UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO
FACULTAD DE INGENIERÍA EN SISTEMAS, ELECTRÓNICA E INDUSTRIAL

CARRERA:

SOFTWARE
TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION

MÓDULO:
CÁLCULO DIFERENCIAL
DOCENTE:
ING. WASHINGTON MEDINA

SEGUNDO BIMESTRE

VALORACIÒN DE LAS ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN: Las actividades de aprendizaje serán evaluadas conforme al Reglamento de Evaluación Estudiantil aprobado con RESOLUCIÓN: CAU-P-223-20 de fecha 15 de abril del 2020, con los siguientes componentes:

<table>
<tr><th>COMPONENTE</th><th colspan="2">PORCENTAJE DE EVALUACIÓN</th><th>INSTRUMENTOS</th></tr>
<tr><td>APRENDIZAJE PRÁCTICO EXPERIMENTAL</td><td colspan="2">35%</td><td>Actividades de carácter práctico, exposiciones, talleres, trabajos de campo, prácticas de laboratorio, cursos, seminarios, visitas a empresas, proyectos integradores de saberes, resolución de problemas prácticos, comprobación, experimentación, contrastación, replicación de casos, fenómenos, métodos y otros, que pueden requerir uso de infraestructura (física o virtual), equipos, instrumentos y demás materiales.</td></tr>
<tr><td>APRENDIZAJE AUTÓNOMO</td><td colspan="2">30%</td><td>Lectura crítica de textos; investigación documental; escritura académica y/o científica; elaboración de informes, portafolios, proyectos, planes, presentaciones</td></tr>
<tr><td rowspan="2">APRENDIZAJE EN CONTACTO CON EL DOCENTE</td><td rowspan="2">35%</td><td>5%</td><td>Clases, conferencias, seminarios, talleres, proyectos en aula (presencial o virtual), evaluaciones escritas, o lecciones orales, ensayos, ensayos académicos, manejo de acervo bibliográfico.</td></tr>
<tr><td>30%</td><td>1. Evaluaciones sumativas rendidas por el estudiante que contemplen exámenes escritos de los cuales al menos uno debe ser por reactivos; para los exámenes escritos que no sean tipo reactivo se debe realizar una rúbrica de evaluación. El valor final de la evaluación sumativa será el promedio de las evaluaciones realizadas.
Evaluaciones diagnósticas no cuantitativas</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>COMPONENTE</th><th colspan="2">PORCENTAJE DE EVALUACIÓN</th><th>INSTRUMENTOS</th><th>PUNTAJE</th></tr>
<tr><td>APRENDIZAJE PRÁCTICO EXPERIMENTAL</td><td colspan="2">35%</td><td>EVALUACION 1: TAREAS Y TALLERES DE RESOLUCION DE PROBLEMAS

EVALUACION 2: TAREAS Y TALLERES DE RESOLUCION DE PROBLEMAS</td><td>2,0

1,5</td></tr>
<tr><td>APRENDIZAJE AUTÓNOMO</td><td colspan="2">30%</td><td>CUADERNO
PROYECTO</td><td>1,5
1,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">APRENDIZAJE EN CONTACTO CON EL DOCENTE</td><td rowspan="2">35%</td><td>5%</td><td>EVALUACION DE PRACTICA DE RESOLUCION DE EJERCICIOS</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>30%</td><td>EVALUACION 1
PRIMER PARCIAL

EVALUACION 2
PRIMER PARCIAL</td><td>1,5

1,5</td></tr>
</table>

SEGUNDO BIMESTRE

SEMANA # 9

Fecha:…………………………………………

Tema 1: aplicaciones de la derivada a problemas de máximos y mínimos optimización.
Objetivo: resolver problemas de optimización aplicando conceptos de máximos y mínimos.

Tema 2: aplicaciones generales (regla de L´hopital al cálculo de límites)
Objetivo: resolver problemas de límites indeterminados utilizando la regla de L´hopital basada en derivadas

PROYECTO INTEGRADOR DE SABERES:

Referencia ejercicios: (pág. 72, Cálculo diferencial integral de Granville)

a. (ejercicio 1)Una pieza cuadrada de hojalata de 10 cm de lado se utiliza para construir una caja abierta en la parte superior, que permita almacenar el mayor volumen posible, cortando en las esquinas cuadrados iguales y doblando hacia arriba. ¿Cuál debe ser la longitud de los lados cortados? (resp. 1.67 cm)

b. (ejercicio 7)Se desea construir una valla alrededor de un campo rectangular. Y dividirlo en dos parcelas utilizando otra valla paralela a uno de sus lados. Si el área del campo es de 300 m^2, hallar las dimensiones de los lados para que la longitud de las vallas sea la mínima. (resp: 21.22x14,13).

