

3. APLICACIONES DE LAS INTEGRALES MÚLTIPLES

En este capítulo se presentan algunas de las aplicaciones tanto físicas como geométricas de las integrales múltiples, específicamente para las integrales dobles y para las integrales triples.

3.1 APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DOBLES

Entre las aplicaciones de las integrales dobles, se tienen las aplicaciones geométricas y las físicas. En el primer grupo se encuentran: el cálculo del área de una figura plana y el cálculo de volúmenes de sólidos en el espacio; entre las aplicaciones físicas están el cálculo de: masa, momentos estáticos de figuras planas, centros de masa y momentos de inercia para una región bidimensional.

3.1.1. ÁREA DE UNA FIGURA PLANA

En el capítulo 1 de este trabajo, se explicó el significado intrínseco de la integral doble de una función f positiva en una región bidimensional D , $\iint_D f(x, y) dA$, como el volumen del sólido S definido sobre la región D y bajo la gráfica de la función f . Ahora, si se considera que $f(x, y) = 1$, entonces la integral anterior queda como:

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D dA \quad (\text{III.1})$$

Recuerde que la integral doble $\iint_D f(x, y) dA$, también puede escribirse como

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij}$$

Por lo tanto, empleando la definición de la integral doble, se tiene que:

$$\iint_D dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Delta A_{ij} \quad (\text{III.2})$$

donde ΔA_{ij} es el área del rectángulo genérico denotado D_{ij} , el cual puede observarse en la figura 3.1

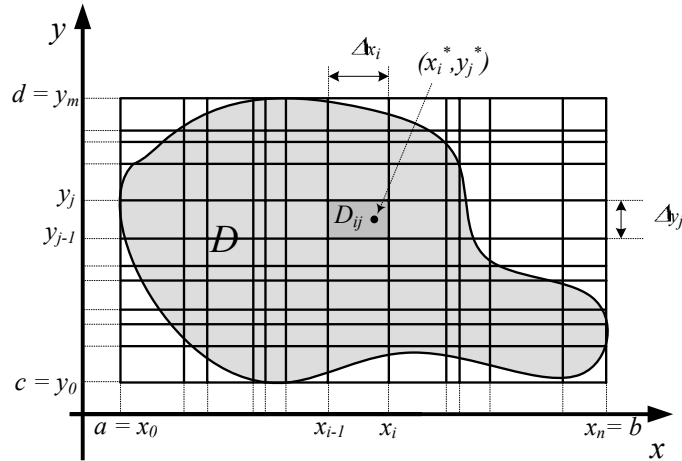


Figura 3.1

Región D dividida en subrectángulos D_{ij}

En otras palabras, la integral $\iint_D dA$ representa el volumen de un sólido de sección transversal constante, cuya base es la región D y cuya altura es igual a la unidad. Para un sólido con estas características, el volumen se obtiene como el producto del área de la base y la altura del mismo.

A partir de todo lo anterior, se define el cálculo del área de una región plana.

ÁREA DE UNA FIGURA PLANA

Sea D una región bidimensional D , tal que $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Sea A el área de la región D , entonces:

$$A = \iint_D dx dy \quad (\text{III.3})$$

Recuerde que una región D es de tipo 1 si se cumple:

$$D = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} a \leq x \leq b \quad \wedge \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{array} \right\}$$

Observe que si la región D es de tipo 1, la ecuación anterior queda como:

$$A = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} dy dx = \int_a^b [y]_{f(x)}^{g(x)} dx \quad (\text{III.3})$$

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \quad (\text{III.4})$$

Donde la última integral, representa el área comprendida entre las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x)$ en el intervalo cerrado $[a, b]$. Esta integral se estudia en la asignatura *Análisis Matemático II*, dentro de las aplicaciones de la integral definida.

EJEMPLO 3.1

Dibuje la región D y calcule su área, empleando las integrales dobles: $\iint_D dx dy$ y $\iint_D dy dx$, $D = \{ (x, y) \mid x \geq y^2 - 2y \quad \wedge \quad x \leq 4 - y^2 \}$

Solución:

La región D se encuentra acotada por las gráficas de las parábolas horizontales $x = y^2 - 2y$ y $x = 4 - y^2$, tal como se puede observar en la siguiente figura.

Recuerde que la gráfica de la ecuación:

$$x = ay^2 + by + c$$

Es una **parábola horizontal**

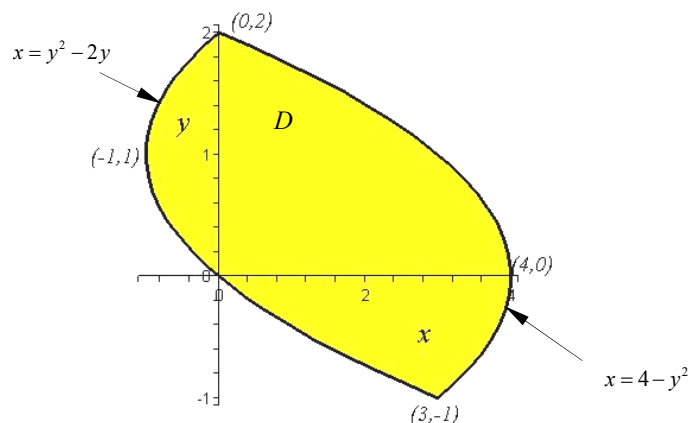


Figura 3.2

Región D del ejemplo 3.2

a) Para calcular el área de la región por medio de la integral doble $\iint_D dx dy$, es necesario definir los límites de integración, que se ilustran en la figura 3.3

Observe que la región D es una región tipo 2, por lo cual el área se obtiene empleando una sola integral doble de la forma $\iint_D dx dy$.

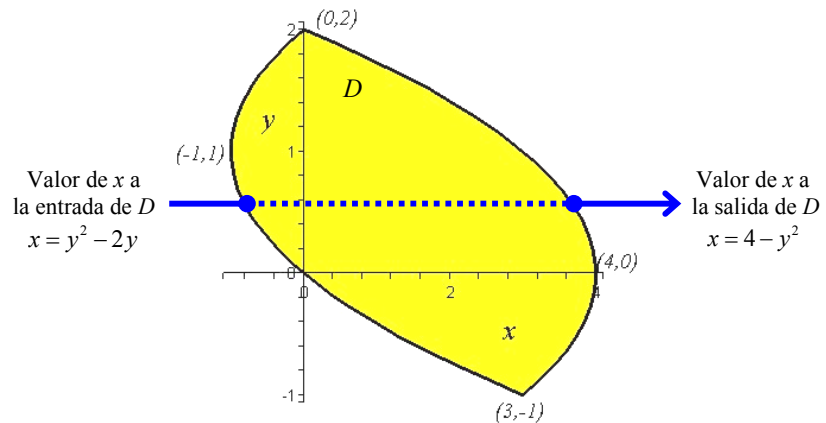


Figura 3.3

Región D del ejemplo 3.1 como una región tipo 2

Por tanto el área se obtiene como:

$$A = \int_{-1}^2 \int_{y^2-2y}^{4-y^2} dx dy = \int_{-1}^2 [4 - 2y^2 + 2y] dy = 9$$

$$A = \iint_D dx dy = 9$$

Para la primera curva:

$$x = y^2 - 2y$$

Se tiene que:

$$y = 1 \pm \sqrt{1+x}$$

Para la segunda curva:

$$x = 4 - y^2$$

entonces:

$$y = \pm \sqrt{4-x}$$

b) Cuando se desea calcular el área D con el orden de integración inverso, esto es $A = \iint_D dy dx$, entonces, se necesita conocer las ecuaciones de las curvas en función de la variable x y además identificar los límites de integración, que a continuación se muestran en la figura 3.4

En este caso, la región D queda dividida en tres regiones tipo 1, identificadas como: D_1 , D_2 y D_3 .

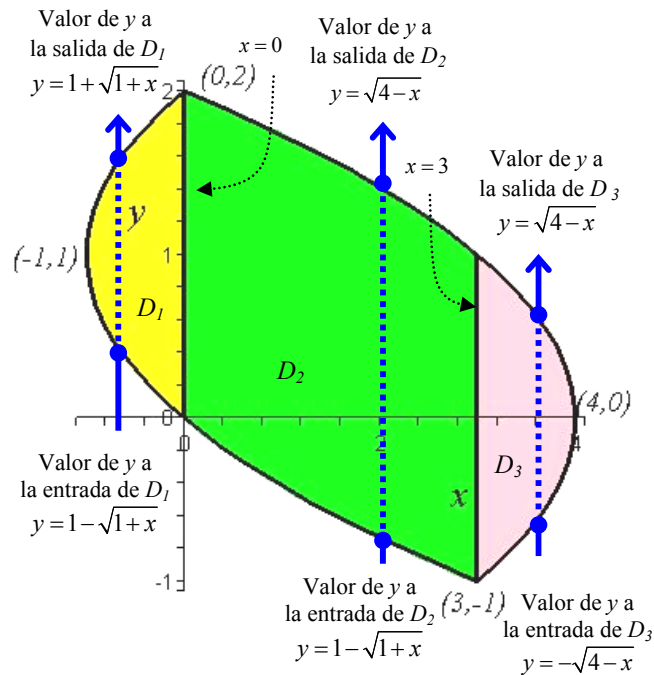


Figura 3.4

Región D del ejemplo 3.1 como tres regiones tipo 1

Entonces $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, donde:

$$D_1 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 0 \wedge 1 - \sqrt{1+x} \leq y \leq 1 + \sqrt{1+x}\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3 \wedge 1 - \sqrt{1+x} \leq y \leq \sqrt{4-x}\}$$

$$D_3 = \{(x, y) \mid 3 \leq x \leq 4 \wedge -\sqrt{4-x} \leq y \leq \sqrt{4-x}\}$$

$$\text{Así: } A = \iint_{D_1} dydx + \iint_{D_2} dydx + \iint_{D_3} dydx$$

$$A = \int_{-1}^0 \int_{1-\sqrt{1+x}}^{1+\sqrt{1+x}} dydx + \int_0^3 \int_{1-\sqrt{1+x}}^{\sqrt{4-x}} dydx + \int_3^4 \int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x}} dydx$$

$$A = \int_{-1}^0 2\sqrt{1+x} dx + \int_0^3 (\sqrt{4-x} - 1 + \sqrt{1+x}) dx + \int_3^4 2\sqrt{4-x} dx$$

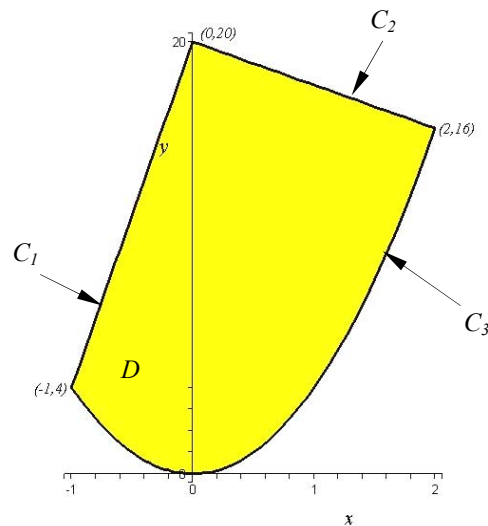
$$A = \frac{4}{3} + \frac{19}{3} + \frac{4}{3} = 9$$

$$A = \iint_D dydx = 9$$

Al comparar los dos cálculos de área de la región D del ejemplo 3.1, resulta mucho más sencillo emplear la integral $\iint_D dx dy$ que con el orden inverso.

EJEMPLO 3.2

Dada la región D , determine las ecuaciones de las curvas que la limitan y calcule su área empleando las integrales dobles: $\iint_D dx dy$ y $\iint_D dy dx$.

