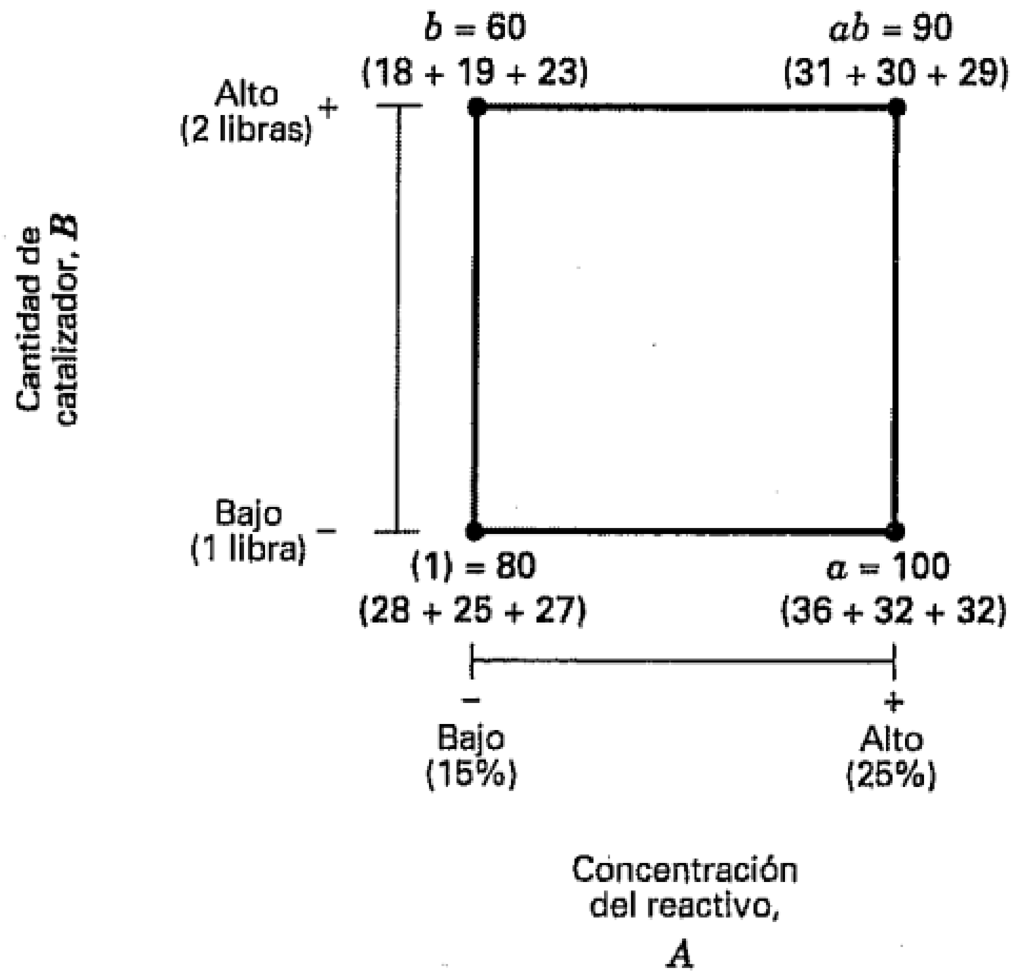
Diseño factorial 2^k

Profesor: Mg.Sc. Rolando Salazar

- Se tienen k factores de 2 niveles cada uno donde estos puede ser de tipo cuantitativos o cualitativos.
- Es de utilidad en las etapas iniciales del trabajo experimental donde se evalúan muchos factores.
- El primer diseño 2^k es el 2^2 que tiene 2 factores A y B y cada uno tiene dos niveles.

Factor		Combinación de	Réplica			
A	B	tratamientos	I	II	III	Total
−	−	A bajo, B bajo	28	25	27	80
+	−	A alto, B bajo	36	32	32	100
−	+	A bajo, B alto	18	19	23	60
+	+	A alto, B alto	31	30	29	90


b = 60
(18 + 19 + 23)
ab = 90
(31 + 30 + 29)
Alto
(2 libras) +
Cantidad de
catalizador, B
Bajo
(1 libra) −
(1) = 80
(28 + 25 + 27)
a = 100
(36 + 32 + 32)
−
Bajo
(15%)
+
Alto
(25%)
Concentración
del reactivo,
A

$$A = \frac{1}{2n}\{[ab - b] + [a - (1)]\}$$

$$= \frac{1}{2n}[ab + a - b - (1)]$$

$$B = \frac{1}{2n}\{[ab - a] + [b - (1)]\}$$

$$= \frac{1}{2n}[ab + b - a - (1)]$$

$$AB = \frac{1}{2n}\{[ab-b]-[a-(1)]\}$$

$$= \frac{1}{2n}[ab+(1)-a-b]$$

$$A = \frac{1}{2(3)}(90+100-60-80) = 8.33$$

$$B = \frac{1}{2(3)}(90+60-100-80) = -5.00$$

$$AB = \frac{1}{2(3)}(90+80-100-60) = 1.67$$

El efecto de A es positivo. Esto indica que al incrementar A de un nivel bajo a uno alto entonces el rendimiento aumenta.