c. (ejercicio 12) El costo total de producir x artículos por semana es $[Costo = ax^2 + bx + c]USD$ y el precio al que cada uno debe venderse es $[Precio = \beta - \alpha x^2]$. Demostrar que la producción total para la ganancia máxima es:

$$x = \frac{\sqrt{a^2+3\alpha(\beta-b)}-a}{3\alpha}.$$

d. (ejercicio 20)Hallar el área mayor rectangular, con lados paralelos a los ejes de coordenadas, que puede inscribirse en la figura limitada para las dos parábolas $3y = 12 - x^2 \wedge 6y = x^2 - 12$. (resp: 16)

e. Según una ordenanza municipal, el área del papel de un cartel no debe ser mayor de $2{,}25m^2$. Se desea que los márgenes sean de 15 cm de arriba y abajo y, de 10 cm de derecha e izquierda. ¿Qué dimensiones del cartel darán la máxima área de impresión? (resp: 1.22m x 1.84m)

f. Se desea construir una valla alrededor de un campo rectangular y dividirlo en dos parcelas por otra valla paralela de uno de los lados. Si la longitud total de las vallas es de 100 metros, calcular las dimensiones de las parcelas para que el área sea la máxima (resp: 50/3 x 25/2)

g. Se quiere construir una caja rectangular de base cuadrada, abierta por arriba. Calcular el volumen de la mayor caja que se puede obtener de $1200\ cm^2$ de material. (resp. 4000 m3)

h. Se desea construir un depósito rectangular de base cuadrada abierta por arriba. Debe tener $125m^3$ de capacidad. Si el costo de las áreas laterales es de 2 dólares por m^2 y el del fondo es de 8 dólares por m^2 ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el costo sea mínimo?. (resp: x= 4 ; y = 7,90)

i. Un prado rectangular de un jardín ha de tener 72 m^2 de área. Debe rodearse de un paseo de 1 metro de ancho en los lados y 2 metros de ancho en las extremidades. Si el área total del prado y del paseo es mínima ¿cuáles son las dimensiones del prado? (resp: x=12m , y = 6m)

La regla de L'Hôpital se usa directamente para resolver las indeterminaciones cero entre cero e infinito entre infinito:

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

Utilizamos esta regla cuando no es posible resolver los límites con otros métodos o para simplificar los cálculos.

Indirectamente podemos utilizar la regla de L'Hôpital con estos tipos de indeterminaciones: infinito menos infinito, cero por infinito, cero elevado a cero, uno elevado a infinito e infinito elevado a cero, ya que durante su método de resolución se reducen a las dos indeterminaciones anteriores (cero entre cero e infinito entre infinito):

$$\infty - \infty \qquad 0.\infty \qquad 0^0 \qquad 1^\infty \qquad \infty^0$$

Nos vamos a centrar sólo en resolver límites con indeterminaciones cero entre cero e infinito entre infinito para resolverlas mediante la regla de L'Hôpital.

En qué consiste la regla de L'Hôpital:

La regla de L'Hôpital consiste en que si tenemos el límite de una función racional, donde tanto el numerador como el denominador son funciones, es decir, funciones que tengan esta forma:

$$\lim_{x\to k} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

podemos **derivar la función del numerador por un lado y el denominador por otro**, con lo que eliminaremos la indeterminación y obtendremos una nueva función racional, cuyo límite será igual al límite de la función original:

$$\lim_{x\to k} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to k} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Es decir, para aplicar la regla de L'Hôpital, tan sólo tenemos que derivar en el numerador y en el denominador hasta que al sustituir por el número al que tiende el límite, tengamos una solución finita. Mucho cuidado, ya que **la función del numerador y la función del denominador se derivan como si fueran funciones independientes** la una de la otra. No es correcto derivar la función como una división de funciones.

TAREA 9: REGLA DE L´HOPITAL PARA EL CALCULO DE LIMITES

Resolver 10 ejercicios de límites anteriores en los que se pueda aplicar la regla de l´hopital y numerarlos del 145 al 154

SEMANA # 10

Fecha:……………………………………………..
Tema: CALCULO INTEGRAL: Concepto, Integral indefinida, generalidades
Objetivo: analizar el proceso para obtener la función primitiva partiendo de su derivada

EXPLICACION Y CONSULTA CONCEPTUAL SOBRE INTEGRAL INDEFINIDA

Formulas de integración elemental ó básica: COPIAR EL FORMULARIO

NOTA. Se debe tomar en cuenta que: TODA FUNCION ES DERIVABLE PERO NO TODA FUNCION ES INTEGRABLE Para cuando se presenten casos donde no pueda integrarse por fórmulas, su solución requiere de métodos aproximados ***(METODOS NUMERICOS)***

Resolver las siguientes integrales indefinidas aplicando fórmulas básicas

155. $\int x^4\, dx$
156. $\int x^{\frac{2}{3}}\, dx$
157. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$
158. $\int (x^2 - 3x + 5)\, dx$
159. $\int \frac{2}{t^2}\, dt$
160. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}}$
161. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x}}$
162. $\int \left(x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{2}{3}} + 5\sqrt{x} - 3\right)\, dx$
163. $\int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2}\right)\, dx$
164. $\int \left(\frac{x^2-6x+5}{x}\right)\, dx$
165. $\int \frac{dx}{x^2}$
166. $\int \frac{dx}{x^2+16}$
167. $\int \frac{dx}{x^2-16}$
168. $\int \frac{dx}{16-x^2}$

169. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}}$

170. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+15}}$

171. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}$

172. $\int \sqrt{5x^2-35}dx$

173. $\int \sqrt{5-x^2}dx$

174. $\int \sqrt{5+7x^2}dx$

175. $\int \sqrt{5x^2-17}dx$

TAREA # 10: Resolver los siguientes ejercicios

EJERCICIOS	SUGERENCIAS	RESPUESTA
176. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$	Pasar al numerador con exponente fraccionario	$2\sqrt{x}+c$
177. $\int 3ay^2\ dy$	Ubicar la constante 3ª fuera del integral	ay^3+c
178. $\int \sqrt{ax}\ dx$	Separar la raíz cuadrada de la constante a y ubicarla fuera de la integral	$\frac{2x\sqrt{ax}}{3}+c$
179. $\int \frac{4x^2-2\sqrt{x}}{x}\ dx$	Compartir el denomidador X para cada término del numerador	$2x^2-4\sqrt{x}+c$
180. $\int \sqrt{x}\,(3x-2)\ dx$	Destruir paréntesis	$\frac{6x^2\sqrt{x}}{5}-\frac{4x\sqrt{x}}{3}+c$
181. $\int (a+bt)^2\ dt$	Resolver el cuadrado del binomio	$a^2t+abt^2+\frac{b^2t^3}{3}+c$
182. $\int y(a-by^2)\ dy$	Destruir paréntesis	$\frac{ay^2}{2}-\frac{by^4}{4}+c$
183. $\int x\,(2+x^2)^2\ dx$	Resolver el binomio y desrtuir paréntesis	$2x^2+x^4+\frac{x^6}{6}+c$
184. $\int x\,(2x+1)^2\ dx$	Resolver el binomio y desrtuir paréntesis	$x^4+\frac{4x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+c$
185. $\int (\sqrt{a}-\sqrt{x})^2\ dx$	Resolver el binomio	$ax-\frac{4x\sqrt{ax}}{3}+\frac{x^2}{2}+c$
186. $\int \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\ dx$	Resolver el binomio y compartir el denominador	$2a\sqrt{x}-2\sqrt{a}x+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+c$
187. $\int \sqrt{x}(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2\ dx$	Resolver el binomio y desrtuir paréntesis	$\frac{2ax\sqrt{x}}{3}-\sqrt{a}x^2+\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}+c$

188. $\int \sqrt[3]{3t}\ dt$	Separar la constante y la variable y ubicar la constante fuera del integral	$\frac{3t\sqrt[3]{3t}}{4}$ + c
189. $\int z\,(a + bz^3)^2\,dz$	Resolver el binomio y desrtuir paréntesis	$\dfrac{a^2z^2}{2} + \dfrac{2abz^5}{5} + \dfrac{b^2z^8}{8} + c$

RESOLVER LAS SIGUIENTES INTEGRALES Cálculo diferencial integral de Granville Página 248: del 1 al 8 (numerar del 190 al 197)

SEMANA # 11

Fecha:……………………………….

Tema: integración por sustitución Y/O cambio de variable

EXPLICACION Y CONSULTA CONCEPTUAL SOBRE INTEGRAL INDEFINIDA CON SUSTITUCION O CAMBIO DE VARIABLE

Resolver los siguientes ejercicios aplicando cambio de variable

EL OBJETIVO DE CAMBIAR LA VARIABLE ES TRANSFORMAR AL EJERCICIO ORIGINAL EN OTRO EN EL CUAL SE PUEDA APLICAR LA FORMULA DE INTEGRACION

Resolver las siguientes integrales

198. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}}$
199. $\int \frac{1}{3x^2-2}\ dx$
200. $\int \frac{x}{3x^2-2}\ dx$
201. $\int \frac{x^2-3x+5}{x-7}\ dx$
202. $\int e^{5x}\ dx$
203. $\int \frac{2}{\sqrt{3+2x}}\ dx$
204. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\ dx$