**Figura 3.5****Región D del ejemplo 3.2****Solución:**

Las ecuaciones de las curvas que limitan a la región D son:

$$C_1: y = 16x + 20$$

$$C_2: y = -2x + 20 \quad y$$

$$C_3: y = 4x^2$$

Las ecuaciones de las curvas en función de la variable y son:

$$C_1: x = \frac{y-20}{16}$$

$$C_2: x = \frac{20-y}{2}$$

$$C_3: x = \pm \frac{\sqrt{y}}{2}$$

a) Para el cálculo del área de la región D por medio de la integral doble $\iint_D dx dy$, se necesita saber que valor toma la variable x a la entrada y salida de la región. En la figura 3.6 se pueden observar estos valores.

La región D no es una región tipo 2, sin embargo se puede dividir en tres regiones: D_1 , D_2 y D_3 , que sí lo son. Por esta razón, para resolver la integral doble $\iint_D dx dy$ se debe emplear la propiedad aditiva respecto a la región de integración.

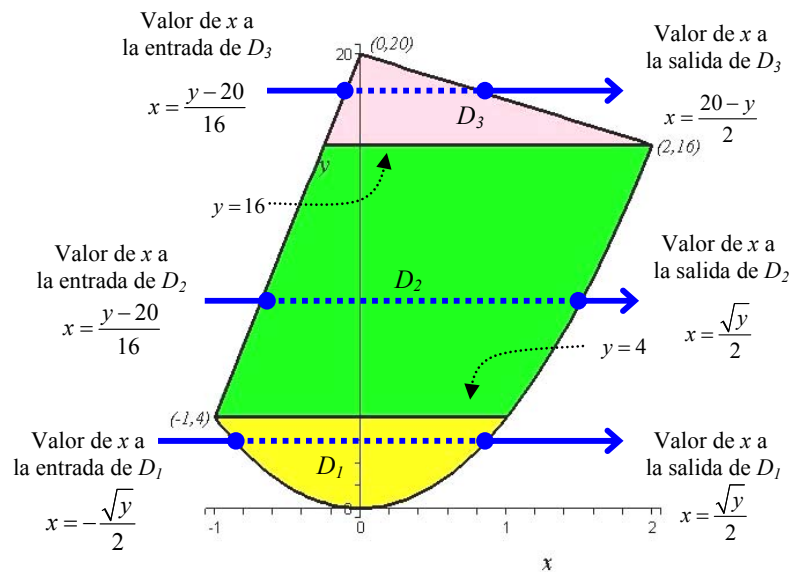


Figura 3.6

Región D del ejemplo 3.2 como tres regiones tipo 2

Como $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, entonces: $A = \iint_{D_1} dx dy + \iint_{D_2} dx dy + \iint_{D_3} dx dy$

donde:

$$D_1 = \left\{ (x, y) \mid -\frac{\sqrt{y}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{y}}{2} \wedge 0 \leq y \leq 4 \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \mid \frac{y-20}{16} \leq x \leq \frac{\sqrt{y}}{2} \wedge 4 \leq y \leq 16 \right\}$$

$$D_3 = \left\{ (x, y) \mid \frac{y-20}{16} \leq x \leq \frac{20-y}{2} \wedge 16 \leq y \leq 20 \right\}$$

$$A = \int_0^4 \int_{-\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\frac{\sqrt{y}}{2}} dx dy + \int_4^{16} \int_{\frac{y-20}{16}}^{\frac{\sqrt{y}}{2}} dx dy + \int_{16}^{20} \int_{\frac{y-20}{16}}^{\frac{20-y}{2}} dx dy$$

$$A = \int_0^4 \sqrt{y} dy + \int_4^{16} \left(\frac{\sqrt{y}}{2} - \frac{y-20}{16} \right) dy + \int_{16}^{20} \left(\frac{45}{4} - \frac{9y}{16} \right) dy$$

$$A = \frac{16}{3} + \frac{157}{6} + \frac{9}{2} = 36$$

$$A = \iint_D dx dy = 36$$

b) En la figura 3.7 se muestran los límites de integración para la integral interna de $A = \iint_D dy dx$.

La región D puede dividirse en dos regiones tipo 1, identificadas como: D_1 y D_2 ; es decir: $D = D_1 \cup D_2$

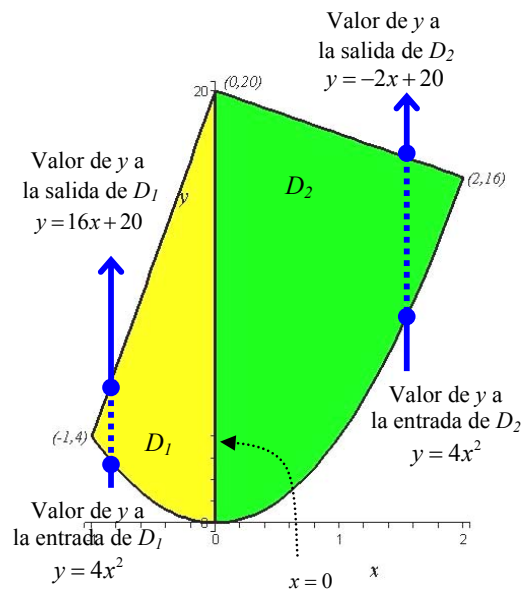


Figura 3.7

Región D del ejemplo 3.2 como dos regiones tipo 1

Luego: $A = \iint_{D_1} dy dx + \iint_{D_2} dy dx$, donde:

$$D_1 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 0 \wedge 4x^2 \leq y \leq 16x + 20\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2 \wedge 4x^2 \leq y \leq -2x + 20\}$$

$$A = \int_{-1}^0 \int_{4x^2}^{16x+20} dy dx + \int_0^2 \int_{4x^2}^{-2x+20} dy dx$$

$$A = \int_{-1}^0 (16x + 20 - 4x^2) dx + \int_0^2 (-2x + 20 - 4x^2) dx = \frac{32}{3} + \frac{76}{3} = 36$$

$$A = \iint_D dy dx = 36$$

EJEMPLO 3.3

Calcule, empleando integrales dobles, el área comprendida entre dos círculos concéntricos de radios 2 y 4.

Solución:

Considere una corona circular con centro en el origen del sistema de coordenadas tal como se observa a continuación.

La región D planteada en el ejemplo 3.3 recibe el nombre de **corona circular**, y su área es:

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

donde

R: Radio externo

r: radio interno

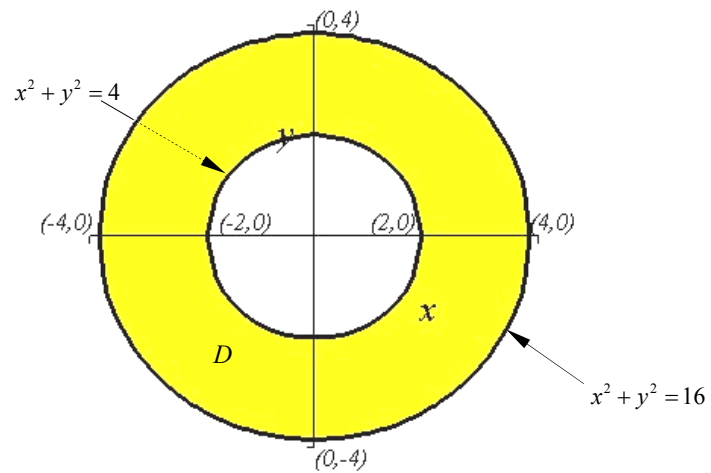


Figura 3.8

Región D del ejemplo 3.3

Como $A = \iint_D dydx$ y la región D es simétrica respecto al origen, entonces para simplificar el cálculo de área, sólo se evaluará $A_1 = \iint_{D_1} dydx$, donde A_1 es el área de la región D que se encuentra en el primer cuadrante, denotada como D_1 , de manera que:

$$A = 4A_1$$

La región denotada como D_1 , se muestra en la figura 3.9.

Para calcular el área de la región D_I , se puede dividirla en dos regiones tipo I:

$$D_I = D_{I,A} \cup D_{I,B}$$

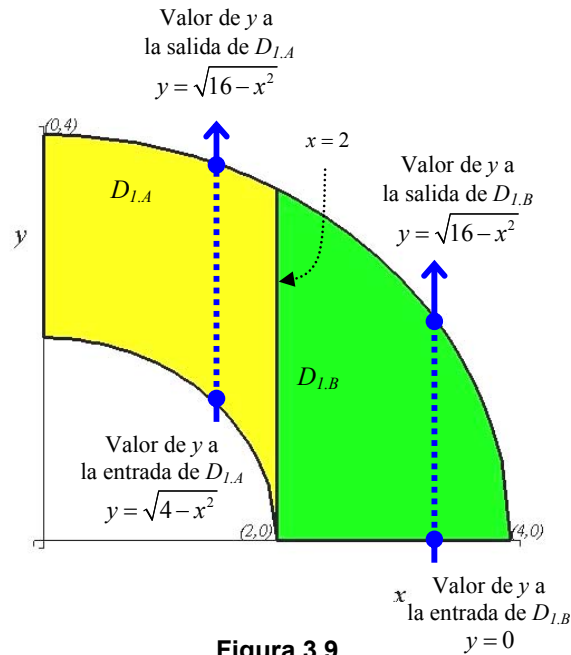


Figura 3.9

Región D_I del ejemplo 3.3

Luego: $A_I = \iint_{D_{I,A}} dydx + \iint_{D_{I,B}} dydx$, donde:

$$D_{I,A} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2 \wedge \sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{16-x^2}\}$$

$$D_{I,B} = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{16-x^2}\}$$

$$A_I = \int_0^2 \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dydx + \int_2^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} dydx$$

$$A_I = \int_0^2 (\sqrt{16-x^2} - \sqrt{4-x^2}) dx + \int_2^4 \sqrt{16-x^2} dx$$

$$A_I = \left(2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right) + \left(-2\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}\right) = 3\pi$$

$$A = \iint_D dydx = 12\pi$$

3.1.2. VOLUMEN DE UN SÓLIDO EN EL ESPACIO

En el capítulo 1 de este trabajo, se determinó que la integral $\iint_D f(x,y) dA$ representa el volumen del sólido S definido sobre la región D y bajo la gráfica de la función f ; sin embargo, la integral doble también puede emplearse para determinar el volumen de un sólido más general.

VOLUMEN DE UN SÓLIDO EN EL ESPACIO

Sean $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales, continuas en una región bidimensional D , tales que $f(x,y) \leq g(x,y) \forall (x,y) \in D$. Sea V el volumen del sólido acotado superiormente por la gráfica de la función g y acotado inferiormente por la gráfica de la función f , entonces:

$$V = \iint_D [g(x,y) - f(x,y)] dA \quad (\text{III.5})$$

EJEMPLO 3.4

Dibuje el sólido S acotado por las superficies: $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = \sqrt{20 - x^2 - y^2}$ y plantear su volumen empleando integrales dobles.

Solución:

En la figura 3.10 se muestra el sólido S de este ejemplo, donde la superficie superior es $z = \sqrt{20 - x^2 - y^2}$ y la superficie inferior viene dada por la ecuación $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

La superficie definida por la ecuación:

$$z = \sqrt{20 - x^2 - y^2}$$

Es una semiesfera (parte superior).

La superficie definida por la ecuación:

$$z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Es un cono.

