«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Факультет информационных технологий и программирования

Кафедра компьютерных технологий

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1

Методы одномерной оптимизации

Вариант 4

Выполнили студенты:

Ефимов Сергей Алексеевич
группа: M3237

Соколов Александр Андреевич
группа: M3234

Проверил:

доцент кафедры суетологии
Пупкина Залупкина

г. Санкт-Петербург

Постановка задачи

Задача лаборатрной работы – научиться реализовывать алгоритмы одномерной минимизации функции каждым из следуших способов:

1. Метод дихотомии
2. Метод золотого сечения
3. Метод Фиббоначи
4. Метод парабол
5. Комбинированный метод Брента

Также необходимо решить задачу аналитически и привести отчет по результатам сравнения проведенных вычислений

Ход работы

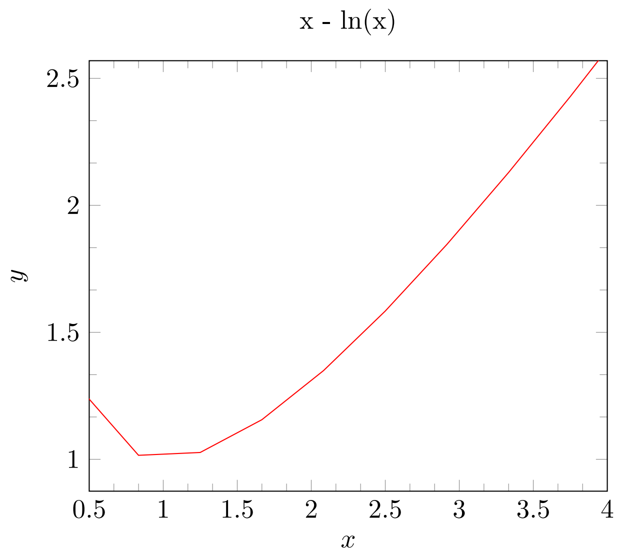
Исследуемая функция

$$f(x) = x - \ln(x)$$

Интервал исследования [0.5, 4]

1. Аналитическое решение

Для наглядности приведем график функции на заданном интервале:



Чтобы найти $/min$ функции необходимо найти ее критические точки(точки, в которых производная функции равна нуля $f'(x) = 0$):

$$f'(x) = (x - \ln(x))' = x' - \ln(x)' = 0$$

$$1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Итак, мы нашли критическую точку, теперь осталось сравнить три значения функции – в критической точке и в точках, являющиеся концами исследуемного отрезка. Пусть x критическая точка, a, b -начало и конец отрезка соответственно:

$$f(a) = 0.5 - \ln(0.5) \approx 0.5 + 0.6931 \approx 1.1931$$

$$f(b) = 4 - \ln(4) \approx 4 - 1.3863 \approx 2.6137$$

$$f(x) = 1 - \ln(1) = 1$$

Из приведенных выше вычислений можно утверждать, что min функции $f(x) = x - \ln(x)$ равен 1, при $x = 1$, (точка $M(1, 1)$)

Метод дихотомии

Давайте рассмотрим на примере нашей функции метод дихотомии, который основывается на методе приближений, сокращая интревал поиска таким образом. что сохраняется инвариант - с каждой интерацией отрезок сокращается, минимум находится в пределах отрезка.

Написав код к решению задачи данным способом(который можно увидеть ниже), мы имеем возможность привести таблицу выполнения данного алгоритма:

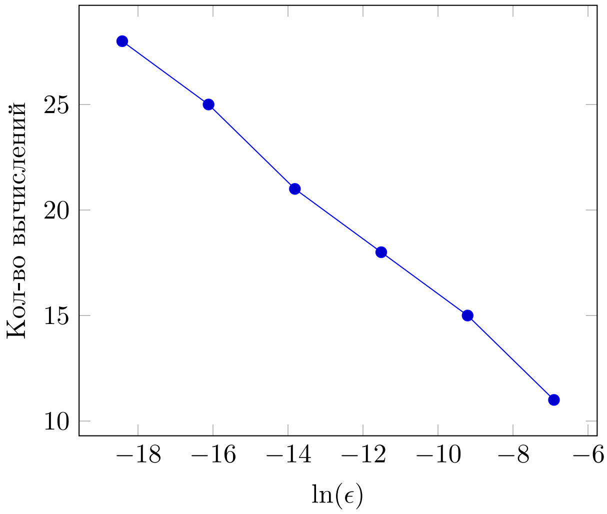
Текущий интервал	Соотношение отрезков	текущий минимум
[0.5, 4]	-	-
[0.5, 2.25]	1.999	1.375
[0.5 1.375]	1.999	0.9375
[0.973, 1.375]	1.999	1.156
[0.973, 1.156]	1.999	1.0468
[0.973, 1.0468]	1.999	0.992
[0.992, 1.0468]	1.999	1.019
[0.992, 1.019]	1.999	1.005
[0.992, 1.005]	1.999	0.999
[0.999, 1.005]	1.999	1.002
[0.999, 1.002]	1.999	1.001
[0.999, 1.001]	1.999	1.000

