
$Yp = (Ax + b)e^{3x} + Ce^{-3x}$

d) $g(x) = x^2 + x^2e^x$
$Yp = (Ax^2 + Bx + C) + (Dx^2 + Ex + F)e^x$

e) $g(x) = x + e^{-3x} + xe^{2x} + 10$
$Yp = (Ax + B) + Ce^{-3x} + (Dx + E)e^{2x}$

3) SUPOSICION SOBRE RAICES COMPLEJAS

Si $g(x)$ es de la forma:

$g(x) = \cos(bx)$
$g(x) = sen(bx)$
$g(x) = \cos(bx) + sen(bx)$ Entonces:

$yp = Acos(bx) + Bsen(bx)$

Pero si la función $g(x)$ tiene cualquiera de la siguiente forma:

$g(x) = x^k e^{ax} \cos(bx)$

$g(x) = x^k e^{ax}\, sen(bx)$

$g(x) = x^k e^{ax} \cos(bx) + x^k e^{ax} sen(bx)$

Entonces:

$yp = \left(A_1x^k + A_2x^{k-1} + \cdots + A_n\right)e^{ax}\cos(bx) + (B_1x^k + B_2x^{k-1} + \cdots + B_n)e^{ax}sen(bx)$

Ejemplo.

a) $g(x) = x^2\cos(2x) + sen(2x)$
$a = 0,\ b = 2,\ k = 2,\ a = o,\ b = 2,\ k = 0$

$yp = (Ax^2 + Bx + C)\cos(2x) + (Dx^2 + Ex + F)sen(2x)$

b) $g(x) = xe^{2x}sen(2x) + e^{2x} + x^2$

$yp = (Ax + B)e^{2x}\cos(2x) + (Cx + D)e^{2x}sen(2x) + Ee^{2x} + Fx^2 + Gx + H$

c) $g(x) = x - 1$

$yp = Ax + B$

d) $g(x) = x + xe^{x}$

$yp = (Ax^2 + Bx + C) + (Cx + D)e^{x}$

e) $g(x) = x^2e^{2x} - xe^{-2x}$

$yp = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x} + (Dx + E)e^{-2x}$

f) $g(x) = xe^{2x}sen(x)$

$yp = (Ax + B)e^{2x}sen(x) + (Cx + D)e^{2x}\cos(x)$

g) $g(x) = cos^2(2x)$
$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x)$

$yp = A + Bcos(4x) + Csen(4x)$

h) $g(x) = sen(2x)\cos(x)$

Para resolver una ecuación diferencial a través del método de superposición se hace lo siguiente:

1) Encontrar el Yc considerando solamente la parte homogénea de la ecuación diferencial
2) Suponer el Yp según la función g(x).
3) Comprará el Yc y el Yp para determinar si no existen funciones repetidas en las dos funciones, en el caso que aparezca una función que ya está en el Yc y también este en el Yp hay que convertirlo en linealmente independiente a través de la expresión de raíces múltiples ($Y(x) = C_kx^{k-1}e^{mx}$) ya que van a ser parte de una sola solución.(la función a corregir es Yp) así por ejemplo si se tiene que:

$$Y_c(x) = C_1e^{2x} + C_2x + C_3$$
$$Y_p(x) = Axe^{2x} + Be^{2x} + Cx^2 + Dx + E + Fe^{3x}$$
$$y = C_kx^{k-1}e^{mx}$$

$$Y(x) = C_1e^{mx} + C_2xe^{mx} + C_3x^2e^{mx} + \cdots C_nx^{n-1}e^{mx}$$

$$Yc = \; C_1e^{2x} + \; C_2x \; + C_3$$

C_1e^{2x}	C_2x	C_3
$m = 2$	$m = 0$	$m = 0$
$k = 1$	$k = 2$	$k = 1$

$$Yp(x) = Axe^{2x} \quad + \quad Be^{2x} \quad + \quad Cx^2 + \quad Dx + \quad E + \quad Fe^{3x}$$

Axe^{2x}	Be^{2x}	Cx^2	Dx	E
$m = 2$	$m = 2$	$m = 0$	$m = 0$	$m = 0$
$k = 3$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 4$	$k = 3$

$$Y_pcorregido = Ax^2e^{2x} + Bxe^{2x} + Cx^4 + Dx^3 + Ex^2 + Fe^{3x}$$

4) Derivar el Yp corregido el cual es linealmente independiente al Yc el número de veces según el orden de la ecuación diferencial no homogénea que se está resolviendo.
5) Sustituir el Yp y sus derivadas en la ecuación diferencial no homogénea para encontrar los valores de las constantes arbitrarias
6) Escribir la solución general la cual será: Y(x) = Yc + Yp

Ejemplo.

a) $y''' - 4y'' + 4y' = 8xe^{2x} + 12x^2$

$y''' - 4y'' + 4y' = 0$
$yc = ?$
$m^3 - 4m^2 + 4m = 0$
$m(m^2 - 4m + 4) = 0$
$m_1 = 0, \; m^2 - 4m + 4 = 0$
$m_1 = 0, \; (m-2)(m-2) = 0$
$m_1 = 0, \; m_2 = 2, \; m_3 = 2$

$$Yc = \quad C_1 \quad + \quad C_2e^{2x} \quad + \quad C_3xe^{2x}$$

C_1	C_2e^{2x}	C_3xe^{2x}
$m = 0$	$m = 2$	$m = 2$
$k = 1$	$k = 1$	$k = 2$

$Yp = ?$
$g(x) = \; 8xe^{2x} + 12x^2$

$Yp(x) = (Ax + B)e^{2x} + Cx^2 + Dx + E$

$$Yp(x) = \quad Axe^{2x} \quad + \quad Be^{2x} \quad + \quad Cx^2 \quad + \quad Dx \quad + \quad E$$

$$\begin{matrix} m = 2 & m = 2 & m = 0 & m = 0 & m = 0 \\ k = 4 & k = 3 & k = 4 & k = 3 & k = 2 \end{matrix}$$

$Y_p corregido = Ax^3e^{2x} + Bx^2e^{2x} + Cx^3 + Dx^2 + Ex$

$Y'pc = 2Ax^3e^{2x} + 3Ax^2e^{2x} + 2Bx^2e^{2x} + 2Bxe^{2x} + 3Cx^2 + 2Dx + E$

$Y''pc = 4Ax^3e^{2x} + 6Ax^2e^{2x} + 6Ax^2e^{2x} + 6Axe^{2x} + 4Bx^2e^{2x} + 4Bxe^{2x} + 4Bxe^{2x} + 2Be^{2x} + 6Cx + 2D$

$Y'''pc = 8Ax^3e^{2x} + 12Ax^2e^{2x} + 24Ax^2e^{2x} + 24Axe^{2x} + 12Axe^{2x} + 6Ae^{2x} + 8Bx^2e^{2x} + 8Bxe^{2x} + 16Bxe^{2x} + 8Be^{2x} + 4Be^{2x} + 6C$

$Y''pc = 8Ax^3e^{2x} + 36Ax^2e^{2x} + 36Axe^{2x} + 6Ae^{2x} + 8Bx^2e^{2x} + 24Bxe^{2x} + 12Be^{2x} + 6C$

Sustituyendo en ecuación diferencial.

$y''' - 4y'' + 4y' = 8xe^{2x} + 12x^2$

$$\begin{array}{l} \;\; 8Ax^3e^{2x} + 36Ax^2e^{2x} + 36Axe^{2x} + 6Ae^{2x} + 8Bx^2e^{2x} + 24Bxe^{2x} + 12Be^{2x} + 6C \\ -16Ax^3e^{2x} - 48Ax^2e^{2x} - 24Axe^{2x} \quad - 16Bx^2e^{2x} - 32Bxe^{2x} - 8Be^{2x} - 24Cx - 8D \\ \;\; 8Ax^3e^{2x} + 12Ax^2e^{2x} + \qquad\qquad 8Bx^2e^{2x} + 8Bxe^{2x} + 12Cx^2 + 8Dx + 4E \\ \hline 12Axe^{2x} + 6Ae^{2x} + 4Be^{2x} - 24Cx + 12Cx^2 + 8Dx + 6C - 8D + 4E = 8xe^{2x} + 12x^2 \end{array}$$

$12A = 8 \;\rightarrow\; \boxed{A = \frac{2}{3}}$

$6A + 4B = 0 \;\rightarrow\; 4B = -6A \;\rightarrow\; 4B = -6\left(\frac{2}{3}\right) \;\rightarrow\; 4B = -4 \;\rightarrow\; \boxed{B = -1}$

$12C = 12 \;\rightarrow\; \boxed{C = 1}$

$-24C + 8D = 0 \;\rightarrow\; -24(1) + 8D = 0 \;\rightarrow\; \boxed{D = 3}$

$6C - 8D + 4E = 0 \;\rightarrow\; 6(1) - 8(3) + 4E = 0 \;\rightarrow\; \boxed{E = \frac{9}{2}}$

$Y_p corregido = \frac{2}{3}x^3e^{2x} - x^2e^{2x} + x^3 + 3x^2 + \frac{9}{2}x$

$$\boxed{Y(x) = C_1 + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x} + \frac{2}{3}x^3e^{2x} - x^2e^{2x} + x^3 + 3x^2 + \frac{9}{2}x}$$

b) $y'' - 2y' + 5y = 3e^x \sin 2x$

$y'' - 2y' + 5y = 0$
$m^2 - 2m + 5 = 0$

$m = \frac{2 \mp \sqrt{4-4(1)(5)}}{2} \Longrightarrow m = \frac{2 \mp \sqrt{-16}}{2} \Longrightarrow m_{1,2} = 1 \pm 2i$

a=1, b=2

$y_c = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$

$y_p = ?$

$g(x) = 3e^x \sin 2x$

$g(x) = x^k e^{ax} \sin(2x)$
$y_p = \left(A_1 x^k + A_2 x^{k-1} + \cdots A_n\right) e^{ax} \cos(bx) + \left(B_1 x^k + B_2 x^{k-2} \ldots B_n\right) e^{ax} \sin(bx)$
$y_p = Ae^x \cos(2x) + Be^x \sin(2x)$
$y_{p\ corregido} = Axe^x \cos(2x) + Bxe^x \sin(2x)$

$$y'_{pc} = -2(Axe^x)\sin(2x) + [Axe^x + Ae^x]\cos(2x) + 2(Bxe^x)\cos(2x) + [Bxe^x + Be^x]\sin(2x)$$

$$y'_{pc} = -2Axe^x \sin(2x) + Axe^x \cos(2x) + Ae^x \cos(2x) + 2\,Bxe^x \cos(2x) + Bxe^x \sin(2x) + Be^x \sin(2x)$$

$$y'_{pc} = (B-2A)xe^x \sin(2x) + (A+2B)xe^x \cos(2x) + Ae^x \cos(2x) + Be^x \sin(2x)$$

$$y''_{pc} = 2(B-2A)xe^x \cos(2x) + [(B-2A)xe^x + (B-2A)e^x]\sin(2x) - 2(A+2B)xe^x \sin(2x) + [(A+2B)xe^x + (A+2B)e^x]\cos(2x) - 2Ae^x \sin(2x) + Ae^x \cos(2x) + 2Be^x \cos(2x) + Be^x \sin(2x)$$

$$y''_{pc} = 2(B-2A)xe^x \cos(2x) + (B-2A)xe^x \sin(2x) + (B-2A)e^x \sin(2x) - 2(A+2B)xe^x \sin(2x) + (A+2B)xe^x \cos(2x) + (A+2B)e^x \cos(2x) - 2Ae^x \sin(2x) + Ae^x \cos(2x) + 2Be^x \cos(2x) + Be^x \sin(2x)$$

$$y''_{pc} = 2(B-2A)xe^x \cos(2x) + (B-2A)xe^x \sin(2x) + (B-2A)e^x \sin(2x) - 2(A+2B)xe^x \sin(2x) + (A+2B)xe^x \cos(2x) + (A+2B)e^x \cos(2x) + (B-2A)e^x \sin(2x) + (A+2B)e^x \cos(2x)$$

$y'' - 2y' + 5y = 3e^x \sin 2x$

y'': $2(B-2A)xe^x\cos(2x)+(B-2A)xe^x\sin(2x)+(B-2A)e^x\sin(2x)$
$-2(A+2B)xe^x\sin(2x)+(A+2B)xe^x\cos(2x)+(A+2B)e^x\cos(2x)$
$+(B-2A)e^x\sin(2x)+(A+2B)e^x\cos(2x)$
$-2y'$: $-2(B-2A)xe^x\sin(2x)-2(A+2B)xe^x\cos(2x)-2Ae^x\cos(2x)-2Be^x\sin(2x)$
$5y$: $5Axe^x\cos(2x)+5Bxe^x\sin(2x)$

$$2(B-2A)xe^x\cos(2x)-(B-2A)xe^x\sin(2x)$$

METODO DEL ANULADOR.

Operadores diferenciales.
Los símbolos $D^1, D^2, D^3, \ldots D^n$ indican las diferentes derivadas de una función así:

$$\frac{dy}{dx}=D^1, \frac{d^2y}{dx^2}=D^2, \frac{d^3y}{dx^3}=D^3, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}=D^n$$

A estos operadores se les llama operadores lineales o simplemente operadores ya que indican una operación que ha de realizarse de manera que las ecuaciones diferenciales homogéneas y no homogéneas se pueden escribir en forma de operadores.

Ejemplo:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$$
$$a_n(x){D_y}^n+a_{n-1}(x){D_y}^{n-1}+\cdots a_2(x){D_y}^2+a_1(x)D_y+a_0(x)y=0 \quad Homogenea$$
$$a_n(x){D_y}^n+a_{n-1}(x){D_y}^{n-1}+\cdots a_2(x){D_y}^2+a_1(x)D_y+a_0(x)y=g(x) \;\; E.D. No\ Homogenea$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+6y=0$$
$$(D^3+3D^2+2D+6)y=0$$

A las E.D. escritas en forma de operadores se les llama “Operadores diferenciales de orden n”

OPERADOR ANULADOR.

Para resolver una E.D no homogénea por el método del operador anulador se necesita conocer los operadores que anulan a la función $g(x)$; siempre que la función $g(x)$ sea función polinómica, exponencial así como también aquellas funciones cuyas derivadas son cíclicas (seno y coseno).

1) Operador anulador de una función polinómica.
Sea f una función polinómica de grado “n” que tiene “n” derivadas diferentes de cero, entonces el operador diferencial que convierte en cero cualquier función polinómica es: $D^{n+1}, n \geq 0$

Ejemplo:

a) $f(k) = k$
$D(k) = 0$

b) $f(x) = x$
$D^2[x] = 0$

c) $f(x) = x + 3$
$D^2[x + 3] = 0$

d) $f(x) = x^2$
$D^3[x^2] = 0$

e) $f(x) = x^2 - 10x + 20$
$D^3[x^2 - 10x + 20] = 0$

f) $f(x) = 15 + 10x^5$
$D^6[15 + 10x^5] = 0$

g) $f(x) = x^4 + \frac{1}{x} \quad \rightarrow$
$No\ tiene\ anulador$

2) Operador anulador de una función exponencial.
Si se tiene la función $y = e^x$ ó $y = x^k e^{ax}$ el operador diferencial que anula a cada una de estas funciones es:

$(D - a)^{k+1}$ donde $k \geq 0$ y además es un número entero

Ejemplo:

a) $f(x) = e^{2x}$
$\left((D - 2)_{[e^{2x}]} = 0\right)$

Para comprobar:
$De^{2x} - 2e^{2x} = 0$
$2e^{2x} - 2e^{2x} = 0$
$0 = 0$

b) $f(x) = x^2 e^{-3x} + xe^{-3x}$
$(D + 3)^3{}_{[f(x)]} = 0$

c) $f(x) = xe^{3x} + x^2$
$(D - 3)^2 * D^3{}_{[f(x)]} = 0$
$D^3(D - 3)^2{}_{[f(x)]} = 0$

d) $f(x) = x^2 e^{-2x} + xe^{2x} + k + 10$
$(D + 2)^3 \ (D - 2)^2 \ \ D^2$
$(D + 2)^3(D - 2)^2 D^2{}_{[f(x)]} = 0$

Si se quiere deducir la función a partir del anulador:
$D^2(D^2 - 3D - 4) = 0$
$D^2(D - 4)(D + 1) = 0$
$f(x) = x + e^{4x} + e^{-x}$

3) Operador anulador para funciones de raíces complejas.
Si la función tiene la forma:
$f(x) = e^{ax} \cos bx$
$f(x) = e^{ax} \sin bx$
$f(x) = e^{ax} x^k \cos bx$
$f(x) = e^{ax} x^k \sin bx$

El operador que anula estas funciones es: $[D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)]^{k+1}$ donde $k \geq 0$

Ejemplo:

a) $f(x) = \cos(2x)$
$a = 0, \quad b = 2, \quad k = 0$
$(D^2 + 4)_{[\cos(2x)]} = 0$

Demostración:
$D^2(\cos(2x) + 4\cos(2x)) = 0$
$-2\sin(2x) + 4\cos(2x) = 0$
$-4\cos(4x) + 4\cos(2x) = 0$
$0 = 0$

b) $f(x) = \sin(2x)$
$a = 0, \quad k = 0, \quad b = 2$
$(D^2 + 4)$

c) $f(x) = x^2 + 10 - xe^{3x} + xe^{2x}\cos(3x) - 10e^{2x}\sin(3x)$
$D^3(D-3)^2(D^2 - 4D + 13)^2{}_{[f(x)]} = 0$

d) $f(x) = xe^{2x}\cos(3x) + x^2e^{2x}\sin(2x) + x^5 + x^2e^{3x}$
$(D^2 - 4D + 13)^2 \quad (D^2 - 4D + 8)^3 \quad D^6 \quad (D-3)^3$
$(D^2 - 4D + 13)^2(D^2 - 4D + 8)^3 D^6 (D-3)^3{}_{[f(x)]} = 0$

e) $D^3(D^2 - 4D + 20)_{[g(x)]} = 0$
$a = 2, \quad b = 4, \quad k = 0$
$g(x) = x^2 + e^{2x}\cos(4x)$

METODO DE SOLUCION POR ANULADORES.
Para resolver una E.D. por este método se hace lo siguiente:

1) Escribir la ecuación diferencial en forma de operadores así:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{2x}$$
$$D^2y - 4Dy + 4y = e^{2x}$$

2) Encontrar y_c considerando solo la parte homogénea de la E.D.

$m^2 - 4m + 4 = 0$
$(m-2)^2 = 0$

$(m-2)(m-2)=0 \quad m_1=2;\ m_2=2$
$y_c = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$

3) Encontrar el anulador de la función $g(x)$

$g(x) = e^{2x}$
$(D-2)_{[e^{2x}]} = 0$

4) Multiplicar la E.D. por el anulador encontrado para convertirla en una E.D homogénea

$(D-2)(D^2y - 4Dy + 4y) = (D-2)e^{2x}$
$(D-2)(D^2y - 4Dy + 4y) = 0$

5) Resolver la E.D. homogénea

$(D-2)(D^2y - 4Dy + 4y) = 0$
$(m-2)(m^2 - 4m + 4) = 0$
$(m-2)(m-2)(m-2) = 0$
$m_1 = 2;\ m_2 = 2;\ m_3 = 2$
$y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3x^2e^{2x}$

6) Comparar el y_c y el $y(x)$ la cual es la solución de la nueva E.D. homogénea y los términos que ya estén en el y_c eliminarlos del $y(x)$ y lo que queda será el y_p así:

$y_c = \cancel{C_1e^{2x}} + \cancel{C_2xe^{2x}}$
$y(x) = \cancel{C_1e^{2x}} + \cancel{C_2xe^{2x}} + C_3x^2e^{2x}$

$y_p = Ax^2e^{2x}$

7) Derivar el y_p según el orden de la E.D. no homogénea.

8) Sustituir el y_p y sus derivadas en la E.D no homogénea para encontrar los valores de las constantes desconocidas.

9) Escribir la solución general.