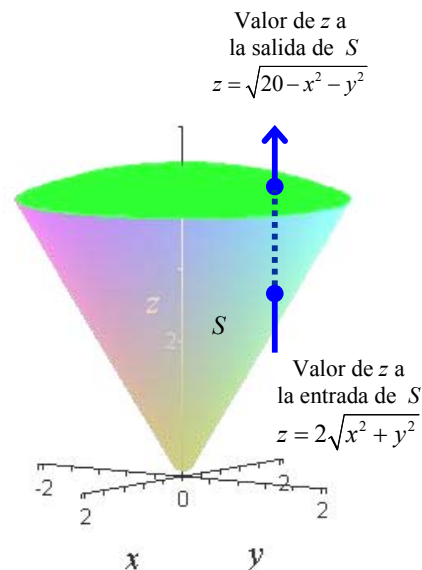


Figura 3.10

Sólido S del ejemplo 3.4

El volumen del sólido S , mostrado en la figura anterior, se obtiene mediante la integral doble:

$$V = \iint_D \left[\sqrt{20 - x^2 - y^2} - 2\sqrt{x^2 + y^2} \right] dA$$

donde D es la proyección del sólido S en el plano xy . Esta proyección, para este ejemplo, resulta ser un círculo con centro en el origen, al que se obtiene en la intersección de las dos superficies:

$$\begin{cases} z = 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ z = \sqrt{20 - x^2 - y^2} \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{20 - x^2 - y^2}$$

$$4(x^2 + y^2) = 20 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Entonces:

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Donde D es una región tipo 1 y también tipo 2, pero en este ejemplo se trabaja como una región tipo 1.

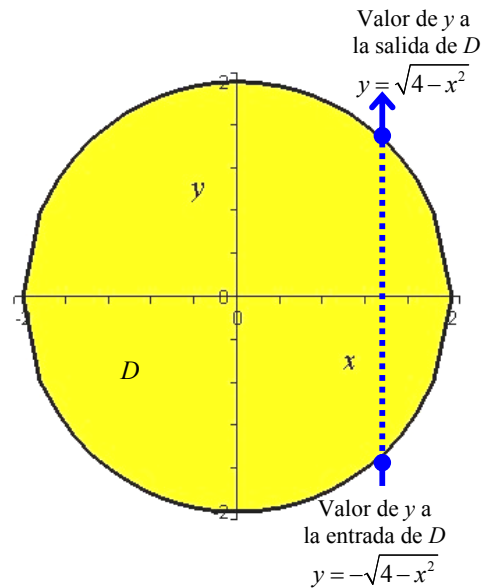


Figura 3.11

Región D del ejemplo 3.4

Es decir, $D = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2 \quad -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

En el siguiente capítulo, se mostrará como resolver una integral de este tipo, empleando un cambio de variable apropiado.

Volviendo a la integral de volumen, se tiene que:

$$V = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[\sqrt{20-x^2-y^2} - 2\sqrt{x^2+y^2} \right] dy dx$$

Ahora, para resolver esta integral se requiere un procedimiento muy riguroso y largo, por lo cual a continuación sólo se presenta el resultado de esta integral, el cual fue obtenido con software matemático:

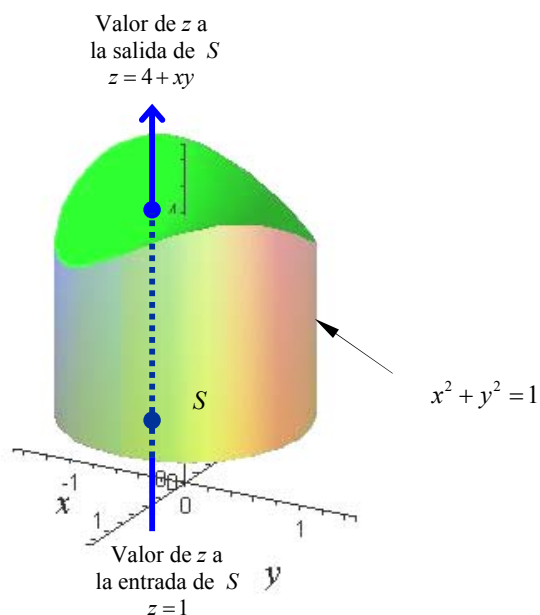
$$V = \iint_D \left[\sqrt{20-x^2-y^2} - 2\sqrt{x^2+y^2} \right] dA = 19,77678464$$

EJEMPLO 3.5

Dibuje el sólido S acotado por las superficies: $z = 4 + xy$ y $z = 1$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, calcule su volumen empleando integrales dobles.

Solución:

En la figura siguiente se aprecia el sólido S , acotado por las superficies $z = 4 + xy$ y $z = 1$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$.

**Figura 3.12****Sólido S del ejemplo 3.5**

El volumen del sólido S , se obtiene mediante la integral doble:

$$V = \iint_D [4 + xy - 1] dA = \iint_D [3 + xy] dA$$

donde D es la proyección del sólido S en el plano xy . Esta proyección, se observa en la figura 3.13

En este ejemplo, la región D es de tipo 1 y también tipo 2, pero se trabaja como una región tipo 2.

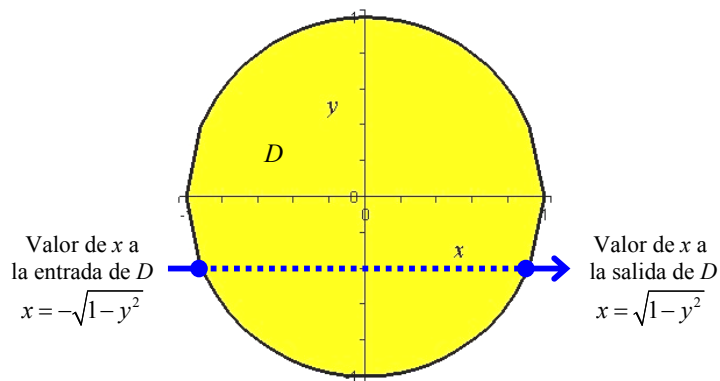


Figura 3.13

Región D del ejemplo 3.5

En este caso, la región D se define como:

$$D = \{(x, y) \mid -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \quad -1 \leq y \leq 1\}$$

Por lo tanto la integral de volumen queda como:

$$V = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} [3+xy] dx dy = \int_{-1}^1 6\sqrt{1-y^2} dy = 3\pi$$

$$V = \iint_D [3+xy] dA = 3\pi$$

EJEMPLO 3.6

Dibuje el sólido S acotado por $z = 1 + x^3y + xy^3$, $z = 0$, $y = x^3 - x$ y $y = x^2 + x$ y calcule su volumen empleando integrales dobles.

Solución:

En la figura 3.14 se observa el sólido S , acotado superiormente por $z = 1 + x^3y + xy^3$ e inferiormente por $z = 0$; mientras que las superficies $y = x^3 - x$ y $y = x^2 + x$ definen las paredes de dicho cuerpo tridimensional.

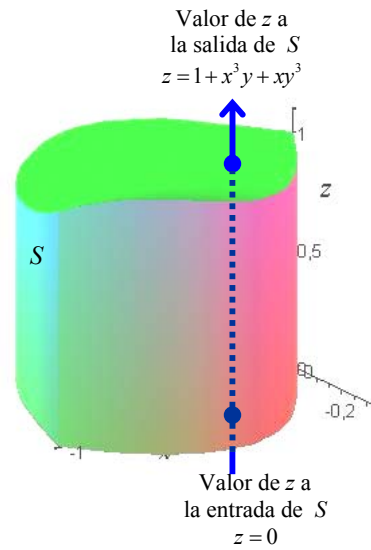


Figura 3.14

Sólido S del ejemplo 3.6

Donde, el volumen del sólido S , se obtiene como:

$$V = \iint_D [1 + x^3 y + xy^3 - 0] dA = \iint_D [1 + x^3 y + xy^3] dA$$

Al proyectar el sólido anterior en el plano xy , se obtiene la región bidimensional D , la cual se aprecia en la figura 3.15

En la figura 3.15, se observa que la región D del ejemplo 3.6 es una región de tipo 1.

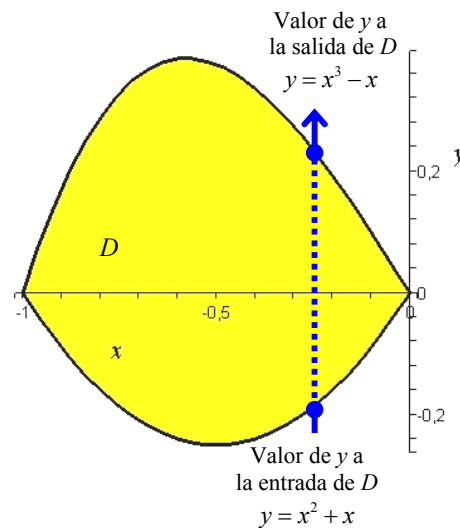


Figura 3.15

Región D del ejemplo 3.6

Por lo tanto, la región D se define como:

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 0 \quad x^2 + x \leq y \leq x^3 - x\}$$

La integral de volumen queda como:

$$V = \int_{-1}^0 \int_{x^2+x}^{x^3-x} [1 + x^3 y + xy^3] dy dx$$

$$V = \int_{-1}^0 \left[\frac{x^{13}}{4} - x^{11} + \frac{7x^9}{4} - x^8 - 4x^7 - 2x^6 + x^3 - x^2 - 2x \right] dx = \frac{517}{1260}$$

$$V = \iint_D [1 + x^3 y + xy^3] dA = \frac{517}{1260}$$

3.1.3. MASA DE UNA FIGURA PLANA

A continuación, se explica como determinar la masa de una figura plana no homogénea, de área D , como la región mostrada en la figura 3.16; es decir para regiones donde la densidad varía en cada punto $(x, y) \in D$.

En la figura 3.16 la región D es no homogénea, por lo cual su sombreado no es uniforme.

Adicionalmente:

$$\rho(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \notin D$$

La densidad tiene unidades de masa por área unitaria. Para esta aplicación, considere que la función densidad ρ es continua en la región D .

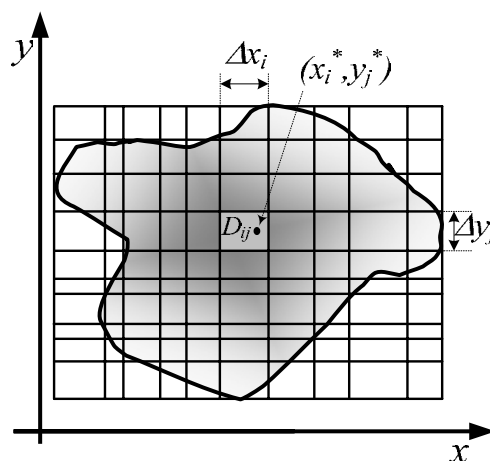


Figura 3.16

Región D no homogénea

Si se escoge un punto arbitrario $(x_i^*, y_j^*) \in D_{ij}$, entonces la masa de este subrectángulo, denotada como m_{ij} , se obtiene como:

$$m_{ij} = \rho(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} \quad (\text{III.6})$$

Por lo tanto la masa de la placa plana de área A , se puede estimar mediante la doble suma de Riemann:

$$m \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \rho(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} \quad (\text{III.7})$$

Si se aumenta el número de subintervalos, de manera que la norma de la partición P tienda a cero, se tiene:

$$m = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \rho(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} \quad (\text{III.8})$$

$$m = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \rho(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} = \iint_D \rho(x, y) dA \quad (\text{III.9})$$

Entonces, el cálculo de la masa de una figura plana se obtiene mediante:

El cálculo de masa de una región D , también puede emplearse para calcular la carga eléctrica, Q , distribuida sobre una región D .

$$Q = \iint_D \sigma(x, y) dA$$

Donde σ es la función densidad de carga.