Исходя из данных таблицы можно утверждать, что каждую итерацию алгоритм сужает область поиска $\approx$ в 2 раза, что говорит о линейной сходимости данного алгоритма. Из этих соображений вытекает формула

$$|x_n - x_{min}| \leqslant \frac{1}{2^n} \cdot (b - a)$$

Чтобы оценить метод дихотомии давайте построим график зависимости кол-ва вычислений функции от логарифма точности:

График зависимости кол-ва вычислений функции от логарифма точности



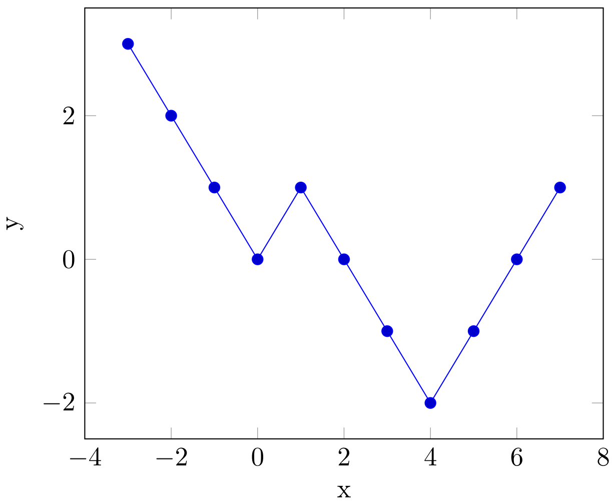
Исходя из графика можно говорить о том, что кол-во вычислений данного метода линейно зависит от $\ln(\epsilon)$ причем чем больше $\ln(\epsilon)$, тем меньше кол-во вычислений, иными словами алгоритм делает больше итераций, если задаваемая точность выше, что логично

Теперь рассмотрим алгоритм на примере многомодальной функции. Возьмем функцию:

$$f(x) = \begin{cases} x < 1, f(x) = |x| \\ x \geqslant 1, f(x) = |x-4| - 2 \end{cases}$$

Ее график:

График приведенной нами многомодальной функции:



Алгоритм выдает $x = 0$, как минимум всей функции, но как видно по графику, приведенному выше, минимум функции на отрезке $[-3, 7]$ достигается в точке $x = 4$, откуда следует вывод о том, что данный метод НЕ работает на многомодальных функциях.

Итого:

- Преимущества
  - Метод является одним из простых в реализации
  - Обеспечивает грантированную сходимость
- Недостатки
  - Сходимость метода всегда постоянна т.е. Метод никогда не сойдется быстрее чем в наихудшем случае

Метод золотого сечения

Теперь рассмотрим метод Золотого сечения. Принцип, который и дал название методу говорит о том, что мы будем сокращать интервал поиска нашего решения, причем делить текущий отрезок в прпорциях золотого сечения.

Давайте посмотри на точки, которые мы получим на очередном этапе выполнения данного метода и проанализируем полученные данные:

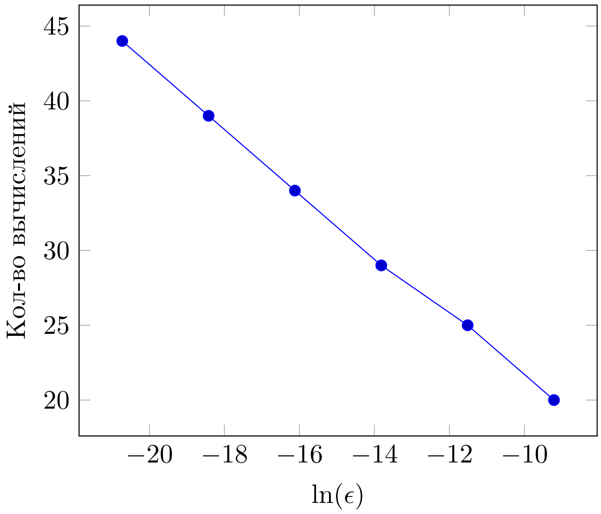
Интервал	Соотношение отрезков	текущий минимум	x1	x2
[0.5, 4]	-	-	-	-
[0.5, 2.663]	1.618	1.582	1.326	1.837
[0.5, 1.837]	1.618	1.168	1.011	1.326
[0.5, 1.326]	1.618	0.913	0.816	1.011
[0.816, 1.326]	1.618	1.071	1.011	1.131
[0.816, 1.131]	1.618	0.973	0.936	1.011
[0.936, 1.131]	1.618	1.034	1.011	1.057
[0.936, 1.057]	1.618	0.996	0.982	1.011
[0.982, 1.057]	1.618	1.019	1.011	1.028
[0.982, 1.028]	1.618	1.005	1	1.011
[0.982, 1.011]	1.618	0.996	0.993	1
[0.993, 1.011]	1.618	1.002	1	1.004
[0.993, 1.004]	1.618	0.998	0.997	1
[0.997, 1.004]	1.618	1.001	1	1.001
[0.997, 1.001]	1.618	0.999	0.999	1
[0.999, 1.001]	1.618	1	1	1
[0.999, 1]	1.618	1	0.999	1
[0.999, 1]	1.618	1	1	1
[1, 1]	1.618	1	1	1

