

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРОГРАММИРОВАНИЯ
КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1

Методы одномерной оптимизации

Вариант 4

Выполнили студенты:

Ефимов Сергей Алексеевич
группа: М3237

Соколов Александр Андреевич
группа: М3234

Проверил:

доцент кафедры суетологии
Пупкина Залупкина

г. Санкт-Петербург

Постановка задачи

Задача лабораторной работы – научиться реализовывать алгоритмы одномерной минимизации функции каждым из следующих способов:

1. Метод дихотомии
2. Метод золотого сечения
3. Метод Фибоначи
4. Метод парабол
5. Комбинированный метод Брента

Также необходимо решить задачу аналитически и привести отчет по результатам сравнения проведенных вычислений

Ход работы

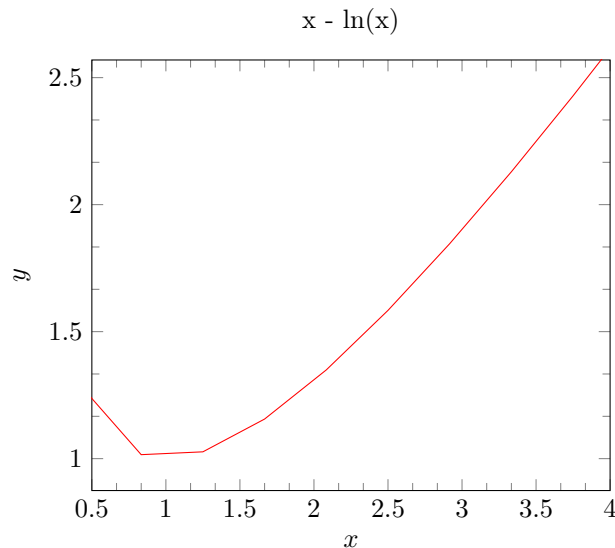
Исследуемая функция

$$f(x) = x - \ln(x)$$

Интервал исследования $[0.5, 4]$

1. Аналитическое решение

Для наглядности приведем график функции на заданном интервале:



Чтобы найти \min функции необходимо найти ее критические точки (точки, в которых производная функции равна нулю $f'(x) = 0$):

$$f'(x) = (x - \ln(x))' = x' - \ln(x)' = 0$$

$$1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Итак, мы нашли критическую точку, теперь осталось сравнить три значения функции – в критической точке и в точках, являющиеся концами исследуемого отрезка. Пусть x критическая точка, a, b -начало и конец отрезка соответственно:

$$f(a) = 0.5 - \ln(0.5) \approx 0.5 + 0.6931 \approx 1.1931$$

$$f(b) = 4 - \ln(4) \approx 4 - 1.3863 \approx 2.6137$$

$$f(x) = 1 - \ln(1) = 1$$

Из приведенных выше вычислений можно утверждать, что \min функции $f(x) = x - \ln(x)$ равен 1, при $x = 1$, (точка $M(1, 1)$)

Метод дихотомии

Давайте рассмотрим на примере нашей функции метод дихотомии, который основывается на методе приближений, сокращая интервал поиска таким образом. что сохраняется инвариант - с каждой итерацией отрезок сокращается, минимум находится в пределах отрезка.

Написав код к решению задачи данным способом(который можно увидеть ниже), мы имеем возможность привести таблицу выполнения данного алгоритма:

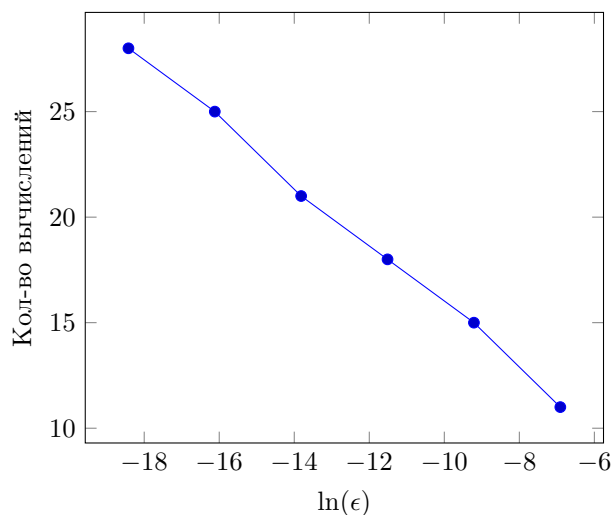
Текущий интервал	Соотношение отрезков	текущий минимум
[0.5, 4]	-	-
[0.5, 2.25]	1.999	1.375
[0.5, 1.375]	1.999	0.9375
[0.973, 1.375]	1.999	1.156
[0.973, 1.156]	1.999	1.0468
[0.973, 1.0468]	1.999	0.992
[0.992, 1.0468]	1.999	1.019
[0.992, 1.019]	1.999	1.005
[0.992, 1.005]	1.999	0.999
[0.999, 1.005]	1.999	1.002
[0.999, 1.002]	1.999	1.001
[0.999, 1.001]	1.999	1.000

Исходя из данных таблицы можно утверждать, что каждую итерацию алгоритм сужает область поиска \approx в 2 раза, что говорит о линейной сходимости данного алгоритма. Из этих соображений вытекает формула

$$|x_n - x_{min}| \leq \frac{1}{2^n} \cdot (b - a)$$

Чтобы оценить метод дихотомии давайте построим график зависимости кол-ва вычислений функции от логарифма точности:

График зависимости кол-ва вычислений функции от логарифма точности



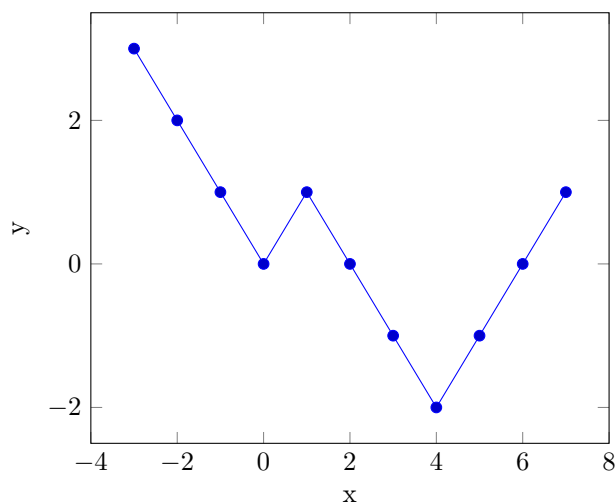
Исходя из графика можно говорить о том, что кол-во вычислений данного метода линейно зависит от $\ln(\epsilon)$ причем чем больше $\ln(\epsilon)$, тем меньше кол-во вычислений, иными словами алгоритм делает больше итераций, если задаваемая точность выше, что логично

Теперь рассмотрим алгоритм на примере многомодальной функции. Возьмем функцию:

$$f(x) = \begin{cases} x < 1, f(x) = |x| \\ x \geq 1, f(x) = |x - 4| - 2 \end{cases}$$

Ее график:

График приведенной нами многомодальной функции:



Алгоритм выдает $x = 0$, как минимум всей функции, но как видно по графику, приведенному выше, минимум функции на отрезке $[-3, 7]$ достигается в точке $x = 4$, откуда следует вывод о том, что данный метод НЕ

работает на многомодальных функциях.

Итого:

- Преимущества
 - Метод является одним из простых в реализации
 - Обеспечивает гарантированную сходимость
- Недостатки
 - Сходимость метода всегда постоянна т.е. Метод никогда не сойдется быстрее чем в наихудшем случае

Метод Золотого сечения

Теперь рассмотрим метод Золотого сечения. Принцип, который и дал название методу говорит о том, что мы будем сокращать интервал поиска нашего решения, причем делить текущий отрезок в пропорциях золотого сечения.

Давайте посмотрим на точки, которые мы получим на очередном этапе выполнения данного метода и проанализируем полученные данные:

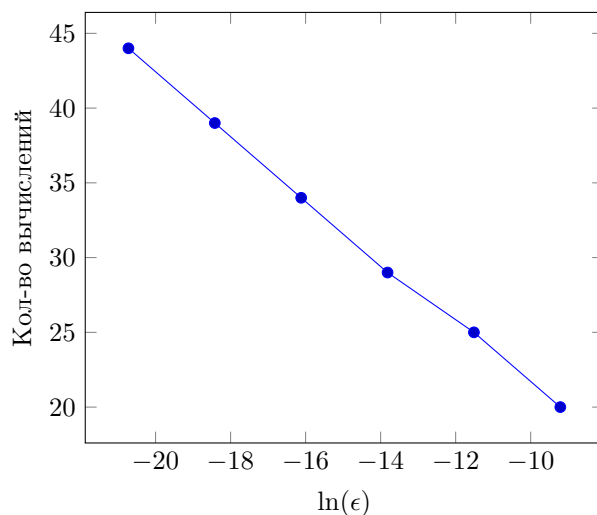
Интервал	Соотношение отрезков	текущий минимум	x1	x2
[0.5, 2.663]	1.618	1.582	1.326	1.837
[0.5, 1.837]	1.618	1.168	1.011	1.326
[0.5, 1.326]	1.618	0.913	0.816	1.011
[0.816, 1.326]	1.618	1.071	1.011	1.131
[0.816, 1.131]	1.618	0.973	0.936	1.011
[0.936, 1.131]	1.618	1.034	1.011	1.057
[0.936, 1.057]	1.618	0.996	0.982	1.011
[0.982, 1.057]	1.618	1.019	1.011	1.028
[0.982, 1.028]	1.618	1.005	1	1.011
[0.982, 1.011]	1.618	0.996	0.993	1
[0.993, 1.011]	1.618	1.002	1	1.004
[0.993, 1.004]	1.618	0.998	0.997	1
[0.997, 1.004]	1.618	1.001	1	1.001
[0.997, 1.001]	1.618	0.999	0.999	1
[0.999, 1.001]	1.618	1	1	1
[0.999, 1]	1.618	1	0.999	1
[0.999, 1]	1.618	1	1	1
[1, 1]	1.618	1	1	1

Посмотрев на таблицу можно говорить о следующих вещах:

1. Соотношение отрезков всегда одинаковое (пропорция золотого сечения) что говорит о его гарантированной сходимости и скорости сходимости порядка n (линейная сходимость)
2. Различия с методом дихотомии

Чтобы сделать некоторые выводы по методу, давайте приведем график зависимости кол-ва итераций от $\ln(\epsilon)$

График зависимости кол-ва вычислений функции от логарифма точности



На графике явно видна линейная зависимость. Но чем же тогда отличается метод дихотомии от метода Золотого сечения? Стоит обратить внимание на эффективность данного алгоритма за счет деления отрезка в пропорциях золотого сечения.

Далее рассмотрим наш алгоритм на уже известной функции и пункта «Метод Дихотомии»

$$f(x) = \begin{cases} x < 1, f(x) = |x| \\ x \geq 1, f(x) = |x - 4| - 2 \end{cases}$$

Алгоритм на которой выдает неверный результат.

Итого:

- Преимущества
 - Метод обладает неплохой эффективностью, выше чем у метода дихотомии, но существуют методы с более высокой эффективностью
- Недостатки
 - Метод выполняет большое кол-во итераций, поэтому велика возможность накопления ошибки, что не есть хорошо