MASA DE UNA FIGURA PLANA

Considere una lámina plana de densidad variable $\rho(x, y)$, que ocupa una región D en el plano xy , entonces su masa, denotada m , se obtiene como:

$$m = \iint_D \rho(x, y) dA \quad (\text{III.10})$$

EJEMPLO 3.7

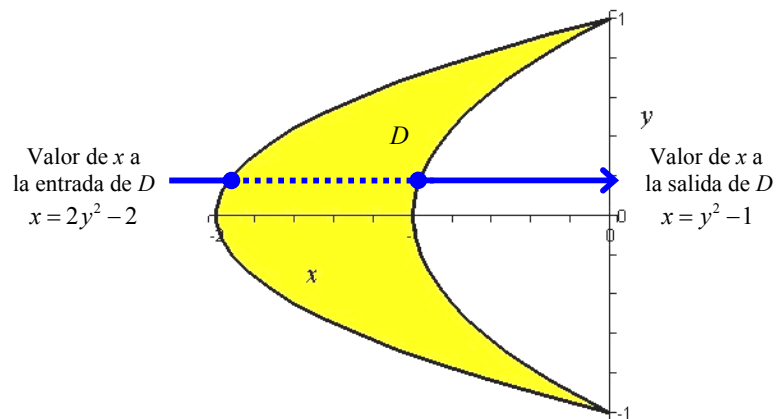
Determine la masa de la placa plana limitada por las curvas $x = y^2 - 1$ y $x = 2y^2 - 2$, cuya densidad es igual a la unidad.

Solución:

Recuerde que la densidad se calcula como $m = \iint_D \rho(x, y) dA$, por lo tanto para esta placa se tiene:

$$m = \iint_D dA$$

Ahora, se debe identificar la región D para definir los límites de integración.

**Figura 3.17****Región D del ejemplo 3.7**

Entonces la región D está definida como:

$$D = \{(x, y) \mid 2y^2 - 2 \leq x \leq y^2 - 1 \quad \wedge \quad -1 \leq y \leq 1\}$$

Por lo tanto:

$$m = \int_{-1}^1 \int_{2y^2-2}^{y^2-1} dx dy = \int_{-1}^1 (1 - y^2) dy = \frac{4}{3}$$

$$m = \int_{-1}^1 \int_{2y^2-2}^{y^2-1} dx dy = \frac{4}{3}$$

EJEMPLO 3.8

Determine la masa de la placa plana limitada por las curvas $y = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$ y $y = 2|x - 2|$, cuya densidad varía de acuerdo a la función $\rho(x, y) = 1 + 2x$.

Solución:

El cálculo de la masa se obtiene de la integral doble $m = \iint_D \rho(x, y) dA$, por lo tanto:

$$m = \iint_D (1 + 2x) dA$$

A continuación se muestra la región D .

Según la definición del valor absoluto

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x-2 \geq 0 \\ 2-x & \text{si } x-2 < 0 \end{cases}$$

entonces

$$y = \begin{cases} 2x-4 & \text{si } x \geq 2 \\ 4-2x & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

La región D debe dividirse en dos regiones tipo 1, tal que:

$$D = D_1 \cup D_2$$

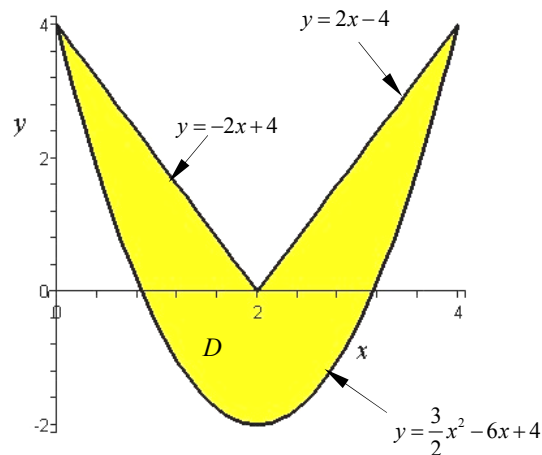


Figura 3.18

Región D del ejemplo 3.8

Entonces:

$$m = \iint_D (1 + 2x) dA = \iint_{D_1} (1 + 2x) dA + \iint_{D_2} (1 + 2x) dA$$

Donde

$$D_1 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 2 \wedge \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4 \leq y \leq -2x + 4 \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \mid 2 \leq x \leq 4 \wedge \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4 \leq y \leq 2x - 4 \right\}$$

En la figura 3.19 se muestra el orden de integración para obtener la masa de la placa con la forma de la región D .

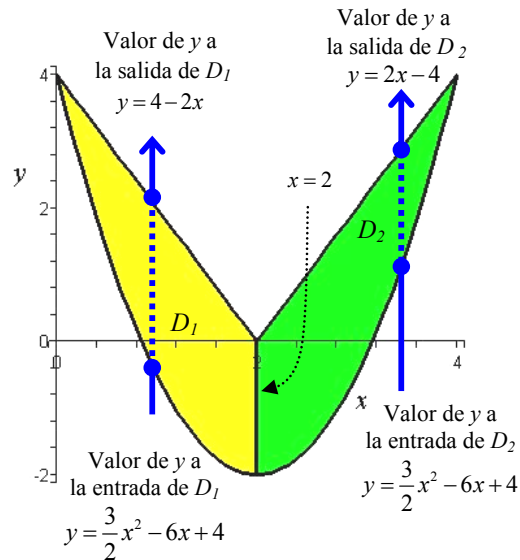


Figura 3.19

Región D del ejemplo 3.8 como dos regiones tipo 1

Entonces:

$$m = \int_0^2 \int_{\frac{3}{2}x^2 - 6x + 4}^{4-2x} (1+2x) dy dx + \int_2^4 \int_{\frac{3}{2}x^2 - 6x + 4}^{2x-4} (1+2x) dy dx$$

$$m = \int_0^2 \left(-3x^3 + \frac{13}{2}x^2 + 4x \right) dx + \int_2^4 \left(-8 - 3x^3 + \frac{29}{2}x^2 - 8x \right) dx$$

$$m = \frac{40}{3} + \frac{80}{3} = 40$$

$$m = \iint_D (1+2x) dA = 40$$

3.1.4. MOMENTOS ESTÁTICOS DE FIGURAS PLANAS

El momento estático de una partícula alrededor de un eje se define como el producto de su masa y la distancia que la separa de ese eje. A continuación, se trata específicamente, los momentos estáticos de una figura plana D alrededor de los ejes coordenados.

Considere una lámina o placa plana D , dividida en subrectángulos D_{ij} , tal como se muestra en la siguiente figura:

Los momentos estáticos son momentos de “equilibrio”.

M_x es una medida de la tendencia a girar en torno al eje x , análogamente, M_y es una medida de la tendencia a girar alrededor del eje y .

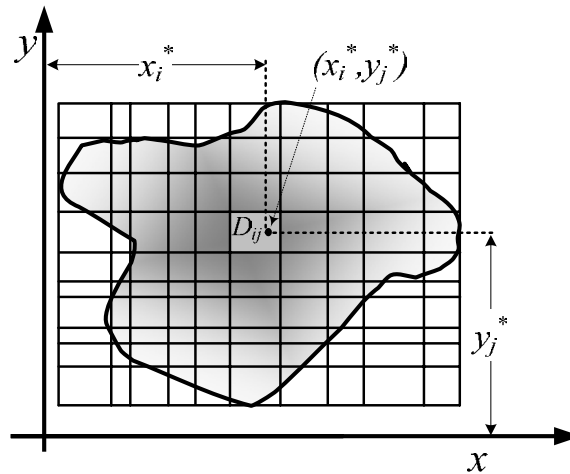


Figura 3.20

Región general D no homogénea

Entonces, el momento estático alrededor del eje x , para cada subrectángulo D_{ij} , denotado como $M_{x_{ij}}$, viene dado por:

$$M_{x_{ij}} = y_j^* \rho(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} \quad (\text{III.11})$$

Sumando el momento estático alrededor del eje x para cada subrectángulo, se tiene que:

$$M_x \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j^* \rho(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} \quad (\text{III.13})$$

Tomando el límite cuando el número de subrectángulos aumenta en la expresión anterior:

$$M_x = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j^* \rho(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} \quad (\text{III.14})$$

$$M_x = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j^* \rho(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} = \iint_D y \rho(x, y) dA \quad (\text{III.15})$$

Análogamente, el momento estático alrededor del eje y , que se denota M_y , se obtiene como:

$$M_y = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^* \rho(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} = \iint_D x \rho(x, y) dA \quad (\text{III.16})$$

MOMENTOS ESTÁTICOS DE FIGURAS PLANAS

Sea D una región del plano xy , tal que su densidad viene dada por la función $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la cual es continua $\forall (x, y) \in D$, entonces el momento estático alrededor del eje x , denotado M_x , se obtiene como:

$$M_x = \iint_D y \rho(x, y) dA \quad (\text{III.17})$$

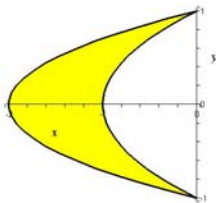
Mientras que el momento estático alrededor del eje y , denotado M_y , se calcula como:

$$M_y = \iint_D x \rho(x, y) dA \quad (\text{III.18})$$

EJEMPLO 3.9

Determine los momentos estáticos de la placa plana descrita en el ejemplo 3.7.

La región del ejemplo 3.7 se muestra a continuación



Y se encuentra acotada por las curvas $x = y^2 - 1$ y $x = 2y^2 - 2$.

La densidad es:

$$\rho(x, y) = 1$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid 2y^2 - 2 \leq x \leq y^2 - 1 \wedge -1 \leq y \leq 1 \right\}$$

Solución:

Los momentos estáticos se calculan de la siguiente manera:

$$M_x = \iint_D y \rho(x, y) dA \quad \text{y} \quad M_y = \iint_D x \rho(x, y) dA.$$

Entonces:

$$M_x = \int_{-1}^1 \int_{2y^2-2}^{y^2-1} y dx dy = \int_{-1}^1 y(1-y^2) dy = 0$$

$$M_y = \int_{-1}^1 \int_{2y^2-2}^{y^2-1} x dx dy = \int_{-1}^1 \left(-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}y^4 + 3y^2 \right) dy = -\frac{8}{5}$$

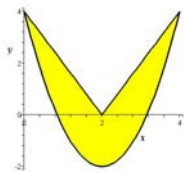
Por lo tanto, los momentos estáticos para una lámina con la forma de la región D del ejemplo 3.7 son:

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D y dA = 0 \\ M_y &= \iint_D x dA = -\frac{8}{5} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.10

Determine los momentos estáticos de la placa plana descrita en el ejemplo 3.8.

La región del ejemplo 3.8 se muestra a continuación



La densidad:

$$\rho(x, y) = 1 + 2x$$

Donde $D = D_1 \cup D_2$

$$D_1 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 2 \wedge \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4 \leq y \leq -2x + 4 \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \mid 2 \leq x \leq 4 \wedge \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4 \leq y \leq 2x - 4 \right\}$$

Solución:

Los momentos estáticos se calculan como: $M_x = \iint_D y \rho(x, y) dA$ y

$$M_y = \iint_D x \rho(x, y) dA.$$

$$M_x = \int_0^2 \int_{\frac{3}{2}x^2-6x+4}^{4-2x} y(1+2x) dy dx + \int_2^4 \int_{\frac{3}{2}x^2-6x+4}^{2x-4} y(1+2x) dy dx$$

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^2 \left(-\frac{9}{4}x^5 + \frac{135}{8}x^4 - 35x^3 + 10x^2 + 16x \right) dx + \\ &\quad + \int_2^4 \left(-\frac{9}{4}x^5 + \frac{135}{8}x^4 - 35x^3 + 10x^2 + 16x \right) dx \end{aligned}$$

$$M_x = \frac{8}{3} + \frac{56}{3} = \frac{64}{3}$$

Calculando el momento estático respecto al eje y se tiene:

$$M_y = \int_0^2 \int_{\frac{3}{2}x^2 - 6x + 4}^{4-2x} x(1+2x) dy dx + \int_2^4 \int_{\frac{3}{2}x^2 - 6x + 4}^{2x-4} x(1+2x) dy dx$$

$$M_y = \frac{262}{15} + \frac{1162}{15} = \frac{1424}{15}$$

Finalmente, para la región del ejemplo 3.8 se tiene que:

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D y(1+2x) dA = \frac{64}{3} \\ M_y &= \iint_D x(1+2x) dA = \frac{1424}{15} \end{aligned}$$

3.1.5. CENTRO DE MASA

El centro de gravedad de una figura plana D , es un punto P de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$, en el cual la región se equilibra horizontalmente. Las coordenadas de este punto se obtienen de las ecuaciones:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad (\text{III.19})$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} \quad (\text{III.20})$$

El centro de gravedad también es llamado **centro de masa**.