Ejemplo: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x} + \cos(2x)\sin(2x)$

$D^2y - 4Dy + 4y = xe^{2x} + \cos(2x)\sin(2x)$
$D^2y - 4Dy + 4y = 0$
$m^2 - 4m + 4 = 0$

$(m-2)^2 = 0$
$(m-2)(m-2) = 0$
$m_1 = 2, \quad m_2 = 2$

$y_c = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$

$g(x) = xe^{2x} + \cos(2x) + \sin(2x)$
$(D-2)^2 \qquad (D^2+4)$

$(D-2)^2(D^2+4)(Dy^2 - 4Dy + 4y) = \cancel{(D-2)^2(D^2+4) * g(x)}$

$(D-2)^2(D^2+4)(D-2)^2 = 0 \quad Nueva\ E.D.Homogenea$

$(m-2)^2(m^2+4)(m-2)^2 = 0$
$(m-2)^2 = 0$
$(m-2)(m-2) = 0$
$m_1 = 2, \quad m_2 = 2$
$(m-2)^2 = 0$
$(m-2)(m-2) = 0$
$m_3 = 2, \quad m_4 = 2$
$m^2 + 4 = 0$
$m^2 = -4$
$m = 0 \pm 2i$

$y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3x^2e^{2x} + C_4x^3e^{2x} + C_5\cos(2x) + C_6\sin(2x)$

$y(p) = Ax^2e^{2x} + Bx^3e^{2x} + C\cos(2x) + D\sin(2x)$

$y'(p) = 2Ax^2e^{2x} + 2Axe^{2x} + 2Bx^3e^{2x} + 2Bx^2e^{2x} - 2C\sin(2x) + 2\mathrm{D}\cos(2x)$

$$y''(p) = 4Ax^2e^{2x} + 4Axe^{2x} + 4Axe^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Bx^3e^{2x} + 6Bx^2e^{2x} + 6Bx^2e^{2x} + 6Bxe^{2x} - 4C\cos(2x) - 4D\sin(2x)$$

$$y''(p) = 4Ax^2e^{2x} + 8Axe^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Bx^3e^{2x} + 12Bx^2e^{2x} + 6Bxe^{2x} - 4C\cos(2x) - 4D\sin(2x)$$

$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x} + \cos(2x)\sin(2x)$

y'': $4Ax^2e^{2x} + 8Axe^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Bx^3e^{2x} + 12Bx^2e^{2x} + 6Bxe^{2x} - 4C\cos(2x) - 4D\sin(2x)$
$-4y'$: $2Ax^2e^{2x} + 2Axe^{2x} + 2Bx^3e^{2x} + 2Bx^2e^{2x} - 2C\sin(2x) + 2\mathrm{D}\cos(2x)$
$4y$: $Ax^2e^{2x} + Bx^3e^{2x} + C\cos(2x) + D\sin(2x)$

$$6Bxe^{2x} + 2Ae^{2x} + 8C\sin(2x) - 8D\cos(2x)$$

$6Bxe^{2x} + 2Ae^{2x} + 8C\sin(2x) - 8D\cos(2x) = xe^{2x} + \cos(2x)\sin(2x)$

$6B = 1 \qquad 2A = 0 \qquad 8C = 1 \qquad -8D = 1$
$B = \dfrac{1}{6} \qquad A = 0 \qquad C = \dfrac{1}{8} \qquad D = -\dfrac{1}{8}$

$$y_p = \cancel{0x^2e^{2x}} + \frac{1}{6}x^3e^{2x} + \frac{1}{8}\cos(2x) - \frac{1}{8}\sin(2x)$$

$$y_p = \frac{1}{6}x^3e^{2x} + \frac{1}{8}\cos(2x) - \frac{1}{8}\sin(2x)$$

$$y(x) = y_c + y_p$$

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x} + \frac{1}{8}\cos(2x) - \frac{1}{8}\sin(2x)$$

b) $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 4y = 10xe^x - 21e^x + 12x + 20$

$$D^3y - D^2y + 4Dy - 4 = 10xe^x - 21e^x + 12x + 20$$

$$D^3y - D^2y + 4Dy - 4 = 0$$
$$m^3 - m^2 + 4m - 4 = 0$$

$P = 4:\ \pm 1, \pm 2, \pm 4$
$Q = 1: \pm 1$

1	-1	4	$\cancel{-4}$	$\div 1$	$m_1 = 1$
	1	0	4		
1	0	4			

$$m^2 + 4 = 0$$
$$m^2 = -4$$
$$m = \sqrt{-4}$$
$$m_{2,3} = 0 \pm 2i$$

$$y_c = C_1e^x + C_2\cos(2x) + C_3\sin(2x)$$

$$g(x) = 10xe^x - 21e^x + 12x + 20$$
$$(D-1)^2 \quad (D-1) \quad D^2 \quad D$$

$$D^2(D-1)^2$$

$$D^2(D-1)^2(D^3y - D^2y + 4Dy - 4) = \cancel{D^2(D-1)^2(10xe^x - 21e^x + 12x + 20)}$$
$$D^2(D-1)^2(D^3y - D^2y + 4Dy - 4) = 0 \quad \rightarrow \quad Nueva\ E.D.H.$$
$$m^2(m-1)^2(m^3 - m^2 + 4m - 4) = 0$$
$$m^2 = 0$$
$$m_1 = 0,\ \ m_2 = 0$$
$$(m-1)^2 = (m-1)(m-1) = 0$$
$$m_3 = 1,\ \ m_4 = 1$$

$m^3 - m^2 + 4m - 4 = 0$
$m_5 = 1, \quad m_{6,7} = 0 \pm 2i$

$y(x) = C_1 + C_2x + \cancel{C_3e^x} + C_4xe^x + C_5x^2e^x + \cancel{C_6\cos(2x) + C_7\sin(2x)}$

$y_p = C_1 + C_2x + C_4xe^x + C_5x^2e^x$
$y_p = A + Bx + Cxe^x + Dx^2e^x$
$y'_p = B + Cxe^x + Ce^x + Dx^2e^x + 2Dxe^x$
$y''_p = Cxe^x + Ce^x + Ce^x + Dx^2e^x + 2Dxe^x + 2Dxe^x + 2De^x$
$y''_p = Cxe^x + 2Ce^x + Dx^2e^x + 4Dxe^x + 2De^x$
$y'''_p = Cxe^x + Ce^x + 2Ce^x + Dx^2e^x + 2Dxe^x + 4Dxe^x + 4De^x + 2De^x$
$y'''_p = Cxe^x + 3Ce^x + Dx^2e^x + 6Dxe^x + 6De^x$

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 4y = 10xe^x - 21e^x + 12x + 20$$

$\frac{d^3y}{dx^3}: \quad Cxe^x + 3Ce^x + Dx^2e^x + 6Dxe^x + 6De^x$
$-\frac{d^2y}{dx^2}: \; -Cxe^x - 2Ce^x - Dx^2e^x - 4Dxe^x - 2De^x$
$4\frac{dy}{dx}: \quad 4B + 4Cxe^x + 4Ce^x + 4Dx^2e^x + 8Dxe^x$
$-4y: \quad -4A - 4Bx - 4Cxe^x - 4Dx^2e^x$

$4B + 5Ce^x + 10Dxe^x + 4De^x - 4A - 4Bx = 10xe^x - 21e^x + 12x + 20$

$10D = 10$
$D = 1$

$-4B = 12$
$B = -3$

$5C + 4D = -21$
$5C + 4(1) = -21$
$5C = -25$
$C = -5$

$-4A + 4B = 20$
$-4A = 20 - 4(-3)$
$-4A = 32$
$A = -8$

$y_p = -8 - 3x - 5xe^x + x^2e^x$

$y(x) = C_1e^x + C_2\cos(2x) + C_3\sin(2x) - 8 - 3x - 5xe^x + x^2e^x$

METODO DE VARIACION DE PARAMETROS

Este método sirve para resolver cualquier ecuación no homogénea ya sea de coeficientes constantes o de coeficientes variables así como aquellas funciones en las cuales sus derivadas no son cíclicas o que no existe un anulador que las pueda anular, además este método se puede utilizar para cualquier función g(x), sin tener que estar comprobando una derivada que la anule:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)y = g(x)$$

Donde g(x), puede ser:

- Polinomicas
- Exponencial
- $\sin(x)$ ó $\cos(x)$
- $\tan(x)$
- $\ln(x)$
- $\sqrt{x}$
- $\frac{1}{x}$

Para resolver una ecuación diferencial no homogénea por el metodo de variacion de parámetros se hace lo siguiente:

1) Transformar la ecuación diferencial de tal manera que el coeficiente a_n=1
2) Encontrar el y_c de la parte homogénea de la ecuación diferencial $y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + \cdots + c_ny_n$.
3) Sustituir las constantes $c_1, c_2, c_3, \ldots\ c_n$ por funciones variables $u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots\ u_n(x)$ y la ecuación resultante será nuestro y_p

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 + u_3(x)y_3 + \cdots. + u_n(x)y_n$$

4) Encontrar las funciones $u_1(x)$ hasta $u_n(x)$ para conocer el y_p.
5) Escribir la solución general de la ecuación diferencial no homogénea $y_{(x)}$= y_c + y_p

METODO DE VARIACION DE PARAMETROS PARA UNA ECUACION DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN.

Para resolver una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden se hace lo siguiente:

1) Hacer que el coeficiente a_n=1

$$a_n = a_2 = 1$$

$$Y'' + p_{(x)}y' + Q_{(x)}y = g(x)$$

2) Encontrar el y_c de la parte homogénea

$$y_c = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$$

3) Sustituir c_1 y c_2 por $u_1(x)$ y $u_2(x)$ para encontrar el y_p.

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$$

4) Encontrar las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ para lo cual se hace lo siguiente:
   a) Las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ tienen que cumplir la siguiente condición:

   $u'_1y_1 + u'_2y_2 = 0$ ….. II

b) Derivar el y_p según el orden de la ecuación diferencial.

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$
$$y'_p = u_1 y'_1 + \cancel{u'_1 y_1} + u_2 y'_2 + \cancel{u'_2 y_2}$$
$$y'_p = u_1 y'_1 + u_2 y'_2$$
$$y''_p = u_1 y''_1 + u'_1 y'_1 + u_2 y''_2 + u'_2 y'_2$$

c) Después de reemplazar primero y_1, luego y_2 en la E.D. de segundo orden y despejar y''_1, y también y''_2; sustituir en y''_p para reducir de orden.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$
$$y''_1 + P(x)y'_1 + Q(x)y_1 = 0$$
$$y''_1 = -P(x)y'_1 - Q(x)y_1$$

$$y''_2 + P(x)y'_2 + Q(x)y_2 = 0$$
$$y''_2 = -P(x)y'_2 - Q(x)y_2$$

$$y''_p = u_1 y''_1 + u'_1 y'_1 + u_2 y''_2 + u'_2 y'_2$$

$$y''_p = u_1\big(-P(x)y'_1 - Q(x)y_1\big) + u'_1 y'_1 + u_2\big(-P(x)y'_2 - Q(x)y_2\big) + u'_2 y'_2$$
$$y''_p = u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 - \big(u_1 y'_1 + u_2 y'_2\big)P(x) - (u_1 y_1 + u_2 y_2)Q(x)$$
$$y''_p = u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 - (y'_p)P(x) - y_p Q(x)$$
$$y''_p + P(x)y'_p + Q(x)y_p = u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 \quad / \quad g(x) = y''_p + P(x)y'_p + Q(x)y_p$$

$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g(x)$ …… II

5) Resolver I y II, para encontrar $u_1(k)$, $u_2(k)$

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0$$
$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g(k)$$

$$u'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(k) & y'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 g(k)}{W(y_1, y_2)} \qquad / \qquad \text{W=Wronsquiano}$$

$$u_1 = \int \frac{-y_2 g(k)}{W(y_1, y_2)} dx$$

$$u'_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & g(x) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{y_1 g(k)}{W(y_1, y_2)}$$

$$u_2 = \int \frac{y_1 g(k)}{W(y_1, y_2)} dx$$

6) Escribir el y_p y luego la solución general la cual será:

$$y(x) = y_c + y_p$$

METODO DE VARIACION DE PARAMETROS PARA UNA E.D. DE ORDEN "n"

Para resolver una E.D. de orden "n" por este método se va a obtener un sistema de "n" ecuaciones con "n" incógnitas, las cuales estarán formadas por las primeras derivadas desde $u_1 \ldots u_n$ y las soluciones del y_c donde estas soluciones se van derivando hasta llegar a un orden menor del orden de la E.D. donde todas estas ecuaciones estarán igualadas a cero a excepción de la ecuación donde este la $(n-1)$ derivada la que estará igualada a $g(x)$ por lo tanto para una E.D. de orden "n" su sistema es como se muestra a continuación.

$$y^n + a_n(x)y^{n+1} + \cdots\ a_1 y' + a_0(x)y = g(x)$$

$$y_c = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + \cdots\ C_ny_n$$
$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 + \cdots\ u_ny_n$$

El sistema será:

$$\begin{gathered}
u'_1y_1 + u'_2y_2 + u'_3y_3 + \cdots\ u'_ny_n = 0 \\
u'_1y'_1 + u'_2y'_2 + u'_3y'_3 + \cdots\ u'_ny'_n = 0 \\
u'_1y''_1 + u'_2y''_2 + u'_3y''_3 + \cdots\ u'_ny''_n = 0 \\
. \\
. \\
. \\
u'_1{y_1}^{n-1} + u'_2{y_2}^{n-1} + u'_3{y_3}^{n-1} + \cdots\ u'_n{y_n}^{n-1} = g(x)
\end{gathered}$$

Para una E.D. de tercer orden

$$\begin{gathered}
y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \\
y_c(x) = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 \\
y_p(x) = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3
\end{gathered}$$

Sistema:

$$u'_1y_1 + u'_2y_2 + u'_3y_3 = 0$$
$$u'_1y'_1 + u'_2y'_2 + u'_3y'_3 = 0$$
$$u'_1y''_1 + u'_2y''_2 + u'_3y''_3 = g(x)$$

Para una E.D. de cuarto orden

$$\begin{gathered}
y'^V + a_3(x)y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \\
y_c(x) = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + C_4y_4 \\
y_p(x) = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 + u_4y_4
\end{gathered}$$

Sistema:

$$u'_1y_1 + u'_2y_2 + u'_3y_3 + u'_4y_4 = 0$$
$$u'_1y'_1 + u'_2y'_2 + u'_3y'_3 + u'_4y'_4 = 0$$
$$u'_1y''_1 + u'_2y''_2 + u'_3y''_3 + u'_4y''_4 = 0$$
$$u'_1y'''_1 + u'_2y'''_2 + u'_3y'''_3 + u'_4y'''_4 = g(x)$$

Ejemplo:
Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $2y'' - 4y' + 2y = \frac{e^x}{x}$ Div. ÷ 2

1. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{2x}$
2. $y'' - 2y + y = 0$
   $m^2 - 2m + 1 = 0$
   $(m-1)^2 = 0$
   $(m-1)(m-1) = 0$ / $m_1 = 1,\ m_2 = 1$

   $y_c = C_1 e^x + C_2 x e^x$

3. $y_p = u_1 e^x + u_2 x e^x$

   $u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0$
   $u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g(x)$

   $u'_1 e^x + u'_2 x e^x = 0$
   $u'_1 e^x + u'_2 (xe^x + e^x) = \frac{e^x}{2x}$

$$u'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{2x} & (xe^x + e^x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (xe^x + e^x) \end{vmatrix}} = \frac{-xe^x\left(\frac{e^x}{2x}\right)}{e^x(xe^x + e^x) - xe^{2x}}$$

$$u'_1 = \frac{-\frac{e^{2x}}{2}}{\cancel{xe^{2x}} + e^{2x} - \cancel{xe^{2x}}} = \frac{-\frac{1}{2}\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}}} = -\frac{1}{2}$$

$u'_1 = -\frac{1}{2}$ $\qquad u_1 = -\frac{1}{2}\int dx$

$$u_1 = -\frac{1}{2}x$$

$$u'_2 = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{2x} \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{e^x\left(\frac{e^x}{2x}\right)}{e^{2x}} = \frac{\frac{\cancel{e^{2x}}}{2x}}{\cancel{e^{2x}}} = \frac{1}{2x}$$

$u'_2 = \frac{1}{2x}$ $\qquad u_2 = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}$

$$u_2 = \frac{1}{2}\ln(x)$$

$$y_p = -\frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}\ln(x)\,xe^x$$
$$y_p = -\frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}xe^x\ln(x)$$

$$y(x) = y_c + y_p$$
$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x - \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}xe^x\ln(x)$$

b) $3\frac{d^3y}{dx^3} + 27\frac{dy}{dx} = \cot(3x)$ Div. ÷ 3

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 9\frac{dy}{dx} = \frac{\cot(3x)}{3}$$

$$y_c = ?$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 9\frac{dy}{dx} = 0$$
$$m^3 + 9m = 0$$
$$m(m^2+9) = 0 \qquad m_1 = 0$$
$$(m^2+9) = 0$$
$$m^2 = -9$$
$$m = \sqrt{-9} \qquad m_{2,3} = 0 \pm 3i$$

$$y_c = C_1 + C_2\cos(3x) + C_3\sin(3x)$$

$$y_p = u_1 1 + u_2\cos(3x) + u_3\sin(3x)$$

$$u'_1y_1 + u'_2y_2 + u'_3y_3 = 0$$
$$u'_1y'_1 + u'_2y'_2 + u'_3y'_3 = 0$$
$$u'_1y''_1 + u'_2y''_2 + u'_3y''_3 = g(x)$$

$$u'_1(1) + u'_2\cos(3x) + u'_3\sin(3x) = 0$$
$$u'_1(0) + u'_2(-3\sin(3x)) + u'_3\,(3\cos(3x)) = 0$$
$$u'_1(0) + u'_2(-9\cos(3x)) + u'_3(-9\sin(3x)) = \frac{\cot(3x)}{3}$$

$$u'_1 = \frac{\begin{matrix} 0 & \cos(3x) & \sin(3x) \\ 0 & -3\sin(3x) & 3\cos(3x) \\ \frac{\cot(3x)}{3} & -9\cos(3x) & -9\sin(3x) \end{matrix}}{\begin{matrix} 1 & \cos(3x) & \sin(3x) \\ 0 & -3\sin(3x) & 3\cos(3x) \\ 0 & -9\cos(3x) & -9\sin(3x) \end{matrix}} = \frac{\frac{\cot(3x)}{3}\begin{vmatrix} \cos(3x) & \sin(3x) \\ -3\sin(3x) & 3\cos(3x) \end{vmatrix}}{1\begin{vmatrix} -3\sin(3x) & 3\cos(3x) \\ -9\cos(3x) & -9\sin(3x) \end{vmatrix}}$$

$$u'_1 = \frac{(3\cos(3x)^2 + 3\sin(3x)^2)\dfrac{\cot(3x)}{3}}{(27\sin(3x)^2 + 27\cos(3x)^2)} = \frac{\frac{1}{3}\cot(3x)}{27}$$

$$u'_1 = \frac{1}{81}\cot(3x) \qquad u_1 = \frac{1}{81}\int \cot(3x)\,dx$$

$$u_1 = \frac{1}{81} ln|\sin(3x)|$$

$$u'_2 = \frac{\begin{matrix} 1 & 0 & \sin(3x) \\ 0 & 0 & 3\cos(3x) \\ 0 & \frac{1}{3}\cot(3x) & -9\sin(3x) \end{matrix}}{27} = \frac{1\begin{vmatrix} 0 & 3\cos(3x) \\ \frac{1}{3}\cot(3x) & -9\sin(3x) \end{vmatrix}}{27}$$

$$u'_2 = \frac{-\cos(3x)\cot(3x)}{27} = -\frac{1}{27}\frac{\cos(3x)^2}{\sin(3x)}$$

$$u_2 = -\frac{1}{27}\int \frac{1-\sin(3x)^2}{\sin(3x)}\,dx = -\frac{1}{27}\int \csc(3x) - \sin(3x)\,dx$$

$$u_2 = -\frac{1}{81}[ln|\csc(3x) - \cot(3x)|] - \frac{1}{81}\cos(3x)$$

$$u'_3 = \frac{\begin{matrix} 1 & \cos(3x) & 0 \\ 0 & -3\sin(3x) & 0 \\ 0 & -9\cos(3x) & \frac{1}{3}\cot(3x) \end{matrix}}{27} = \frac{1\begin{vmatrix} -3\sin(3x) & 0 \\ -9\cos(3x) & \frac{1}{3}\cot(3x) \end{vmatrix}}{27}$$

$$u'_3 = \frac{-\sin(3x)\cot(3x)}{27} = \frac{-\cos(3x)}{27}$$

$$u_3 = -\frac{1}{27}\int \cos(3x)dx \qquad u_3 = -\frac{1}{81}\sin(3x)$$

$$y_p = \frac{1}{81} ln|\sin(3x)| - \frac{1}{81}[\ln(\csc(3x) - \cot(3x))] - \frac{1}{81}\cos(3x)\cos(3x) - \frac{1}{81}\sin(3x)\sin(3x)$$

$$y_p = \frac{1}{81} ln|\sin(3x)| - \frac{1}{81}[\ln(\csc(3x) - \cot(3x))] - \frac{1}{81}(\cos(3x))^2 - \frac{1}{81}(\sin(3x))^2$$

$$y(x) = C_1 + C_2\cos(3x) + C_3\sin(3x) + \frac{1}{81} ln|\sin(3x)| - \frac{1}{81}[\ln(\csc(3x) - \cot(3x))] - \frac{1}{81}$$

c) $x^2y'' + xy' - 4y = x^2\ln(x)$ Div. $\div x^2$

$$y'' + x^{-1}y' - 4x^{-2}y = \ln(x)$$
$$y_c = ?$$
$$y'' + x^{-1}y' - 4x^{-2}y = 0$$
$$y = x^m$$
$$y' = mx^{m-1}$$
$$y'' = (m^2 - m)x^{m-2}$$

$$(m^2 - m)x^{m-2} + x^{-1}(m)x^{m-1} - 4x^{-2}x^m = 0$$
$$x^{m-2}(m^2 - m + m - 4) = 0$$
$$m^2 - 4 = 0$$
$$(m-2)(m+2) = 0$$
$$m_1 = 2;\ m_2 = -2$$

$$y_c = C_1x^2 + C_2x^{-2}$$

$$y_p = u_1x^2 + u_2x^{-2}$$
$$u'_1y_1 + u'_2y_2 = 0$$
$$u'_1y'_1 + u'_2y'_2 = g(k)$$

$$u'_1x^2 + u'_2x^{-2} = 0$$
$$u'_1(2x) + u'_2(-2x^{-3}) = \ln(x)$$

$$u'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{-2} \\ \ln(x) & -2x^{-3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{vmatrix}} = \frac{-x^{-2}\ln(x)}{-2x^{-1} - 2x^{-1}} = \frac{-x^{-2}\ln(x)}{-4x^{-1}}$$

$$u'_1 = \frac{-\frac{\ln(x)}{x^2}}{-\frac{4}{x}} \qquad u'_1 = \frac{\ln(x)}{4x}$$

$$u_1 = \frac{1}{4}\int \frac{\ln(x)}{x}dx \qquad u_1 = \frac{1}{4}\int U du \quad // U = \ln(x);\quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$u_1 = \frac{1}{8}U^2 = \frac{1}{8}(\ln(x))^2$$

$$u'_2 = \frac{\begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & \ln(x) \end{vmatrix}}{-4x^{-1}} = \frac{x^2\ln(x)}{-\frac{4}{x}} = -\frac{1}{4}x^3\ln(x)$$

$$u'_2 = -\frac{1}{4}x^3\ln(x)$$

$$u_2 = -\frac{1}{4}\int x^3\ln(x)\,dx$$

ILATE

$u = \ln(x) \qquad V = \int x^3 dx$

$du = \frac{1}{x} \qquad V = \frac{x^4}{4}$

$$u_2 = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{1}{4}\int x^3 dx$$

$$u_2 = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{1}{8}x^4$$

$$y_p = \frac{1}{8}(\ln(x))^2 x^2 + x^{-2}(\frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{1}{8}x^4)$$

$$y_p = \frac{1}{8}x^2(\ln(x))^2 + \frac{x^2}{4}\ln(x) - \frac{1}{8}x^2$$

$$y(x) = C_1x^2 + C_2x^{-2} + \frac{1}{8}x^2(\ln(x))^2 + \frac{x^2}{4}\ln(x) - \frac{1}{8}x^2$$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1) $3y'' + 27y' = \sec(3x)\tan(3x)$
2) $y''' + 16y' = \cot(4x)^2$

ELABORACION DE UNA SEGUNDA SOLUCION A PARTIR DE UNA SOLUCION CONOCIDA.