205. $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+6}\ dx$

206. $\int xe^{x^2}\ dx$

207. $\int e^{\sin x} \cos x\ dx$

TAREA # 11: Resolver los siguientes ejercicios

208. $\int \sqrt{a+bx}\, dx$

209. $\int \frac{dy}{\sqrt{a-by}}$

210. $\int t\sqrt{2t^2+3}\, dt$

211. $\int \frac{4x^2}{\sqrt{x^3+8}}\ dx$

212. $\int \frac{6z}{(5-3z^2)^2}\ dz$

213. $\int \frac{t^3}{\sqrt{a^4+t^4}}\ dt$

214. $\int \frac{dy}{(a+by)^3}$

215. $\int \frac{x\ dx}{(a+bx^2)^3}$

216. $\int \frac{t^2\ dt}{(a+bt^3)^2}$

217. $\int x^{m-1}\sqrt{a+bx^m}\ \ dx$

218. $\int \frac{(2x+3)}{\sqrt{x^2+3x}}\ dx$

219. $\int \frac{(x^2+1)}{\sqrt{x^3+3x}}\ dx$

220. $\int \frac{(2+\ln x)}{x}\ dx$

221. $\int \sin^2 x \cos x\ dx$

222. $\int \sin ax \cos ax\ dx$

223. $\int \sin 2x\ \cos^2 2x\, dx$

224. $\int \tan\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\ dx$

225. $\int \frac{\cos ax}{\sqrt{b+\sin ax}}\ dx$

226. $\int \left(\frac{\sec x}{1+\tan x}\right)^2 dx$

227. $\int \frac{dx}{2+3x}$

228. $\int \frac{x^2}{2+x^3}\ dx$

229. $\int \frac{t}{a+bt^2}\ dt$

230. $\int \frac{(2x+3)}{x^2+3x}\ dx$

231. $\int \frac{(y+2)}{y^2+4y}\ dy$

232. $\int \frac{e^{\theta}\ d\theta}{a+be^{\theta}}$

233. $\int \frac{\sin x}{1-\cos x}\ dx$

234. $\int \frac{\sec^2 y}{a+\tan y}\ dy$

235. $\int \frac{(2x+3)}{x+2}\ dx$

236. $\int \frac{(x^2+2)}{x+1}\ dx$

237. $\int \frac{(x+4)}{2x+3}\ dx$

238. $\int \frac{e^{2s}}{e^{2s}+1}\ ds$

239. $\int \frac{e^{x}}{e^{2x}+1}\ dx$

<u>SEMANA # 12</u>

Fecha:…………………………….

Tema: integración de la forma ax2 + bx + c

Objetivo: Aplicar los procesos algebraicos de completación de trinomios para la solución de integrales

EXPLICACION Y CONSULTA CONCEPTUAL SOBRE INTEGRAL INDEFINIDA DE LA FORMA AX2 + BX + C

Resolver los siguientes ejercicios

240. $\int \frac{dx}{x^2-7x+9}$

241. $\int \frac{dy}{y^2-5y+8}$

242. $\int \frac{dx}{x^2-4x+4}$

243. $\int \frac{e^x\ dx}{1+e^{2x}}$

244. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-3x\ \ -16x^2}}$

245. $\int \frac{t}{\sqrt{t^4-4}}dt$

246. $\int \frac{dx}{m^2+(x+n)^2}$

247. $\int \frac{dx}{x^2-7x+8}$
248. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$
249. $\int \frac{\cos\theta}{4-\sin^2\theta}\, d\theta$
250. $\int \frac{1}{x^2-4x+7} dx$

TAREA # 12: Resolver los siguientes ejercicios

251. $\int \frac{5}{x^2+2x+5}\ dx$
252. $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$
253. $\int \frac{dx}{x^2-8x+25}$
254. $\int \frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}$
255. $\int \frac{dx}{4x-x^2}$
256. $\int \frac{dx}{1+x+x^2}$
257. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$
258. $\int \frac{dx}{x^2+2x}$
259. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$
260. $\int \frac{dy}{y^2+3y+1}$
261. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$
262. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$
263. $\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$
264. $\int \frac{dy}{3-2y-y^2}$
265. $\int \frac{5\ dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$
266. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$
267. $\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$
268. $\int \frac{dr}{r^2-2r-3}$
269. $\int \frac{dz}{\sqrt{3+2z-z^2}}$
270. $\int \sqrt{1-4x^2}\ dx$

271. $\int \sqrt{4x^2 + 9}\ dx$
272. $\int \sqrt{5 - 2x + x^2}\ dx$
273. $\int \frac{1+2x}{1+x^2}\ dx$
274. $\int \frac{3t-2}{\sqrt{9-t^2}}\ dt$
275. $\int \frac{(x+3)}{\sqrt{x^2+2x}}\ dx$
276. $\int \frac{(x+3)}{\sqrt{2x-x^2}}\ dx$
277. $\int \frac{(2x+1)}{\sqrt{x^2-1}}\ dx$
278. $\int \frac{(5t-t)}{\sqrt{3t^2-9}}\ dt$
279. $\int \frac{(3x-2)}{1-6x-9x^2}\ dx$
280. $\int \frac{(x+2)}{\sqrt{4x-x^2}}\ dx$
281. $\int \frac{x}{\sqrt{27+6x-x^2}}\ dx$
282. $\int \frac{3t-2}{\sqrt{9-t^2}}\ dt$
283. $\int \sqrt{25 - 9x^2}\ dx$
284. $\int \sqrt{x^2 - 2x + 8}\ dx$
285. $\int \sqrt{5 - 3x^2}\ dx$
286. $\int (5 - 2x + x^2)\ dx$

SEMANA # 13

Fecha:……………………………...
Tema: integración con funciones, reducciones y sustituciones trigonométricas.

EXPLICACION Y CONSULTA CONCEPTUAL SOBRE FUNCIONES, REDUCCIONES Y SUSTITUCIONES TRIGONOMETRICAS

$$\sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow 1 - sin^2 x \quad \gg x = \ a * \operatorname{sen} u$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} \rightarrow 1 + tag^2 x \ \gg x = a * \operatorname{tag} u$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} \rightarrow Sec^2x - 1 \gg x = a * \sec u$$

Proporcionar formulario

Integrar las siguientes funciones.

287. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

288. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

289. $\int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx$

290. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

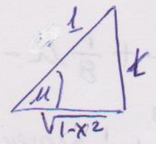
291. $\int \frac{\sqrt{16-t^2}}{t^2}\,dt$

292. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}\,dx$

EJERCICIOS RESUELTOS 287, 288, 289, 290, 291, 292:

287

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$



$\sqrt{1-x^2} \approx \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u} \Rightarrow \quad x = \operatorname{sen} u \Rightarrow u = \operatorname{arcsen} x$

$dx = \cos u\,du$

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 u \cdot \cos u\,du}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 u \cos u\,du}{\sqrt{\cos^2 u}} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 u\, \cancel{\cos u}\,du}{\cancel{\cos u}}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 u\,du \qquad \boxed{\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + c} \text{ FOR\# 141}$$

$$\frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + c = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}2\cdot \operatorname{sen} u \cos u + c$$

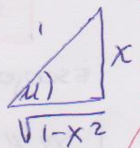
$$\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{1-x^2} + c = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + c$$

288

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$1 - x^2 \approx 1 - \operatorname{sen}^2 u \Rightarrow \quad x = \operatorname{sen} u$

$u = \operatorname{arcsen} x$



$x = \operatorname{sen} u$

$dx = \cos u\,du$

$$\int \operatorname{sen}^2 u\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}\,\cos u\,du$$

$$\int \operatorname{sen}^2 u\sqrt{\cos^2 u}\,\cos u\,du$$

$$\int \operatorname{sen}^2 u \cdot \cos u \cdot \cos u\,du$$

$$\int \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u\,du$$

$\boxed{\text{FOR\# 161 ó 162}}$

ELEGIMOS LA 161

$$\int \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u\,du = \frac{\cos u \operatorname{sen}^3 u}{4} + \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 u\,du$$

FOR# 141

$$= \frac{\cos u \operatorname{sen}^3 u}{4} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u\right] + c$$

$$= \frac{\cos u \operatorname{sen}^3 u}{4} + \frac{1}{8}u - \frac{1}{16}\cdot 2\operatorname{sen} u \cos u + c$$

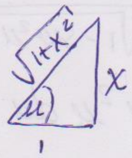
$$\frac{\cos u\,\text{sen}^3 u}{4} + \frac{1}{8}u - \frac{1}{8}\,\text{sen}\,u\cos u + C$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot x^3}{4} + \frac{1}{8}\,\text{arcsen}\,x - \frac{1}{8}x\sqrt{1-x^2} + C$$

$\boxed{289}$ $\int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx$

$1+x^2 = 1+\text{tg}^2 u \Rightarrow x = \text{tg}\,u$

$dx = \sec^2 u\,du$



$$\int \text{tg}^2 u\sqrt{1+\text{tg}^2 u}\cdot \sec^2 u\,du$$

$$\int \text{tg}^2 u\sqrt{\sec^2 u}\,\sec^2 u\,du = \int \text{tg}^2 u\sec^3 u\,du$$

$$\int \frac{\text{sen}^2 u}{\cos^2 u}\cdot\frac{1}{\cos^3 u}\,du = \int \frac{\text{sen}^2 u}{\cos^5 u}\,du$$

$\boxed{\text{FOR\# 167 ó 168}}$

Escojo la 167: $n=2;\ m=5$

$$\int \frac{\text{sen}^2 u}{\cos^5 u}\,du = \frac{\text{sen}^3 u}{4\cos^4 u} + \frac{1}{4}\int\frac{\text{sen}^2 u}{\cos^3 u}\,du$$

FOR#167 $n=2,\ m=3$

$$= \frac{\text{sen}^3 u}{4\cos^4 u} + \frac{1}{4}\left[\frac{\text{sen}^3 u}{2\cos^2 u} - \frac{1}{2}\int\frac{\text{sen}^2 u}{\cos u}\,du\right]$$

$$= \frac{\text{sen}^3 u}{4\cos^4 u} + \frac{\text{sen}^3 u}{8\cos^2 u} - \frac{1}{8}\int\frac{(1-\cos^2 u)}{\cos u}\,du$$

$$= \frac{\text{sen}^3 u}{4\cos^4 u} + \frac{\text{sen}^3 u}{8\cos^2 u} - \frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{\cos u} - \cos u\right)du$$

$$= \frac{\text{sen}^3 u}{4\cos^4 u} + \frac{\text{sen}^3 u}{8\cos^2 u} - \frac{1}{8}\int\sec u\,du + \frac{1}{8}\int\cos u\,du$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\text{tg}^3 u\cdot\frac{1}{\cos u} + \frac{1}{8}\text{tg}^2 u\cdot\text{sen}\,u - \frac{1}{8}\ln(\sec u + \text{tg}\,u) + \frac{1}{8}\text{sen}\,u + C$$

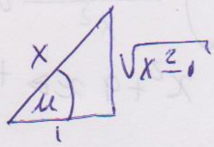
$$= \frac{1}{4}\cdot x^3\sqrt{1+x^2} + \frac{x^3}{8\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) + \frac{x}{8\sqrt{1+x^2}} + C$$

290

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$x^2-1 \approx \sec^2 u - 1 \Rightarrow x = \sec u$