$$SS_A = \frac{[ab + a - b - (1)]^2}{4n}$$

$$SS_B = \frac{[ab + b - a - (1)]^2}{4n}$$

$$SS_{AB} = \frac{[ab + (1) - a - b]^2}{4n}$$

$$SS_A = \frac{(50)^2}{4(3)} = 208.33$$

$$SS_B = \frac{(-30)^2}{4(3)} = 75.00$$

$$SS_{AB} = \frac{(10)^2}{4(3)} = 8.33$$

Orden estándar u orden de Yates: (1),a,b,ab

Efectos	(1)	*a*	*b*	*ab*
A:	–1	+1	–1	+1
B:	–1	–1	+1	+1
AB:	+1	–1	–1	+1

Tabla 6-2 Signos algebraicos para calcular los efectos en el diseño 2^2

Combinación de tratamientos	Efecto factorial			
	I	A	B	AB
(1)	+	−	−	+
a	+	+	−	−
b	+	−	+	−
ab	+	+	+	+

$$A = \frac{1}{2n}\{[ab - b] + [a - (1)]\}$$

$$= \frac{1}{2n}[ab + a - b - (1)]$$

Tabla 6-1 Análisis de varianza del experimento de la figura 6-1

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F_0	Valor P
A	208.33	1	208.33	53.15	0.0001
B	75.00	1	75.00	19.13	0.0024
AB	8.33	1	8.33	2.13	0.1826
Error	31.34	8	3.92		
Total	323.00	11			

Modelo de regresión

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$$

Se usan variables codificadas, +1para el nivel alto y −1 para el nivel bajo.

```
> mod2<-lm(y~A+B)
> mod2

Call:
lm(formula = y ~ A + B)

Coefficients:
(Intercept)            A            B
     27.500        4.167       -2.500
```

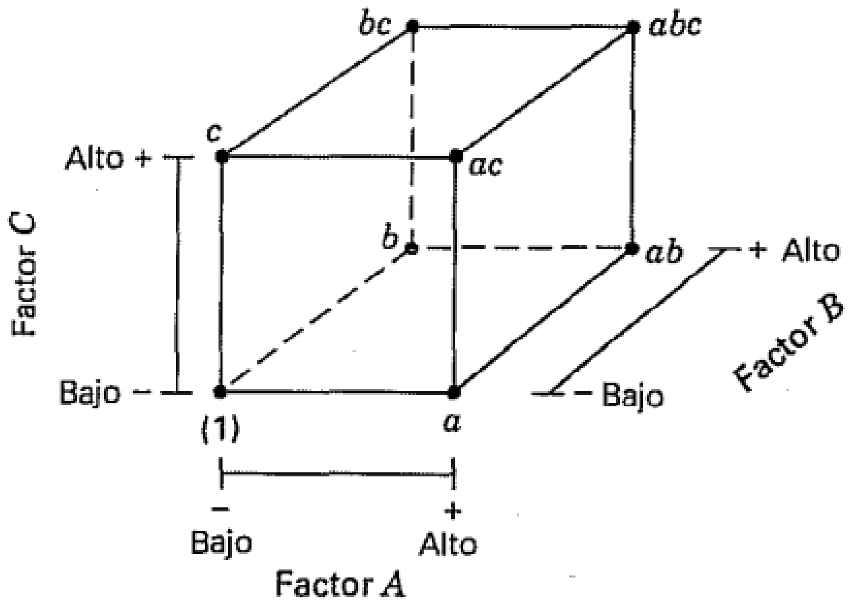
Adecuación del modelo

Verificación de los supuestos.

Diseño 2^3

- Tres factores, cada uno con dos niveles.
- Ocho combinaciones de tratamientos: (1), a,b,ab,c,ac,bc y abc.
- Hay siete grados de libertad entre las combinaciones del diseño 2^3;tres se asocian con los efectos principales A,B y C, cuatro con las interacciones AB,AC,BC y ABC.