Посмотрев на таблицу можно говорить о следущих вещах:

1. Соотношение отрезков всегда одинаковое(пропорция золотого сечения) что говорит о его гарантированной сходимости и скорости сходимости порядка n(линейная сходимость)
2. Различия с методом дихотомии

Чтобы сделать некоторые выводы по методу, давайте приведем график зависимости кол-ва итераций от $\ln(\epsilon)$

График зависимости кол-ва вычислений функции от логарифма точности



На графике явно видна линейная зависимость. Но чем же тогда отличается метод дихотомии от метода Золотого сечения? Стоит обратить внимание на эффективность данного алгоритма засчет деления отрезка в пропорциях золотого сечения.
Далее рассмотрим наш алгоритм на уже известной функции и пункта «Метод Дихотомии»

$$f(x) = \begin{cases} x < 1, f(x) = |x| \\ x \geqslant 1, f(x) = |x-4| - 2 \end{cases}$$

Алгоритм на которой выдает неверный результат.
Итого:

- Преимущества
  - Метод обладает неплохой эффективностью, выше чем у метода дихотомии, но существуют методы с более высокой эффективностью
- Недостатки
  - Метод выолняет большое кол-во итераций, поэтому велика возможность накопления ошибки, что не есть хорошо

Метод Фиббоначи

Очередной метод, который мы рассмотрим - метод Фиббоначи. Проанализированные ранее методы схожи с данным способом оптимизации. Его идея опять же заключается в последовательном делении отрезка поиска, НО есть различия, данный метод делит текущий отрезок на подотрезки следущим образом, что сохраняется равенство:

На отрезке $[a_k, b_k]$ имеем:

$$\lambda_k = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}} \cdot (b_k - a_k)$$

$$\mu_k = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} \cdot (b_k - a_k)$$

Где $k = 1, 2, 3, 4, ..., n-1$ и n - Общее число вычислений, а λ_k, μ_k - вычисляемые точки на итерации метода.

Чтобы говорить о дальнейшем анализе метода, давайте построим таблицу значений:

Интервал	Соотношение отрезков	текущий минимум	λ_k	μ_k
[0.5, 4]	-	-	-	-
[0.5, 2.663]	1.618	1.582	1.326	1.837
[0.5, 1.837]	1.618	1.168	1.011	1.326
[0.5, 1.326]	1.618	0.913	0.816	1.011
[0.816, 1.326]	1.618	1.071	1.011	1.131
[0.816, 1.131]	1.618	0.973	0.936	1.011
[0.936, 1.131]	1.618	1.034	1.011	1.057
[0.936, 1.057]	1.618	0.996	0.982	1.011
[0.982, 1.057]	1.618	1.019	1.011	1.028
[0.982, 1.028]	1.618	1.005	1	1.011
[0.982, 1.011]	1.618	0.996	0.993	1
[0.993, 1.011]	1.618	1.002	1	1.004
[0.993, 1.004]	1.618	0.998	0.997	1
[0.997, 1.004]	1.618	1.001	1	1.001
[0.997, 1.001]	1.618	0.999	0.999	1
[0.999, 1.001]	1.618	1	1	1
[0.999, 1]	1.618	1	0.999	1
[0.999, 1]	1.618	1	1	1
[1, 1]	1.618	1	1	1

Можно заметить, что таблица занчений очень похожа на таблицу значений метода Зологото сечения. Все различие с предыдущим подходом заключается в том, что коэфицент сокращения интервала поиска не статичен, он может меняться от итерации к итерации