$dx = \sec u \, tg\, u\, du$



$$\int \frac{\sec^2 u \cdot \sec u\, tg\, u\, du}{\sqrt{\sec^2 u - 1}} = \int \frac{\sec^3 u\, tg\, u\, du}{\sqrt{tg^2 u}} = \int \sec^3 u\, du$$

FOR# 160 ⇒ $n=3$

$$\int \sec^3 u\, du = \frac{\operatorname{sen} u}{2\cos^2 u} + \frac{1}{2}\int \sec u\, du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot tg\, u \cdot \frac{1}{\cos u} + \frac{1}{2}\ln(\sec u + tg\, u) + c$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c$$

291

$$\int \frac{\sqrt{16-t^2}}{t^2}\,dt$$

$16 - t^2 \approx 1 - \operatorname{sen}^2 u \Rightarrow t = 4\operatorname{sen} u$

$\operatorname{sen} u = \frac{t}{4}$

$dt = 4\cos u\, du$

$$\int \frac{\sqrt{16-16\operatorname{sen}^2 u}}{16\operatorname{sen}^2 u}\cdot 4\cos u\, du = \int \frac{4\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}\, 4\cos u\, du}{16\operatorname{sen}^2 u}$$

$$\int \frac{\cos^2 u\, du}{\operatorname{sen}^2 u} = \int ctg^2 u\, du$$

OPCIONES ⇒ a.- FORMULA # 170 (170)
b.- $ctg^2 u = \csc^2 u - 1$
c. FORMULA 165
d: FORMULA 166

POR FORMULA: ⇒ $n=2$

$$\left[-\frac{ctg\, u}{1} - \int du\right.$$

$$(-ctg\, u - u) + c$$

$$-\frac{\sqrt{16-t^2}}{t} - \operatorname{arc\,sen}\frac{t}{4} + c$$

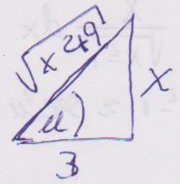
$$-\frac{\sqrt{16-t^2}}{t} - \operatorname{arc\,sen}\frac{t}{4} + c$$

292

$$\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}\,dx$$

$x^2+9 \approx\!> tg^2 u + 1 \Rightarrow$ $x = 3tg\,u$

$dx = 3sec^2 u\,du$



$$\int \frac{\sqrt{9tg^2u+9}\cdot 3sec^2u\,du}{9\,tg^2u} = \int \frac{3\sqrt{tg^2u+1}\cdot 3sec^2u\,du}{9\,tg^2u}$$

$$\int \frac{3\sqrt{sec^2u}\cdot 3\,sec^2u\,du}{9\,tg^2u} = \int \frac{sec^3u\,du}{tg^2u}$$

$$\int \frac{1}{cos^3u}\cdot\frac{cos^2u}{sen^2u}\,du = \int \frac{du}{cos\,u\cdot sen^2u}$$

FOR# 163 ó 164

ESCOJO la 164 ; $m=1$; $n=2$

$$\int \frac{du}{cos\,u\,sen^2u} = -\frac{1}{sen\,u\cdot cos^0u} + \frac{1+2-2}{2-1}\int\frac{du}{cos\,u\cdot sen^0u}$$

$$= -\frac{1}{sen\,u} + \int\frac{du}{cos\,u} = -\frac{1}{sen\,u} + \int sec\,u\,du$$

$$-\frac{1}{sen\,u} + ln(sec\,u + tg\,u) + c$$

$$-\frac{\sqrt{x^2+9}}{x} + ln\left(\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{x}{3}\right) + c$$

$$-\frac{\sqrt{x^2+9}}{x} + ln\left(\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{3}\right) + c$$

$$-\frac{\sqrt{x^2+9}}{x} + ln(\sqrt{x^2+9}+x) - ln(3) + c$$

$$-\frac{\sqrt{x^2+9}}{x} + ln(\sqrt{x^2+9}+x) + C$$

TAREA # 13: Integrar las siguientes funciones (granville pag. 268 1 al 10 pares) NUMERAR DEL 293 AL 297

SEMANA # 14

Fecha:……………………………………

Tema: integración por partes

Objetivo: Modificar el ejercicio original para aplicar integración directa

EXPLICACION Y CONSULTA CONCEPTUAL SOBRE INTEGRACION POR PARTES

Ejercicios:

298. $\int \ln x \ dx$
299. $\int xe^x \ dx$
300. $\int x \cos x \, dx$
301. $\int x^2 e^x \ dx$
302. $\int e^x \cos x \ dx$

RECOMENDACIÓN: PARA LA APLICACIÓN DE LA INTEGRACION POR PARTES, SE RECOMIENDA REEMPLAZAR U POR EL ORDEN SIGUIENTE:

INVERSA - LOGARITMICA – ALGEBRAICA – TRIGONOMETRICA- EXPONENCIAL

ILATE

EJERCIOS DE LA FORMA: INTEGRACION POR PARTES.