Corrida	A	B	C	Etiquetas	A	B	C
1	−	−	−	(1)	0	0	0
2	+	−	−	a	1	0	0
3	−	+	−	b	0	1	0
4	+	+	−	ab	1	1	0
5	−	−	+	c	0	0	1
6	+	−	+	ac	1	0	1
7	−	+	+	bc	0	1	1
8	+	+	+	abc	1	1	1



a) Vista geométrica

	Factor		
Corrida	A	B	C
1	−	−	−
2	+	−	−
3	−	+	−
4	+	+	−
5	−	−	+
6	+	−	+
7	−	+	+
8	+	+	+

b) La matriz del diseño

$$A = \frac{1}{4n}[a - (1) + ab - b + ac - c + abc - bc]$$

$$B = \bar{y}_{B^+} - \bar{y}_{B^-}$$
$$= \frac{1}{4n}[b + ab + bc + abc - (1) - a - c - ac]$$

$$C = \bar{y}_{C^+} - \bar{y}_{C^-}$$
$$= \frac{1}{4n}[c + ac + bc + abc - (1) - a - b - ab]$$

$$AB = \frac{[abc - bc + ab - b - ac + c - a + (1)]}{4n}$$

$$AC = \frac{1}{4n}[(1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc]$$

$$BC = \frac{1}{4n}[(1) + a - b - ab - c - ac + bc + abc]$$

$$ABC = \frac{1}{4n}\{[abc - bc] - [ac - c] - [ab - b] + [a - (1)]\}$$
$$= \frac{1}{4n}[abc - bc - ac + c - ab + b + a - (1)]$$

Tabla 6-3 Signos algebraicos para calcular los efectos del diseño 2^3

Combinación de tratamientos	Efecto factorial							
	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
(1)	+	−	−	+	−	+	+	−
a	+	+	−	−	−	−	+	+
b	+	−	+	−	−	+	−	+
ab	+	+	+	+	−	−	−	−
c	+	−	−	+	+	−	−	+
ac	+	+	−	−	+	+	−	−
bc	+	−	+	−	+	−	+	−
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

Sin tomar en cuenta la columna I, cada columna tiene el mismo número de signos positivos y negativos. La suma de los productos de los signos de dos columnas es cero. La columna I multiplicada por cualquiera de las columnas la deja sin cambio. Multiplicar dos columnas produce otra.

I: Elemento identidad.

$$AB \times B = AB^2 = A$$

- Cada efecto tiene un contraste correspondiente con un solo grado de libertad. La suma de cuadrados:

$$SS = \frac{(\text{Contraste})^2}{8n}$$

Donde n es la cantidad de réplicas.

Ejemplo

Una empresa embotelladora de refrescos está interesada en obtener alturas de llenado más uniformes en las botellas que se fabrican en su proceso de manufactura. La máquina de llenado llena cada botella a la altura objetivo correcta, pero en la práctica, existe variación en torno a este objetivo, y a la embotelladora le gustaría entender mejor las fuentes de esta variabilidad y reducirla.

El ingeniero del proceso puede controlar tres variables durante el proceso de llenado: el porcentaje de carbonatación (A), la presión de operación en el llenador (B) y las botellas producidas por minuto o rapidez de línea (C). Es sencillo controlar la presión y la rapidez, pero el porcentaje de carbonatación es más difícil de controlar durante la manufactura real debido a que varía con la temperatura. Sin embargo, para los fines de un experimento, el ingeniero puede controlar la carbonatación en dos niveles: 10 y 12 por ciento. Elige dos niveles para la presión (25 y 30 psi) y dos niveles para la rapidez de línea (200 y 250 bpm). El ingeniero decide correr dos réplicas de un diseño factorial.

La variable de respuesta observada es la desviación promedio de la altura del llenado objetivo que se observa en una corrida de producción de botellas con cada conjunto de condiciones. Las desviaciones positivas son alturas de llenado arriba del objetivo, mientras que las desviaciones negativas son alturas de llenado abajo del objetivo.

Tabla 6-4 El experimento de la altura de llenado, ejemplo 6-1

Corrida	Factores codificados A	B	C	Desviación de la altura de llenado Réplica 1	Réplica 2	Niveles del factor	Bajo (–1)	Alto (+1)
1	–1	–1	–1	–3	–1	*A* (psi)	10	12
2	1	–1	–1	0	1	*B* (psi)	25	30
3	–1	1	–1	–1	0	*C* (b/min)	200	250
4	1	1	–1	2	3			
5	–1	–1	1	–1	0			
6	1	–1	1	2	1			
7	–1	1	1	1	1			
8	1	1	1	6	5			

Ejercicio:

Estimar los efectos de los factores A y BC.