Для большего кол-ва данных приведем график заыисимости от логарифма вычислений

График зависимости кол-ва вычислений функции от логарифма точности

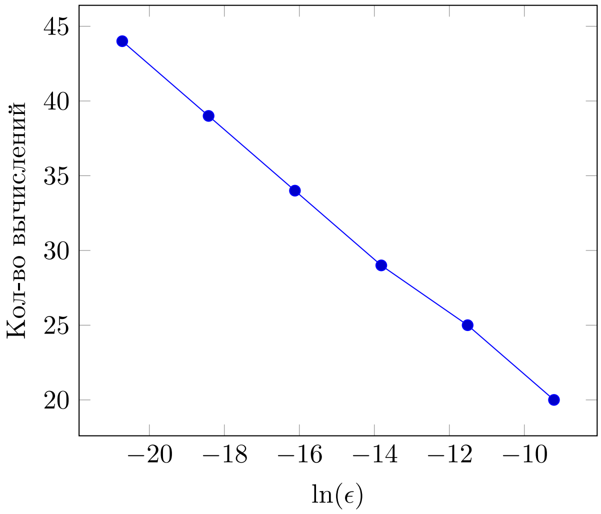


График получился аналогичный графику метода Золотого сечения. Можно подвести промежуточный итог:

- Преимущества
  - Метод является «надстройкой» метода золотого сечения, которая увеличивает эффективность алгоритма
- Недостатки
  - Необходимо знать n - кол-во итераций которое мы будем совершать

Метод парабол

Метод парабол принципиально другой метод оптимизации, нежели мы рассматривали ранее. Его основная идея заключается в нахождении квадратичной функции, с помощью которой мы попытаемся аппроксимировать минимизируемую функцию

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Пусть имеются три точки x1 $<$ x2 $<$ x3 такие, что интервал [x1, x3] содержит точку минимума функции f. Тогда коэффициенты аппроксимирующей параболы a, b, c могут быть найдены путем решения системы линейных уравнений:

$$ax_i^2 + bx_i + c_i = f(x_i), i = 1, 2, 3....$$

Минимум такой параболы равен:

$$u = -\frac{a}{2b} = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)^2(f_2 - f_3) - (x_2 - x_3)^2(f_2 - f_3)}{2[(x_2 - x_1)(f_2 - f_3) - (x_2 - x_3)(f_2 - f_3)]}$$

Этот мимимум и бует минимумом исходной функции на данной итерации

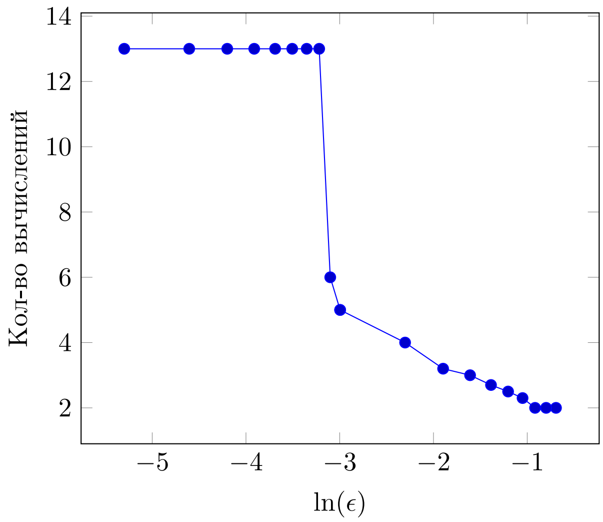
Построим таблицу значений данного метода:

Интервал	Соотношение отрезков	минимум параболы
[0.5, 4]	-	-
[0.5, 2.25]	2	1.375
[0.5, 1.218]	2.437	0.859
[0.912, 1.218]	2.343	1.065
[0.912, 1.027]	2.66	0.969
[0.912, 1.005]	1.23	0.958
[0.912, 1.001]	1.05	0.956
[0.912, 1]	1.008	0.956
[0.912, 1]	1.002	0.956
[1, 1]	∞	1

Стоит заметить, что данный метод совершил намного меньше итераций чем предыдущие.

Чтобы убедиться в этом построим график зависимости кол-ва вычислений от логарифма задаваемой точности:

График зависимости кол-ва вычислений функции от логарифма точности



Грфик говорит о квадратичной сходимости, которая дает свои плюсы и минусы

- Преимущества
  - Если необходима высокая точность решения, то данный метод хорошо подходит
  - Скорость сходимости. Алгоритм имеет квадратичную скорость сходимости
- Недостатки
  - Метод не надежен, Существуют функции на которых алгоритм дает сбой.

Комбинированный метод Брента