Consideremos una ecuación diferencial de la siguiente forma:

Y''+ P(x)y' + Q(x)y=0

Donde P(x) y Q(x) son funciones continuas en algún intervalo I del eje "x". Además de esta ecuación diferencias se va a conocer una de sus soluciones y_1(x) la cual es deferente de cero.

Luego para encontrar la segunda solución se hace lo siguiente:

1. Suponer la solución general y(x)=u(x)y_1(x) donde la solución a encontrar tiene que ser linealmente independiente a y_1.
2. Derivar la solución supuesta según el orden de la ecuación diferencial.

   y(x)=u y_1

   y'=u y'_1 + u' y_1

   y''= u y''_1 + u' y'_1 + u' y'_1 + u'' y_1

   y''= u y''_1 +2 u' y'_1 + u'' y_1

3. Sustituir las derivadas y el y_p supuesto en la ecuación diferencial.

   Y''+ P(x)y' + Q(x)y=0

   u y''_1 +2 u' y'_1 + u'' y_1 + P(x)(u y'_1 +u' y_1) + Q(x)(u y_1) =0

u'' y_1 + u'($2y'_1$ +P(x) y_1) + u(y''_1 +P(x) y'_1 + Q(x) y_1) =0
u'' y_1 + u'($2y'_1$ + P(x) y_1) =0

4. Realizar un cambio de variable para reducir el orden de la ecuación diferencial.
   W =u'
   W' = u''
   W'y_1 + w($2y'_1$+P(x) y_1) =0
   y_1w' + 2w y'_1 + wP(x) y_1 =0

   $y_1 \frac{dw}{dx} + 2w\frac{dy_1}{dx} + P(x)wy_1 = 0$ $\longrightarrow$ E.D Separable.

   $y_1$dw + 2w dy_1 + P(x) w $y_1$dx = 0

5. Resolver la E.D separable

$y_1$dw + 2w dy_1 + P(x) w $y_1$dx = 0

F.I = $\frac{1}{W\, y_1}$

$$\frac{1}{W\, y_1}[y_1\mathrm{dw} + 2\mathrm{w}\, dy_1 + \mathrm{P(x)\, w}\, y_1\mathrm{dx} = 0]$$

$$\frac{dw}{w} + 2\frac{dy_1}{y_1} + \mathrm{P(x)\ dx} = 0$$

$$\int \frac{dw}{w} + 2\int \frac{dy_1}{y_1} + \int \mathrm{P(x)dx} = \mathrm{C}$$

$$\ln(w) + 2\ln(y_1) = C - \int \mathrm{P(x)dx}$$

$$ln(w\, {y_1}^2) = C - \int \mathrm{P(x)dx}$$

$$e^{\ \ln(\mathrm{w}\, {y_1}^2)} = e^{\mathrm{C} - \int \mathrm{P(x)dx}}$$

$$w\, {y_1}^2 = e^C . e^{- \int \mathrm{P(x)dx}}$$

$$w\, {y_1}^2 = C_2\, e^{- \int \mathrm{P(x)dx}}$$

$$\mathrm{W} = \frac{C_2\, e^{- \int \mathrm{P(x)dx}}}{{y_1}^2}$$

W= u'

$$\mathrm{u'} = \frac{C_2\, e^{- \int \mathrm{P(x)dx}}}{{y_1}^2}$$

$$\mathrm{u} = C_2 \int \frac{C_2\, e^{- \int \mathrm{P(x)dx}}}{{y_1}^2}\ \mathrm{dx} + C_1$$

y(x)= u y_1(x)

$$y(x) = (C_2 \int \frac{C_2\, e^{-\int P(x)dx}}{{y_1}^2}\, dx + C_1)\, y_1(x)$$

$$y(x) = c_2 y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{{y_1}^2}\, dx + C_1\, y_1(x)$$

$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{{y_1}^2}\, dx$ $\longrightarrow$ Funcion de Abel (linealmente independiente a y_1)

Ejemplo:

Encontrar la segunda solución para la ecuación diferencial:

a) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, si su primer solución es $y_1(x) = x^2$

$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ $\longrightarrow$ div $\div\ x^2$

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2} = 0$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{{y_1}^2}\, dx$$

$$P(x) = -\frac{3}{x}\ ,\ y_1 = x^2$$

$$y_2 = x^2 \int \frac{e^{3\int \frac{dx}{x}}}{x^4}\, dx = x^2 \int \frac{e^{3\, lnx}}{x^4}\, dx = x^2 \int \frac{e^{\ln x^3}}{x^4}$$

$$y_2 = x^2 \int \frac{x^3}{x^4}\, dx = x^2 \int \frac{dx}{x} = x^2 \ln(x)$$

$$y_2 = x^2 \ln(x)$$

$$y(x) = c_1x^2 + c_2x^2 \ln(x)$$

b) $(1-2x)y'' + 4xy' - 4y = 0$, $y_1 = e^{2x}$

(1-2x)$y'' + 4xy' - 4y = 0$ div $\div\ (1-2x)$

$$y'' + \frac{4x}{(1-2x)}y' - \frac{4}{(1-2x)}y = 0$$

c) $P(x) = \frac{4x}{(1-2x)}$, $y_1 = e^x$

$\frac{4x}{-2x+1} = -2 - \frac{2}{1-2x}$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{{y_1}^2}\, dx$$

$$y_2 = e^{2x} \int \frac{e^{-\int\left(-2-\frac{2}{1-2x}\right)dx}}{e^{4x}} = e^{2x} \int \frac{e^{2x+\ln(1-2x)}}{e^{2x}}$$

$$y_2 = e^{2x} \int \frac{e^{2x}.\ e^{\ln(1-2x)}}{e^{2x}} = e^{2x} \int \frac{(1-2x)dx}{e^{2x}}$$

$$y_2 = e^{2x} \int \frac{(1-2x)dx}{e^{2x}} = e^{2x} \int \left(\frac{1}{e^{2x}} - \frac{2x}{e^{2x}}\right) dx$$

$$y_2 = e^{2x} \left[\int e^{-2x}dx - 2\int xe^{-2x}dx\right]$$

ILATE

$u = x \qquad V = \int e^{-2x}dx$

$du = dx \qquad V = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$$y_2 = e^{2x}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x} - 2\left(-\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx\right)\right]$$

$$y_2 = e^{2x}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right)$$

$$y_2 = e^{2x}(-e^{-2x} + xe^{-2x})$$

$$y_2 = x$$

$$y(x) = C_1y_1 + C_2y_2$$

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2x$$

d) Encontrar la 2da solucion para:

$$(1-2x-x^2)y''' + 2(1+x)y' - 2y = 0,\ y_1(x) = x+1$$

SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

En muchas aplicaciones se requieren utilizar dos o más variables dependientes tales problemas conducen a un sistema de E.D. en el cual se tienen “n” ecuaciones con “n” variables dependientes para resolver este tipo de E.D. se utilizan los siguientes métodos:

a) Método de eliminación algebraica
b) Método de Transformada de Laplace

METODO DE ELIMINACION ALGEBRAICA
Este método sirve para resolver un sistema de E.D con o sin valores iniciales donde para encontrar la solución se hace lo siguiente:

1) Escribir la E.D. en forma de operadores así:

$$\frac{dy}{dt} + y + x = t$$
$$Dy + y + x = t$$
$$(D+1)y + x = t \ldots I$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} + x = e^t$$
$$Dy + Dx + x = e^t$$
$$Dy + (D+1)x = e^t$$
$$(D+1)x + Dy = e^t \ldots II$$

2) Simultanear el sistema de E.D. para encontrar la E.D. en términos de una sola variable

Eliminando "x"

$$(x + (D+1)y = t)(-(D+1))$$
$$(D+1)x + Dy = e^t$$

$$\cancel{-(D+1)x} - (D+1)(D+1)y = -(D+1)t$$
$$\cancel{(D+1)x} + Dy = e^t$$

$$(-D^2 - D \cancel{- D + D} - 1)y = -(D+1)t + e^t)$$

$$(-D^2 - D - 1)y = -Dt - t + e^t$$
$$-(D^2 + D + 1)y = -Dt - t + e^t$$
$$-(D^2 + D + 1)y = -Dt - t + e^t$$
$$(D^2 + D + 1)y = Dt + t - e^t$$
$$(D^2 + D + 1)y = 1 + t - e^t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 1 + t - e^t$$

Eliminando "y"

$$(x + (D+1)y = t)(-D)$$
$$((D+1)x + Dy = e^t)(D+1)$$

$$-Dx \cancel{- D(D+1)y} = -Dt$$
$$(D+1)(D+1)x \cancel{+ D(D+1)y} = (D+1)e^t$$

$$-Dx + (D^2 + 2D + 1)x = -Dt + De^t + e^t$$

$$(D^2 + D + 1)x = -1 + e^t + e^t$$
$$(D^2 + D + 1)x = 2e^t - 1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 2e^t - 1$$

3) Resolver las dos E.D.

- $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 1 + t - e^t$

$$m^2 + m + 1 = 0$$
$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$
$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$
$$m_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

$$y_c = C_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$g(y,t) = 1 + t - e^t$$
$$y_p = A + Bt + Ce^t$$
$$y'_p = B + Ce^t$$
$$y''_p = Ce^t$$

- $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 2e^t - 1$

$$m^2 + m + 1 = 0$$
$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$
$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$
$$m_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

$$y_c = C_3 e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_4 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$g(y,t) = 2e^t - 1$$
$$y_p = Ae^t + B$$
$$y'_p = Ae^t$$
$$y''_p = Ae^t$$

4) Verificar cuantas incógnitas tienen que tener las soluciones encontradas resolviendo el determinante formado por los términos que acompañan a las variables en las ecuaciones I y II

$x + (D+1)y = t$
$(D+1)x + Dy = e^t$

$d = \begin{vmatrix} 1 & (D+1) \\ (D+1) & D \end{vmatrix} = D - (D+1)^2 = D - D^2 - 2D - 1$
$d = -D^2 - D - 1$ (el sistema tiene 2 constantes)

5) Sustituir $x(t)$ y $y(t)$ en una de las E.D. para encontrar una relación entre las constantes $x(t)$ y $y(t)$

Ejemplo: Resolver los siguientes sistemas de E.D.

a)

$$\frac{dx}{dt} + 2x + 3y = t$$
$$\frac{dy}{dt} - 2y - \frac{dx}{dt} = 3$$

$\frac{dx}{dt} + 2x + 3y = t$ $\qquad$ $Dx + 2x + 3y = t$
$(D+2)x + 3y = t \ldots I$

$\frac{dy}{dt} - 2y - \frac{dx}{dt} = 3$ $\qquad$ $Dy - 2y - Dx = 3$
$(D-2)y - Dx = 3 \ldots II$

Simultaneando I y II

Eliminando "x"
$[(D+2)x + 3y = t](D)$
$[(D-2)y - Dx = 3](D+2)$

$\cancel{D(D+2)x} + 3Dy = Dt$
$\cancel{-D(D+2)x} + (D+2)(D-2)y = 3(D+2)$

$3Dy + (D+2)(D-2)y = Dt + 3(D+2)$
$3Dy + (D^2-4)y = Dt + 3D + 6$
$(D^2 + 3D - 4)y = 7$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} - 4y = 7$$

$m^2 + 3m - 4 = 0$

$(m+4)(m-1)=0$
$m+4=0, \;\; m-1=0$
$m_1=-4, \qquad m_2=1$

$y_c=C_1e^{-4t}+C_2e^{t}$

$g(x)=7$
$y_p=A, \qquad y'_p=0, \qquad y''_p=0$
$0+3(0)-4A=7$
$A=-\frac{7}{4}$
$y_p=-\frac{7}{4}$

$y(t)=C_1e^{-4t}+C_2e^{t}-\frac{7}{4}$

Eliminando "y"
$[(D+2)x+3y=t](D-2)$
$[(D-2)y-Dx=3](-3)$

$(D-2)(D+2)x\cancel{+3(D-2)y}=(D-2)t$
$3Dx\cancel{-3(D-2)y}=-9$

$(D^2-4)x+3Dx=(D-2)t-9$
$(D^2+3D-4)x=Dt-2t-9$
$(D^2+3D-4)x=1-2t-9$

$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}-4x=-8-2t$

$x_c=?$

$m^2+3m-4=0$
$(m+4)(m-1)=0$
$m+4=0, \;\; m-1=0$
$m_1=-4, \qquad m_2=1$

$x_c=C_3e^{-4t}+C_4e^{t}$

$g(x)=8-2t$
$x_p=A+Bt, \qquad x'_p=B, \qquad x''_p=0$

$0+3B-4(A+Bt)=-8-2t$

$-4B=-2$
$B=\frac{1}{2}$

$$(3B - 4A) = -8$$
$$-4A = 8 - 3(\frac{1}{2})$$
$$A = \frac{19}{8}$$

$$x_p = \frac{19}{8} + \frac{1}{2}t$$

$$x(t) = C_3e^{-4t} + C_4e^t + \frac{19}{8} + \frac{1}{2}t$$

Encontrando el número de incógnitas:

$$d = \begin{vmatrix} D+2 & 3 \\ -D & D-2 \end{vmatrix} = (D^2 - 4) + 3D = D^2 + 3D - 4$$ (2do orden, 2 constantes)

Sustituir $x(t)$ y $y(t)$ en E.D. (se toma la más fácil)

$$\frac{dx}{dt} + 2x + 3y = t$$

$x(t) = C_3e^{-4t} + C_4e^t + \frac{19}{8} + \frac{1}{2}t$ $\qquad$ $y(t) = C_1e^{-4t} + C_2e^t - \frac{7}{4}$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -4C_3e^{-4t} + C_4e^t + \frac{1}{2}$$

$$-4\cancel{C_3e^{-4t}} + \cancel{C_4e^t} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{2C_3e^{-4t}} + \cancel{2C_4e^t} + \frac{\cancel{19}}{4} + \cancel{t} + 3C_1e^{-4t} + 3C_2e^t - \frac{\cancel{21}}{4} = \cancel{t}$$

$$\cancel{-2C_3e^{-4t}} + 3C_4e^t + \cancel{3C_1e^{-4t}} + 3C_2e^t = 0$$

$$e^{-4t}(-2C_3 + 3C_1) + e^t(3C_4 + 3C_2) = 0$$

$$-2C_3 + 3C_1 = 0$$
$$C_3 = \frac{3}{2}C_1$$

$$3C_4 + 3C_2 = 0$$
$$C_4 = -C_2$$

$$x(t) = \frac{3}{2}C_1e^{-4t} - C_2e^t + \frac{1}{2}t + \frac{19}{8}$$
$$y(t) = C_1e^{-4t} + C_2e^t - \frac{7}{4}$$

b)

$$\frac{dx}{dt} - 2x - y = 2$$

$$\frac{dy}{dt} - 2y - \frac{dx}{dt} = e^{3t}$$

$\frac{dx}{dt} - 2x - y = 2$ $\qquad$ $Dx - 2x - y = 2$

$(D-2)x - y = 2 \ldots I$

$\frac{dy}{dt} - 2y - \frac{dx}{dt} = e^{3t}$ $\qquad$ $Dy - 2y - Dx = e^{3t}$

$(D-2)y - Dx = e^{3t} \ldots II$

Simultaneando I y II

Eliminando "x"

$[(D-2)x - y = 2](D)$

$[(D-2)y - Dx = e^{3t}](D-2)$

$D(D-2)x - Dy = 2D$

$-D(D-2)x + (D-2)(D-2)y = (D-2)e^{3t}$

$(D^2 - 4D + 4)y - Dy = 2D + De^{3t} - 2e^{3t}$

$(D^2 - 5D + 4)y = 3e^{3t} - 2e^{3t}$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 4y = e^{3t}$$

$y_c = ?$

$m^2 - 5m + 4 = 0$

$(m-4)(m-1) = 0$

$m_1 = 4, \qquad m_2 = 1$

$y_c = C_1e^{4t} + C_2e^t$

$g(x) = e^{3t}$

$y_p = Ae^{3t}$

$y'_p = 3Ae^{3t}$

$y''_p = 9Ae^{3t}$

$C_1Ae^{3t} - 15Ae^{3t} + 4Ae^{3t} = e^{3t}$

$-2Ae^{3t} = e^{3t}$

$-2A = 1 \qquad A = -\frac{1}{2}$

$$y_p = -\frac{1}{2}e^{3t}$$

$$y(t) = C_1e^{4t} + C_2e^{t} - \frac{1}{2}e^{3t}$$

Eliminando "y"

$[(D-2)x - y = 2](D-2)$
$[(D-2)y - Dx = e^{3t}]$

$(D-2)(D-2)x - \cancel{(D-2)y} = 2(D-2)$
$-Dx + \cancel{(D-2)y} = e^{3t}$

$(D^2 - 4D + 4)x - Dx = 2(D-2) + e^{3t}$
$(D^2 - 5D + 4)x = -4 + e^{3t}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 4x = e^{3t} - 4$$

$x_c = ?$
$m^2 - 5m + 4 = 0$
$(m-4)(m-1) = 0$
$m_1 = 4, \qquad m_2 = 1$

$x_c = C_3e^{4t} + C_4e^{t}$

$g(x) = e^{3t} - 4$
$x_p = Ae^{3t} + B$
$x'_p = 3Ae^{3t}$
$x''_p = 9Ae^{3t}$

$9Ae^{3t} - 15Ae^{3t} + 4Ae^{3t} + 4B = e^{3t} - 4$
$-2Ae^{3t} + 4B = e^{3t} - 4$
$-2A = 1 \qquad A = -\frac{1}{2}$
$4B = -4 \qquad B = -1$

$$x_p = -\frac{1}{2}e^{3t} - 1$$
$$x(t) = C_3e^{4t} + C_4e^{t} - \frac{1}{2}e^{3t} - 1$$

$$d = \begin{vmatrix} D-2 & -1 \\ -D & D-2 \end{vmatrix} = D^2 - 4D + 4 - D = D^2 - 5D + 4$$ (Tendrá 2 constantes)

Tomando:
$$\frac{dx}{dt} - 2x - y = 2$$

$x(t) = C_3e^{4t} + C_4e^{t} - \frac{1}{2}e^{3t} - 1 \qquad y(t) = C_1e^{4t} + C_2e^{t} - \frac{1}{2}e^{3t}$

$$\frac{dx(t)}{dt} = 4C_3e^{4t} + C_4e^t - \frac{3}{2}e^{3t}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{dx(t)}{dt}\!: \quad \cancel{4C_3e^{4t}} + \cancel{C_4e^t} - \frac{3}{2}e^{3t} \\
&-2x\!: \quad -\cancel{2C_3e^{4t}} - \cancel{2C_4e^t} + \cancel{e^{3t}} + 2 \\
&-y\!: \quad -C_1e^{4t} - C_2e^t + \cancel{\tfrac{1}{2}e^{3t}}
\end{aligned}$$

$$\cancel{2C_3e^{4t}} - C_4e^t + \tfrac{3}{2}e^{3t} - \cancel{C_1e^{4t}} - C_2e^t + \cancel{2} = \cancel{2}$$

$$e^{4t}(2C_3 - C_1) + (-C_4 - C_2)e^t = 0$$

$$\begin{aligned}
&2C_3 - C_1 = 0 && -C_4 - C_2 = 0 \\
&C_1 = 2C_3 && C_2 = -C_4
\end{aligned}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}C_1e^{4t} - C_2e^t - \frac{1}{2}e^{3t} - 1$$

$$y(t) = C_1e^{4t} + C_2e^t - \frac{1}{2}e^{3t}$$

UNIDAD: III
TRANSFORMADA DE LAPLACE

Se han estudiado diferentes métodos para resolver E.D. en las cuales para encontrar una solución particular primero encuentra la solución general y luego se encuentran los valores de las constantes arbitrarias. Ahora se va a estudiar otro metodo para poder resolver los problemas de valores iniciales el cual consiste en usar una transformación que cambie un conjunto de operaciones en otro conjunto diferente de operaciones, esta transformación es la “transformada de Laplace” la cual cambiará una E.D. lineal en una ecuación algebraica en términos de una nueva variable independiente “s”. Ademas este metodo sirve para resolver E.D. no homogéneas donde $g(t)$ puede ser una función continua o una función seccionada así:

$$\frac{d^ny}{dx^n} + \cdots + a_0(t)y = g(t)$$

El operador que se utiliza es: $\mathcal{L}$ el cual realiza una función similar a la del operador anulador (D) solamente que no se deriva sino que ser requiere de integrar (integrales impropias) las cuales van a producir la nueva función en términos de la nueva variable independiente “s”

La forma de representar la $\mathcal{L}$ es así:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$f(t) \Longrightarrow \mathcal{L} \Longrightarrow F(s)$$

DEFINICION MATEMATICA DE $\mathcal{L}$ (formal)

Sea $f(t)$ una función definida para todos los reales entonces la integral impropia

$\int_{-\infty}^{+\infty} k(s,t)\, f(t)dt$ donde $k(s,t)$ es una función seccionada de la forma:

$$k(s,t) = \begin{cases} 0\,, & t < 0 \\ e^{-st}\,, & t \geq 0 \end{cases}$$

Luego la integral se escribe de la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(s,t)\, f(t)dt = \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0 f(t)dt} + \int_{0}^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(s,t)\, f(t)dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(s,t)\, f(t)dt = \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} e^{-st} f(t)dt$$

Si existe el límite la integral converge pero si no existe entonces la integral diverge.