Tabla 6-5 Resumen de la estimación de los efectos del ejemplo 6-1

Factor	Estimación del efecto	Sumas de cuadrados	Contribución porcentual
A	3.00	36.00	46.1538
B	2.25	20.25	25.9615
C	1.75	12.25	15.7051
AB	0.75	2.25	2.88462
AC	0.25	0.25	0.320513
BC	0.50	1.00	1.28205
ABC	0.50	1.00	1.28205
Error puro		5.00	6.41026
Total		78.00	

Los efectos principales explican el mayor porcentaje de variabilidad total.

$$SS_A = \frac{(24)^2}{16} = 36.00$$

$$SS_B = \frac{(18)^2}{16} = 20.25$$

$$SS_C = \frac{(14)^2}{16} = 12.25$$

$$SS_{AB} = \frac{(6)^2}{16} = 2.25$$

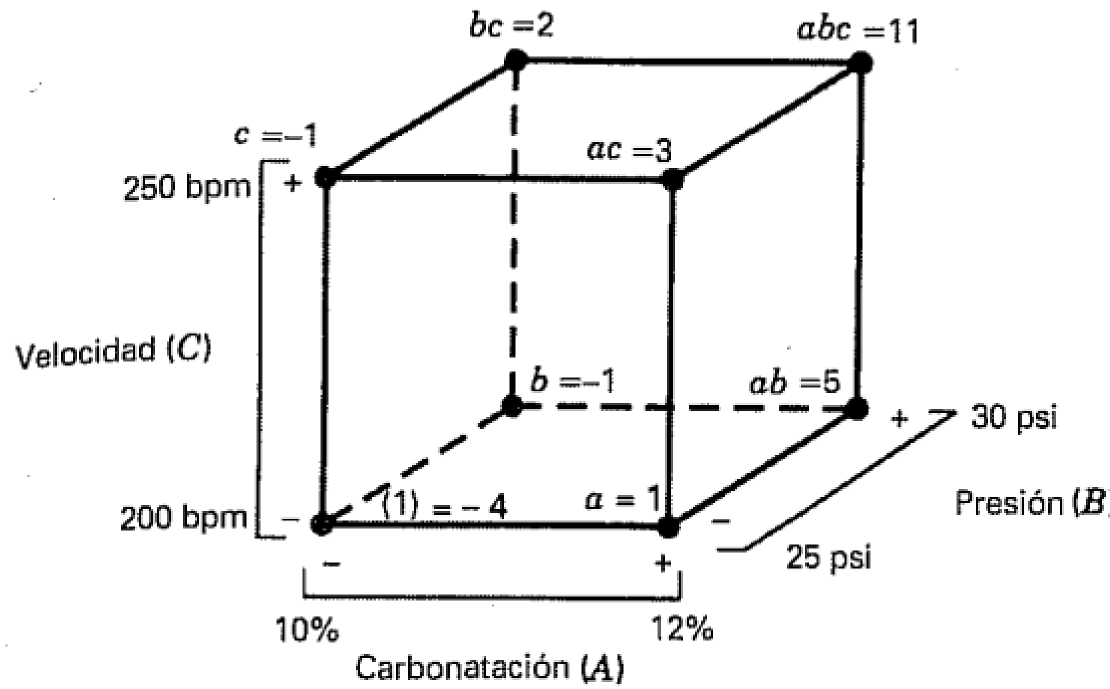
$$SS_{AC} = \frac{(2)^2}{16} = 0.25$$

$$SS_{BC} = \frac{(4)^2}{16} = 1.00$$

$$SS_{ABC} = \frac{(4)^2}{16} = 1.00$$

Tabla 6-6 Análisis de varianza de los datos de la altura de llenado

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F_0	Valor P
Porcentaje de carbonatación (A)	36.00	1	36.00	57.60	<0.0001
Presión (B)	20.25	1	20.25	32.40	0.0005
Velocidad de línea (C)	12.25	1	12.25	19.60	0.0022
AB	2.25	1	2.25	3.60	0.0943
AC	0.25	1	0.25	0.40	0.5447
BC	1.00	1	1.00	1.60	0.2415
ABC	1.00	1	1.00	1.60	0.2415
Error	5.00	8	0.625		
Total	78.00	15			



bc =2
abc =11
c =−1
ac =3
250 bpm
+
Velocidad (C)
b =−1
ab =5
+
30 psi
Presión (B)
200 bpm
−
(1) = − 4
a = 1
−
−
+
25 psi
10%
12%
Carbonatación (A)