El significado físico del centro de gravedad, es que la lámina se comporta como si su masa estuviera concentrada en ese punto.

El centro de gravedad recibe el nombre de **centroide** cuando la densidad es constante.

Donde tanto la masa de la placa plana como los momentos estáticos se calculan por medio de integrales dobles.

CENTRO DE MASA

Sea D una región del plano xy , tal que su densidad viene dada por la función $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la cual es continua $\forall (x, y) \in D$, entonces el centro de gravedad viene dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dA \quad (\text{III.21})$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dA \quad (\text{III.22})$$

Donde m es la masa de la placa D , que se obtiene como $\iint_D \rho(x, y) dA$.

EJEMPLO 3.11

Determine el centro de masa de la placa plana descrita en el ejemplo 3.7.

La región del ejemplo 3.7 está acotada por las curvas $x = y^2 - 1$ y $x = 2y^2 - 2$.

Su densidad es:

$$\rho(x, y) = 1$$

Y adicionalmente se obtuvo:

$$m = \int_{-1}^1 \int_{2y^2-2}^{y^2-1} dx dy = \frac{4}{3}$$

$$M_x = \iint_D y dA = 0$$

$$M_y = \iint_D x dA = -\frac{8}{5}$$

Solución:

El centro de masa es un punto $P(\bar{x}, \bar{y}) \in D$, tal que sus coordenadas se obtienen empleando las ecuaciones III.21 y III.22. Como ya se calculó la masa y los momentos estáticos para esta región, entonces sólo queda sustituir en las ecuaciones III.19 y III.20

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = -\frac{\frac{8}{5}}{\frac{4}{3}} = -\frac{6}{5}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{0}{\frac{4}{3}} = 0$$

Entonces:

$$P(\bar{x}, \bar{y}) = \left(-\frac{6}{5}, 0\right)$$

En la siguiente figura se observa el centro de masa o de gravedad de la placa D descrita en el ejemplo 3.7

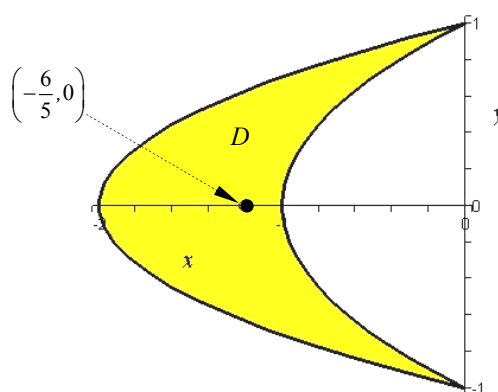


Figura 3.21

Centro de masa de la región D del ejemplo 3.7

EJEMPLO 3.12

La región D del ejemplo 3.8, tiene una densidad que varía según:

$$\rho(x, y) = 1 + 2x$$

En los ejemplos 3.8 y 3.10, se obtuvo:

$$m = \iint_D (1 + 2x) dA = 40$$

$$M_x = \iint_D y(1 + 2x) dA = \frac{64}{3}$$

$$M_y = \iint_D x(1 + 2x) dA = \frac{1424}{15}$$

Determine el centro de masa de la placa plana descrita en el ejemplo 3.8.

Solución:

Sustituyendo el valor de la masa y los momentos estáticos en las ecuaciones que permiten calcular las coordenadas del centro de masa, se tiene:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{1424}{15}}{40} = \frac{178}{75}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{64}{3}}{\frac{40}{15}} = \frac{8}{15}$$

Luego:

$$P(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{178}{75}, \frac{8}{15} \right)$$

En la figura 3.22 se aprecia la región D y su centro de masa:

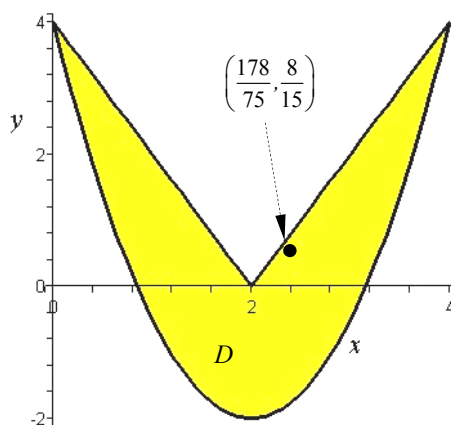


Figura 3.22

Centro de masa de la región D del ejemplo 3.8

3.1.6. MOMENTO DE INERCIA

Los momentos de inercia también son llamados segundos momentos.

Los momentos de inercia son momentos de “giro”.

El momento de inercia de una partícula alrededor de un eje se define como el producto de su masa y el cuadrado de la distancia que la separa de ese eje y se considera como una medida de la oposición a girar del cuerpo cuando actúa sobre él una fuerza de rotación. Los segundos momentos más importantes son los momentos de inercia alrededor de los ejes coordenados y del origen.

El procedimiento para obtener estos momentos como integrales dobles es similar al que se ilustró para los momentos estáticos, por lo tanto, el momento de inercia de una placa D , respecto al eje x , denotado I_x , se calcula como:

En las ecuaciones III.23 y III.24, el cuadrado de x o de y recibe el nombre de brazo de palanca.

$$I_x = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (y_j^*)^2 \rho(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} = \iint_D y^2 \rho(x, y) dA \quad (\text{III.23})$$

Análogamente, el momento de inercia alrededor del eje y se denota como I_y y se obtiene como:

$$I_y = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i^*)^2 \rho(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} = \iint_D x^2 \rho(x, y) dA \quad (\text{III.24})$$

El momento de inercia alrededor del origen también es conocido como momento polar de inercia.

$$I_0 = I_x + I_y$$

La suma de estos dos momentos se conoce como momento de inercia alrededor del origen, I_0 , donde:

$$I_0 = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left[(x_i^*)^2 + (y_j^*)^2 \right] \rho(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA \quad (\text{III.25})$$

MOMENTOS DE INERCIA DE FIGURAS PLANAS

Sea D una región del plano xy , tal que su densidad viene dada por la función $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la cual es continua $\forall (x, y) \in D$, entonces los momentos de inercia alrededor de los ejes x y y , denotados I_x e I_y , se obtienen como:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dA \quad (\text{III.26})$$

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dA \quad (\text{III.27})$$

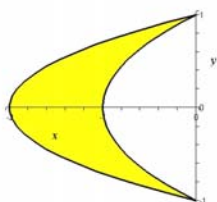
El momento polar de inercia, I_0 , es:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA \quad (\text{III.28})$$

EJEMPLO 3.13

Determine los momentos de inercia de la placa plana descrita en el ejemplo 3.7.

La gráfica de la región D del ejemplo 3.7 se muestra a continuación:



Cuya densidad es :
 $\rho(x, y) = 1$

$$D = \left\{ (x, y) \mid 2y^2 - 2 \leq x \leq y^2 - 1, -1 \leq y \leq 1 \right\}$$

Solución:

Los momentos de inercia alrededor de los ejes coordenados se calculan de la siguiente manera: $I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dA$,

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dA \text{ y } I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA.$$

$$I_x = \int_{-1}^1 \int_{2y^2-2}^{y^2-1} y^2 dx dy = \int_{-1}^1 y^2 (1 - y^2) dy = \frac{4}{15}$$

$$I_y = \int_{-1}^1 \int_{2y^2-2}^{y^2-1} x^2 dx dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{7}{3} - \frac{7}{3} y^6 + 7y^4 - 2y^2 \right) dy = \frac{32}{15}$$

$$I_0 = \int_{-1}^1 \int_{2y^2-2}^{y^2-1} (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{7}{3} - \frac{7}{3} y^6 + 6y^4 - 6y^2 \right) dy = \frac{12}{5}$$

Nótese que el momento polar de inercia puede calcularse como se acaba de ilustrar, sin embargo, también puede obtenerse a partir de:

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{4}{15} + \frac{32}{15} = \frac{36}{15} = \frac{12}{5}$$

Entonces los momentos de inercia para la placa plana descrita en el ejemplo 3.7 son:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 dA = \frac{4}{15} \\ I_y &= \iint_D x^2 dA = \frac{32}{15} \\ I_0 &= \iint_D (x^2 + y^2) dA = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.14

Determine los momentos de inercia de la placa plana descrita en el ejemplo 3.8.

Solución:

Calculando el momento de inercia respecto al eje x , se tiene:

$$I_x = \int_0^2 \int_{\frac{3}{2}x^2 - 6x + 4}^{4-2x} y^2 (1+2x) dy dx + \int_2^4 \int_{\frac{3}{2}x^2 - 6x + 4}^{2x-4} y^2 (1+2x) dy dx$$

$$I_x = \int_0^2 \frac{(1+2x)}{3} \left[(4-2x)^3 - \left(\frac{3}{2}x^2 - 6x + 4 \right)^3 \right] dx + \int_2^4 \frac{(1+2x)}{3} \left[(2x-4)^3 - \left(\frac{3}{2}x^2 - 6x + 4 \right)^3 \right] dx$$

$$I_x = \frac{712}{35} + \frac{2168}{35} = \frac{576}{7}$$

Calculando el momento inercia respecto al eje y se tiene:

$$I_y = \int_0^2 \int_{\frac{3}{2}x^2 - 6x + 4}^{4-2x} x^2 (1+2x) dy dx + \int_2^4 \int_{\frac{3}{2}x^2 - 6x + 4}^{2x-4} x^2 (1+2x) dy dx$$

$$I_y = \int_0^2 \left(-3x^5 + \frac{13}{2}x^4 + 4x^3 \right) dx + \int_2^4 \left(-3x^5 + \frac{29}{2}x^4 - 8x^3 - 8x^2 \right) dx$$

$$I_y = \frac{128}{5} + \frac{3472}{15} = \frac{3856}{15}$$

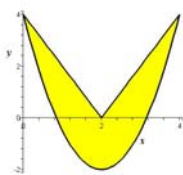
El momento polar de inercia puede obtenerse como:

$$I_0 = \int_0^2 \int_{\frac{3}{2}x^2 - 6x + 4}^{4-2x} (x^2 + y^2)(1+2x) dy dx + \int_2^4 \int_{\frac{3}{2}x^2 - 6x + 4}^{2x-4} (x^2 + y^2)(1+2x) dy dx$$

O también como: $I_0 = I_x + I_y = \frac{576}{7} + \frac{3856}{15} = \frac{35632}{105}$

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 (1+2x) dA = \frac{576}{7} \\ I_y &= \iint_D x^2 (1+2x) dA = \frac{3856}{15} \\ I_0 &= \iint_D (x^2 + y^2)(1+2x) dA = \frac{35632}{105} \end{aligned}$$

La gráfica de la región D del ejemplo 3.8 se observa a continuación:



Cuya densidad viene dada por:

$$\rho(x, y) = 1 + 2x$$

Donde $D = D_1 \cup D_2$

$$D_1 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 2 \wedge \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4 \leq y \leq -2x + 4 \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \mid 2 \leq x \leq 4 \wedge \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4 \leq y \leq 2x - 4 \right\}$$

3.2 APLICACIONES DE LAS INTEGRALES TRIPLES

Las aplicaciones de las integrales triples, son similares a las aplicaciones de las dobles. Sus definiciones se obtienen a partir de la triple suma de Riemann; sin embargo a continuación se presentan de una vez con la integral triple correspondiente para cada una de ellas. Las aplicaciones que se mencionan a continuación son: volúmenes de sólidos en el espacio, masa, momentos estáticos, centros de masa y momentos de inercia de cuerpos en el espacio.