DEFINICION DE $\mathcal{L}$

Sea $f(t)$ una función definida para $t \geq 0$ entonces la $\mathcal{L}$ de $f(t)$ denotada por $\mathcal{L}\{f(t)\}$ es la función $F(s)$ de la nueva variable real "s" definida así:

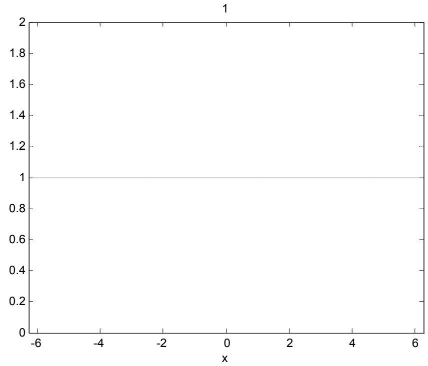
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} k(s,t) f(t)dt$$

La transformada de Laplace para valores que están a la izquierda de cero es cero por lo tanto a la $\mathcal{L}$ de una función $f(t)$ solamente existe para $t \geq 0$

TRANSFORMADA DE FUNCIONES ELEMENTALES

Las funciones elementales a las cuales se les puede encontrar transformada de Laplace son:

a) Funciones polinomicas.
b) Funciones exponenciales.
c) Funciones de raíces complejas.



TRANDFORMADA DE FUNCIONES POLINOMICAS.

Ej. $f(t) = 1$

$$\mathcal{L}\{1\} = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st}(1)dt$$

$$u = -st, \quad du = -sdt$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R e^u(-\frac{du}{s})dt = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{s}\int_0^R e^u du$$

$$\lim_{R\to\infty} -\frac{1}{s}e^u\Big|_0^R = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^R = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{s}(e^{-sR} - e^0)$$

$$\lim_{R\to\infty} -\frac{1}{s}(e^{-sR} - 1) = -\frac{1}{s}(\cancel{e^{-\infty}} - 1) = \frac{1}{s}$$

$$\therefore\ \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$f(t) = k$

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st}(k)dt$$

$$\lim_{R\to\infty} -\frac{1}{s}e^{-st}k\Big|_0^R = \lim_{R\to\infty} -\frac{k}{s}(e^{-sR} - 1) = -\frac{k}{s}(\cancel{e^{-\infty}} - 1) = \frac{k}{s}$$

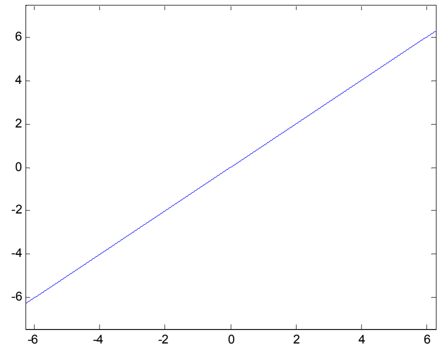
$$\therefore\ \mathcal{L}\{k\} = F(s) = \frac{k}{s}$$

Ej. Encontrar la transformada de:

a) $\mathcal{L}\{10\} = \frac{10}{s}$

b) $\mathcal{L}\{6\} = \frac{6}{s}$

$f(t) = t$



$$\mathcal{L}\{t\} = F(s) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st}(t)dt$$

ILATE

$u = t \qquad V = \int e^{-st} dt$

$du = dt \qquad V = -\frac{e^{-st}}{s}$

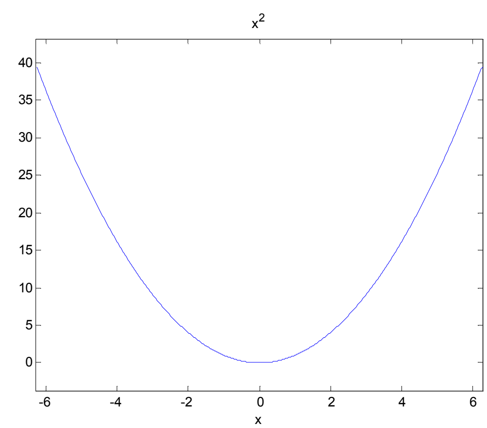
$$\lim_{R\to\infty} \left(-\frac{t}{s} e^{-st} + \frac{1}{s} \int e^{-st} \right)$$

$$\lim_{R\to\infty} \left(-\frac{t}{s} e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \right) \Big|_0^R$$

$$\lim_{R\to\infty} \left(\cancel{-\frac{R}{s} e^{-sR}} - \cancel{\frac{1}{s^2} e^{-sR}} \right) - \lim_{R\to\infty} \left(\cancel{-\frac{0}{s} e^{0}} - \frac{1}{s^2} e^{0} \right) = \frac{1}{s^2}$$

$$\therefore \ \mathcal{L}\{1\} = F(s) = \frac{1}{s^2}$$

$f(t) = t^2$



$$\mathcal{L}\{t^2\} = F(s) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st}(t^2)dt$$

ILATE

$u = t^2 \qquad V = \int e^{-st} dt$

$du = 2t\,dt \qquad V = -\frac{e^{-st}}{s}$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{t^2}{s} e^{-st} + \frac{2}{s} \int e^{-st} t\,dt \right)$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{t^2}{s}e^{-st}+\frac{2}{s}\left(-\frac{t}{s}e^{-st}-\frac{1e^{-st}}{s^2}\right)\right)\Bigg|_0^R$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{t^2}{s}e^{-st}-\frac{2}{s^2}te^{-st}-\frac{2}{s^3}e^{-st}\right)\Bigg|_0^R$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[\left(-\frac{\cancel{R^2}}{\cancel{s}}\cancel{e^{-sR}}-\frac{\cancel{2}}{\cancel{s^2}}\cancel{Re^{-sR}}-\frac{\cancel{2}}{\cancel{s^3}}\cancel{e^{-sR}}\right)-\left(-\frac{2}{s^3}(1)\right)\right]$$

$$\mathcal{L}\{t^2\}=\frac{2}{s^3}$$

En términos generales se cumple que:

$$\mathcal{L}\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

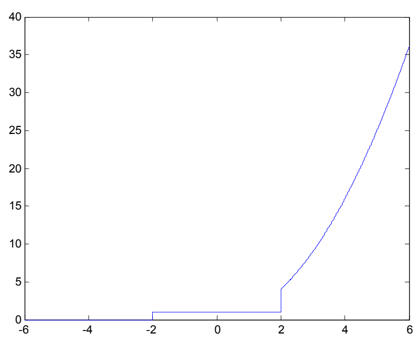
Ej. Calcular:

a) $\mathcal{L}\{t^3\}=\frac{3!}{s^{3+1}}=\frac{(3)(2)(1)}{s^4}=\frac{6}{s^4}$

b) $\mathcal{L}\{t^4\}=\frac{4!}{s^{4+1}}=\frac{(4)(3)(2)(1)}{s^5}=\frac{24}{s^5}$

Ejemplo: para la siguiente función graficarla y encontrar la $\mathcal{L}$

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-2\\ 1, & -2\le t<2\\ t^2, & t\ge 2\end{cases}$$



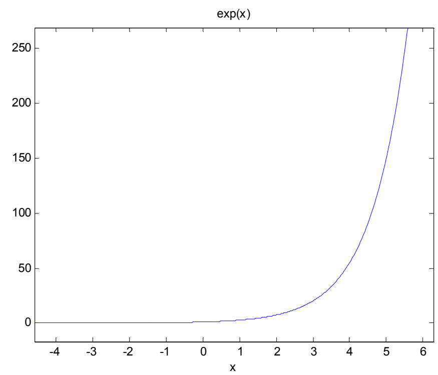
$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^2 e^{-st}(1)dt+\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}(t^2)dt$$

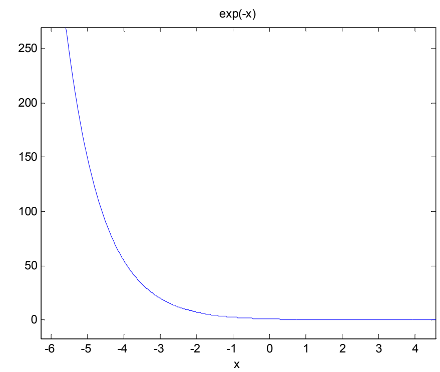
$$= -\frac{e^{-st}}{s}\Bigg|_0^2+\lim_{R\to\infty}\left[\left(-\frac{\cancel{R^2}}{\cancel{s}}\cancel{e^{-sR}}-\frac{\cancel{2}}{\cancel{s^2}}\cancel{Re^{-sR}}-\frac{\cancel{2}}{\cancel{s^3}}\cancel{e^{-sR}}\right)-\left(-\frac{4}{s}(e^{-2s})-\frac{4}{s^2}(e^{-2s})-\frac{2}{s^3}(e^{-2s})\right)\right]$$

$$= \frac{-e^{-2s}}{s} + \frac{1}{s} + \frac{4}{s}e^{-2s} + \frac{4}{s^2}e^{-2s} + \frac{2}{s^3}e^{-2s}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{3}{s}e^{-2s} + \frac{4}{s^2}e^{-2s} + \frac{2}{s^3}e^{-2s} + \frac{1}{s}$$

TRANSFORMADA DE LA FUNCION EXPONENCIAL





$$f(t) = e^{at}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st}(e^{at})dt$$
$$u = -(s-a)t$$
$$du = -(s-a)dt$$
$$\frac{du}{-(s-a)} = dt$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{u}\left(\frac{du}{-(s-a)}\right)$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{-(s-a)} \int_0^R e^{u}du$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{-(s-a)} e^{-(s-a)t}\Big|_0^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{-1}{(s-a)}\left[\cancel{e^{-(s-a)R}} - e^{0}\right]$$

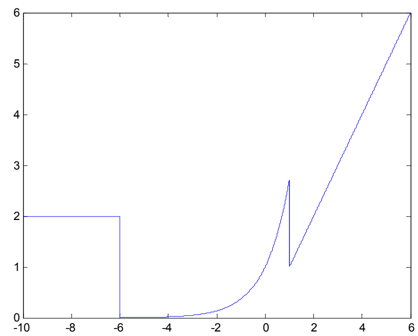
$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{(s-a)}$$

Ej. Encontrar las siguientes transformadas:

a) $\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{1}{s+2}$

b) $\mathcal{L}\{e^{3t}\} = \frac{1}{s-3}$

c) Encontrar la transformada de $f(t) = \begin{cases} 2, & t < -6 \\ e^t, & -6 \le t < 1 \\ t, & t \ge 1 \end{cases}$



$$F(s) = \int_0^1 e^{-st} e^t dt + \lim_{R\to\infty} \int_1^R e^{-st} t dt$$

$u = t \qquad V = \int e^{-st} dt$

$du = dt \qquad V = -\frac{e^{-st}}{s}$

$$= \int_0^1 e^{-t(s+1)} dt + \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{t}{s} e^{-st} + \frac{1}{s} \int e^{-st} dt \right]$$

$u = -t(s-1)$

$du = -(s-1)dt$

$\frac{-du}{(s-1)} = dt$

$$\frac{-1}{(s-1)} \int_0^1 e^u du + \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{t}{s} e^{-st} + \frac{1}{s^2} e^{-st} \right] \Bigg|_1^R$$

$$\frac{-1}{(s-1)} e^{-t(s+1)} \Big|_0^1 + \lim_{R\to\infty} \cancel{-\frac{R}{s} e^{-sR}} + \cancel{\frac{1}{s^2} e^{-sR}} + \frac{1}{s} e^{-s} + \frac{1}{s^2} e^{-s}$$

$$F(s) = -\frac{1}{(s-1)} e^{-t(s+1)} + \frac{1}{(s-1)} + \frac{1}{s} e^{-s} + \frac{1}{s^2} e^{-s}$$

Transformada para funciones de raíces complejas.

- $f(t) = \sin(bt)$
- $f(t) = \cos(bt)$
- $f(t) = \sinh(bt)$
- $f(t) = \cos h\,(bt)$

- $f(t) = \cos(bt)$

$$F(s) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st}\cos(bt)\,dt$$ I L A T E

$$u = \cos(bt) \qquad dv = \int e^{-st}\,dt$$
$$du = -b\,\sin(bt)\,dt \qquad v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

$$F(s) = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{\cos(bt)}{s}e^{-st} - \frac{b}{s}\int e^{-st}\sin(bt)dt\right]\Bigg|_0^R$$

$$u = \sin(bt) \qquad dv = \int e^{-st}\,dt$$
$$du = b\,\cos(bt)dt \qquad v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

$$\int_0^R e^{-st}\cos(bt) = -\frac{\cos(bt)}{s}e^{-st} - \frac{b}{s}\left(-\frac{e^{-st}}{s}\sin(bt) + \frac{b}{s}\int e^{-st}\cos(bt)dt\right)$$

$$= -\frac{\cos(bt)}{s}e^{-st} + \frac{b}{s^2}e^{-st}\sin(bt) - \frac{b^2}{s^2}\int e^{-st}\cos(bt)dt$$

$$\left(\frac{b^2}{s^2}+1\right)\int_0^R e^{-st}\cos(bt)\,dt = -\frac{\cos(bt)}{s}e^{-st} + \frac{b}{s^2}e^{-st}\sin(bt)\Bigg|_0^R$$

$$= -\frac{\cos(Rb)}{s}e^{-sR} + \frac{b}{s^2}e^{-sR}\sin(Rb) + \frac{1}{s} + 0$$

$$\left(\frac{b^2}{s^2}+1\right)\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}\cos(bt)\,dt = \lim_{R\to\infty}\left[-\cancel{\frac{\cos(Rb)}{s}}e^{-sR} + \frac{b}{s^2}e^{-sR}\cancel{\sin(Rb)} + \frac{1}{s}\right] = \frac{1}{s}$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}\cos(bt)\,dt = \frac{\frac{1}{s}}{\frac{b^2}{s^2}+1}$$

$$F(s) = \frac{\frac{1}{s}}{\frac{b^2+s^2}{s^2}} = \frac{s}{b^2+s^2}$$

$$F(s) = \frac{s}{b^2+s^2}$$

TRANSFORMADAS

1) $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$
2) $\mathcal{L}\{k\} = \frac{k}{s}$
3) $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$
4) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{(s-a)}$

5) $\mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \frac{b}{s^2+b^2}$
6) $\mathcal{L}\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2+b^2}$
7) $\mathcal{L}\{\sinh(bt)\} = \frac{b}{s^2-b^2}$
8) $\mathcal{L}\{\cosh(bt)\} = \frac{s}{s^2-b^2}$

FUNCION DE ORDEN EXPONENCIAL

El argumento de la integral $e^{-st}f(t)$ entre los limites cero y t_0 existe para todo t_0 positivo e infinito, el único riesgo posible para la existencia de la transformada de Laplace es el comportamiento cuando t_0 tiende a +∞ entonces para que la transformada de Laplace exista tiene que ser una función de orden exponencial

DEFINICION DE UNA FUNCION DE ORDEN EXPONENCIAL

Una función $f(t)$ es de orden exponencial cuando $t \to \infty$ si existen constantes $M > 0$, $b > 0$ y un valor fijo t_0 que cumple la siguiente condición:

$$|f(t)| < Me^{bt}$$

Así como también que:

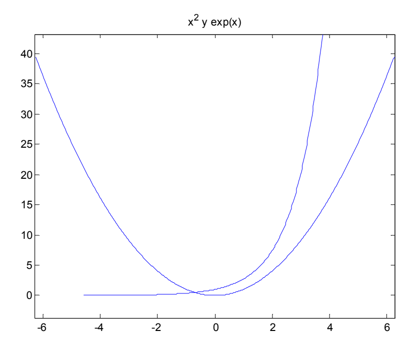
$$\lim_{t\to\infty} |f(t)|\, e^{-bt} = 0$$

Ej. Determinar si las siguientes funciones son de orden exponencial:

a) $f(t) = t^2$

$M = 1, b = 1 \;\; \leftarrow constantes\ cualquiera$

$|t^2| < (1)e^{(1)t}$
$|t^2| < e^t$



Otra forma:

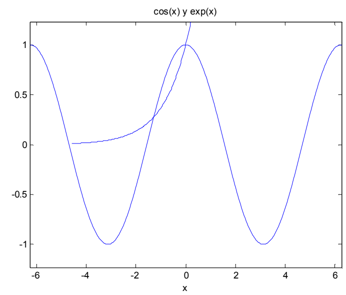
$\lim_{t\to\infty} t^2 e^{-bt} = 0$
$\lim_{t\to\infty} t^2 e^{-bt} = \infty * 0$
$\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{e^{bt}} = \frac{\infty}{\infty}$

Aplicando L'hopital
$\lim_{t\to\infty} \frac{2t}{be^{bt}} = \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{2}{b^2 e^{bt}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$\therefore$ cumple entonces es de orden exponencial por lo tanto tiene transformada.

b) $f(t) = \cos(t)$



$|f(t)| < Me^{bt}$
$M = 1, b = 1$

$|\cos(t)| < e^{t}$

$\therefore$ Cumple es de orden exponencial por lo tanto tiene transformada: $\mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{s}{s^2+1}$

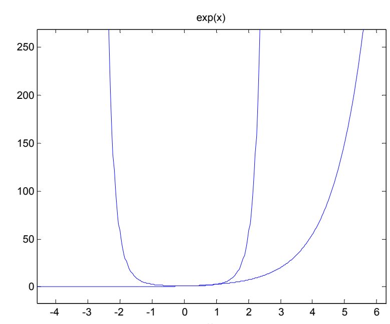
Otra forma:

$$\lim_{t\to\infty} |f(t)|e^{-bt} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \cos(t)\, e^{-bt} = \cos(\infty)\cancel{e^{-b\infty}} = 0$$

Cumple lego es de orden exponencial y por lo tanto tiene transformada.

c) $f(t) = e^{t^2}$



$|f(t)| < Me^{bt}$
$M = 1, b = 1$

$\left|e^{t^2} < e^{t}\right|$

No cumple, no es de orden exponencial por lo tanto no tiene tranformada.

Otra forma:

$$\lim_{t\to\infty} |f(t)|e^{-bt} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{t^2} e^{-bt} = \infty * 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{t^2}}{e^{bt}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando L'hopital

$$\lim_{t\to\infty} \frac{2te^{t^2}}{be^{bt}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$\lim_{t\to\infty} \frac{4t^2e^{t^2}}{b^2e^{bt}} = \frac{\infty}{\infty}$ no se sale de nada el limite no existe.

No es de orden exponencial por lo tanto no tiene transformada.