Diseño 2^k

- Diseño con k factores que tienen dos niveles cada uno.
- Incluye k efectos principales, $\binom{k}{2}$ interacciones de dos factores, … hasta una interacción de k factores.
- Se usa la notación vista para los tratamientos: (1),adb, etc.

$$\text{Contraste}_{AB\cdots K} = (a \pm 1)(b \pm 1)\cdots(k \pm 1)$$

$$\begin{aligned}\text{Contraste}_{AB} &= (a-1)(b-1)(c+1) \\ &= abc + ab + c + (1) - ac - bc - a - b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Contraste}_{ABCD} &= (a-1)(b-1)(c-1)(d-1)(e+1) \\ &= abcde + cde + bde + ade + bce \\ &\quad + ace + abe + e + abcd + cd + bd \\ &\quad + ad + bc + ac + ab + (1) - a - b - c \\ &\quad - abc - d - abd - acd - bcd - ae \\ &\quad - be - ce - abce - de - abde - acde - bcde\end{aligned}$$

$$AB \cdots K = \frac{2}{n2^k}(\text{Contraste}_{AB \cdots K})$$

$$SS_{AB \cdots K} = \frac{1}{n2^k}(\text{Contraste}_{AB \cdots K})^2$$

Una réplica del diseño 2^k

- Cuando los recursos son limitados.
- No se cuenta con una estimación del error, este se estima suponiendo que algunas interacciones de orden superior son insignificantes.
- Gráfica de probabilidad normal de las estimaciones de los efectos, lo que son insignificantes se localizarán sobre una línea recta en esa gráfica, los significativos no estarán sobre la línea.

Ejemplo

Un producto químico se fabrica en un envase presurizado. Se lleva a cabo un experimento factorial en la planta piloto para estudiar los factores que se piensa influyen en el índice de filtración de este producto. Los factores son la temperatura (A), la presión (B), la concentración del formaldehído (C) y la velocidad de agitación (D). Cada factor está presente con dos niveles. La matriz del diseño y los datos de la respuesta obtenidos de una sola réplica del experimento se muestran en la tabla. Las 16 corridas se hacen de manera aleatoria. El ingeniero del proceso está interesado en maximizar el índice de filtración. Las condiciones actuales del proceso producen índices de filtración de alrededor de 75 gal/h. Además en el proceso se usa actualmente el factor C en el nivel alto. Al ingeniero le gustaría reducir la concentración de formaldehído lo más posible, pero no ha podido hacerlo porque siempre produce índices de filtración más bajos.

Tabla 6-10 Experimento del índice de filtración en la planta piloto

Número de corrida	Factor A	Factor B	Factor C	Factor D	Etiqueta de la corrida	Índice de filtración (gal/h)
1	−	−	−	−	(1)	45
2	+	−	−	−	*a*	71
3	−	+	−	−	*b*	48
4	+	+	−	−	*ab*	65
5	−	−	+	−	*c*	68
6	+	−	+	−	*ac*	60
7	−	+	+	−	*bc*	80
8	+	+	+	−	*abc*	65
9	−	−	−	+	*d*	43
10	+	−	−	+	*ad*	100
11	−	+	−	+	*bd*	45
12	+	+	−	+	*abd*	104
13	−	−	+	+	*cd*	75
14	+	−	+	+	*acd*	86
15	−	+	+	+	*bcd*	70
16	+	+	+	+	*abcd*	96

Tabla 6-11 Constantes de los contrastes del diseño 2^4

	A	*B*	*AB*	*C*	*AC*	*BC*	*ABC*	*D*	*AD*	*BD*	*ABD*	*CD*	*ACD*	*BCD*	*ABCD*
(1)	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+
a	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−
b	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−
ab	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+
c	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−
ac	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+
bc	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+
abc	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−
d	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−
ad	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+
bd	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+
abd	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−
cd	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+
acd	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−
bcd	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
abcd	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Tabla 6-12 Estimaciones de los efectos de los factores y sumas de cuadrados del diseño factorial 2^4 del ejemplo 6-2

Término del modelo	Estimación del efecto	Suma de cuadrados	Contribución porcentual
A	21.625	1870.56	32.6397
B	3.125	39.0625	0.681608
C	9.875	390.062	6.80626
D	14.625	855.563	14.9288
AB	0.125	0.0625	0.00109057
AC	−18.125	1314.06	22.9293
AD	16.625	1105.56	19.2911
BC	2.375	22.5625	0.393696
BD	−0.375	0.5625	0.00981515
CD	−1.125	5.0625	0.0883363
ABC	1.875	14.0625	0.245379
ABD	4.125	68.0625	1.18763
ACD	−1.625	10.5625	0.184307
BCD	−2.625	27.5625	0.480942
$ABCD$	1.375	7.5625	0.131959