ANALISIS :

$$y = uV \Rightarrow y' = u'V + uV'$$

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\,du + u\,dv}{dx}$$

$$dy = v\,du + u\,dv$$

$$\Rightarrow \int dy = \int v\,du + \int u\,dv$$

$$y = \int v\,du + \int u\,dv$$

$$\int u\,dv = y - \int v\,du$$

INTEGRACION POR PARTES $\longrightarrow$ $\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$

EJERCICIOS :

298 $\int \ln x\,dx$

$u = \ln x \qquad V = \int dx$

$du = \frac{dx}{x} \qquad V = x$

$$\int \ln x\,dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= x\ln x - \int dx$$

$$= x\ln x - x + C$$

299.- $\int x e^x dx$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$v = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$

$= x e^x - e^x + C$

300.- $\int x \cos x \, dx$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$v = \int \cos x \, dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x$

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

$\int x \cos x = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx$

$= x \operatorname{sen} x + \cos x + C$

301.- $\int x^2 e^x dx$

$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$

$v = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x . 2x dx$

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$

$= x^2 e^x - 2 [x e^x - e^x] + C$

$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$

302

$$\int e^x \cos x \, dx$$

$u = e^x \qquad v = \int \cos x \, dx$

$du = e^x dx \qquad v = \operatorname{sen} x$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

$u = e^x \qquad v = \int \operatorname{sen} x \, dx$

$du = e^x dx \qquad v = -\cos x$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left[-e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \right]$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$2\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + c$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2} + c \;///$$

TAREA # 14: Resolver los siguientes ejercicios

303. $\int x \sin^2 3x \; dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{12} sin6x - \frac{1}{72} cos6x + c$
304. $\int xa^x \, dx = \frac{xa^x}{lna} - \frac{a^x}{ln^2 a} + c$
305. $\int arc \sin x \; dx = xarcsinx + \sqrt{1-x^2} \; + c$
306. $\int arc \cot y \; dy = yarcctgy + \frac{1}{2} \ln{(1+y^2)} + c$
307. $\int arc \sec y \; dy = yarcsecy - \ln{(y + \sqrt{y^2-1}} + c$
308. $\int x \; arc \tan x \; dx = \frac{x^2}{2} arctanx - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} arctanx + c$
309. $\int x^2 e^{-x} \, dx = \; -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$
310. $\int \frac{\ln x}{(x+1)^2} \, dx = -\frac{lnx}{(x+1)} + \int \frac{dx}{x(x+1)}$ *(se aplicará fracciones parciales o completando trinomio)*

$$\int \frac{\ln x}{(x+1)^2} \, dx = -\frac{lnx}{(x+1)} + \; lnx - \ln(x+1) + c$$

311. $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} \, dx = 2\sqrt{x+1} \ln(x+1) - 4\sqrt{x+1} + c$
312. $\int e^{-t} \cos \pi t \; dt = \frac{\pi}{\pi^2+1} e^{-t} \left(sin\pi t - \frac{1}{\pi} cos\pi t \right) + c$

SEMANA # 15

Fecha: ………………………………

Tema: integración de fracciones racionales (funciones parciales)

EXPLICACION Y CONSULTA CONCEPTUAL LOS CASOS DE FRACCIONES PARCIALES

43. Aplicación de la teoría de las fracciones racionales

función racional entera. E*s aquella cuya variable no está afectada por exponentes negativos o fraccionarios.*

Si una integral es una fracción racional es decir, tanto el numerador como el denominador son funciones racionales y el grado del numerador es mayor o igual al grado del denominador, la fracción puede reducirse realizando la división, es decir:

$$\frac{Nx}{Dx} = C + \frac{R}{D}$$

Pero, en caso de que la fracción R/D no posibilite la integración directa o la integración aplicando los métodos hasta el momento conocidos, es posible descomponer la expresión en fracciones parciales aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

Para descomponer fracciones vamos a considerar los siguientes casos,

Primer caso. L*os factores del denominador son todos de primer grado y ninguno se repite*

$$\frac{2x+5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\frac{2x+5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)}$$

$$\frac{2x+5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A(x^2+x-6) + B(x^2+3x) + C(x^2-2x)}{x(x-2)(x+3)}$$

$$\frac{2x+5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{Ax^2 + Ax - 6A + Bx^2 + 3Bx + Cx^2 - 2Cx)}{x(x-2)(x+3)}$$

$$\frac{2x+5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{(A+B+C)x^2 + (A+3B-2C)x + (-6A)}{x(x-2)(x+3)}$$

IGUALAMOS LOS NUMERADORES:

$$2x + 5 = x^2(A + B + C) + x(A + 3B - 2C) - 6A$$
$$A + B + C = 0$$
$$A + 3B - 2C = 2$$
$$-6A = 5$$
$$A = -\frac{5}{6}, B = \frac{9}{10}, C = -\frac{1}{15}$$

$$\frac{2x + 5}{x(x - 2)(x + 3)} = -\frac{5}{6x} + \frac{9}{10(x - 2)} - \frac{1}{15(x + 3)}$$

Segundo caso. *Los factores del denominador son todos de primer grado y algunos se repiten.*

$$\frac{N}{(x - m)^n} = \frac{N}{(x - m)^n} + \frac{N}{(x - m)^{n-1}} + \frac{N}{(x - m)^{n-2}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{N}{(x - m)^1}$$