PROPIEDADES BASICAS DE $\mathcal{L}$

Para encontrar la transformada de Laplace de funciones cuando existen productos o se están sumando o restando se aplican las siguientes propiedades.

a) Propiedad de linealidad de $\mathcal{L}$
b) Primera propiedad de desplazamiento o traslación sobre el eje “s”
c) Segunda propiedad de desplazamiento
d) Multiplicación por un t^n

PROPIEDAD DE LINEALIDAD

Sean $f_1(t)$ y $f_2(t)$ dos funciones de orden exponencial y a, b son dos constantes cualesquiera, entonces se cumple que:

$$\mathcal{L}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = a\mathcal{L}\{f_1(t)\} + b\{f_2(t)\}$$

Ej. Encontrar las siguientes transformadas de Laplace

1) $\mathcal{L}\{4t^2 + 3e^{2t} + 3\cos(3t) - 6\sin(3t)\}$

$$= 4\mathcal{L}\{t^2\} + 3\mathcal{L}\{e^{2t}\} + 3\mathcal{L}\{\cos(3t)\} - 6\mathcal{L}\{\sin(3t)\}$$
$$= 4\left(\frac{2!}{s^3}\right) + 3\left(\frac{1}{s-2}\right) + 3\left(\frac{s}{s^2+9}\right) - 6\left(\frac{4}{s^2+16}\right)$$
$$= \frac{8}{s^3} + \frac{3}{s-2} + \frac{3s}{s^2+9} - \frac{24}{s^2+16}$$

2) $\mathcal{L}\{\cos(3t)\sin(2t)\}$

$$\sin(u+v) = \cancel{\sin u \cos v} + \sin v \cos u$$
$$-\sin(u-v) = -\cancel{\sin u \cos v} - \sin v \cos u$$

$$\sin(u+v) - \sin(u-v) = 2\sin v \cos u$$

$$\sin v \cos u = \tfrac{1}{2}[\sin(u+v) - \sin(u-v)]$$

$$\mathcal{L}\{\cos(3t)\sin(2t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}[\sin(u+v) - \sin(u-v)]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\sin(5t)\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\sin(t)\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{s^2+25}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$\mathcal{L}\{\cos(3t)\sin(2t)\} = \frac{5}{2(s^2+25)} - \frac{1}{2(s^2+1)}$$

3) $\mathcal{L}\{\cos(2t)^2\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1+\cos(4t)}{2}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4t)\right\}$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos(4t)\}$$
$$= \frac{1}{2s} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+16}\right)$$

$$\mathcal{L}\{\cos(2t)^2\} = \frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2+16)}$$

PRIMERA PROPIEDAD DE DESPLAZAMIENTO

Esta propiedad se va a utilizar cuando exista un producto de una función $f(t)$ por una exponencial así:

$\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\}$ y se obtiene la siguiente forma:

a) Seleccionar la función que acompaña la función exponencial y obtener la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

b) Evaluar la función $F(s)$ en $(s-a)$ donde a es el exponente de la función exponencial y la función resultante será la transformada de Laplace. $F(s-a$

Ej. Encontrar $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}$

$$f(t) = t^n$$
$$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$
$$F(s-a) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

a) $\mathcal{L}\{t^3 e^{-3t}\}$

$$f(t) = t^3$$
$$F(s) = \frac{3!}{s^4} = \frac{(3)(2)(1)}{s^4} = \frac{6}{s^4}$$

$$F(s-a) = \frac{6}{(s-a)^4}$$

b) $\mathcal{L}\{\cos(bt)\, e^{at}\}$

$$f(t) = \cos(bt)$$
$$F(s) = \frac{s}{s^2 + b^2}$$
$$F(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$$

c) $\mathcal{L}\{\cos(4t)\, e^{2t}\}$

$$f(t) = \cos(4t)$$
$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 16}$$
$$F(s-2) = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 16}$$

d) $\mathcal{L}\{\sin(bt)\, e^{at}\}$

$$f(t) = \sin(bt)$$
$$F(s) = \frac{b}{s^2 + b^2}$$
$$F(s-a) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

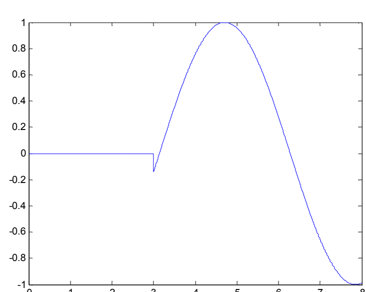
e) $\mathcal{L}\{\sin(2t)\, e^{3t}\}$

$$f(t) = \sin(2t)$$
$$F(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$
$$F(s-3) = \frac{2}{(s-3)^2 + 4}$$

SEGUNDA PROPIEDAD DDE DESPLAZAMIENTO

Esta propiedad se va utilizar cuando la función $g(t)$ sea una función seccionada de la forma:

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < c \\ f(t-c), & t \ge c \end{cases}$$



$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^c \cancel{e^{-st}(0)}dt + \int_c^\infty e^{-st} f(t-c)dt$$

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t-c)dt$$

Sea:

$u = t - c, \rightarrow \quad t = u + c$

$du = dt$

Para cambiar limite

Si $t = c \quad \rightarrow \quad u = 0$

Si $t = \infty \quad \rightarrow \quad u = \infty$

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-s(u+c)} f(u)du = \int_0^\infty e^{-su} e^{-sc} f(u)du$$

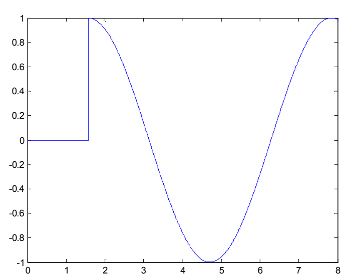
$$G(s) = e^{-sc} \int_0^\infty e^{-su} f(u)du$$

$$G(s) = e^{-sc}\mathcal{L}\{f(u)\}$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-sc}F(s)$$

Ej. Calcular la transformada de Laplace para las siguientes funciones

a) $g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ \cos(t - \frac{\pi}{2}) & t \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$



$$c = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-\frac{\pi}{2}s}F(s)$$

$$f\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$u = t - \frac{\pi}{2}$$

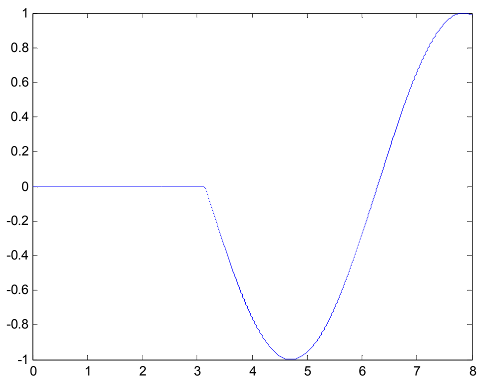
$$f(u) = \cos(u)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{\cos(u)\}$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\therefore \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-\frac{\pi}{2}s}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$$

b) $g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ \sin(t), & t \geq \pi \end{cases}$



$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-\pi s}F(s)$$

$$f(t-\pi) = sen(t-\pi+\pi)$$

$$f(u) = sen(u+\pi)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(u)\}$$

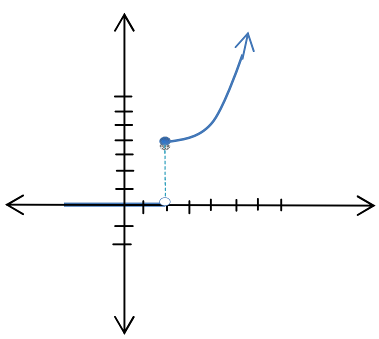
$$F(s) = \mathcal{L}\{sen(u).\cos(\pi) + \cos(u)\, sen(\pi)\}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{-sen(u)\} = -\mathcal{L}\{sen(u)\}$$

$$F(s) = -\frac{1}{s^2+1}$$

$$\therefore \boldsymbol{\mathcal{L}\{g_{(t)}\} = \left(-\frac{1}{s^2+1}\right)e^{-2s}}$$

c) $\boldsymbol{g_{(t)}} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \mathbf{0} \le \boldsymbol{t} < 2 \\ \boldsymbol{t^2}, & \boldsymbol{t} \ge \mathbf{2} \end{cases}$



$$\mathcal{L}\{g_{(t)}\} = e^{-2s}\, F_{(S)}$$
$$f(t-2) = (t-2+2)^2$$
$$u = t-2$$
$$f_{(u)=}(u+2)^2$$

$$f_{(u)} = u^2 + 4u + 4$$

$$F_{(S)} = \mathcal{L}\{f_{(u)}\}$$
$$F_{(S)} = \mathcal{L}\{u^2+4u+4\}$$
$$F_{(S)} = \mathcal{L}\{u^2\} + 4\mathcal{L}\{u\} + 4\mathcal{L}\{1\}$$
$$F_{(S)} = \frac{2}{s^3} + 4\frac{1}{s^2} + 4\frac{1}{s}$$
$$F_{(S)} = \frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}$$

$$\therefore \boldsymbol{\mathcal{L}\{g_{(t)}\} = \left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}\right)e^{-2s}}$$

d) $\boldsymbol{g_{(t)}} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \mathbf{0} \le \boldsymbol{t} < 3 \\ (\boldsymbol{t}-\mathbf{3})^2 + \mathbf{2}(\boldsymbol{t}-\mathbf{3}) + \mathbf{15}\,, & \boldsymbol{t} \ge \mathbf{3} \end{cases}$

$\mathcal{L}\{g_{(t)}\} = e^{-3s} F_{(S)}$

$f(t-3) = (t-3)^2 + 2(t-3) + 15$

$u = t - 3$

$f_{(u)} = u^2 + 2u + 15$

$F_{(S)} = \mathcal{L}\{f_{(u)}\}$

$F_{(S)} = \mathcal{L}\{u^2 + 2u + 15\}$

$F_{(S)} = \mathcal{L}\{u^2\} + 2\mathcal{L}\{u\} + 15\mathcal{L}\{1\}$

$F_{(S)} = \frac{2}{s^3} + 2\frac{1}{s^2} + 15\frac{1}{s}$

$F_{(S)} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{15}{s}$

$\therefore \boldsymbol{\mathcal{L}\{g_{(t)}\} = \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{15}{s}\right) e^{-3s}}$

<u>Multiplicación por un</u> $(\boldsymbol{t^n})$

Esta propiedad se va a utilizar cuando exista un producto de una función $f_{(t)}$ por un t^n y para encontrar la transformada de Laplace se hace mediante la siguiente expresión:

$$\boxed{\mathcal{L}\{f_{(t)}t^n\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\,[\,F_{(S)}]}$$

Donde "n" es un numero entero positivo y es el exponente de la función polinomica y $F_{(S)}$ es la transformada de Laplace de $f_{(t)}$.

Ejemplo: Encontrar la siguiente transformada.

$\mathcal{L}\{t^8 e^{3t}\} = (-1)^8 \frac{d^8}{ds^8}\left[\frac{1}{s-3}\right]$

También se cumple la primera propiedad de desplazamiento = $\frac{8!}{(s-3)^9}$

Ejemplo: Encontrar la siguiente transformadas.

a) $\boldsymbol{\mathcal{L}\{t\,cos(t)\}}$

n=1

$$\mathcal{L}\{tcos(t)\} = (-1)\,\frac{d}{ds}\,[\,F_{(S)}]$$

$$F_{(S)} = \mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}\{tcos(t)\} = (-1)\,\frac{d}{ds}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$\mathcal{L}\{tcos(t)\} = (-1)\left[\frac{(s^2+1)-s(2s)}{(s^2+1)^2}\right] = (-1)\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\cos(t)\} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

b) $\boldsymbol{\mathcal{L}\{t^2 sen(2t)\}}$

$$F_{(S)} = \mathcal{L}\{\mathrm{sen}(2t)\} = \frac{2}{s^2+4}$$

n=2

$$\mathcal{L}\{t^2 sen(2t)\} = (-1)^2\,\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{2}{s^2+4}\right]$$

$$= (-1)^2\,\frac{d}{ds}\left[\frac{\cancel{(s^2+4)(0)} - 2(2s)}{(s^2+4)^2}\right] = (-1)^2\,\frac{d}{ds}\left[\frac{-4s}{(s^2+4)^2}\right]$$

$$= (-1)^2\left[\frac{(s^2+4)(-4)-(-4s)[2(s^2+4)(2s)]}{(s^2+4)^4}\right]$$

$$= \frac{(s^2+4)[(s^2+4)(-4)+16s^2]}{(s^2+4)^4}$$

$$= \frac{-4s^2-16+16s^2}{(s^2+4)^3}$$

$$\mathcal{L}\{t^2 sen(2t)\} = \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$$

c) $\boldsymbol{\mathcal{L}\{e^{2t}tcos(2t)\}}$

$$\mathcal{L}\{e^{2t}tcos(2t)\} = (-1)\ \frac{d}{ds}\ [\ F_{(S-2)}]$$

$$F_{(S)} = \mathcal{L}\{cos(2t)\} = \frac{s}{s^2+4}$$

También se puede derivando primero y hasta el final aplicar la primera propiedad de desplazamiento

$$F_{(S-2)} = \frac{s-2}{(s-2)^2+4}$$

$$\mathcal{L}\{e^{2t}tcos(2t)\} = (-1)\ \frac{d}{ds}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+4}\right]$$

$$\mathcal{L}\{e^{2t}tcos(2t)\} = (-1)\left[\frac{((s-2)^2+4)(1)-(s-2)[2(s-2)]}{((s-2)^2+4)^2}\right]$$

$$\mathcal{L}\{e^{2t}tcos(2t)\} = (-1)\left[\frac{(s-2)^2+4)-2(s-2)^2}{((s-2)^2+4)^2}\right] = (-1)\left[\frac{-(s-2)^2+4}{[(s-2)^2+4]^2}\right]$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\{e^{2t}tcos(2t)\} = \frac{(s-2)^2-4}{[(s-2)^2+4]^2}}$$

TRANSFORMADA DE DERIVADAS

Transformada de la primera derivada

Supóngase que la función $f_{(t)}$es continua para $t \geq 0$ yademas es de orden exponencial y su primera derivada es una función seccionalmente continua para todo intervalo continuo y cerrado, entonces la transformada de Laplace de la primera derivada viene dada por:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}f'(t)dt$$

$$u = \ e^{-st};\ \ du = -se^{-st}dt;\ \ v = \int f'(t)dt;\ v = f(t)$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \ e^{-st}f(t)|_0^{\infty} + \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt}_{F_{(S)}}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = e^{-\infty}f(\infty) - e^{0}f(0) + sF(s)$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f'(t)\} = SF(s) - f(0)}$$

<u>Transformada de segundas derivadas</u>

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st}f''(t)dt$$

$$u = e^{-st};\ du = -se^{-st}dt;\ v = \int f''(t)dt;\ v = f'(t)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = e^{-st}f'(t)|_0^\infty + s\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt}_{\text{Ya encontrada}}$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = e^{-\infty}f'(\infty) - e^{0}f'(0) + S\big(SF(s) - f(0)\big)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = -f'(0) + S^2F(s) - Sf(0)$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f''(t)\} = S^2F(s) - Sf(0) - f'(0)}$$

<u>Transformada de terceras derivadas</u>

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st}f'''(t)dt$$

$$u = e^{-st};\ du = -se^{-st}dt;\ v = \int f''(t)dt;\ v = f'(t)$$

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = e^{-st}f''(t)|_0^\infty + s\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}f''(t)dt}_{\text{Calculada anteriormente}}$$

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = e^{-\infty} f''^{(\infty)} - e^{0} f''^{(0)} + S\left(S^2F(s) - Sf(0) - f'(0)\right)$$

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = -f''(0) + S^3F(s) - S^2f(s) - Sf'(0)$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f'''(t)\} = S^3F(s) - S^2f(0) - Sf'(0) - f''(0)}$$

<u>Transformada de la ‘n’- esima derivada</u>

$$\boxed{\mathcal{L}\{f^{n}(t)\} = S^{n}F(s) - S^{n-1}f(0) - S^{n-2}f(s) - \cdots - S^{0}f^{n-1}(0)}$$

Ejemplo: Encontrar la transformada de Laplace de las siguientes E.D. sujetas a las condiciones dadas.

a) $\boldsymbol{\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0}$ ***sujeta a***: $\boldsymbol{y_{(0)} = 1 \wedge y'_{(0)} = 0}$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + 3\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = S^2Y(s) - Sy(0) - y'(0) = S^2Y(s) - S(1) - 0$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = \underline{S^2Y(s) - S}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = SY(s) - y(0) = SY(s) - 1$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = \underline{SY(s) - 1}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \underline{Y(s)}$$

$$S^2Y(s) - S + 3(SY(s) - 1) + 2Y(s) = 0$$

$$S^2Y(s) - S + 3SY(s) - 3 + 2Y(s) = 0$$

$$Y(s)(S^2 + 3S + 2) = S + 3$$

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2}$$

b) $\boldsymbol{\frac{d^3y}{dt^3} + y = e^t}$ $\quad$ ***sujeta a***: $\boldsymbol{y_{(0)} = 1,\ y'_{(0)} = 2 \wedge\ y'''_{(0)} = 4}$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3y}{dt^3}\right\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^t\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3y}{dt^3}\right\} = S^3Y(s) - S^2y(0) - Sy'^{(0)} - y''(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3y}{dt^3}\right\} = S^3Y(s) - S^2(1) - S(2) - 4$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3y}{dt^3}\right\} = \underline{S^3Y(s) - S^2 - 2S - 4}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \underline{Y(s)}$$

$$\mathcal{L}\{e^t\} = \underline{\frac{1}{s-1}}$$

$$S^3Y(s) - S^2 - 2S - 4 + Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$Y(s)(S^3 + 1) = \frac{1}{s-1} + S^2 + 2S + 4$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^3+1)} + \frac{s^2 + 2s + 4}{(s^3+1)}$$

c) $y'' - 4y' + 4y = e^{3t}$ $\quad$ *sujeta a*: $y_{(0)} = 5,\ y'_{(0)} = 7$

d) $y''' + 8y = \cos(3t)$ $\quad$ *sujeta a*: $y_{(0)=}8,\ \ y'_{(0)} = 6 \wedge\ y'''_{(0)} = 12$

TRASNFORMADA DE INTEGRALES

Si f(t) es una función continua por partes para $t \geq 0$ y satisface la condición de orden exponencial, entonces la transformada de Laplace de la integral vienen dada por:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\{f(\tau)\} \qquad \text{ó} \qquad \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\,F(s)$$

Ejemplo: Encontrar las siguientes transformadas de Laplace.

a) $\boldsymbol{\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{3\tau}\, sen(2\tau)d\tau\right\}} = \frac{1}{s}\,F(s)$

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{3\tau} sen(2\tau)\} = \frac{2}{(s-3)^2+4}$$

$$\mathcal{L}\{e^{3\tau} sen(2\tau)\} = \frac{1}{s}\left[\frac{2}{(s-3)^2+4}\right]$$

b) $\boldsymbol{\mathcal{L}\left\{e^t \int_0^t e^{2\tau} \cos(3\tau)d\tau\right\}}$

$$f(t) = \int_0^t e^{2\tau}\cos(3\tau)\,d\tau$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{2\tau}\cos(3\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+9}\right]$$

$$F(s-1) = \frac{1}{s-1}\left[\frac{(s-1-2)}{(s-1-2)^2+9}\right] = \frac{1}{s-1}\left[\frac{(s-3)}{(s-3)^2+9}\right]$$

$$\mathcal{L}\left\{e^t \int_0^t e^{2\tau}\cos(3\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s-1}\left[\frac{(s-3)}{(s-3)^2+9}\right]$$

c) $\boldsymbol{\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau e^{2\tau}\cos(2\tau)\,d\tau\right\}} = \frac{1}{s}\left[\frac{(s-2)^2-4}{[(s-2)^2+4]^2}\right]$

TRANSFORMADA INVERSA

La transformada de la función f(t) es una nueva función en términos de una nueva V.I. 'S' pero cuando se están resolviendo E.D. con condiciones iniciales el problema que se presenta es que la función conocida ca a ser la función F(s) y se quiere encontrar la función f(t) por lo que es necesario desarrollar el método para encontrar f(t) y este es el "método de la transformada inversa" denotada así:

$$\boldsymbol{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}}$$

Al aplicar este método se presentan los siguientes casos:

1) Cuando la función F(s) es conocida y se puede encontrar directamente f (t).
2) Cuando la función F(s) no es una función conocida pero al sumarle cero o multiplicarlo por la unidad se lleva a una función conocida.
3) Cuando la función F(s) no es una función conocida pero al completar cuadrados en el denominador se lleva a una función conocida.
4) Cuando la función F(s) no es conocida y es necesario aplicar fracciones parciales.
5) Método de convolucion.

Cuando la función F(s) es conocida.

Cuando la función a la cual se le quiere encontrar la transformada inversa es una función conocida entonces se calcula directamente.

Ejemplo: Encontrar las siguientes transformadas inversas.

a) $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} = \cos(3t)$
b) $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{(s-3)^2+25}\right\} = e^{3t}\cos(5t)$
c) $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{24}{s^5}\right\} = t^4$
d) $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{120}{(s-2)^6}\right\} = e^{2t}t^5$

<u>Función F(s) no conocida pero al sumar cero o multiplicar por la unidad se vuelve conocida.</u>

Cuando la función F(s)en la parte del numerador es un polinomio de grado “uno” y en el denominador aparezca una función desplazada “a” unidades entonces en el denominador hay que restarle y sumarle esa misma cantidad para llevarlo a la forma de una función coseno por un exponencial; pero si en el denominador aparece una función cuadrática desplazada “a” unidades y en el numerador hay solamente una constante que no es el valor de “b” entonces es necesario multiplicar y dividir por el valor de “b” la ecuación.

