



Stef9998

11. April 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Interpolation	2
1.1	Polynominterpolation (Newtonsche Interpolationsformel)	2
2	Numerische Integration	3
2.1	Newton-Cotes	3
2.1.1	geschlossen	3
2.1.2	offen	3
2.2	summiert	3
4	Lineare Gleichungssysteme	5
4.3	Cholesky Verfahren ($LL^T = A$)	5
4.4	Fehlerabschätzung für gestörte Gleichungssysteme	5
5	Nichtlineare Gleichungssysteme	6
5.2.1	lokales Newton-Verfahren	6
6	Verfahren zur Eigenwert- und Eigenvektorberechnung	7
6.2	Vektoriteration	7
7	Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie	8
7.5	Zufallsvariablen und Verteilungsfunktion	8
8	Schätzverfahren und Konfidenzintervalle	9
8.2	Maximum-Likelihood-Schätzer	9
8.3	Konfidenzintervalle	9
9	Tests	10

1 Interpolation

1.1 Polynominterpolation (Newtonsche Interpolationsformel)

Wir berechnen ein Polynom n -ten Grades $p_n(x)$ welches die Ursprungsfunktion annähert.

Dafür benutzen wir das Schema

$$\begin{array}{c|l} x_0 & f[x_0] = y_0 \\ x_1 & f[x_1] = y_1 \\ x_2 & f[x_2] = y_2 \\ \vdots & \end{array} \quad \begin{array}{l} \searrow \\ \nearrow \searrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \nearrow \searrow \nearrow \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ f[x_0, x_1] \\ f[x_1, x_2] \\ f[x_0, x_1, x_2] \end{array}$$

$$f[x_j, \dots, x_{k+j}] = \frac{f[x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] - f[x_j, \dots, x_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j} = \frac{f_{\text{unten}} - f_{\text{oben}}}{x_{\text{unten}} - x_{\text{oben}}}$$

um dann Polynom zu berechnen

$$p_n(x) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^n \gamma_i (x - x_0) \dots (x - x_{i-1}) \quad , \gamma_i = f[x_0 \dots x_i]$$

wobei die γ_i 's einfach die oberste Zeile (ohne x_0) im Schema ist.

Hinweis: Man kann Zeilen vertauschen. Das heißt wenn viele $f[x] = 0$ lohnt es sich meist diese nach oben zu tauschen.

Fehlerabschätzung:

Äquidistant

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Tschebyschev-Abszissen

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{n+1} 2^{-n}$$

2 Numerische Integration

a, b sind Start- und Endpunkt. h ist die Schrittweite. n sind die Stützstellen.

$$\|f(\xi)\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

2.1 Newton-Cotes

Allgemeiner Fehler

$$\int_a^b \|f(x) - p_n(x)\| dx \leq \frac{\|f^{(n+1)}(\xi)\|}{(n+1)!} (b-a)^{n+2} = \max_{x \in [a, b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} (b-a)^{n+2}$$

2.1.1 geschlossen

$$x_i = a + ih \quad i = 0, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

n	h	$\alpha_{i,n}$				$E_n(f)$	Name
1	$b-a$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			$-\frac{f^{(2)}(\xi)}{12} h^3$	Trapezregel
2	$\frac{b-a}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$		$-\frac{f^{(4)}(\xi)}{90} h^5$	Simpson-Regel
3	$\frac{b-a}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80} h^5$	3/8-Regel
4	$\frac{b-a}{4}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{64}{45}$	$-\frac{8f^{(6)}(\xi)}{945} h^7$	Milne-Regel

$$I_n(f) = h \sum_{i=0}^n \alpha_{i,n} f(x_i)$$

2.1.2 offen

$$x_i = a + ih \quad i = 1, \dots, n+1, \quad h = \frac{b-a}{n+2}$$

n	h	$\tilde{\alpha}_{i,n}$			$\tilde{E}_n(f)$	Name
0	$\frac{b-a}{2}$	2			$\frac{f^{(2)}(\xi)}{3} h^3$	Rechteckregel
1	$\frac{b-a}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$		$\frac{3f^{(2)}(\xi)}{2} h^3$	Rechteckregel
2	$\frac{b-a}{4}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{28f^{(4)}(\xi)}{90} h^5$	Rechteckregel

$$\tilde{I}_n(f) = h \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{\alpha}_{i,n} f(x_i)$$