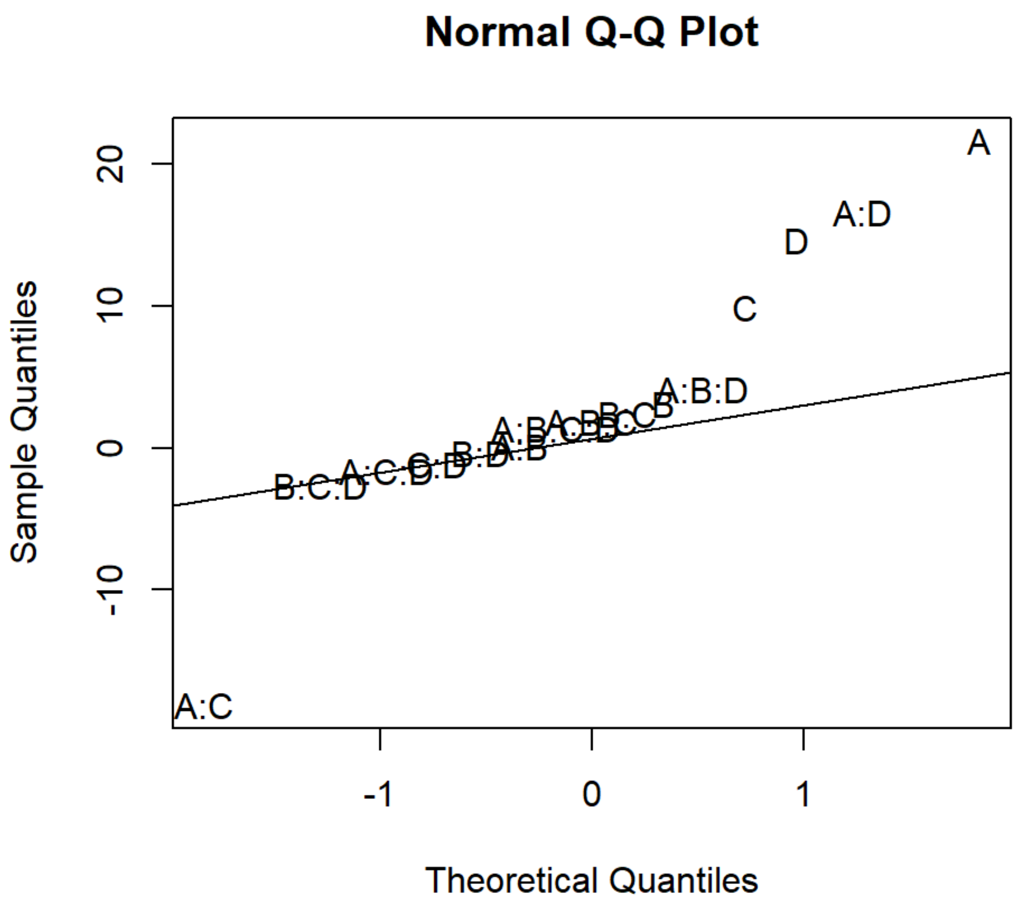

Normal Q-Q Plot
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
20
10
0
-10
-1
0
1
A
A:D
D
C
A:B:D
B:C:D
A:C

Tabla 6-13 Análisis de varianza del experimento del índice filtración en la planta piloto en A, C y D

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F_0	Valor P
A	1870.56	1	1870.56	83.36	<0.0001
C	390.06	1	390.06	17.38	<0.0001
D	855.56	1	855.56	38.13	<0.0001
AC	1314.06	1	1314.06	58.56	<0.0001
AD	1105.56	1	1105.56	49.27	<0.0001
CD	5.06	1	5.06	<1	
ACD	10.56	1	10.56	<1	
Error	179.52	8	22.44		
Total	5730.94	15			

Transformación de datos

Ejemplo:

Daniel describe un diseño factorial 2^4 utilizado para estudiar la rapidez de avance de una perforadora como una función de cuatro factores: la carga de la perforadora (A), la rapidez de flujo (B), la velocidad de rotación (C) y el tipo de lodo de perforación usado (D). Los datos se presentan en la figura:

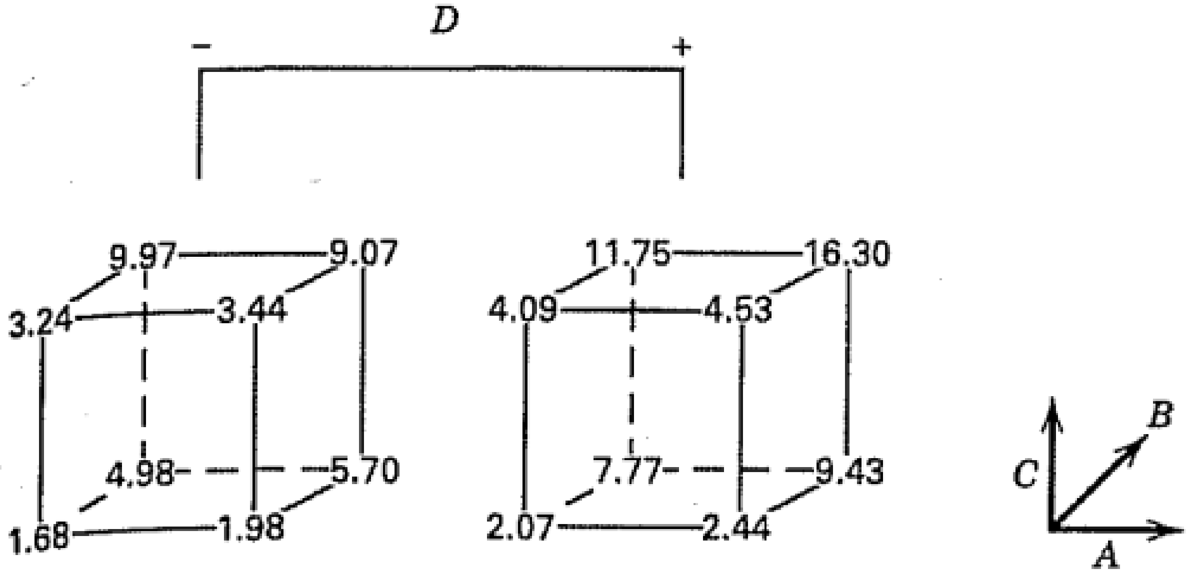


Figura 6-17 Datos del experimento de perforación del ejemplo 6-3.

Efectos de localización y dispersión en un diseño factorial no replicado

- Los residuales dan información de la variabilidad del proceso.

Ejemplo

- Se corrió un diseño 2^4 en un proceso de manufactura de paneles laterales y ventanas de un avión comercial. Los paneles se hacen en una prensa, y bajo las condiciones actuales es demasiado elevado el número promedio de defectos por panel en una operación de prensado. (El promedio actual del proceso es 5.5 defectos por panel.) Se investigan cuatro factores utilizando una sola réplica de un diseño 2^4 en el que cada réplica corresponde a una sola operación de prensado. Los factores son la temperatura (A), el tiempo de sujeción (B), el flujo de resina (C) y el tiempo de cierre en el prensado (D)

Factores	Bajo (–)	Alto (+)
A = Temperatura (°F)	295	325
B = Tiempo de sujeción (min)	7	9
C = Flujo de resina	10	20
D = Tiempo de cierre (s)	15	30

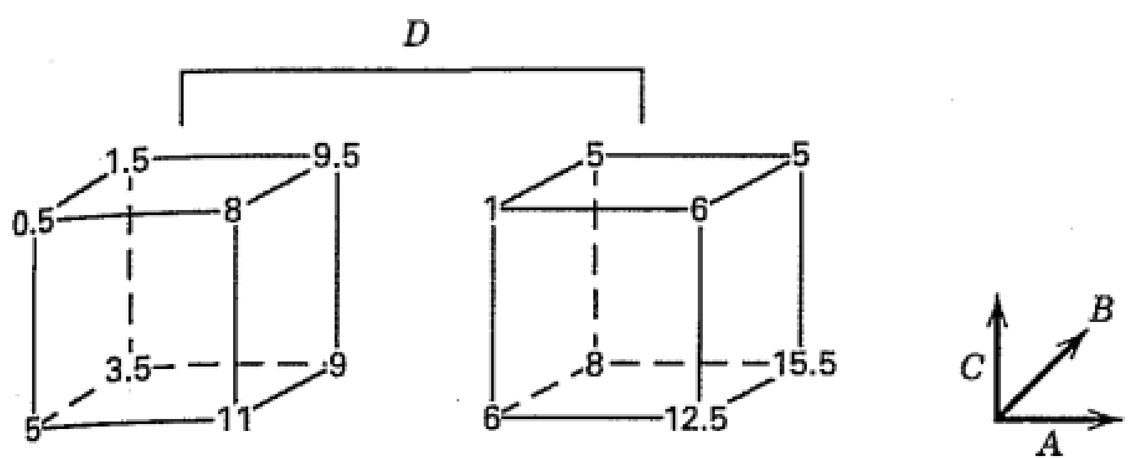


Figura 6-24 Datos del experimento del proceso de los paneles del ejemplo 6-4.