Ahora si la función F(s) es cualquier otra función se debe multiplicar y dividir al mismo tiempo la función por el valor requerido.

Ejemplo: Encontrar las siguientes transformadas inversas.

a) $\boldsymbol{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+3)^2+25}\right\}}$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3-3}{(s+3)^2+25}\right\}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+25}\right\} - \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+3)^2+25}\right\}$$

$$f(t) = e^{-3t}\cos(5t) - \frac{3}{5}e^{-3t}sen(5t)$$

b) $\boldsymbol{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+5)^4}\right\}}$

$$n+1 = 4 \Rightarrow n = 3$$

$$n! = 3! = 3\times 2\times 1 = 6$$

$$f(t) = \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{(s+5)^4}\right\} = -\frac{1}{6}t^3e^{-5t}$$

c) $\boldsymbol{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s+3}\right\}}$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s+3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{s+\frac{3}{2}}\right\}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s+3}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{3}{2}}\right\}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}t}$$

d) $\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-3}{(s+2)^2+25}\right\}}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-3}{(s+2)^2+25}\right\} = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+2)^2+25}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+2)^2+25}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-3}{(s+2)^2+25}\right\} = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2-2}{(s+2)^2+25}\right\} - \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)^2+25}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-3}{(s+2)^2+25}\right\} = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+25}\right\} - \frac{8}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)^2+25}\right\} - \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)^2+25}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-3}{(s+2)^2+25}\right\} = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+25}\right\} - \frac{11}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)^2+25}\right\}$$

$$f(t) = 4e^{-2t}\cos(5t) - \frac{11}{5}e^{-2t}sen(5t)$$

1) $\boldsymbol{h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^7}\right\} = \frac{1}{720}t^6e^{3t}}$

2) $\boldsymbol{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+5}{(s-3)^2+16}\right\} = 4e^t cos(4t) + \frac{9}{4}e^t sen(4t)}$

3) $\boldsymbol{g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2+20}\right\} = \frac{1}{\sqrt{20}}e^{-2t}sen(\sqrt{20}t)}$

<u>F(s) no es conocida pero al completar cuadrados en el denominador ya es conocida.</u>

La completacion de cuadrados se va a utilizar cuando F(s) no es conocida pero en el denominador aparece una función cuadrática no factorable; entonces se completa cuadrados para llevarlas a la forma:

$$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} = \mathcal{L}\{e^{at}\cos(bt)\} \qquad \text{ó} \qquad \frac{b}{(s-a)^2+b^2} = \mathcal{L}\{e^{at}sen(bt)\}$$

Ejemplo: Encontrar las siguientes transformadas inversas.

a) $\boldsymbol{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+6s+25}\right\}}$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+6s+9+25-9}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+3)^2+16}\right\}$$

$$f(t) = e^{-3t}sen(4t)$$

b) $\boldsymbol{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2-4s+13}\right\}}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2-4s+13}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2-4s+4+13-4}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{(s-2)^2+9}\right\}$$

$$= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2+2}{(s-2)^2+9}\right\} + \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-2)^2+9}\right\}$$

$$= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-2)}{(s-2)^2+9}\right\} + \frac{6}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-2)^2+9}\right\} + \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-2)^2+9}\right\}$$

$$h(t) = 3e^{2t}\cos(3t) + \frac{11}{3}e^{2t}sen(3t)$$

Calcular las siguientes transformadas inversas:

1) $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+8s+25}\right\} = \frac{1}{3}e^{-4t}sen(3t)$

2) $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-5}{s^2-4s+13}\right\} = 4e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}sen(3t)$

3) $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+13}{s^2+2s+20}\right\} = 3e^{t}cos\left(\sqrt{19}t\right) - \frac{3}{\sqrt{19}}e^{t}sen\left(\sqrt{19}t\right) + \frac{13}{\sqrt{19}}e^{t}sen\left(\sqrt{19}t\right)$

F(s) no es conocida y es necesario aplicar fracciones parciales.

Con frecuencia se necesita obtener la transformada inversa de una función racional de la forma:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Donde el numerador y el denominador son polinomios de “S” y el grado de Q(s) es mayor que P(s). Luego mediante el proceso de fracciones parciales se lleva la función f(s) a una función conocida, para poder encontrar la función f(t), es por lo tanto al aplicar el método de fracciones parciales se presentan los siguientes casos:

a) Factor lineal no repetido (diferente).
b) Factor lineal repetido (múltiple).
c) Factor cuadrático no repetido (diferente).

Factor lineal no repetido (diferente).

$$f(s) = \frac{P(s)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \frac{A}{(s-a)} + \frac{B}{(s-b)} + \frac{C}{(s-c)} + \frac{D}{(s-d)}$$

En los factores lineales diferentes todas las transformadas inversas son de la forma: e^{at}

<u>Factor lineal repetido</u> (múltiple).

$$f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-a)^n}$$

$$\frac{P(s)}{(s-a)^n} = \frac{A_1}{(s-a)} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \frac{A_3}{(s-a)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(s-a)^n}$$

En este caso la primera transformada inversa es de la forma e^{at} y las demás t^n.

<u>Factor cuadrático no repetido</u> (diferente)

$$f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)(s^2+c^2)\ldots\ (s^2+z^2)}$$

$$= \frac{As+B}{(s^2+a^2)} + \frac{Cs+D}{(s^2+b^2)} + \frac{Es+F}{(s^2+d^2)} + \cdots + \frac{Ms+L}{(s^2+z^2)}$$

Para este caso las transformadas inversas quedan de la forma:

- cos(bt)
- sen(bt)
- $e^{at}\cos(bt)$
- $e^{at}\,\mathrm{sen}(bt)$

Ejemplo: calcular las siguientes transformadas inversas.

a) $\boldsymbol{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2+2s+5}{s(s+3)(s+2)}\}}$

$$f(s) = \frac{s^2+2s+5}{s(s+3)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{(s+2)}$$

$$\frac{s^2+2s+5}{s(s+3)(s+2)} = \frac{A(s+3)(s+2)+Bs(s+2)+Cs(s+3)}{s(s+3)(s+2)}$$

$$s^2 + 2s + 5 \quad = \; A(s+3)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s+3)$$

Si: $s = -3$

$$s^2 + 2s + 5 = Bs(s+2)$$

$$(-3)^2 + 2(-3) + 5 = B[-3(-3+2)]$$

$$8 = 3B$$

$$B = \frac{8}{3}$$

Si: $s = 0$

$$s^2 + 2s + 5 = A(s+3)(s+2)$$

$$(0)^2 + 2(0) + 5 = A(0+3)(0+2)$$

$$5 = 3A(2)$$

$$5 = 6A$$

$$A = \frac{5}{6}$$

Si: $s = -2$

$$s^2 + 2s + 5 = Cs(s+3)$$

$$(-2)^2 + 2(-2) + 5 = C[-2(-2+3)]$$

$$5 = -2C$$

$$C = -\frac{5}{2}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+5}{s(s+3)(s+2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{s+3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C}{(s+2)}\right\}$$

$$= \frac{5}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{8}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\}$$

$$f(t) = \frac{5}{6} + \frac{8}{3}e^{-3t} - \frac{5}{2}e^{-2t}$$

b) $\boldsymbol{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+3s+5}{(s+3)(s^2+8s+20)}\right\}}$

$$f(s) = \frac{s^2+3s+5}{(s+3)(s^2+8s+20)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{Cs+D}{s^2+8s+20}$$

$$= \frac{A(s^2+8s+20)+(Cs+D)(s+3)}{(s+3)(s^2+8s+20)}$$

$$= \frac{As^2+8As+20A+Cs^2+3Cs+Ds+3D}{(s+3)(s^2+8s+20)}$$

$$\frac{s^2+3s+5}{(s+3)(s^2+8s+20)} = \frac{(A+C)s^2+(8A+3C+D)s+(20A+3D)}{(s+3)(s^2+8s+20)}$$

$A + C = 1 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots I$

$8A + 3C + D = 3 \ldots \ldots II$

$20A + 3D = 5 \ldots \ldots III$

Simultaneando II ∧ III

$(8A + 3C + D = 3)(-3) \quad \rightarrow \quad -24A - 9C - 3D = -9$

$20A \quad + 3D = 5 \quad \rightarrow \quad 20A \quad + 3D = 5$

$-4A - 9C = -4$

$4A + 9C = 4 \ \ldots\ldots$IV

Simultaneando I ∧ IV

$(A + C = 1)(-9) \quad \rightarrow \quad -9A - 9C = -9$

$4A + 9C = 5 \quad \rightarrow \quad 4A + 9C = 4$

$-5A = -5$

$$\boxed{A = 1}$$

Sustituir en I

$A + C = 1$

$1 + C = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = 0}$

Sustituir A=1 en II

$20(1) + 3D = 5$

$3D = 5 - 20 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = -5}$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0(s) - 5}{s^2 + 8s + 20}\right\}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+4)^2 + 4}\right\}$$

$$f(t) = e^{-3t} - \frac{5}{2}e^{-4t}sen(2t)$$

Calcular la transformada inversa para:

1) $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-6}{(s-2)(s-3)(s+2)}\right\} = \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{5}e^{3t} - \frac{1}{10}e^{-2t}$

2) $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+5}{(s^2+4)(s^2+6s+25)}\right\}$

$$f(t) = -\frac{2}{195}cos(2t) + \frac{7}{390}sen(2t) + \frac{2}{195}e^{-3t}cos(4t) + \frac{97}{390}e^{-3t}sen(4t)$$

FUNCIONES ESPECIALES SUS GRAFICAS Y TRANSFORMADAS.

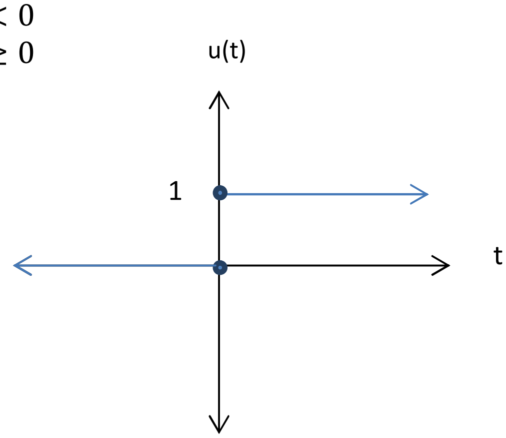
Al resolver una E.D. se tratan casos donde la función f(t) cambia para un tiempo específico por lo que se necesita una notación para una función que suprima un término dado hasta cierto valor de "t".
Las funciones que realizan esta operación son:

a) Función escalón unitario o de paso unitario
b) Función de Heaviside.
c) Función de retardo de tiempo.
d) Función periódica.

Función escalón unitario

Una función escalón unitario es aquella que vale cero cuando el argumento es positivo y se representa así:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



Transformada:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st}\,(1)dt$$

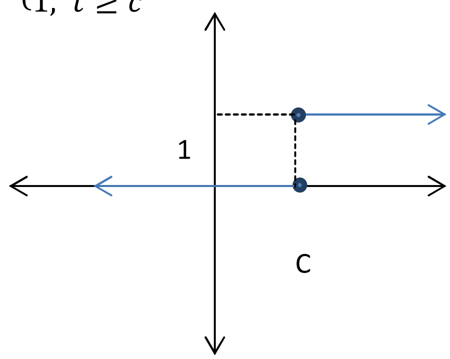
$$= \lim_{R\to\infty} -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_o^R = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{e^{-sR}}{s} + \frac{e^0}{s}\right) = -\frac{e^{-\infty}}{s} + \frac{1}{s}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}}$$

Función Heaviside

A función de Heaviside es una función escalón unitario en la cual el cambio sucede en $t = c$, donde "c" puede ser cualquier número real, se denota así $u_{(t-c)}$ y vale cero para valores a la izquierda de "c" y uno para valores a la derecha de "c" así:

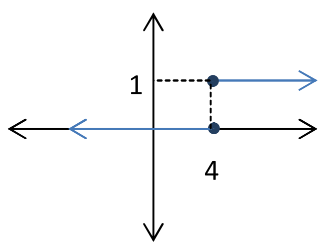
$$f(t) = u_{(t-c)} = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$$



Ejemplo: Graficar las siguientes funciones:

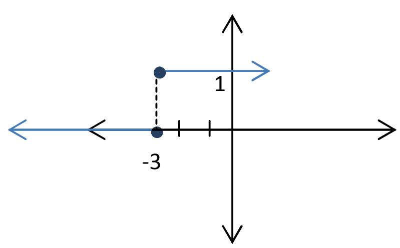
a) $\boldsymbol{f(t) = u(t-4)}$

$$f(t) = u_{(t-4)} = \begin{cases} 0, & t < 4 \\ 1, & t \geq 4 \end{cases}$$



b) $\boldsymbol{f(t) = u(t+3)}$

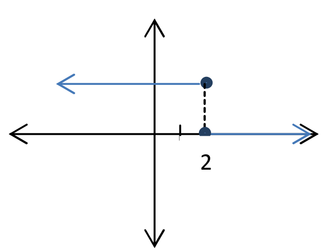
$$f(t) = u_{(t+3)} = \begin{cases} 0, & t < -3 \\ 1, & t \geq -3 \end{cases}$$



c) $\boldsymbol{f(t) = u(2-t)}$

$$f(t) = u_{(-t+2)} = \begin{cases} 0, & -t+2 < 0 \\ 1, & -t+2 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & -t < -2 \\ 1, & -t \geq -2 \end{cases}$$

$$f(t) = f(x) = \begin{cases} 0, & t > 2 \\ 1, & t \leq 2 \end{cases}$$



Transformada

Para encontrar la transformada de una función Heaviside $c \geq 0$ y la función tiene que estar escrita de la forma $u(t-c)$.

$$\mathcal{L}\{u(t-c)\} = \int_0^c e^{-st}(0)dt + \lim_{R\to\infty}\int_c^R e^{-st}(1)dt$$

$$= \lim_{R\to\infty} -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_c^R$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-sR}}{s} + \frac{e^{-sc}}{s}\right]$$

$$= -\frac{e^{-\infty}}{s} + \frac{e^{-sc}}{s}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{u(t-c)\} = \frac{e^{-sc}}{s}, \quad c \geq 0}$$

Ejemplo: Calcular las siguientes transformadas.

a) $\mathcal{L}\{u(t-3)\} = \frac{e^{-3s}}{s}$

b) $\mathcal{L}\{u(t+2)\} = \frac{e^{2s}}{s}$

c) $\mathcal{L}\{u(2-t)\} = \mathcal{L}\{u(-t+2)\} = \quad u(-t+2) = \begin{cases} 0, & t > 2 \\ 0, & t \leq 2 \end{cases}$

$$\mathcal{L}\{u(-t+2)\} = \int_0^2 e^{-st}(1)dt = -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^2 = -\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^0}{s}$$

$$\mathcal{L}\{u(-t+2)\} = 1 - \frac{e^{-2s}}{s}$$

Ejemplo: para la siguiente función escribirlas como una función escalón unitario de Heaviside y encontrar su transformada.

a) $\boldsymbol{f(t)} = \begin{cases} \mathbf{4}, & \mathbf{0} \leq \boldsymbol{t} < 2 \\ \mathbf{-2}, & \mathbf{2} \leq \boldsymbol{t} < 4 \\ \mathbf{3}, & \mathbf{4} \leq \boldsymbol{t} < 6 \\ \mathbf{2}, & \boldsymbol{t} \geq \mathbf{6} \end{cases}$

$$f(t) = \begin{cases} a, & 0 \leq t < c \\ b, & t \geq c \end{cases}$$

$$f(t) = au(t-0) - au(t-c) + bu(t-c)$$

$$f(t) = au(t) - au(t-c) + 2u(t-c)$$

$$f(t) = 4u(t-0) - 4u(t-3) - 2u(t-2) + 2u(t-4) + 3u(t-4) - 3u(t-6) + 2u(t-6)$$

$$\underline{f(t) = 4u(t) - 6u(t-2) + 5u(t-4) - u(t-6)}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 4\mathcal{L}\{u(t)\} - 6\mathcal{L}\{u(t-2)\} + 5\mathcal{L}\{u(t-4)\} - \mathcal{L}\{u(t-6)\}$$

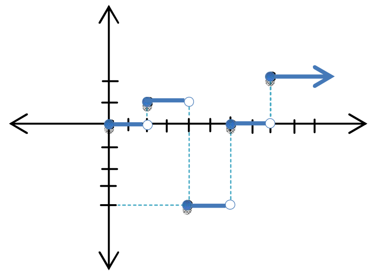
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{4}{s} - 6\frac{e^{-2s}}{s} + 5\frac{e^{-4s}}{s} - \frac{e^{-6s}}{s}$$

b) Graficar la siguiente función

$$f(t) = u(t-2) - 5u(t-4) + 4u(t-6) + 2u(t-8)$$

Intervalo	$\boldsymbol{f(t) = u(t-2) - 5u(t-4) + 4u(t-6) + 2u(t-8)}$	**f(t)**
$0 \leq t < 2$	$t = 1$ $f(t) = u(1-2) - 5u(1-4) + 4u(1-6) + 2u(1-8) = 0$	0
$2 \leq t < 4$	$t = 3$ $f(t) = u(3-2) - 5u(3-4) + 4u(3-6) + 2u(3-8) = 1$	1
$4 \leq t < 6$	$t = 5$ $f(t) = u(5-2) - 5u(5-4) + 4u(5-6) + 2u(5-8) = -4$	-4
$6 \leq t < 8$	$t = 7$ $f(t) = u(7-2) - 5u(7-4) + 4u(7-6) + 2u(7-8) = 0$	0
$t \geq 8$	$t = 9$ $f(t) = u(9-2) - 5u(9-4) + 4u(9-6) + 2u(9-8) = 2$	2

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t < 4 \\ -4, & 4 \leq t < 6 \\ 0, & 6 \leq t < 8 \\ 2 & t \geq 8 \end{cases}$$



c) Graficar la siguiente función.

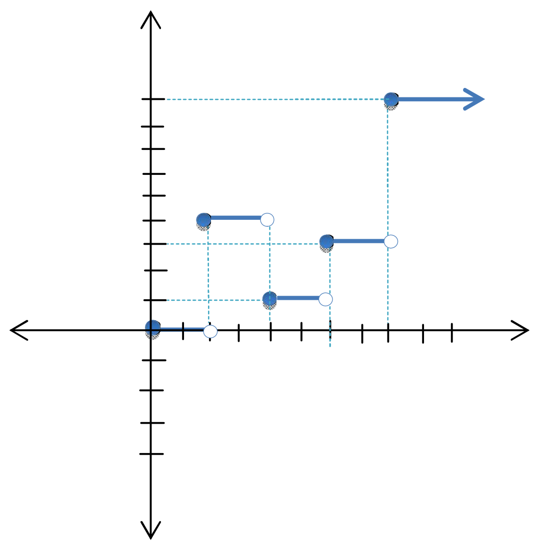
$$\boldsymbol{f(s) = 4\frac{e^{-2s}}{s} - 3\frac{e^{-4s}}{s} + 2\frac{e^{-6s}}{s} + 5\frac{e^{-8s}}{s}}$$

$$f(t) = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{s}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-6s}}{s}\right\} + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-8s}}{s}\right\}$$

$$f(t) = 4u(t-2) - 3u(t-4) + 2u(t-6) + 5u(t-8)$$

Intervalo	$f(t) = 4u(t-2) - 3u(t-4) + 2u(t-6) + 5u(t-8)$	**f(t)**
$0 \leq t < 2$	$t = 1 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = o$	0
$2 \leq t < 4$	$t = 3 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = 4$	4
$4 \leq t < 6$	$t = 5 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = 1$	1
$6 \leq t < 8$	$t = 7 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = 3$	3
$t \geq 8$	$t = 9 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = 8$	8

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ 4, & 2 \leq t < 4 \\ 1, & 4 \leq t < 6 \\ 3, & 6 \leq t < 8 \\ 8, & t \geq 8 \end{cases}$$



1) Graficar y encontrar la transformada de:
   $f(t) = u(t-3) + 5u(t-6) - 2u(t-4) + 3u(t-1)$
2) Graficar:

   $$f(s) = -3\frac{e^{-s}}{s} + 2\frac{e^{-3s}}{s} + 5\frac{e^{-4s}}{s} - 7\frac{e^{-6s}}{s} + 2\frac{e^{-8s}}{s}$$

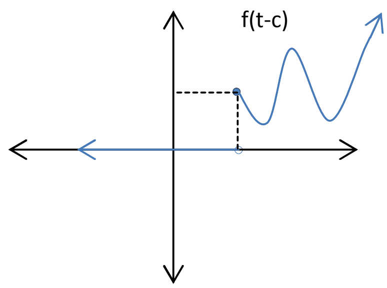
Función de retardo de tiempo.

La función de retardo de tiempo es una función escalón unitario que representa el traslado de una función f(t) "c" unidades en la dirección positiva del eje "t".