2.2 summiert

Aufteilen in Teilintervalle m

$$N = n \cdot m \quad H = \frac{b-a}{m} \quad h = \frac{b-a}{N}$$

$$x_i = a + ih \quad i = 0, \dots, N$$

Summierte Trapezregel
(geschlossen, $n = 1$, $h = \frac{b-a}{m}$)

$$S_N^{(1)}(f) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{m-1} (f(x_j) + f(x_{j+1}))$$

Fehler: $R_N^{(1)}(f) = -\frac{f''(\xi)}{12} (b-a)h^2$

Summierte Simpson-Regel
(geschlossen, $n = 2$, $h = \frac{b-a}{2m}$)

$$S_N^{(2)}(f) = \frac{h}{3} \sum_{j=0}^{m-1} (f(x_{2j}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2}))$$

Fehler: $R_N^{(2)}(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}(b-a)h^4$

Summierte Rechteck-Regel
(offen, $n = 0$, $2m = N$, $h = \frac{b-a}{N}$)

$$\tilde{S}_N^{(0)} = 2h \sum_{j=1}^m f(x_{2j-1})$$

Fehler: $\tilde{R}_N^{(0)}(f) = \frac{f''(\xi)}{6}(b-a)h^2$

4 Lineare Gleichungssysteme

4.3 Cholesky Verfahren ($LL^T = A$)

Für $j = 1, \dots, n$

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}$$

Falls Wurzel nicht existiert, STOPP $\Rightarrow A$ nicht definit

Für $i = j + 1, \dots, n$:

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}$$

4.4 Fehlerabschätzung für gestörte Gleichungssysteme

$$Ax = b$$

$$(A + \Delta A)\tilde{x} = b + \Delta b$$

dann gilt für den Fehler

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A)\|\Delta A\|/\|A\|} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)$$

mit

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$$

induziert

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

induziert

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

(Spaltensummen Norm = "größte" Spalte)

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

induziert

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

(Zeilensummen Norm = "größte" Zeile)

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

5 Nichtlineare Gleichungssysteme

5.2.1 lokales Newton-Verfahren

$$\begin{aligned}s^{(k)} \text{ Lösung von } J_F(x^{(k)})s^{(k)} &= -F(x^{(k)}) \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} + s^{(k)}\end{aligned}$$

Bei $f(x) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$

$$J_F(x^{(k)})^{-1} = F'(x^{(k)})$$

$$\Rightarrow s^{(k)} = -\frac{F(x^{(k)})}{F'(x^{(k)})} \qquad x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{F(x^{(k)})}{F'(x^{(k)})}$$

6 Verfahren zur Eigenwert- und Eigenvektorberechnung

6.2 Vektoriteration

Einfache Vektoriteration nach von Mises:

Wir setzen die Iterationsmatrix B einfach gleich der gegebenen Matrix A

$$B = A$$

Um die nächste Iteration von z zu bekommen bedarf es nur dieser Formel, welche man die ganze so lange durchiteriert, bis man bei der gewünschten Zahl angekommen ist.

$$z^{(k+1)} = \frac{1}{\|Bz^{(k)}\|} Bz^{(k)}$$

Um nun den Rayleigh-Quotienten von einem beliebigen k (meistens wird das vorletzte benutzt) einfach alles in die Formel einsetzen.

$$R(z^{(k)}, B) = \frac{(z^{(k)})^H B z^{(k)}}{(z^{(k)})^H z^{(k)}}$$

Bei reellen Werten entspricht $(\cdot)^H$ der Transponierten.

Inverse Vektoriteration von Wielandt:

Hier ist B mit einem Shift μ verschoben, und das Ganze invertiert.

$$B = (A - \mu I)^{-1}$$

Achtung! Dabei nicht die Inverse bestimmen, sondern über die DGL

$$(A - \mu I)\hat{z}^{(k+1)} = z^{(k)}$$

\hat{z}^{k+1} bestimmen und dann normieren zu

$$z^{(k+1)} = \frac{\hat{z}^{(k+1)}}{\|\hat{z}^{(k+1)}\|}$$

Um nun den Rayleigh-Quotienten von einem beliebigen k (meistens wird das vorletzte benutzt) einfach alles in die Formel einsetzen.

$$R(z^{(k)}, (A - \mu I)^{-1}) = \frac{(z^{(k)})^H \hat{z}^{(k+1)}}{(z^{(k)})^H z^{(k)}}$$

Bei reellen Werten entspricht $(\cdot)^H$ der Transponierten.

Einen Eigenwert λ_i (oder Schätzung) erhalten wir dann durch Umstellen von

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i - \mu}$$

Wobei μ_i dem Rayleigh-Quotienten entspricht.