3.2.1. VOLUMEN DE UN SÓLIDO EN EL ESPACIO

En el capítulo 2 se definió la integral triple de una función f sobre una región tridimensional B , $\iiint_B f(x, y, z) dV$, como el límite de una triple suma de Riemann, $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \Delta V_{ijk}$. Si la función f es igual a la unidad; es decir, $f(x, y, z) = 1$, entonces, la integral triple representa el volumen V del sólido B , resultando la siguiente integral:

$$V = \iiint_B dV \quad (\text{III.29})$$

VOLUMEN DE UN SÓLIDO EN EL ESPACIO

Sea B una región tridimensional, entonces su volumen, denotado como V , se obtiene como

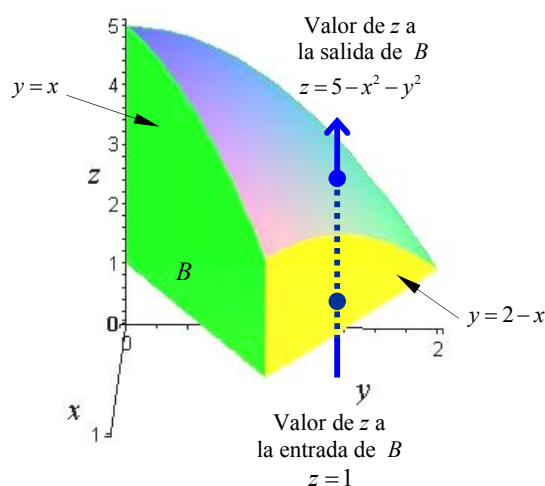
$$V = \iiint_B dV \quad (\text{III.30})$$

EJEMPLO 3.15

Determine el volumen del sólido B acotado por las superficies: $x=0$, $y=x$, $y=2-x$, $z=1$ y $z=5-x^2-y^2$.

Solución:

Para calcular el volumen del sólido B , se emplea la integral triple $\iiint_B dV$. En la siguiente gráfica se ilustra el sólido B acotado por las superficies mencionadas en el ejemplo 3.15 y adicionalmente se señalan los valores que toma la variable z a la entrada y la salida del recinto B .

**Figura 3.23****Sólido B del ejemplo 3.15**

Por lo tanto el volumen se obtiene como:

$$V = \iint_D \int_1^{5-x^2-y^2} dz dA$$

Donde D es la proyección del sólido B sobre el plano xy . Dicha proyección se muestra en la figura 3.24.

La región D del ejemplo 3.15 es una región tipo 1

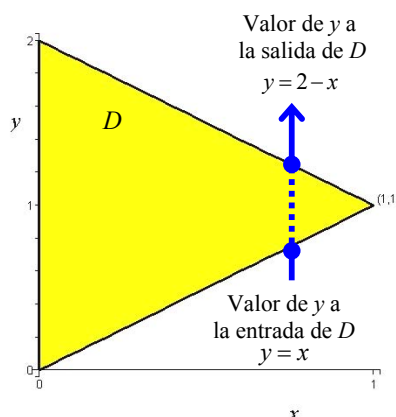


Figura 3.24

Proyección del sólido B del ejemplo 3.15 en el plano xy

Entonces la región D , está definida como:

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge x \leq y \leq 2 - x\}$$

Luego:

$$V = \int_0^1 \int_x^{2-x} \int_1^{5-x^2-y^2} dz dy dx = \int_0^1 \int_x^{2-x} (4 - x^2 - y^2) dy dx$$

$$V = \int_0^1 \left(\frac{16}{3} + \frac{8}{3}x^3 - 4x^2 - 4x \right) dx = \frac{8}{3}$$

$$V = \iiint_B dV = \frac{8}{3}$$

EJEMPLO 3.16

Determine el volumen del sólido B acotado por las superficies:

$$y = 4, \quad y = x^2, \quad z = 0 \quad \text{y} \quad z = 4 - y.$$

Solución:

El cálculo de volumen del sólido B , se realiza por medio de la integral triple $\iiint_B dV$. En la figura 3.25 se ilustra el sólido B de este ejemplo. Adicionalmente se muestran los valores de la variable z a la entrada y la salida del recinto B .

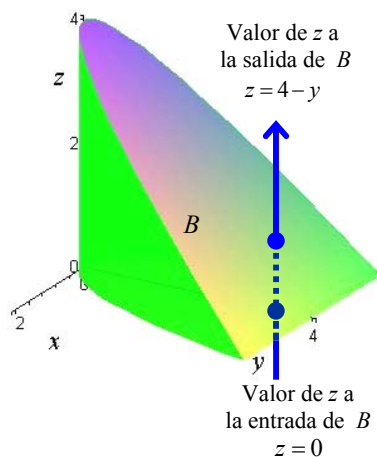


Figura 3.25

Sólido B del ejemplo 3.16

Por lo tanto el volumen se obtiene como:

$$V = \iint_D \int_0^{4-y} dz dA$$

Donde D es la proyección del sólido B sobre el plano xy . Esta proyección se observa en la figura 3.26.

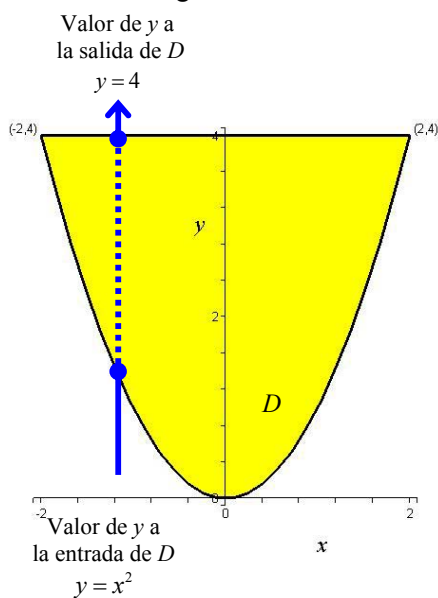


Figura 3.26

Proyección del sólido B del ejemplo 3.16 en el plano xy

La región D del ejemplo 3.16 es una región tipo 1

La región D , del ejemplo 3.16 está definida como:

$$D = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2 \wedge x^2 \leq y \leq 4\}$$

Luego:

$$V = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_0^{4-y} dz dy dx = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 (4-y) dy dx = \int_{-2}^2 \left(8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{256}{15}$$

$$V = \iiint_B dV = \frac{256}{15}$$

EJEMPLO 3.17

Plantear mediante integrales triples el volumen comprendido entre dos esferas concéntricas de radios 1 y 4.

Solución:

Sea B el sólido mencionado en el ejemplo 3.17. En la figura 3.27 se ilustran las dos esferas concéntricas de radios 1 y 4.

La región tridimensional comprendida entre las dos esferas concéntricas es simétrica respecto al origen, razón por la cual, dicha región se divide en 8 partes correspondientes a cada cuadrante.

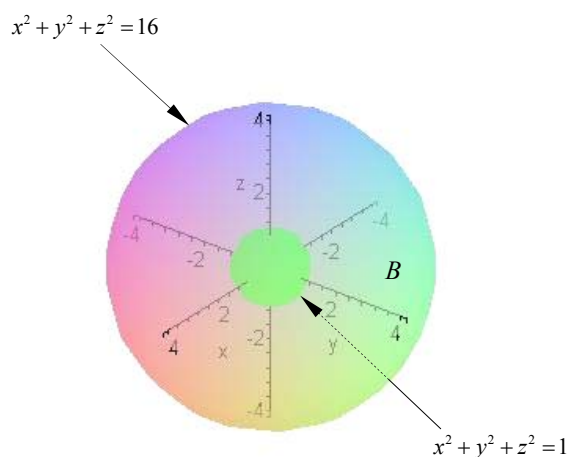


Figura 3.27

Sólido B del ejemplo 3.17

A continuación se muestra la porción del sólido B que se encuentra en el primer octante, el cual se denomina como B_1 . También se muestran los valores de la variable z a la entrada y la salida del recinto B_1 .

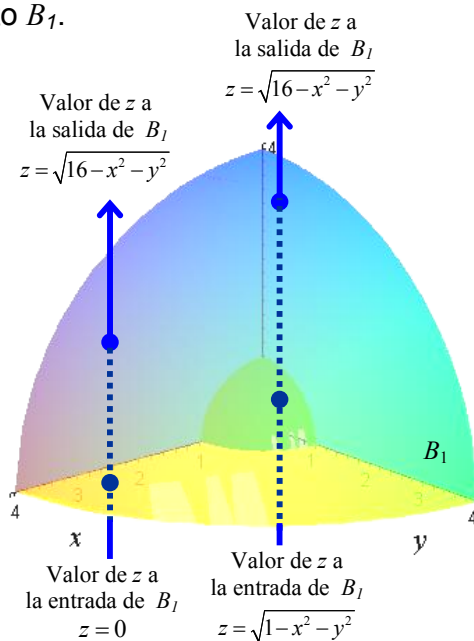


Figura 3.28

Sólido B_1 del ejemplo 3.17

Entonces:

$$V = \iiint_B dV = 8 \iiint_{B_1} dV$$

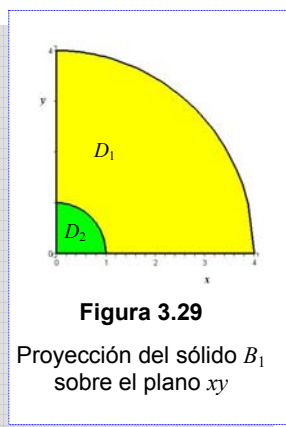


Figura 3.29

Proyección del sólido B_1 sobre el plano xy

Como el valor de la variable z cambia a la entrada del sólido B_1 , entonces se debe emplear la propiedad aditiva respecto a la región de integración, por lo cual:

$$V = 8 \iiint_{B_1} dV = 8 \left[\iint_{D_1} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} dz dA + \iint_{D_2} \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} dz dA \right]$$

Donde D_1 y D_2 son las regiones bidimensionales que se obtienen al proyectar el sólido B_1 sobre el plano xy . En la figura 3.29 se aprecia dicha proyección.

La región bidimensional D_1 se divide en dos regiones tipo 1; es decir:

$$D_1 = D_{1,1} \cup D_{1,2}$$

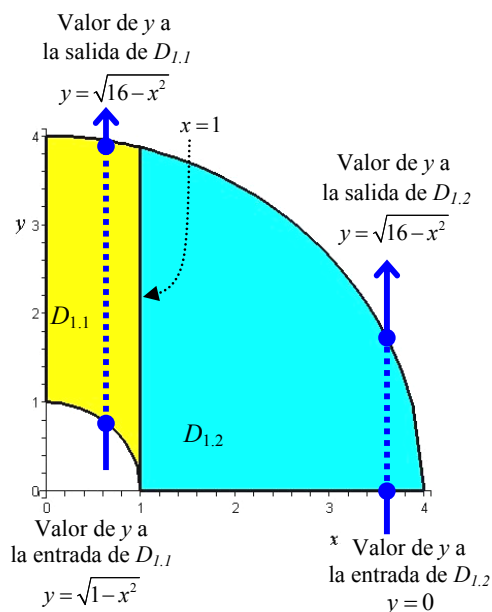


Figura 3.30

Región D_1 del ejemplo 3.17

Entonces, la región D_1 viene dada por la unión de las regiones:

$$D_{1,1} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{16-x^2}\}$$

$$D_{1,2} = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{16-x^2}\}$$

La región bidimensional D_2 es una región tipo 1.

