«НАЦИАНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Факультет информационных технологий и программирования

Кафедра компьютерных технологий

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1

Методы одномерной оптимизации

Вариант 4

Выполнили студенты:

Ефимов Сергей Алексеевич
группа: M3237

Соколов Александр Андреевич
группа: M3234

Проверил:

доцент кафедры суетологии
Пупкина Залупкина

г. Санкт-Петербург

Постановка задачи

Задача лаборатрной работы – научиться реализовывать алгоритмы одномерной минимизации функции каждым из следуших способов:

1. Метод дихотомии
2. Метод золотого сечения
3. Метод Фиббоначи
4. Метод парабол
5. Комбинированный метод Брента

Также необходимо решить задачу аналитически и привести отчет по результатам сравнения проведенных вычислений

Ход работы

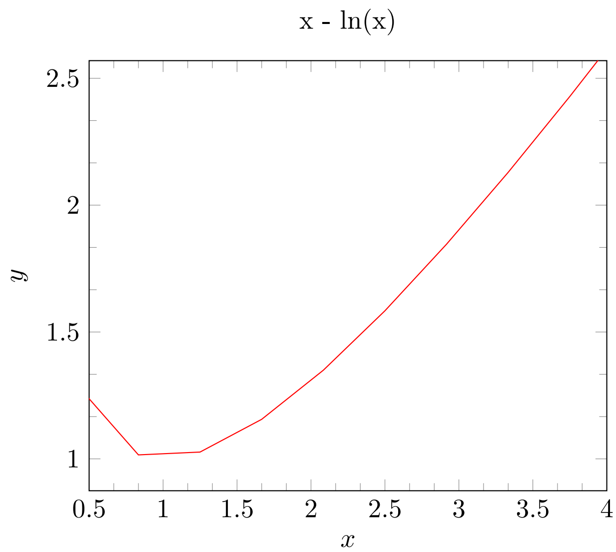
Исследуемая функция

$$f(x) = x - \ln(x)$$

Интервал исследования [0.5, 4]

1. Аналитическое решение

Для наглядности приведем график функции на заданном интервале:



Чтобы найти $/min$ функции необходимо найти ее критические точки(точки, в которых производная функции равна нуля $f'(x) = 0$):

$$f'(x) = (x - \ln(x))' = x' - \ln(x)' = 0$$

$$1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Итак, мы нашли критическую точку, теперь осталось сравнить три значения функции – в критической точке и в точках, являющиеся концами исследуемного отрезка. Пусть x критическая точка, a, b -начало и конец отрезка соответственно:

$$f(a) = 0.5 - \ln(0.5) \approx 0.5 + 0.6931 \approx 1.1931$$

$$f(b) = 4 - \ln(4) \approx 4 - 1.3863 \approx 2.6137$$

$$f(x) = 1 - \ln(1) = 1$$

Из приведенных выше вычислений можно утверждать, что min функции $f(x) = x - \ln(x)$ равен 1, при $x = 1$, (точка $M(1, 1)$)

Метод дихотомии

Давайте рассмотрим на примере нашей функции метод дихотомии, который основывается на методе приближений, сокращая интревал поиска таким образом. что сохраняется инвариант - с каждой интерацией отрезок сокращается, минимум находится в пределах отрезка.

Написав код к решению задачи данным способом(который можно увидеть ниже), мы имеем возможность привести таблицу выполнения данного алгоритма:

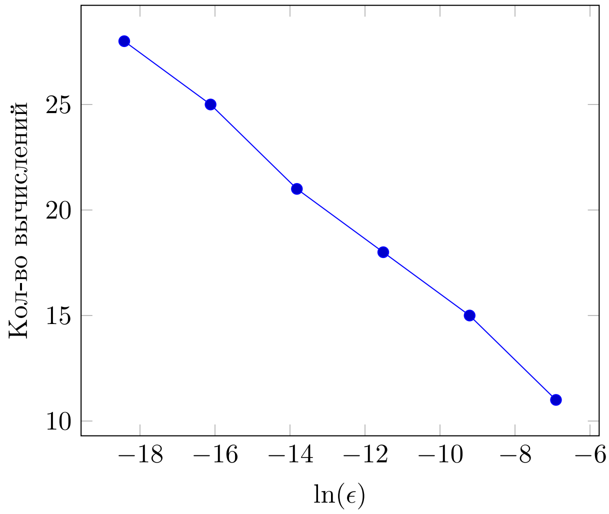
Текущий интервал	Соотношение отрезка с предыдущей итерацией	текущий минимум
[0.5, 4]	-	-
[0.5, 2.25]	1.999	1.375
[0.5 1.375]	1.999	0.9375
[0.973, 1.375]	1.999	1.156
[0.973, 1.156]	1.999	1.0468
[0.973, 1.0468]	1.999	0.992
[0.992, 1.0468]	1.999	1.019
[0.992, 1.019]	1.999	1.005
[0.992, 1.005]	1.999	0.999
[0.999, 1.005]	1.999	1.002
[0.999, 1.002]	1.999	1.001
[0.999, 1.001]	1.999	1.000

Исходя из данных таблицы можно утверждать, что каждую итерацию алгоритм сужает область поиска $\approx$ в 2 раза, что говорит о линейной сходимости данного алгоритма. Из этих соображений вытекает формула

$$|x_n - x_{min}| \leqslant \frac{1}{2^n} \cdot (b - a)$$

Чтобы оценить метод дихотомии давайте построим график зависимости кол-ва вычислений функции от логарифма точности:

График зависимости кол-ва вычислений функции от логарифма точности



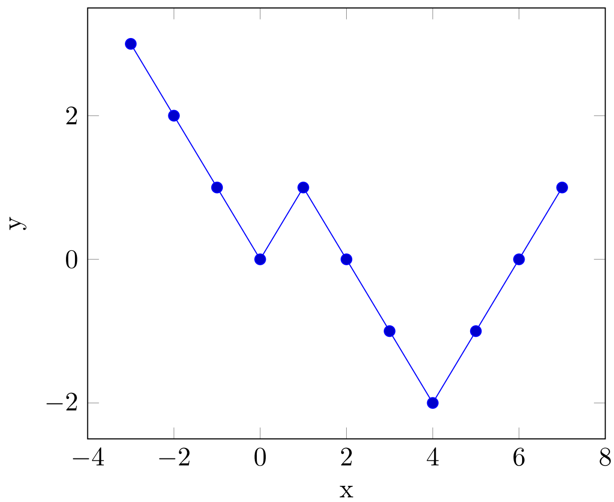
Исходя из графика можно говорить о том, что кол-во вычислений данного метода линейно зависит от $\ln(\epsilon)$ причем чем больше $\ln(\epsilon)$, тем меньше кол-во вычислений, иными словами алгоритм делает больше итераций, если задаваемая точность выше, что логично

Теперь рассмотрим алгоритм на примере многомодальной функции. Возьмем функцию:

$$f(x) = \begin{cases} x < 1, f(x) = |x| \\ x \geqslant 1, f(x) = |x-4| - 2 \end{cases}$$

Ее график:

График приведенной нами многомодальной функции:



Алгоритм выдает $x = 0$, как минимум всей функции, но как видно по графику, приведенному выше, минимум функции на отрезке $[-3, 7]$ достигается в точке $x = 4$, откуда следует вывод о том, что данный метод НЕ работает на многомодальных функциях. Однако стоит заметить, что данный алгоритм всегда находит минимум(локальный или глобальный)