Donde esta función solo traslada la gráfica que está a la derecha de t = 0 y la parte que está a la izquierda la anula y se representa así

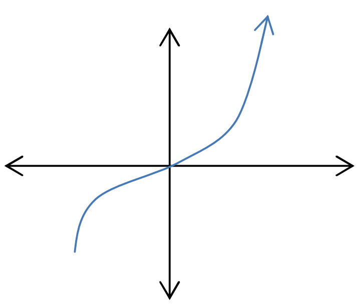
$f(t-c)u(t-c)\ \ y\ se\ define\ asi:$

$$f(t-c)u(t-c)=\begin{cases} 0, & t<c \\ f(t-c), & t\geq c \end{cases}\ ;\quad c\geq 0$$

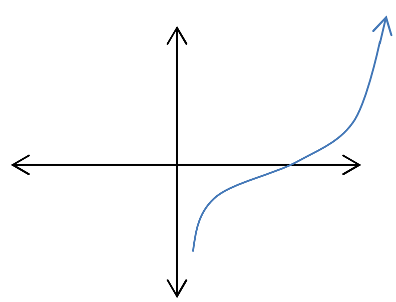


Ejemplo:

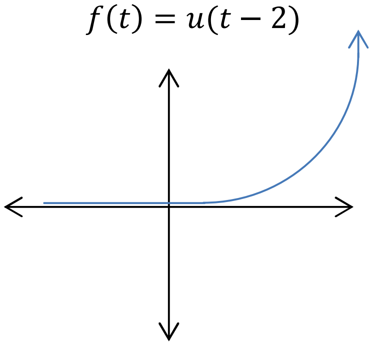
$f(t)=t^3$



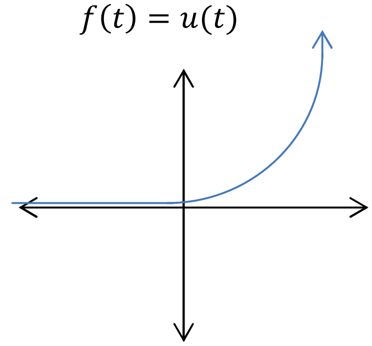
$f(t-2)=(t-2)^3$



$f(t)=u(t-2)$



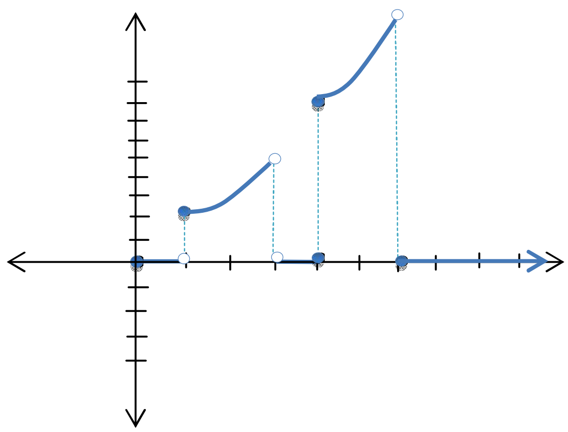
$f(t)=u(t)$



Graficar:

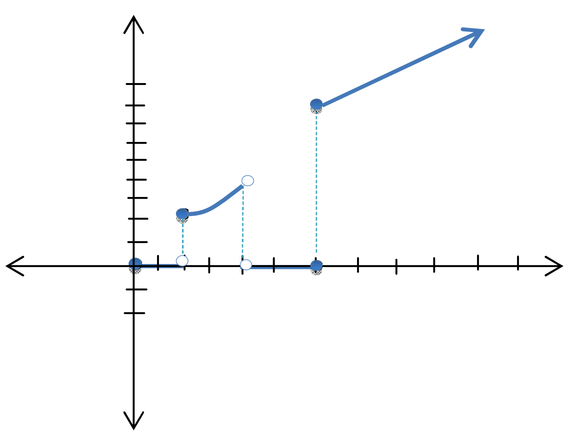
a) $\boldsymbol{f(t) = f(t)u(t-1) - f(t)u(t-3) + f(t)u(t-4) - f(t)u(t-6)} \quad \boldsymbol{donde} \quad \boldsymbol{f(t) = t^3}$

Intervalo	$f(t) = f(t)u(t-1) - f(t)u(t-3) + f(t)u(t-4) - f(t)u(t-6)$	**f(t)**
$0 \leq t < 1$	$t = 0.5 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = o$	0
$1 \leq t < 3$	$t = 2 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = f(t)$	f(t)
$3 \leq t < 4$	$t = 3.5 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = f(t) - f(t) = 0$	0
$4 \leq t < 6$	$t = 5 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = f(t) - f(t) + f(t)$	f(t)
$t \geq 6$	$t = 7 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = f(t) - f(t) + f(t) - f(t)$	0



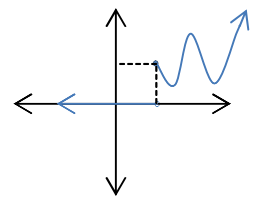
b) $\boldsymbol{f(t) = t^2u(t-2) - t^2u(t-4) + t\,u(t-6)}$

Intervalo	a) $f(t) = t^2u(t-2) - t^2u(t-4) + t\,u(t-6)$	**f(t)**
$0 \leq t < 2$	$t = 1 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = o$	0
$2 \leq t < 4$	$t = 3 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = t^2$	t^2
$4 \leq t < 6$	$t = 5 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = t^2 - t^2 = 0$	0
$t \geq 6$	$t = 7 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = t^2 - t^2 + t = t$	t



Transformada de la función retardo de tiempo.

$$f(t-c)u(t-c) = \begin{cases} 0, & t < c \\ f(t-c), & t \geq c \end{cases}$$



$$\mathcal{L}\{f(t-c)u(t-c)\} = \int_0^c e^{-st}(0)dt + \int_c^\infty e^{-st} f(t-c)dt$$

$$u = t - c \Rightarrow t = u + c \qquad para\, t = c \Rightarrow u = 0$$

$$du = dt \qquad para\, t = \infty \Rightarrow u = \infty$$

$$= \int_0^\infty e^{-s(u+c)} f(u)du$$

$$= \int_0^\infty e^{-su}. e^{-sc} f(u)du$$

$$= e^{-sc}\int_0^\infty e^{-su} f(u)du$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t-c)u(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(u)\} = e^{-cs}F(s), \quad c \geq o}$$

Ejemplo: Encontrar las siguientes transformadas y grafíquelas

a) $\boldsymbol{\mathcal{L}\{t^2 u(t-2)\}} = e^{-sc}\mathcal{L}\{f(u)\}$

$$f(t) = t^2$$

$$f(t-2) = (t-2+2)^2$$

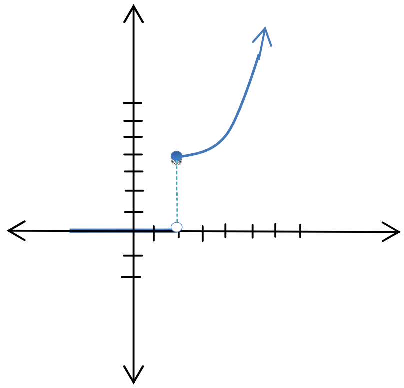
$$f(u) = (u+2)^2 = u^2 + 4u + 4$$

$$\mathcal{L}\{u^2 + 4u + 4\} = \frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}$$

$$\mathcal{L}\{t^2 u(t-2)\} = e^{-2s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}\right)$$

Gráfica:

$$f(t) = t^2u(t-2) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ t^2, & t \geq 2 \end{cases}$$



b) $\boldsymbol{\mathcal{L}\{cos(t)u(t-\pi)\}} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(u)\}$

$f(t) = cos(t)$

$f(t-\pi) = \cos(t-\pi+\pi)$

$f(u) = \cos(u+\pi) = \cos(u)\cos(\pi) - sen(u)sen(\pi)$

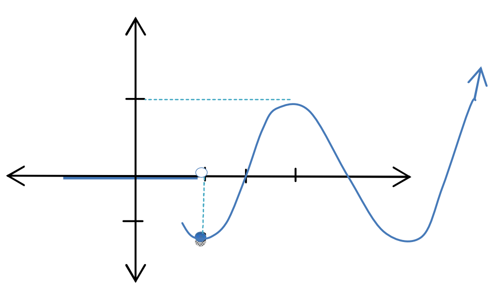
$f(u) = -\cos(u)$

$$\mathcal{L}\{f(u)\} = -\frac{s}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}\{cos(t)u(t-\pi)\} = -e^{-\pi s}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$$

Gráfica:

$$f(t) = \cos(t)u(t-\pi) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ \cos(t), & t \geq \pi \end{cases}$$



c) Encontrar la transformada de Laplace de:

$$\boldsymbol{f(t)} = \begin{cases} \boldsymbol{t^2}, & \mathbf{0} \leq \boldsymbol{t} < 2 \\ \mathbf{2}, & \mathbf{2} \leq t < 4 \\ \boldsymbol{t}, & \boldsymbol{t} \geq \mathbf{4} \end{cases}$$

$$f(t) = t^2u(t) - t^2u(t-2) + 2u(t-2) - 2u(t-4) + tu(t-4)$$

$$f(t) = t^2u(t) - (t^2-2)u(t-2) - (2-t)u(t-4)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{t^2u(t)\} - \mathcal{L}\{(t^2-2)u(t-2)\} - \mathcal{L}\{(2-t)u(t-4)\}$$

- $f(t) = t^2 - 2$
  $f(t-2) = (t-2+2)^2 - 2$
  $f(u) = (u+2)^2 - 2$
  $f(u) = u^2 + 4u + 4 - 2$
  $f(u) = u^2 + 4u + 2$
  $\mathcal{L}\{f(u)\} = \dfrac{2}{s^3} + \dfrac{4}{s^2} + \dfrac{2}{s}$

- $f(t) = 2 - t$
  $f(t-4) = 2 - (t+4-4)$
  $f(t-4) = 2 - (u+4)$
  $f(u) = -u - 2$
  $\mathcal{L}\{f(u)\} = -\left(\dfrac{1}{s^2} + \dfrac{2}{s}\right)$

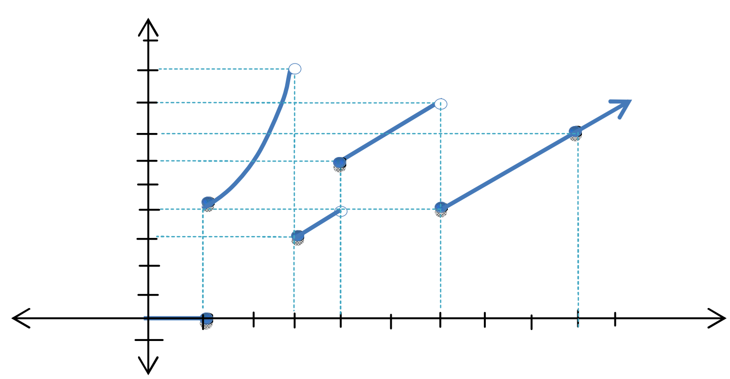
$$F(s) = \frac{2}{s^3} - \left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s}\right)e^{-2s} + \left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right)e^{-4s}$$

d) Graficar

$$\boldsymbol{f(t) = t^2u(t-2) + (t-t^2)u(t-3) + 2u(t-4) - 4u(t-6)}$$

Intervalo	$\boldsymbol{f(t) = t^2u(t-2) + (t-t^2)u(t-3) + 2u(t-4) - 4u(t-6)}$	**f(t)**
$0 \leq t < 2$	$t = 1 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = o$	0
$2 \leq t < 3$	$t = 2.5 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = t^2$	t^2
$3 \leq t < 4$	$t = 3.5 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = t^2 + t - t^2 = t$	t
$4 \leq t < 6$	$t = 5 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = t^2 + t - t^2 + 2 = t + 2$	t+2
$t \geq 6$	$t = 7 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = t^2 + t - t^2 + 2 - 4 = t - 2$	t-2

$$\boldsymbol{f(t)} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \mathbf{0} \leq \boldsymbol{t} < 2 \\ t^2, & \mathbf{2} \leq t < 3 \\ \boldsymbol{t}, & \mathbf{3} \leq \boldsymbol{t} < 4 \\ \boldsymbol{t+2}, & \mathbf{4} \leq \boldsymbol{t} < 6 \\ \boldsymbol{t-2}, & \boldsymbol{t} \geq \mathbf{6} \end{cases}$$



Calcular las siguientes transformadas inversas:

a) $\boldsymbol{g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2e^{-3s}}{s^3}\right\}} = f(t-c)u(t-c)$

$$F(s) = \frac{2}{s^3} \Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = t^2$$

$$f(t-3) = (t-3)^2$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2e^{-3s}}{s^3}\right\} = (t-3)^2 u(t-3)$$

b) $\boldsymbol{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s\,e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+4}\right\}} = f(t-c)u(t-c)$

$$f(s) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} \Rightarrow f(t) = cos(2t)$$

$$f\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = cos\left(2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right) \Rightarrow f\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = cos(2t-\pi)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s\,e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+4}\right\} = cos(2t-\pi)u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

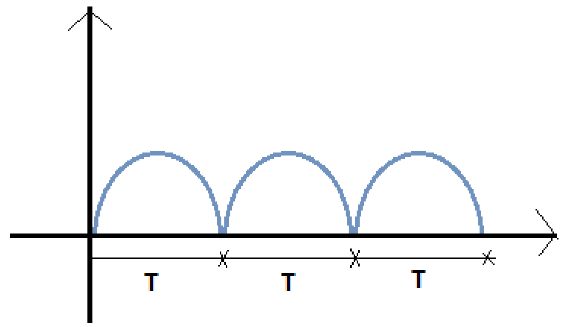
1) Graficar $f(s) = \frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} + 2\frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-3s}}{s}$

2) Calcular la transformada inversa de
$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)e^{-2s}}{(s+2)(s^2+4)}\right\}$$

Función periódica.

Una función f(t) se dice que es periódica si existe un número "T" llamado periodo el cual es mayor que cero y cumple con la condición:

$f(t) = f(t+T)$ para todo $t > 0$ y su grafica es de la siguiente forma:



Ejemplo:

Si $f(t) = \cos(t)$

$f(t) = f(t+T), \quad si\, T = 2\pi$

$f(t+T) = \cos(t+2\pi)$

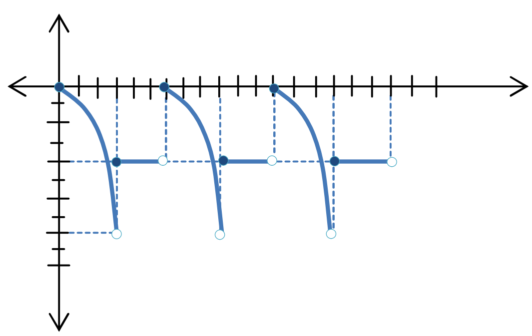
$cos(t) = \cos(t+2\pi)$

$cos(t) = \cos(t)\cos(2\pi) - sen(t)sen(2\pi)$

$\cos(t) = \cos(t) \quad \therefore \quad se\ cumple.$

- Para $f(t) = \begin{cases} -t^2, & 0 \leq t < 3 \\ -4, & 3 \leq t < 6 \end{cases}$

Dibujar su grafica sabiendo que dicha función cumple la condición $f(t) = \quad f(t+6)$



Transformada de una función periódica.

Sea f(t) una función periódica continua por partes para $t \geq 0$ cuyo periodo es "T", entonces la transformada de la función periódica es:

$$\boldsymbol{f(t)} = \begin{cases} \boldsymbol{f(t)}, & \boldsymbol{0 \leq t} < T \\ \boldsymbol{f(t)}, & \boldsymbol{T \leq t} < 2\boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{f(t)}, & \boldsymbol{2T \leq t} < 3\boldsymbol{T} \end{cases}$$

$$F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Haciendo:

$$u = t - T \quad \Longrightarrow \quad t = u + T$$

$$du = dt$$

Cambiando limites

$$para\, t = T \quad \Longrightarrow u = 0$$

$$para\, t = \infty \quad \Longrightarrow u = \infty$$

$$F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_0^{\infty} e^{-s(u+T)} f(t+T)dt$$

$$F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_0^{\infty} e^{-su}.e^{-sT} f(u)du$$

$$F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + e^{-sT} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u)du$$

$$F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + e^{-sT} F(s)$$

$$F(s) - e^{-sT} F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

$$F(s)(1-e^{-sT}) = \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

$$F(s)(1-e^{-sT}) = \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{1}{(1-e^{-sT})} \mathcal{L}\{f(t)\}}$$

$f(t), \qquad 0 \le t < T$

$f(t) = f(t)u(t) - f(t)u(t-T)$

$$\boxed{F(s) = \frac{1}{(1-e^{-sT})} \mathcal{L}\{f(t)u(t) - f(t)u(t-T)\}}$$

Ejemplo:

a) Encontrar la transformada de:

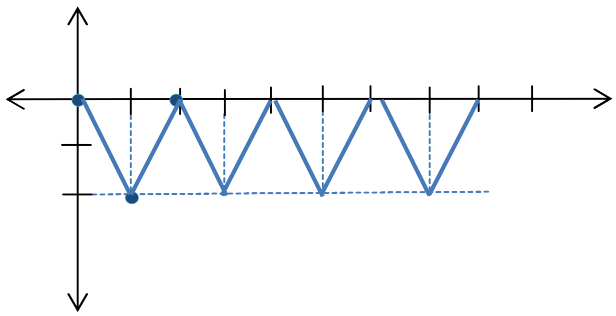
$$\boldsymbol{f(t)} = \begin{cases} \boldsymbol{t}, & 0 \le t < 3 \\ \boldsymbol{2}, & 3 \le t < 6 \end{cases}$$

La cual cumple que $\boldsymbol{f(t) = f(t+6)}$ fuera del intervalo T = 6

$$F(s) = \frac{1}{(1-e^{-6s})} \mathcal{L}\{tu(t) - t\,u(t-3) + 2u(t-3) - 2u(t-6)\}$$

$$F(s) = \frac{1}{(1-e^{-6s})} \left[\frac{1}{s^2} - \left(\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s}\right) e^{-3s} + \frac{2}{s} e^{-3s} - \frac{2}{s} e^{-6s}\right]$$

b) Encontrar la transformada de la funcion cuya grafica es la siguiente:



T = 2

Encontrando ecuacion:

$\boldsymbol{P_1(0,0)} \wedge \boldsymbol{P_2(1,-2)}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{-2-0}{1-0} = -2 \Rightarrow m = -2$$

$P_1(0,0), \quad m = -2$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y = -2x \Rightarrow \boldsymbol{f(t) = -2t} \quad para\ 0 \le t < 1$

$\boldsymbol{P_1(1,-2)} \wedge \boldsymbol{P_2(2,0)}$

$$m = \frac{0+2}{2-1} = 2 \Rightarrow m = 2$$

$y + 2 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 2 - 2 \Rightarrow \boldsymbol{f(t) = 2t - 4}, \quad 1 \le t < 2$

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{-2t}, & \boldsymbol{0 \le t} < 1 \\ \boldsymbol{2t - 4}, & \boldsymbol{1 \le t} < 2 \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \mathcal{L}\{-2tu(t) + 2t\,u(t-1) + (2t-4)u(t-1) - (2t-4)u(t-2)\}$$

- $f(t) = 2t$
  $f(t-1) = 2(t-1+1)$
  $f(u) = 2(u+1) = 2u + 2$
  $\boldsymbol{\mathcal{L}}\{f(u)\} = \left(\frac{2}{s^2} + \frac{2}{s}\right)$
  $\boldsymbol{\mathcal{L}}\{2t\,u(t-1)\} = \left(\frac{2}{s^2} + \frac{2}{s}\right) e^{-s}$

- $f(t) = 2t - 4$
  $f(t-1) = 2(t-1+1) - 4$
  $f(u) = 2(u+1) - 4 = 2u - 2$
  $\boldsymbol{\mathcal{L}}\{f(u)\} = \left(\frac{2}{s^2} + \frac{2}{s}\right)$
  $\boldsymbol{\mathcal{L}}\{(2t-4)\,u(t-1)\} = \left(\frac{2}{s^2} - \frac{2}{s}\right) e^{-s}$

- $f(t) = 2t - 4$
  $f(t-2) = 2(t-2+2) - 4$
  $f(u) = 2(u+2) - 4 \ = 2u$
  $\mathcal{L}\{f(u)\} = \dfrac{2}{s^2}$
  $\mathcal{L}\{(2t-4)\ u(t-2)\} = \left(\dfrac{2}{s^2}\right) e^{-2s}$

$$F(s) = \frac{1}{(1-e^{-2s})}\left[-\frac{2}{s^2} + \left(\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s}\right)e^{-s} + \left(\frac{2}{s^2}-\frac{2}{s}\right)e^{-s} - \left(\frac{2}{s^2}\right)e^{-2s}\right]$$

Metodo de convolucion de dos funciones.

