Logika Tételkidolgozás

Aradi Patrik

2018. május 28.

1. Az ítéletkalkulus szintaxisa és szemantikája. Kielégíthetőség, logikai következmény, alap összefüggések.

Az ítéletlogikában a változók a 0, 1 halmazból kapnak értéket.
A formulák változókból épülnek fel, melyeket összekötő jelek alkalmazásával kapunk. Pl.: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Szintaxis A logikában meghatározza, hogy hogy néz ki egy formula.
Pl.: $(p \vee q)$

Szemantika Megmondja, hogy a leírt formulának mi a jelentése. Mi az adott formulának az értéke egy adott változó értékadás esetén

1.1. Szintaxis

Változók p, q, r -el jelöjük, melyek 0, 1 értéket vehetnek fel.

Logikai konstansjelek (0 aritású függvényjelek) az "igaz" $\uparrow$ és a "hamis" $\downarrow$ jelek

Konnektívák Velük tudjuk összekötni a formulákat, lehetséges értékeik: $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$

Formulák Deffiníciója

- Minden változó és minden logikai konstans formula
- Ha F formula, akkor $(\neg F)$ is formula
- Ha F és G formulák, akkor $(F \wedge G), (F \vee G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G)$ is formulák
- Más forumla nincs

Műveleti sorrend A $\wedge$ és $\vee$ műveletek *asszociatívak*, pl.: $(F \vee G) \vee H$ helyett $F \vee G \vee H$-t írhatunk. A $\rightarrow$ művelet *jobb-asszociatív*, $F \rightarrow G \rightarrow H = F \rightarrow (G \rightarrow H)$ zárójelezést jelenti

1.2. Szemantika

Boole-függvény Hogy a konnektívák szemantikájáról tudjunk beszélni, mindhez rendelünk egy Boole-függvényt. A Bool-függvény bitvektort egy bitbe képző függvény: $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.
Az $f|n$ jelzi, hogy f egy n-változós függvény. A $\neg$ unáris Boole függvény. A bináris konnektívákhoz rendelt Boole-függvényekhez készíthető igazságtábla. Egy n változós Boole-függvény 2^n soros

Értékadás Egy $\mathcal{A}$ függvény, mely minden változóhoz egy igazságértéket (bitet: 0 vagy 1) rendel. Egy formula kiértékeléshez szükség van egy értékadásra.

Az $\mathcal{A}$ értékadás mellet az F formula értékét $\mathcal{A}(F)$ jelöli.

- Ha a formula a p változó, akkor értéke $\mathcal{A}(p)$
- $\mathcal{A}(\uparrow) = 1$
- $\mathcal{A}(\downarrow) = 0$
- $\mathcal{A}(\neg F) = \neg\mathcal{A}(F)$
- $\mathcal{A}(F \vee G) = \mathcal{A}() \vee \mathcal{A}(G)$
- $\mathcal{A}(F \wedge G) = \mathcal{A}(F) \wedge \mathcal{A}(G)$
- $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = \mathcal{A}(F) \rightarrow \mathcal{A}(G)$
- $\mathcal{A}(F \leftrightarrow G) = \mathcal{A}(F) \leftrightarrow \mathcal{A}(G)$

Tehát rekurzívan kiértékeljük az "eggyel egyszerűbb" formulákat és a legkülső konnektívának megfelelően kombináljuk az értékeket.

Közvetlen részformula Egy formula közvetlen részformulái az "eggyel lentebbi szinten lévő részei".

- Változóknak és a logikai konstansoknak nincs közvetlen részforulája.
- A $(\neg F)$ alakú formulák közvetlen részformulája F
- Az $(F \vee G), (F \wedge G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G)$ alakú formulák közvetlen részformulái F és G

A formulák kiértékelését úgy végeztük el, hogy rekurzívan kiértékeljük a közvetlen részformulákat, majd az eredményekből és a külső konnektivitásból számítjuk az egész formula értékét. Az ilyen rendszerű definíciókat és bizonyításokat a **formula felépítése szerinti teljes indukció**nak nevezzük.

Felépítés szerinti indukció Deffiníciókban csak meg kell mondjuk, hogy aktuálisan a formulához rendelt objektumot hogyan számítjuk ki a részformuláihoz rendelt objektumokból, ügyelve arra, hogy minden esetet pontosan egyszer vegyünk sorra.
Bizonyításokban minden esetre meg kell mutatnunk, hogy ha az állítás igaz a formula összes közvetlen részformulájára, akkor miért igaz az egész formuára is. (teljes indukció is így működik)

Kielégíthetőség Ha az $\mathcal{A}$ értékadásra és az F formuálra $\mathcal{A}(F) = 1$, azt úgy is írjuk, hogy $A \models F$ és úgy is mondjuk, hogy A kielégíti F-et, vagy A egy modellje F-nek. Ha egy formulának van modellje, akkor azt mondjuk, kielégíthető, ha nincs, kielégíthetetlen. Ha az F formulának minden kiértékelés modellje, akkor tautológia, ennek jele pedig $\models F$.