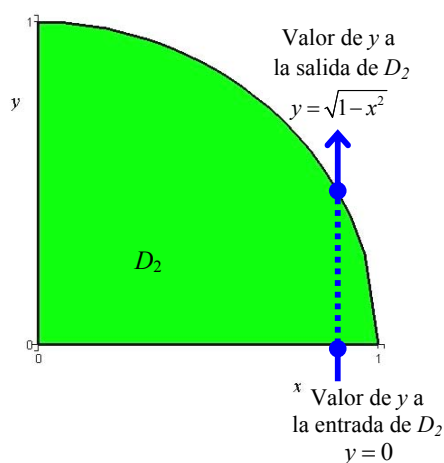


Figura 3.31

Región D_2 del ejemplo 3.17

Con base a la figura 3.31, se tiene que:

$$D_2 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

Resolver estas integrales es un proceso bastante laborioso; sin embargo con un software matemático se puede obtener que el volumen planteado en el ejemplo 3.17 es:

$$V = 8(32.98672287)$$

Por lo tanto, las integrales triples que permiten calcular el volumen comprendido entre dos esferas concéntricas de radios 1 y 4 son:

$$V = 8 \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} dz dy dx + 8 \int_1^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} dz dy dx + \\ + 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} dz dy dx$$

3.2.2.MASA DE UN SÓLIDO EN EL ESPACIO

Considere una región tridimensional B , no homogénea, esto es que su densidad ρ varía en cada punto $(x, y, z) \in B$, donde la función densidad está expresada en unidades de masa por unidad de volumen, entonces la masa se obtiene como la integral triple de la función densidad sobre la región B , tal como se define a continuación:

MASA DE UN SÓLIDO EN EL ESPACIO

Considere un cuerpo tridimensional B de densidad variable $\rho(x, y, z)$, entonces su masa, denotada m , se obtiene como:

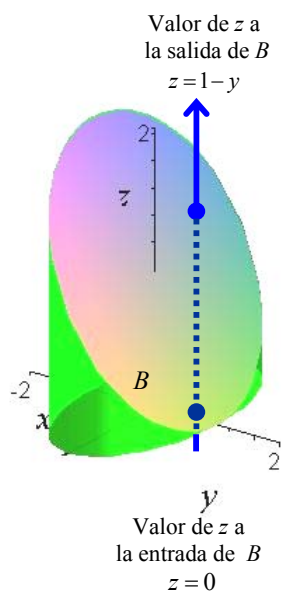
$$m = \iiint_B \rho(x, y, z) dV \quad (\text{III.31})$$

EJEMPLO 3.18

Calcular la masa del sólido comprendido entre los planos: $z = 0$ y $z = 1 - y$ y dentro de la superficie definida por la ecuación $x^2 + 4y^2 = 4$, cuya densidad viene dada por $\rho(x, y, z) = 2z$

Solución:

El sólido B del ejemplo 3.18 se muestra en la figura 3.32, también se muestran los valores que toma la variable z a la entrada y salida de la región B .

**Figura 3.32****Sólido B del ejemplo 3.17**

Para calcular la masa del sólido mostrado en la figura anterior, se emplea la ecuación III.31, donde al sustituir el primer orden de integración y la función densidad, se obtiene:

$$m = \iint_D \int_0^{1-y} 2z \, dz \, dA$$

donde D es la proyección del sólido B en el plano xy . Esta proyección, junto con el segundo orden de integración se ilustra en la figura 3.33

La gráfica de la ecuación:

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

Es una elipse horizontal.

La región bidimensional D del ejemplo 3.18 es una región tipo 1 y también una región tipo 2.

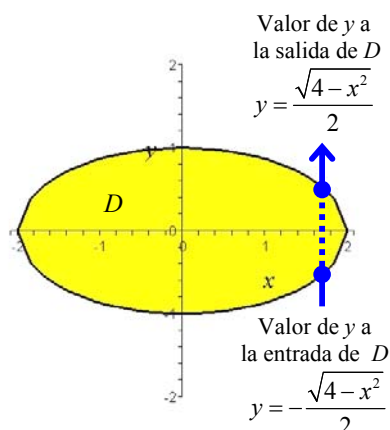


Figura 3.33

Región D del ejemplo 3.18

La región D está definida como:

$$D = \left\{ (x, y) \mid -2 \leq x \leq 2 \quad \wedge \quad -\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \right\}$$

Volviendo al cálculo de la masa:

$$m = \int_{-2}^2 \int_{\frac{-\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} \int_0^{1-y} 2z \, dz \, dy \, dx = \int_{-2}^2 \int_{\frac{-\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} (1-y)^2 \, dy \, dx$$

$$m = \int_{-2}^2 \frac{1}{3} \left[\left(1 + \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \right)^3 - \left(1 - \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \right)^3 \right] dx = \frac{5\pi}{2}$$

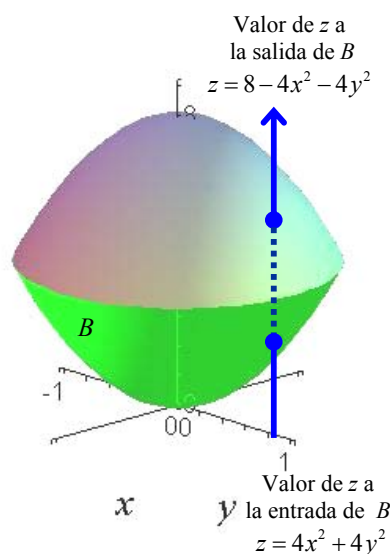
$$m = \iiint_B 2z \, dV = \frac{5\pi}{2}$$

EJEMPLO 3.19

Calcular la masa del sólido comprendido entre los paraboloides $z = 4x^2 + 4y^2$ y $z = 8 - 4x^2 - 4y^2$, cuya densidad viene dada por $\rho(x, y, z) = x + y + z + 1$.

Solución:

En la figura 3.34, se muestra el sólido B del ejemplo 3.19 y también los valores que toma la variable z a la entrada y salida de la región B , los cuales permiten establecer los límites para la primera integración parcial.

**Figura 3.34****Sólido B del ejemplo 3.19**

Por lo tanto, la masa se obtiene como:

$$m = \iint_D \int_{4x^2+4y^2}^{8-4x^2-4y^2} (x + y + z + 1) dz dA$$

siendo D la proyección del sólido B en el plano xy . Para determinar la ecuación de la curva que delimita a esta región D , es necesario resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} z = 4x^2 + 4y^2 \\ z = 8 - 4x^2 - 4y^2 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones se tiene que $z = 4$

Recuerde que la gráfica de la ecuación:

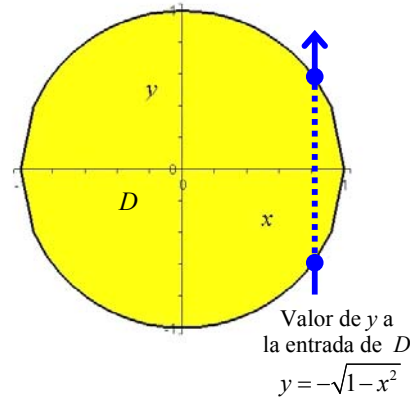
$$x^2 + y^2 = 1$$

Es una circunferencia.

La región D del ejemplo 3.19 puede clasificarse como una región tipo 1 y también como una región tipo 2.

Sustituyendo el valor de z en la primera ecuación del sistema, se obtiene la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Valor de y a la salida de D
 $y = \sqrt{1-x^2}$



Valor de y a la entrada de D
 $y = -\sqrt{1-x^2}$

Figura 3.35

Región D del ejemplo 3.19

La región D queda definida como:

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1 \wedge -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

Luego, la masa se obtiene mediante la integral triple

$$m = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{4x^2+4y^2}^{8-4x^2-4y^2} (x+y+z+1) dz dy dx$$

$$m = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (40 - 8x^3 - 40x^2 + 8x - 8xy^2 - 8x^2y + 8y - 40y^2 - 8y^3) dy dx$$

$$m = \int_{-1}^1 \left(\frac{160}{3} \sqrt{1-x^2} + \frac{32}{3} x \sqrt{1-x^2} - \frac{160}{3} x^2 \sqrt{1-x^2} - \frac{32}{3} x^3 \sqrt{1-x^2} \right) dx = 20\pi$$

$$m = \iiint_B (x+y+z+1) dV = 20\pi$$

3.2.3.MOMENTOS ESTÁTICOS

El momento estático de una región B tridimensional respecto a los planos coordenados xy , yz y xz , se definen de la siguiente manera:

MOMENTOS ESTÁTICOS DE UN SÓLIDO EN EL ESPACIO

Sea B un recinto del espacio, tal que su densidad viene dada por la función $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, la cual es continua $\forall (x, y, z) \in B$, entonces los momentos estáticos alrededor de los planos xy , yz y xz , denotados M_{xy} , M_{yz} y M_{xz} , respectivamente, se obtienen a partir de las siguientes expresiones:

$$M_{xy} = \iiint_B z\rho(x, y, z) dV \quad (\text{III.32})$$

$$M_{yz} = \iiint_B x\rho(x, y, z) dV \quad (\text{III.33})$$

$$M_{xz} = \iiint_B y\rho(x, y, z) dV \quad (\text{III.34})$$

EJEMPLO 3.20

Calcular los momentos estáticos alrededor de los planos coordenados para el sólido descrito en el ejemplo 3.18.

Solución:

El sólido B del ejemplo 3.18 se definió como:

$$B = \left\{ (x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2 \quad \wedge \quad -\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \quad \wedge \quad 0 \leq z \leq 1-y \right\}$$

Calculando los momentos estáticos por medio de las ecuaciones: III.32, III.33 y III.34, se tiene:

$$M_{xy} = \int_{-2}^2 \int_{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} \int_0^{1-y} z(2z) dz dy dx = \int_{-2}^2 \int_{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} \frac{2(1-y)^3}{3} dy dx$$

$$M_{xy} = \int_{-2}^2 \left[\frac{2}{3} \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{6} (4-x^2)^{3/2} \right] dx = \frac{7\pi}{3}$$

Respecto al plano yz :

$$M_{yz} = \int_{-2}^2 \int_{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} \int_0^{1-y} x(2z) dz dy dx = \int_{-2}^2 \int_{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} x(1-y)^2 dy dx$$

$$M_{yz} = \int_{-2}^2 \left[x\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{12} x(4-x^2)^{3/2} \right] dx = 0$$

Y finalmente, respecto al plano xz :

$$M_{xz} = \int_{-2}^2 \int_{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} \int_0^{1-y} y(2z) dz dy dx = \int_{-2}^2 \int_{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} y(1-y)^2 dy dx$$

$$M_{xz} = \int_{-2}^2 \left[-\frac{1}{6} (4-x^2)^{3/2} \right] dx = -\pi$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_B z(2z) dV = \frac{7\pi}{3} \\ M_{yz} &= \iiint_B x(2z) dV = 0 \\ M_{xz} &= \iiint_B y(2z) dV = -\pi \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.21

Calcular los momentos estáticos alrededor de los planos coordenados para el sólido descrito en el ejemplo 3.19.