La convolucion de dos funciones es un método para encontrar la transformada inversa ($\mathcal{L}^{-1}$) cuando existe el producto de dos funciones F(s) ^ G(s) lo que se representa así:

$f(t).g(t) = \ \mathcal{L}^{-1}\{F(s).G(s)\}$ y para obtenerla se hace lo siguiente:

1) Seleccionar la función F(s) ^ G(s) y escribirla en base a la definición formal de la $\mathcal{L}$.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau)d\tau$$

2) Multiplicar la función F(s) por G(s) donde la función G(s) se va a sustituir en base a la definición para encontrar la convolucion g(t).f(t) .

$$F(s).G(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau)F(s)d\tau$$

3) En el producto de F(s) por G(s) aparece el termino $e^{-s\tau}\, F(s)$ el cual representa una funcion de retardo de tiempo.

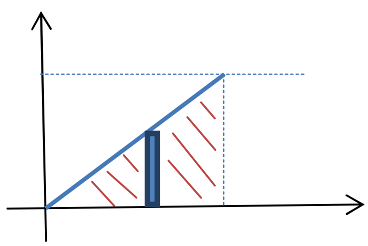
$e^{-s\tau}\, F(s)$
$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\tau} F(s)\} = f(t-\tau)u(t-\tau)$
$c = \tau$

$$e^{-s\tau}\, F(s) = \mathcal{L}\{f(t-\tau)u(t-\tau)\} = \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f(t-\tau)dt$$

4) Sustituir el termino $e^{-s\tau}\, F(s)$ por el integral encontrado en el paso 3.

$$F(s).G(s) = \int_{0}^{\infty}\int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f(t-\tau)G(\tau)d\tau$$

5) Efectuar un cambio de variable de integracion para tratar de llevar dicha expresion a la definicion formal de la $\mathcal{L}$.



$0 \le t \le \infty$

$0 \le \tau \le t$

$F(s).G(s) = \int_0^{\infty}\int_0^{t} e^{-st} f(t-\tau)G(\tau)d\tau dt$

$$= \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^{t}}_{\text{F(t)}} f(t-\tau)G(\tau)d\tau dt$$

$$\boxed{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s).G(s)\} = \int_0^{t} f(t-\tau)G(\tau)d\tau \quad \text{ó} \quad \int_0^{t} g(t-\tau)f(\tau)d\tau}$$

El método de convolución es conmutativo: $g(t).f(t) = f(t).g(t)$

Ejemplo: Encontrar las siguientes transformadas inversas.

a) $\boldsymbol{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2+9)^2}\right\}}$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+9}\cdot\frac{1}{s^2+9}\right\}$$

$$F(s) = \frac{2}{s^2+9}$$
$$f(t) = \frac{2}{3}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}$$
$$f(t) = \frac{2}{3}sen(3t)$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2+9}$$
$$g(t) = \frac{1}{3}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}$$
$$f(t) = \frac{1}{3}sen(3t)$$

$$g(t)f(t) \;=\; \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

$$f(t-\tau) = \frac{2}{3}sen(3t-3\tau)$$

$$= \frac{2}{9}\int_0^t \underbrace{sen(3t-3\tau)}_{\mathbf{U}}\underbrace{sen(3\tau)}_{\mathbf{V}}d\tau$$

$$sen(u)sen(v) = \frac{1}{2}[cos(u-v) - cos(u+v)]$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^t (\cos(3t-3\tau-3\tau) - \cos(3t-3\tau+3\tau))d\tau$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^t (\cos(3t-6\tau) - \cos(3t))d\tau$$

$$= \frac{1}{9}\left[-\frac{sen(3t-6\tau)}{6} - \tau\cos(3t)\right]\Big|_0^t$$

$$= \frac{1}{9}\left[-\frac{sen(3t-6t)}{6} - t\cos(3t) + \frac{sen(3t)}{6}\right] = \frac{1}{9}\left[-\frac{sen(-3t)}{6} - t\cos(3t) + \frac{sen(3t)}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{sen(3t)}{6} - t\cos(3t) + \frac{sen(3t)}{6}\right] = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{3}sen(3t) - t\cos(3t)\right]$$

$$f(t) = \frac{1}{27}sen(3t) - \frac{1}{9}tcos(3t)$$

b) $\boldsymbol{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}}$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}.\frac{1}{s-2}\right\}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \quad \Bigg| \quad G(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$f(t) = t \quad \Bigg| \quad g(t) = e^{2t}$$

$$g(t).f(t) = \int_0^t (t-\tau)e^{2\tau}\, d\tau$$

$$u = t - \tau \quad \Bigg| \quad v = \int e^{2\tau} d\tau$$

$$du = -d\tau \quad \Bigg| \quad v = \frac{e^{2\tau}}{2}$$

$$= \frac{(t-\tau)e^{2\tau}}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t e^{2\tau} d\tau$$

$$= \frac{(t-\tau)e^{2\tau}}{2} + \frac{1}{4}e^{2\tau}|_0^t$$

$$= \frac{(t-t)e^{2t}}{2} + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{(t-0)e^{2(0)}}{2} - \frac{1}{4}e^{2(0)}$$

$$f(t) = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}$$

Transformada de una convolucion.

La convolucion f(t).g(t) es una función continua por partes y además es de orden exponencial, entonces la $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ de la convolucion se obtiene así:

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t).g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}.\mathcal{L}\{g(t)\}}$$

a) $\boldsymbol{\mathcal{L}\{\cos(2t)\, sen(2t)\}}$

$$= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} sen(4t)\right\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{s^2+16}$$

$$= \frac{2}{s^2+16}$$

b) $\boldsymbol{\mathcal{L}\{\cos(3t)\, e^{-2t}. e^{4t}\}}$

$$= \mathcal{L}\{cos(3t)e^{-2t}\} . \mathcal{L}\{e^{4t}\}$$

$$= \left[\frac{s+2}{(s+2)^2+9}\right] \cdot \left(\frac{1}{s-4}\right)$$

c) $\boldsymbol{F(s) = \mathcal{L}\{\int_0^t e^{\tau} \cos(3\tau)\, sen(4t-4\tau) d\tau\}}$

$$\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

$$= \boldsymbol{\mathcal{L}}\{e^{\tau} \cos(3t)\, sen(4t)\} = \left[\frac{s-1}{(s-1)^2+9}\right] \cdot \left[\frac{4}{s^2+16}\right]$$

Solución de E.D. utilizando la $\mathcal{L}$

La transformada de Laplace se utiliza para resolver E.D. con eficientes constante y condiciones iniciales.

Para obtener la solución de una E.D. de orden “n” se hace lo siguiente:

1) Aplicar $\mathcal{L}$ a ambos lados de la ecuación diferencial aplicando la propiedad de linealidad.

   $a_n \frac{d^n y}{dx^n} + \cdots\, a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(t)$

   sen(t)
   e^{2t}
   Polinomica
   Función exponencial

   $y(t_0) = y_0 \ldots y^{n-1}(t_0) = y_{n-1}$
   $t_0 = 0$

$$a_n \mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dx^n}\right\} + \cdots\, a_1 \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + a_0 \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

2) Aplicar la $\mathcal{L}$ para derivadas utilizando condiciones iniciales.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dx^n}\right\} = S^n Y_{(s)} - S^{n-1} y_{(0)} - S^{n-2} y_{(0)} \dots - y_{(0)}^{n-1}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dy}\right\} = SY_{(s)} - y_{(0)}, \qquad \mathcal{L}\{y\} = Y_{(s)}, \qquad \mathcal{L}\{g(t)\} = g(s)$$

3) Sustituir todas las transformadas en la E.D. y despejar la función g(s).

4) Aplicar la $\mathcal{L}^{-1}\{Y_{(s)}\}$ para encontrar la función y(t).

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{(s)}\}$$

Ejemplo: resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $\boldsymbol{y' - 3y = te^{3t}, \;\; y_{(0)} = 4}$

$\mathcal{L}\{y'\} - 3\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{te^{3t}\}$

- $\mathcal{L}\{y'\} = SY_{(s)} - y_{(0)}$
  $= SY_{(s)} - 4$
- $\mathcal{L}\{y\} = Y_{(s)}$
- $\mathcal{L}\{te^{3t}\} = \frac{1}{(s-3)^2}$

Reescribiendo:

$$SY_{(s)} - 4 - 3Y_{(s)} = \frac{1}{(s-3)^2}$$

$$Y_{(s)}(s-3) = \frac{1}{(s-3)^2} + 4$$

$$Y_{(s)} = \frac{1}{(s-3)^2} + \frac{4}{(s-3)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-3)}\right\}$$

$$y(t) = t^2 e^{3t} + 4e^{3t}$$

b) $\frac{d^2x}{dt^2} + 25x = \cos(2t), \quad x_{(0)} = 1, x'_{(0)} = 2$

$\mathcal{L}\{x''\} + 25\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{cos(2t)\}$

- $\mathcal{L}\{x''\} = S^2X_{(s)} - Sx_{(o)} - x'_{(0)}$
  $= S^2X_{(s)} - S - 2$
- $\mathcal{L}\{x\} = X_{(s)}$
- $\mathcal{L}\{cos(2t)\} = \frac{s}{s^2+4}$

Reescribiendo:

$$S^2X_{(s)} - S - 2 + 25X_{(s)} = \frac{s}{s^2+4}$$

$$(S^2+25)X_{(s)} = \frac{s}{s^2+4} + s + 2$$

$$X_{(s)} = \frac{s}{(s^2+4)(S^2+25)} + \frac{s}{(S^2+25)} + \frac{2}{(S^2+25)}$$

$$\frac{s}{(s^2+4)(S^2+25)} = \frac{(As+B)(s^2+25) + (Cs+D)(s^2+4)}{(s^2+4)(S^2+25)}$$

$$\frac{s}{(s^2+4)(S^2+25)} = \frac{As^3 + 25As + Bs^2 + 25B + Cs^3 + 4Cs + Ds^2 + 4D}{(s^2+4)(S^2+25)}$$

$$\frac{s}{(s^2+4)(S^2+25)} = \frac{(A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (25A+4C)s + (25B+4D)}{(s^2+4)(S^2+25)}$$

$A + C = 0 \ldots\ldots\ldots I$

$B + D = 0 \ldots\ldots\ldots II$

$25A + 4C = 1 \ldots.III$

$25B + 4D = 0 \ldots.IV$

Simultaneando I ^ III

$(A + C = 0)(-4) \implies -4A - 4C = 0$

$25A + 4C = 1 \quad \implies \quad 25A + 4C = 1$

$$21A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{21}$$

Sustituir “A” en I

$$\frac{1}{21}+C=0 \quad \Rightarrow C=-\frac{1}{21}$$

Simultaneando II ^ IV

$$(B+D=0)(-4) \implies -4B-4D=0$$

$$25B+4D=0 \implies 25B+4D=0$$

$$21B=0 \quad \Rightarrow \; B=\;0$$

Sustituir “B” en II

$$0+D=0 \quad \Rightarrow D=0$$

$$\frac{s}{(s^2+4)(S^2+25)}=\frac{1}{21}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)-\frac{1}{21}\left(\frac{S}{s^2+25}\right)$$

$$X_{(s)} \;=\frac{1}{21}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)-\frac{1}{21}\left(\frac{S}{s^2+25}\right)+\frac{S}{s^2+25}+\frac{2}{s^2+4}$$

$$x_{(t)} \;=\frac{1}{21}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}-\frac{1}{21}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S}{s^2+25}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S}{s^2+25}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$x_{(t)} \;=\frac{1}{21}\cos(2t)-\frac{1}{21}\cos(5t)+\cos(5t)+\frac{2}{5}sen(5t)$$

c) $\boldsymbol{y''+9y=f(t)}, \quad \boldsymbol{f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<2\\ 2, & t\geq 2\end{cases}}; \quad \boldsymbol{y(0)=1}, \quad \boldsymbol{y'(0)=-2}$

$$y''+9y=u(t)-u(t-2)+2u(t-2)$$

- $\mathcal{L}\{y''\}=\; S^2Y_{(s)}-Sy_{(o)}-y'_{(0)}$
  $=S^2Y_{(s)}-S+2$
- $\mathcal{L}\{y\}=Y_{(s)}$
- $\mathcal{L}\{u(t)+u(t-2)\}=\frac{1}{s}+\;\frac{e^{-2s}}{s}$

Reescribiendo

$$S^2Y_{(s)} - S + 2 + 9Y_{(s)} = \frac{1}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$(S^2+9)Y_{(s)} = \frac{1}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + s - 2$$

$$Y_{(s)} = \frac{1}{s(S^2+9)} + \frac{e^{-2s}}{s(S^2+9)} + \frac{s}{(S^2+9)} - \frac{2}{(S^2+9)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(S^2+9)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s(S^2+9)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(S^2+9)}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(S^2+9)}\right\}$$

$$\frac{1}{s(S^2+9)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+9}$$

$$= \frac{A(s^2+9) + (Bs+C)s}{s(s^2+9)}$$

$$= \frac{As^2 + 9A + Bs^2 + Cs}{s(s^2+9)}$$

$$= \frac{(A+B)s^2 + Cs + 9A}{s(s^2+9)}$$

$A + B = 0 \ \ldots\ldots I$

$C = 0$

$9A = 1 \ \ \Longrightarrow A = \frac{1}{9}$

Sustituir "A" en I

$A + B = 0$

$\frac{1}{9} + B = 0 \ \ \Longrightarrow \ \ B = -\frac{1}{9}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(S^2+9)}\right\} = \frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(S^2+9)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(S^2+9)}\right\} = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos(3t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{e^{-2s}}{s(S^2+9)} = \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cos(3t)\right)u(t-2)$$

$$= \left[\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cos(3(t-2))\right]u(t-2)$$

$$= \left[\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cos(3t-6)\right]u(t-2)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(S^2+9)}\right\} = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(S^2+9)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(S^2+9)}\right\} = \frac{1}{3}sen(3t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(S^2+9)}\right\} = \cos(3t)$$

$$f(t) = \frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cos(3t)+cos(3t)-\frac{2}{3}sen(3t)+\left[\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cos(3t-6)\right]u(t-2)$$

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{1}{9}+\frac{8}{9}\cos(3t)-\frac{2}{3}sen(3t)+\left[\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cos(3t-6)\right]u(t-2)}$$

Resolver las siguientes E.D.

$$y''+3y'-4y=g(t);\ \ donde\ g(t)=\begin{cases} t^2, & 0\le t<3 \\ t, & t\ge 3\end{cases};sujeta\ a:\ y(0)=0,\ \ y'(0)=2$$

Sistema de ecuaciones diferenciales

En muchas de las aplicaciones se requiere usar dos o más variables dependientes las cuales conducen a un sistema de E.D. lineales y para resolverlas se puede utilizar el método de la transformada de Laplace.

Método de la transformada de Laplace.

Para resolver un sistema de E.D. de la forma:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_2 \frac{d^n y}{dt^n} + a_3 x + a_4 y = g(t)$$

$$b_n \frac{d^n x}{dt^n} + b_2 \frac{d^n y}{dt^n} + b_3 x + b_4 y = h(t)$$

$x_{(0)} = x_0, \; x'_{(0)} = x_1 \ldots x^{n-1}{}_{(0)} = x_{n-1}$

$y_{(0)} = y_0, \; y'_{(0)} = y_1 \ldots y^{n-1}{}_{(0)} = y_{n-1}$

Se hace lo siguiente:

1) Aplicar la $\mathcal{L}$ a ambas ecuaciones diferenciales utilizando la propiedad de linealidad.

2) Aplicar la $\mathcal{L}$ de derivadas a cada uno de los términos.
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} = S^n Y_{(s)} - S^{n-1} y_{(0)} - S^{n-2} y_{(0)} \ldots - y_{(0)}^{n-1}$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x}{dt^n}\right\} = S^n X_{(s)} - S^{n-1} x_{(0)} - S^{n-2} x_{(0)} \ldots - x_{(0)}^{n-1}$$

3) Sustituir las $\mathcal{L}$ en las ecuaciones diferenciales para llegar a obtener un sistema lineal de ecuaciones en termino de X(s) ^ Y(s).

4) Resolver el sistema de ecuaciones para obtener X(s) ^Y(s).

5) Aplicar $\mathcal{L}^{-1}$ para conocer x(t) ^ y(t) las cuales serían las soluciones del sistema bajo las condiciones iniciales dadas.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 3y = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3y = te^{-t}, \qquad x_{(0)} = 0, \qquad x'_{(0)} = 2, \qquad y_{(0)} = 0$$

$\mathcal{L}\{x''\} + 3\mathcal{L}\{y'\} + 3\mathcal{L}\{y\} = 0$

- $\mathcal{L}\{x''\} = S^2X_{(s)} - Sx_{(0)} - x'_{(0)}$
  $= S^2X_{(s)} - 2$
- $\mathcal{L}\{y'\} = SY_{(s)}$
- $\mathcal{L}\{y\} = Y_{(s)}$

Reescribiendo

$S^2X_{(s)} - 2 + 3SY_{(s)} + 3Y_{(s)} = 0$

$S^2X_{(s)} + 3(S+1)Y_{(s)} = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots I$

$\mathcal{L}\{x''\} + 3\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{te^{-t}\}$

- $\mathcal{L}\{x''\} = S^2X_{(s)} - Sx_{(0)} - x'_{(0)}$
  $= S^2X_{(s)} - 2$
- $\mathcal{L}\{y\} = Y_{(s)}$
- $\mathcal{L}\{te^{-t}\} = \frac{1}{(s+1)^2}$

Reescribiendo

$$S^2X_{(s)} - 2 + 3Y_{(s)} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$S^2X_{(s)} + 3Y_{(s)} = \frac{1}{(s+1)^2} + 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots II$$

Simultaneando I ^ II (eliminando Y(s))

$$S^2 X_{(s)} + 3(S+1)Y_{(s)} = 2$$

$$\left[S^2 X_{(s)} + 3Y_{(s)} = \frac{1}{(s+1)^2} + 2\right][-(s+1)]$$

$$S^2 X_{(s)} + 3(S+1)Y_{(s)} = 2$$

$$-S^2 X_{(s)} - 3(s+1)Y_{(s)} = -\frac{s+1}{(s+1)^2} - 2(s+1)$$

$$[S^2 - S^2(s+1)]X_{(s)} = 2 - \frac{s+1}{(s+1)^2} - 2s - 2$$

$$S^2(1 - s - 1)X_{(s)} = -\frac{1}{s+1} - 2s$$

$$S^3 X_{(s)} = -\frac{1}{s+1} - 2s$$

$$S^3 X_{(s)} = -\frac{1}{S^3(s+1)} - \frac{2}{S^2} = \frac{1 + 2[s(s+1)]}{S^3(s+1)}$$

$$X_{(s)} = \frac{1 + 2s^2 + 2s}{S^3(s+1)}$$

$$X_{(s)} = \frac{2s^2 + 2s + 1}{S^3(s+1)}$$

$$X_{(s)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2 + 2s + 1}{S^3(s+1)}\right\}$$

$$\frac{2s^2 + 2s + 1}{S^3(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s+1}$$

$$= \frac{As^2(s+1) + B(s+1)s + C(s+1) + Ds^3}{S^3(s+1)}$$

$$= \frac{As^3 + As^3 + Bs^2 + Bs + Cs + C + Ds^3}{S^3(s+1)}$$

$$\frac{2s^2+2s+1}{S^3(s+1)} = \frac{(A+D)s^3+(A+B)s^2+(B+C)s+C}{S^3(s+1)}$$

$C=1$	$B+C=2$	$A+B=2$	$A+D=0$
	$B+1=2$	$A+1=2$	$1+D=0$
	$B=1$	$A=1$	$D=-1$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+2s+1}{S^3(s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^3}-\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$\boldsymbol{x(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 - e^{-t}}$$

Simultaneando I ^ II (eliminando Y(s))

$$(S^2X_{(s)} + 3(S+1)Y_{(s)} = 2)(-1)$$

$$S^2X_{(s)} + 3Y_{(s)} = \frac{1}{(s+1)^2} + 2$$

$$-S^2X_{(s)} - 3(S+1)Y_{(s)} = -2$$

$$S^2X_{(s)} + 3Y_{(s)} = \frac{1}{(s+1)^2} + 2$$

$$[-3(s+1)+3]Y_{(s)} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$(-3s-3+3)Y_{(s)} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$-3sY_{(s)} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$Y_{(s)} = -\frac{1}{3s(s+1)^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{3s(s+1)^2}\right\} = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)^2}\right\}$$

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

$$= \frac{A(s+1)^2 + Bs(s+1) + Cs}{s(s+1)^2}$$

$$= \frac{A(\,s^2 + 2s + 1) + Bs^2 + Bs + Cs}{s(s+1)^2}$$

$$= \frac{As^2 + 2As + A + Bs^2 + Bs + Cs}{s(s+1)^2}$$

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{(A+B)s^2 + (2As + B + C)s + A}{s(s+1)^2}$$

$A = 1$	$A + B = 0$	$2A + B + C = 0$
	$1 + B = 0$	$2(1) - 1 + C = 0$
	$B = -1$	$C = -1$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C}{(s+1)^2}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)^2}\right\} = 1 - e^{-t} - te^{-t}$$

$$y(t) = -\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)^2}\right\} = -\frac{1}{3}(1 - e^{-t} - te^{-t})$$

$$\boldsymbol{y(t) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t}}$$

Resolver el siguiente sistema de E.D.

$x'' = -2x + y + y' + t$

$y'' = -x + x' + y + 1$

$sujeta\ a$: $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$