$$H_0 : \sigma^2\left(B^+\right) = \sigma^2\left(B^-\right) \text{ versus } H_1 : \sigma^2\left(B^+\right) \neq \sigma^2\left(B^-\right)$$

$$F_B^* = \ln \frac{S^2\left(B^+\right)}{S^2\left(B^-\right)}$$

Tiene una distribución aproximadamente normal estándar

Confusión en el diseño factorial 2^k

- La confusión o mezclado es una técnica mediante la cual un experimento factorial completo se distribuye en bloques.
- La estructura generada corresponden a diseños de bloques incompletos.
- Diseño factorial $\mathbf{2}^k$ en $\mathbf{2}^p$ bloques incompletos, $p<k$
- Lo usual es confundir la interacción de orden más alto con los bloques.

Confusión en dos bloques

Se tiene una solo réplica de un diseño factorial $\mathbf{2}^{\boldsymbol{k}}$ con k=2. Se cuenta con dos lotes de materia prima, cada lote alcanza para probar dos combinaciones de tratamientos

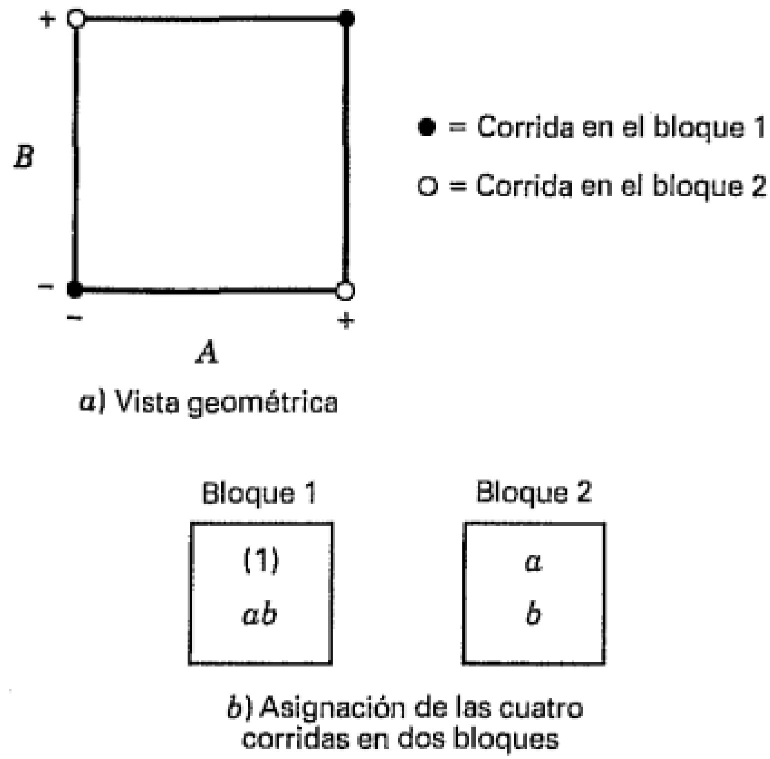


Figura 7-1 Diseño 2^2 en dos bloques.

Tabla 7-3 Tabla de signos positivos y negativos para el diseño 2^2

Combinación de tratamientos	Efecto factorial			
	I	A	B	AB
(1)	+	−	−	+
a	+	+	−	−
b	+	−	+	−
ab	+	+	+	+

Para confundir o mezclar un efecto A, B o AB, con los bloques.

Del libro que se les compartió, diseño de experimentos de Kuehl, leer y estudiar: **15.5 Análisis cuando no se cumplen las suposiciones del análisis univariado.**

Referencias bibliográficas

- Montgomery, D. (2004). Diseño y análisis de experimentos. 2da edición. Editorial Limusa.
- Notas de clase del profesor Victor Maehara, del curso Diseños Experimentales II.
- Kuehl, R. (2001).Diseño de experimentos. Principios estadísticos de diseño y análisis de investigación. 2da edición. Thomson Learning.
- Notas de clase del profesor Felipe De Mendiburu, del curso de Diseños Experimentales II.