Solución:

El sólido B del ejemplo 3.19 está definido como:

$$B = \left\{ (x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1 \wedge -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \wedge 4x^2 + 4y^2 \leq z \leq 8 - 4x^2 - 4y^2 \right\}$$

Calculando el momento estático respecto al plano xy :

$$M_{xy} = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{4x^2+4y^2}^{8-4x^2-4y^2} z(x+y+z+1) dz dy dx$$

$$M_{xy} = -\frac{32}{3} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (4x^4 - 8x^2 + 8x^2 y^2 + 3x - 8y^2 + 3y + 4y^4 + 19)(x^2 + y^2 - 1) dx$$

$$M_{xy} = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \left(\frac{8832}{35} + \frac{128}{3}x - \frac{34688}{105}x^2 - \frac{128}{3}x^3 + \frac{4096}{35}x^4 - \frac{4096}{105}x^6 \right) = \frac{272\pi}{3}$$

Respecto al plano yz :

$$M_{yz} = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{4x^2+4y^2}^{8-4x^2-4y^2} x(x+y+z+1) dz dy dx$$

$$M_{yz} = -8 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x(x+5+y)(x^2 + y^2 - 1) dx$$

$$M_{yz} = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \left(\frac{160}{3}x + \frac{32}{3}x^2 - \frac{160}{3}x^3 - \frac{32}{3}x^4 \right) = \frac{2\pi}{3}$$

Respecto al plano xz :

$$M_{xz} = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{4x^2+4y^2}^{8-4x^2-4y^2} y(x+y+z+1) dz dy dx$$

$$M_{xz} = -8 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y(x+5+y)(x^2 + y^2 - 1) dx$$

$$M_{xz} = \int_{-1}^1 \frac{32\sqrt{1-x^2}}{15} (1 - 2x^2 + x^4) = \frac{2\pi}{3}$$

Entonces, para el sólido del ejemplo 3.19 se tiene:

$$M_{xy} = \iiint_B z(x+y+z+1) dV = \frac{272\pi}{3}$$

$$M_{yz} = \iiint_B x(x+y+z+1) dV = \frac{2\pi}{3}$$

$$M_{xz} = \iiint_B y(x+y+z+1) dV = \frac{2\pi}{3}$$

3.2.4. CENTRO DE MASA

A continuación se define el centro de masa para un sólido tridimensional como un punto $P(x, y, z)$, donde las coordenadas de este punto se obtienen de las ecuaciones:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \quad (\text{III.35})$$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \quad (\text{III.36})$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} \quad (\text{III.37})$$

Entonces:

CENTRO DE MASA DE UN SÓLIDO DEL ESPACIO

Sea B un recinto del espacio, tal que su densidad viene dada por la función $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, la cual es continua $\forall (x, y, z) \in B$, entonces el centro de masa es un punto $P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde sus coordenadas son:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_B x \rho(x, y, z) dV \quad (\text{III.38})$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iiint_B y \rho(x, y, z) dV \quad (\text{III.39})$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m} \iiint_B z \rho(x, y, z) dV \quad (\text{III.40})$$

Donde m es la masa del sólido B , que se obtiene como

$$m = \iiint_B \rho(x, y, z) dV.$$

EJEMPLO 3.22

Determine las coordenadas del centro de masa del sólido B descrito en el ejemplo 3.18.

Solución:

Para el ejemplo 3.18 se obtuvo:

$$m = \iiint_B 2z \, dV = \frac{5\pi}{2}$$

$$M_{xy} = \iiint_B z(2z) \, dV = \frac{7\pi}{3}$$

$$M_{yz} = \iiint_B x(2z) \, dV = 0$$

$$M_{xz} = \iiint_B y(2z) \, dV = -\pi$$

Las coordenadas del centro de masa del sólido B se obtienen empleando las ecuaciones III.38, III.39 y III.40; sin embargo, como en el ejemplo 3.20 se calcularon los momentos estáticos alrededor de los planos coordenados, a continuación se utilizan las ecuaciones III.35, III.36 y III.37:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{0}{5\pi/2} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{-\pi}{5\pi/2} = -\frac{2}{5}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{7\pi/3}{5\pi/2} = \frac{14}{15}$$

Entonces:

$$P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, -\frac{2}{5}, \frac{14}{15}\right)$$

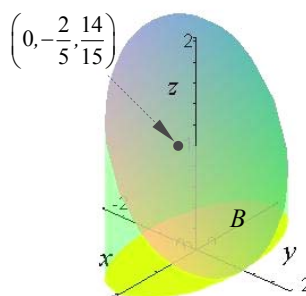


Figura 3.36

Centro de gravedad del sólido B del ejemplo 3.18

EJEMPLO 3.23

Determine las coordenadas del centro de gravedad del sólido descrito en el ejemplo 3.19.

Solución:

Las coordenadas del centro de masa del sólido B , igual que en el ejemplo anterior, se obtienen a partir de las ecuaciones III.35, III.36 y III.37:

Para el ejemplo 3.19 se obtuvo:

$$m = \iiint_B (x + y + z + 1) dV = 20\pi$$

$$M_{xy} = \frac{272\pi}{3}$$

$$M_{yz} = \frac{2\pi}{3}$$

$$M_{xz} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{2\pi/3}{20\pi} = \frac{1}{30}$$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{2\pi/3}{20\pi} = \frac{1}{30}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{272\pi/3}{20\pi} = \frac{68}{15}$$

Entonces:

$$P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{1}{30}, \frac{1}{30}, \frac{68}{15} \right)$$

En la siguiente figura, se aprecia el centro de masa del sólido B .

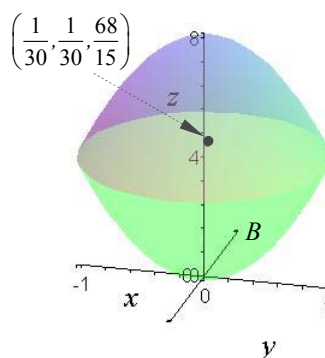


Figura 3.37

Centro de gravedad del sólido B del ejemplo 3.19

3.2.5. MOMENTOS DE INERCIA

Los momentos de inercia del sólido B respecto a los planos coordenados, se obtienen como sigue:

MOMENTOS DE INERCIA DE FIGURAS PLANAS

Sea B un recinto del espacio, tal que su densidad viene dada por la función $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, la cual es continua $\forall (x, y, z) \in B$, entonces los momentos de inercia alrededor de los ejes coordenados, denotados I_x , I_y e I_z se obtienen a partir de:

$$I_x = \iiint_B (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV \quad (\text{III.41})$$

$$I_y = \iiint_B (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV \quad (\text{III.42})$$

$$I_z = \iiint_B (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV \quad (\text{III.43})$$

El momento polar de inercia, I_0 , es:

$$I_0 = \iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV \quad (\text{III.44})$$

EJEMPLO 3.24

Calcular los momentos de inercia alrededor de los ejes coordenados y respecto al origen para el sólido descrito en el ejemplo 3.18.

Solución:

El sólido B mencionado está definido como:

$$B = \left\{ (x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2 \quad \wedge \quad -\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \quad \wedge \quad 0 \leq z \leq 1-y \right\}$$

Calculando los momentos estáticos por medio de las ecuaciones:

III.41, III.42 y III.43, se tiene:

$$I_x = \int_{-2}^2 \int_{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} \int_0^{1-y} (y^2 + z^2)(2z) dz dy dx$$

$$I_x = \int_{-2}^2 \int_{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} \left[\frac{1}{2}(1-y)^4 + y^2(1-y)^2 \right] dy dx$$

$$I_x = \int_{-2}^2 \left[\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{3}{160}(4-x^2)^{5/2} + \frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2} \right] dx = \frac{27\pi}{8}$$

Respecto al eje y :

$$I_y = \int_{-2}^2 \int_{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} \int_0^{1-y} (x^2 + z^2)(2z) dz dy dx$$

$$I_y = \int_{-2}^2 \int_{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} \left[\frac{1}{2}(1-y)^4 + x^2(1-y)^2 \right] dy dx$$

$$I_y = \int_{-2}^2 \left[\frac{(4-x^2)^{5/2}}{160} + \frac{(3+x^2)}{12}(4-x^2)^{3/2} + \sqrt{4-x^2} \left(\frac{1}{2} + x^2 \right) \right] dx = \frac{119\pi}{24}$$

Respecto al eje z :

$$I_z = \int_{-2}^2 \int_{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} \int_0^{1-y} (x^2 + y^2)(2z) dz dy dx = \int_{-2}^2 \int_{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} (y^2 + x^2)(1-y)^2 dy dx$$

$$I_z = \int_{-2}^2 \left[\frac{1}{80}(4-x^2)^{5/2} + \frac{1}{12}(1+x^2)(4-x^2)^{3/2} + x^2\sqrt{4-x^2} \right] dx = \frac{37\pi}{12}$$

Finalmente, el momento polar de inercia:

$$I_0 = \int_{-2}^2 \int_{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} \int_0^{1-y} (x^2 + y^2 + z^2)(2z) dz dy dx$$

$$I_0 = \int_{-2}^2 \int_{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} \left[\frac{1}{2}(1-y)^4 + (y^2 + x^2)(1-y)^2 \right] dy dx$$

$$I_0 = \int_{-2}^2 \left[\frac{3(4-x^2)^{5/2}}{160} + \frac{(4+x^2)}{12} (4-x^2)^{3/2} + \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + x^2 \sqrt{4-x^2} \right] dx = \frac{137\pi}{24}$$

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_B (y^2 + z^2)(2z) dV = \frac{27\pi}{8} \\ I_y &= \iiint_B (x^2 + z^2)(2z) dV = \frac{119\pi}{24} \\ I_z &= \iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)(2z) dV = \frac{37\pi}{12} \\ I_0 &= \iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)(2z) dV = \frac{137\pi}{24} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.25

Calcular los momentos de inercia alrededor de los ejes coordenados para el sólido descrito en el ejemplo 3.19.

Solución:

Para resolver las integrales que permiten calcular los momentos de inercia pedidos en el ejemplo 3.25 se ilustra sólo el segundo momento respecto al eje x . Los demás resultados fueron calculados con un software matemático.

El sólido B del ejemplo 3.19 está definido como:

$$B = \left\{ (x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1 \wedge -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \wedge 4x^2 + 4y^2 \leq z \leq 8 - 4x^2 - 4y^2 \right\}$$

Calculando los momentos de inercia:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{4x^2+4y^2}^{8-4x^2-4y^2} (y^2 + z^2)(x + y + z + 1) dz dy dx \\ I_x &= -\frac{8}{3} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2 - 1) \left[16(x^5 + y^5) + 16x^4(13 + y) + \right. \\ &\quad \left. + 32x^3(y^2 - 1) + 32x^2(13y^2 + y^3 - y - 13) + 16x(3 + y^4) + \right. \\ &\quad \left. + y^2(-29x - 401) + y(64 + 208y^3 - 29y^2) + 448 \right] dy dx \end{aligned}$$

$$I_x = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{105} (143968 + 22240x - 251584x^2 - 30656x^3 + 160864x^4 + 12512x^5 - 53248x^6 - 4096x^7) dx$$

$$I_x = 462\pi$$

Los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados y al origen para el sólido del ejemplo 3.19, se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_B (y^2 + z^2)(x + y + z + 1) dV = 462\pi \\ I_y &= \iiint_B (x^2 + z^2)(x + y + z + 1) dV = 462\pi \\ I_z &= \iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z + 1) dV = \frac{20\pi}{3} \\ I_0 &= \iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z + 1) dV = \frac{1396\pi}{3} \end{aligned}$$