Modellek halmaza Ha F egy formula, akkor $Mod(F)$ az F összes modelljének halmaza. Tehát azt hogy $\mathcal{A}(F) = 1$, vagy $\mathcal{A} \models F$, úgy is írhatjuk, hogy $\mathcal{A} \in Mod(F)$. F pontosan akkor kielégíthetetlen, ha $Mod(F) = \emptyset$. Ha Σ formulák egy halmaza és $\mathcal{A}$ egy értékadás, akkor $\mathcal{A} \models \Sigma$ azt jelenti, hogy $\mathcal{A}$ kielégíti Σ összes elemét. F formula pontosan akkor tautológia, ha Σ kielégíthetetlen.

Logikai következmény Ha F és G formulák, akkor $F \models G$ ("F-nek következménye G") azt jelöli, hogy minden $\mathcal{A}$-ra ha $\mathcal{A}(F) = 1$, akkor $\mathcal{A}(G) = 1$. Tehát, ha F igaz akkor G is igaz, és $Mod(F) \subseteq Mod(G)$ Ugyanígy használhatjuk a $\Sigma \models F, \Sigma \models \Gamma$ jelöléseket is, ahol Σ, Γ formulahalmazok. Pl.: $\Sigma \models F$ akkor áll fenn, ha Σ minden modellje, modellje F-nek is. $F \equiv G$ jelölés azt jelenti, hogy $Mod(F) = Mod(G)$

Tétel $Mod(\Sigma \cup \Gamma) = Mod(\Sigma) \cap Mod(\Gamma)$ Hiszen a bal oldalon szereplő halmazban azok az értékadások vannak, melyek kielégítik $\Sigma \cup \Gamma$ összes elemét, azaz Σ összes elemét is és Γ összes elemét is, azaz melyek benne vannak $Mod(\Sigma)$-ban is és $Mod(\Gamma)$-ban is, ez pedig épp a jobb oldal.

Fenti bizonyítható indirekt módon is

2. Boole-függvények. Shannon-expanzió. Boole-függvények teljes rendszerei

Boole-függvény A Bool-függvény bitvektort egy bitbe képző függvény: $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Ha az F formulában csak a $\{p_1, \ldots, p_n\}$ változók szerepelnek, akkor F indukál egy n változós Boole-függvényt, melyet szintén F-fel jelölünk. Például, ha a formula $p_i(x_1, \ldots, x_n)$ akkor egy olyan Boole-függvényt fog indukálni, hogy n darab bit bejön, és kiválasztja az i. bitet.

- $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ (ezt projekciónak hívjuk)
- $(\neg F)(x_1, \ldots, x_n) = \neg(F(x_1, \ldots, x_n))$
- $(F \vee G)(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n) \vee G(x_1, \ldots, x_n)$
- ...

Boole-függvények megszorításai Legyen $f|n$ Boole-függvény, $n > 0$. Ha $b \in \{0,1\}$ igazságérték, úgy hogy $f|_{x_n=b}$ jelöli azt az $(n-1)$-változós Boole-függvényt, melyet úgy kapunk, hogy f inputjában x_n értékét b-re rögzítjük. Formálisan:

$$f|_{x_n=b}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, b)$$

Példák:

- $\vee|_{x_2=1}$ a konstans 1 függvény: $\vee|_{x_2=1}(x_1) = \vee(x_1, 1) = 1$.
- $\wedge|_{x_2=0}$ a konstans 0 függvény
- $\wedge|_{x_2=1}$ az identikus $(x_1 \to x_1)$ függvény

Shannon expanzió Lényege, hogy egy n változós Boole-függvényt ki tudunk fejezni két n-1 változós Boole-függvény segítségével. Bejön az $f(x_1, \ldots, x_n)$, két eset lehetséges: az x_n vagy 1 vagy 0. Az alábbi képlet esetén:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_n \wedge f|_{x_n=1}(x_1, \ldots, x_{n-1})) \vee (\neg x_n \wedge f|_{x_n=0}(x_1, \ldots, x_{n-1}))$$

Ha az $x_n = 1$, akkor a jobb oldali tag hamis lesz, a bal oldal pedig: $f|_{x_n=1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$, ami megegyezik $f(x_1, \ldots, x_n)$-nel ez esetben. Minden Boole-függvény előáll a projekciók és a $\{\neg, \vee, \wedge\}$ Boole-függvények alkalmas kompozíciójaként. Ezt úgy is mondjuk, hogy $\{\neg, \vee, \wedge\}$ rendszer teljes.

Bizonyítás n szerinti teljes indukciót alkalmazunk. Ha $n = 0$, akkor $f|0$ függvény vagy konstans 0, vagy a konstans 1, mindkettő előállítható így. Ha $n > 0$, akkor az indukciós feltevés zserint az $f|_{x_n=b}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ Boole-függvények $b \in \{0,1\}$-re előállnak ilyen alakban, a Shannon expanzióban pedig szintén csak ezt a három műveletet alkalmazzuk.

Következmény Minden Boole-függvény indukálható olyan formulával, melyben csak $\{\neg, \vee, \wedge\}$ konnektívák szerepelnek.

3. Konjunktív normálforma. A DPLL algoritmus

Konjunktív normálforma Az egyik leggyakrabban alkalmazott normálforma a konjuktív normálform. Az ítéletváltozókat és negáltjaikat literáloknak nevezzük. Véges sok literál diszjunkcióját klóznak nevezzük. Véges sok klóz konjunkcióját pedig konjunktív normálformának, CNF-nek.