Ejemplo

$$\frac{x^3 + 1}{x(x - 1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x - 1)^3} + \frac{C}{(x - 1)^2} + \frac{D}{(x - 1)}$$

$$\frac{x^3 + 1}{x(x - 1)^3} = \frac{A(x - 1)^3 + Bx + Cx(x - 1) + Dx(x - 1)^2}{x(x - 1)^3}$$

Aplicando el método de los coeficientes indeterminados

$$x^3: \quad A + D = 1$$
$$x^2: \quad -3A + C - 2D = 0$$
$$x: 3A + B - C + D = 0$$
$$Ind: \; -A = 1$$

$$resolviendo \quad el \quad sistema:$$
$$A = -1 \quad B = 2 \quad C = 1 \quad D = 2$$
$$\frac{x^3 + 1}{x(x - 1)^3} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{(x - 1)^3} + \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{2}{(x - 1)}$$

Tercer caso. *El denominador contiene factores de segundo grado pero ninguno se repite.*

$$\frac{N}{x^2 + Px + Q} = \frac{Ax + B}{x^2 + Px + Q}$$

Ejemplo.

$$\frac{2x + 5}{(x^2 + 6)(x^2 + 5)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 6} + \frac{Cx + D}{x^2 + 5}$$

$$2x+5=(Ax+B)(x^2+5)+(Cx+D)(x^2+6)$$

$$A=-2\ B=-5\ \ C=2\ \ D=5$$

$$\frac{2+5}{(x^2+6)(x^2+5)}=\frac{-2x-5}{x^2+6}+\frac{2x+5}{x^2+5}$$

Cuarto caso. E*l denominador contiene factores de segundo grado y algunos se repiten*

$$\frac{N}{(x^2+Px+Q)^n}=\frac{Ax+B}{(x^2+Px+Q)^n}+\frac{Cx+D}{(x^2+Px+Q)^{n-1}}+\frac{Ex+F}{(x^2+Px+Q)^{n-2}}+\ldots$$

Ejemplo

$$\boldsymbol{\frac{x^2+8x+7}{(x^2+1)^2}}$$

$$\boldsymbol{\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)}=\frac{x^2+8x+7}{(x^2+1)^2}}$$

$$\boldsymbol{\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)}}$$

$$\boldsymbol{A=8\ \ B=6\ \ C=0\ \ D=1}$$

$$\boldsymbol{\frac{8x+6}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{(x^2+1)}}$$

Para los casos cuando n es mayor que 2, para la integración es conveniente utilizar fórmulas de reducción

EJERCICIOS: Integrar las siguientes funciones aplicando le teoría de las fracciones parciales

313. $\int \frac{dx}{x^2+x-12}$
314. $\int \frac{x^2-7}{x^2(x+5)(x-3)}\ dx$
315. $\int \frac{x^2-3x+7}{(x^2-1)(x+3)}\ dx$

Tarea 15: Integrar las siguientes funciones

316. $\int \frac{(x^3-9x^2-1)}{x^2(x+1)(x-2)}\, dx$
317. $\int \frac{4}{x^4-1}\, dx$
318. $\int \frac{(2x^2+x+3)}{(x+1)(x^2+1)}\, dx$
319. $\int \frac{8y}{(2y+1)(4y^2+1)}\, dy$

SEMANA # 16

Fecha: ………………………………

Tema: Práctica general de ejercicios de derivación e integración

1. $\int \frac{2}{\sqrt{3+2x}} dx$

2. $\int \left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right)^3 \, dy$

3. $\int \frac{\sec 2\theta \tan 2\theta}{3\sec 2\theta - 2}\, d\theta$

4. $\int e^{\tan\theta} \sec^2\theta \; d\theta$

5. $\int \sqrt{e^t}\, dt$

6. $\int a^x e^x \; dx$

7. $\int (e^{5x} + a^{5x}) \; dx$

8. $\int a^{2x}\, dx$

9. $\int \sec ax \; dx$

10. $\int \sec 3\theta \tan 3\theta \, d\theta$

11. $\int x^2 \sec^2 x^3 \, dx$

12. $\int (\sec\theta - \tan\theta)^2 \, d\theta$

13. $\int \csc^2(a - bx)\, dx$

14. $\int \left(\tan 4t - \cot\frac{t}{4}\right) \, dt$

15. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$

16. $\int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\, dx$

17. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{4-\cos x}}\, dx$

18. $\int \frac{\sec^2\theta \, d\theta}{\sqrt{1+2\tan\theta}}$

19. $\int \cos(b + ax) \; dx$

20. $\int \sec\frac{\theta}{2} \tan\frac{\theta}{2}\, d\theta$

21. $\int e^x \cot e^x \, dx$

22. $\int \tan\frac{x}{3}\, dx$

23. $\int \frac{d\theta}{\sin^2 4\theta}$

24. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx$

25. $\int \frac{d\varphi}{\cos 4\varphi}$

26. $\int \left(\sec 2\theta - \csc\frac{\theta}{2}\right)\ d\theta$

27. $\int (\sec t - 1)^2\ dt$

28. $\int \frac{\sin 2x\ dx}{3+\cos 2x}$

29. $\int \frac{\csc\theta\cot\theta}{5-4\csc\theta}\ d\theta$

30. $\int \frac{\sqrt{5+2\tan x}}{\cos^2 x}\ dx$