7 Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

7.5 Zufallsvariablen und Verteilungsfunktion

Alle Wahrscheinlichkeiten $P(\Omega)$ / die Verteilungsfunktion im unendlichen $F(+\infty)$ muss = 1 werden.

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$E(X^2) = \sum_i (x_i)^2 P(X = x_i)$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

8 Schätzverfahren und Konfidenzintervalle

8.2 Maximum-Likelihood-Schätzer

$f_\theta(x)$ entspricht der Dichtefunktion. Bei diskreten Werten siehe oben.

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = f_\theta(x_1) f_\theta(x_2) \dots f_\theta(x_n)$$
$$\ln(L(\theta; x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n \ln(f_\theta(x_i))$$

Teilweise kann man f_θ durch den \ln nochmal in Summen aufteilen, da dann alle Summanden ohne θ bei der Ableitung rausfliegen.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln(L(\theta; x_1, \dots, x_n)) = \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{i=1}^n \ln(f_\theta(x_i)) \stackrel{!}{=} 0$$

Nun nach θ umstellen. Dies ist dann die eindeutige Nullstelle

$$\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \dots$$

Um zu wissen, dass es ein Maximum ist, muss man noch schauen ob die 2. Ableitung < 0 ist

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln(L(\theta; x_1, \dots, x_n)) \stackrel{!}{<} 0$$

8.3 Konfidenzintervalle

$$F_\theta(x) = F_{(\mu, \sigma^2)}(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad \bar{X}_{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad S_{(n)}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_{(n)})^2$$

$\Theta = \{(\mu, \sigma_0^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$ und $\tau(\theta) = \mu/\sigma^2$. Das Konfidenzintervall für μ/σ^2 zum Niveau $1 - \alpha$ lautet

Konfidenzintervall für μ bei bekannter Varianz $\sigma^2 = \sigma_0^2$

$$I(X_1, \dots, X_n) = \left[\bar{X}_{(n)} - u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{X}_{(n)} + u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right]$$

Konfidenzintervall für μ bei unbekannter Varianz σ^2

$$I(X_1, \dots, X_n) = \left[\bar{X}_{(n)} - t_{n-1; 1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S_{(n)}^2}{n}}, \bar{X}_{(n)} + t_{n-1; 1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S_{(n)}^2}{n}} \right]$$

Konfidenzintervall für σ^2 bei bekanntem Erwartungswert $\mu = \mu_0$

$$I(X_1, \dots, X_n) = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\chi_{n-1; 1-\alpha/2}^2}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\chi_{n-1; \alpha/2}^2} \right]$$

Konfidenzintervall für σ^2 bei unbekanntem Erwartungswert μ

$$I(X_1, \dots, X_n) = \left[\frac{(n-1)S_{(n)}^2}{\chi_{n-1; 1-\alpha/2}^2}, \frac{(n-1)S_{(n)}^2}{\chi_{n-1; \alpha/2}^2} \right]$$

9 Tests

1. X_1, \dots, X_n unabhängig, identisch $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt

Gauß-Test, testen für μ bei bekannter Varianz $\sigma^2 = \sigma_0^2$

2. a) $H_0 : \mu = \mu_0$, b) $H_0 : \mu \leq \mu_0$, c) $H_0 : \mu \geq \mu_0$

3. Testgröße

$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_0} (\bar{X}_{(n)} - \mu_0)$$

4. Ablehnung Falls

- a) $|T| > u_{1-\alpha/2}$, b) $T > u_{1-\alpha}$, c) $T < u_\alpha$

t-Test, testen für μ bei unbekannter Varianz σ^2

2. a) $H_0 : \mu = \mu_0$, b) $H_0 : \mu \leq \mu_0$, c) $H_0 : \mu \geq \mu_0$

3. Testgröße

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_{(n)} - \mu_0}{\sqrt{S_{(n)}^2}}$$

4. Ablehnung Falls

- a) $|T| > t_{n-1; 1-\alpha/2}$, b) $T > t_{n-1; 1-\alpha}$, c) $T < t_{n-1; \alpha}$

χ^2 -Streuungstest, testen für σ^2 bei unbekanntem Erwartungswert μ

2. a) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, b) $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$, c) $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$

3. Testgröße

$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{(n-1)}{\sigma_0^2} S_{(n)}^2$$

4. Ablehnung falls

- a) $T < \chi_{n-1; \alpha/2}^2$ oder $T > \chi_{n-1; 1-\alpha/2}^2$, b) $T > \chi_{n-1; 1-\alpha}^2$, c) $T < \chi_{n-1; \alpha}^2$