Mathe 3Inf/4Etit Kochrezepte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Stef9998
10. April 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Interpolation

1.1 Polynominterpolation (Newtonsche Interpolationsformel)

Wir berechnen ein Polynom n-ten Grades $p_n(x)$ welches die Ursprungsfunktion annähert.

Dafür benutzen wir das Schema

$$\begin{array}{c|ccccc}
x_0 & f_{[x_0]} = y_0 & \searrow & & & \\
 & & & f_{[x_0,x_1]} & \searrow & \\
x_1 & f_{[x_1]} = y_1 & \begin{matrix}\nearrow \\ \searrow\end{matrix} & & & f_{[x_0,x_1,x_2]} \\
 & & & f_{[x_1,x_2]} & \nearrow & \\
x_2 & f_{[x_2]} = y_2 & \nearrow & & & \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

$$f_{[x_j,\ldots,x_{k+j}]} = \frac{f_{[x_{j+1}\ldots,x_{j+k}]} - f_{[x_j\ldots,x_{j+k-1}]}}{x_{j+k} - x_j} = \frac{f_{\text{unten}} - f_{\text{oben}}}{x_{\text{unten}} - x_{\text{oben}}}$$

um dann Polynom zu berechnen

$$p_n(x) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (x - x_0) \ldots (x - x_{i-1}) \qquad , \gamma_i = f_{[x_0 \ldots x_i]}$$

wobei die γ_i's einfach die oberste Zeile (ohne x_0) im Schema ist.

Hinweis: Man kann Zeilen vertauschen. Das heißt wenn viele $f_{[x]} = 0$ lohnt es sich meist diese nach oben zu tauschen.

Fehlerabschätzung:
Äquidistant

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \max_{x\in[a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Tschebyschev-Abszissen

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \max_{x\in[a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} 2^{-n}$$

4 Lineare Gleichungssysteme

4.3 Cholesky Verfahren $(LL^T = A)$

Für $j = 1, \dots, n$

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}$$

Falls Wurzel nicht existiert, STOPP $\Rightarrow A$ nicht definit

Für $i = j+1, \dots, n$:

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \Sigma_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}$$

4.4 Fehlerabschätzung für gestörte Gleichungssysteme

$$Ax = b \qquad\qquad (A + \Delta A)\tilde{x} = b + \Delta b$$

dann gilt für den Fehler

$$\frac{||\tilde{x} - x||}{||x||} \leq \frac{cond(A)}{1 - cond(A)||\Delta A||/||A||} \left(\frac{||\Delta A||}{||A||} + \frac{||\Delta b||}{||b||} \right)$$

mit

$$||x||_2 = \sqrt{x^T x} \quad \text{induziert} \quad ||A||_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$$

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{induziert} \quad ||A||_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

(Spaltensummen Norm = “größte” Spalte)

$$||x||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \quad \text{induziert} \quad ||A||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

(Zeilensummen Norm = “größte” Zeile)

$$cond(A) = ||A||\;||A^{-1}||$$

6 Verfahren zur Eigenwert- und Eigenvektorberechnung

6.2 Vektoriteration

Einfache Vektoriteration nach von Mises:
Wir setzen die zu Iterationsmatrix B einfach gleich der gegebenen Matrix A

$$B = A$$

Um die nächste Iteration von z zu bekommen bedarf es nur dieser Formel, welche man die ganze so lange durchiteriert, bis man bei der gewünschten Zahl angekommen ist.

$$z^{(k+1)} = \frac{1}{||Bz^{(k)}||} Bz^{(k)}$$

Um nun den Rayleigh-Quotienten von einem beliebigen k (meistens wird das vorletzte benutzt) einfach alles in die Formel einsetzen.

$$R(z^{(k)}, B) = \frac{(z^{(k)})^H Bz^{(k)}}{(z^{(k)})^H z^{(k)}}$$

Bei reellen Werten entspricht $(.)^H$ der Transponierten.

Inverse Vektoriteration von Wielandt:
Hier ist B mit einem Shift μ verschoben, und das Ganze invertiert.

$$B = (A - \mu I)^{-1}$$

Achtung! Dabei nicht die Inverse bestimmen, sondern über die DGL

$$(A - \mu I)\hat{z}^{(k+1)} = z^{(k)}$$

$\hat{z}^{k+1}$ bestimmen und dann normieren zu

$$z^{(k+1)} = \frac{\hat{z}^{(k+1)}}{||\hat{z}^{(k+1)}||}$$

Um nun den Rayleigh-Quotienten von einem beliebigen k (meistens wird das vorletzte benutzt) einfach alles in die Formel einsetzen.

$$R(z^{(k)}, (A - \mu I)^{-1}) = \frac{(z^{(k)})^H \hat{z}^{(k+1)}}{(z^{(k)})^H z^{(k)}}$$

Bei reellen Werten entspricht $(.)^H$ der Transponierten.
Einen Eigenwert λ_i (oder Schätzung) erhalten wir dann durch Umstellen von

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i - \mu}$$

Wobei μ_i dem Rayleigh-Quotienten entspricht.

8 Schätzverfahren und Konfidenzintervalle

8.2 Maximum-Likelihood-Schätzer

$f_\theta(x)$ entspricht der Dichtefunktion. Bei diskreten Werten siehe oben.

$$L(\theta; x_1, \dots x_n) = f_\theta(x_1) f_\theta(x_2) \dots f_\theta(x_n)$$
$$ln\left(L(\theta; x_1, \dots x_n)\right) = \sum_{i=1}^{n} ln\left(f_\theta(x_i)\right)$$

Teilweise kann man f_θ durch den $\ln$ nochmal in Summen aufteilen, da dann alle Summanden ohne θ bei der Ableitung rausfliegen.

$$\frac{\partial}{\partial\theta} ln\left(L(\theta; x_1, \dots x_n)\right) = \frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{i=1}^{n} ln\left(f_\theta(x_i)\right) \overset{!}{=} 0$$

Nun nach θ umstellen. Dies ist dann die eindeutige Nullstelle

$$\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \dots$$

Um zu wissen, dass es ein Maximum ist, muss man noch schauen ob die 2. Ableitung < 0 ist

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} ln\left(L(\theta; x_1, \dots x_n)\right) \overset{!}{<} 0$$

8.3 Konfidenzintervalle

$$F_\theta(x) = F_{(\mu,\sigma^2)}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad \bar{X}_{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S^2_{(n)} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_{(n)})^2$$

$\Theta = \{(\mu, \sigma_0^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$ und $\tau(\theta) = \mu/\sigma^2$. Das Konfidenzintervall für μ/σ^2 zum Niveau $1 - \alpha$ lautet

Konfidenzintervall für μ bei bekannter Varianz $\sigma^2 = \sigma_0^2$

$$I(X_1, \dots, X_n) = \left[\bar{X}_{(n)} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{X}_{(n)} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$$

Konfidenzintervall für μ bei unbekannter Varianz σ^2

$$I(X_1, \dots, X_n) = \left[\bar{X}_{(n)} - t_{n-1;1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S^2_{(n)}}{n}}, \bar{X}_{(n)} + t_{n-1;1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S^2_{(n)}}{n}}\right]$$

Konfidenzintervall für σ^2 bei bekanntem Erwartungswert $\mu = \mu_0$

$$I(X_1, \dots, X_n) = \left[\frac{\Sigma_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;1-\alpha/2}}, \frac{\Sigma_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;\alpha/2}}\right]$$

Konfidenzintervall für σ^2 bei unbekanntem Erwartungswert μ

$$I(X_1, \dots, X_n) = \left[\frac{(n-1)S^2_{(n)}}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2_{(n)}}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}\right]$$

9 Tests

1. $X_1, \dots, X_n$ unabhängig, identisch $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt

Gauß-Test , testen für μ bei bekannter Varianz $\sigma^2 = \sigma_0^2$

2. a) $H_0 : \mu = \mu_0$, b) $H_0 : \mu \leq \mu_0$, c) $H_0 : \mu \geq \mu_0$
3. Testgröße
$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_0}(\bar{X}_{(n)} - \mu_0)$$
4. Ablehnung Falls
a) $|T| > u_{1-\alpha/2}$, b) $T > u_{1-\alpha}$, c) $T < u_\alpha$

t-Test , testen für μ bei unbekannter Varianz σ^2

2. a) $H_0 : \mu = \mu_0$, b) $H_0 : \mu \leq \mu_0$, c) $H_0 : \mu \geq \mu_0$
3. Testgröße
$$T(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_{(n)} - \mu_0}{\sqrt{S^2_{(n)}}}$$
4. Ablehnung Falls
a) $|T| > t_{n-1;1-\alpha/2}$, b) $T > t_{n-1;1-\alpha}$, c) $T < t_{n-1;\alpha}$

χ^2-Streuungstest , testen für σ^2 bei unbekanntem Erwartungswert μ

2. a) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, b) $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$, c) $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$
3. Testgröße
$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{(n-1)}{\sigma_0^2} S^2_{(n)}$$
4. Ablehnung falls
a) $T < \chi^2_{n-1;\alpha/2}$ oder $T > \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}$, b) $T > \chi^2_{n-1;1-\alpha}$, c) $T < \chi^2_{n-1;\alpha}$