



Luca Lontos
4. April 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Interpolation	3
1.1	Polynominterpolation	3
1.1.1	Lagrange	3
1.1.2	Newton	3
1.1.3	Fehlerabschätzung	3
1.2	Spline-Interpolation	4
1.2.1	Linear	4
1.2.2	Kubisch	4
2	Numerische Integration	6
2.1	Newton-Cotes-Quadratur	6
2.1.1	geschlossen	6
2.1.2	offen	6
2.2	Summierte Newton-Cotes	7
3	Numerische Behandlung von Anfangswertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen	8
3.1	Einführung	8
3.1.1	Verfahren	8
3.2	Steife Differentialgleichungen	9
3.2.1	Stabilitätsgebiete einiger Verfahren	10
4	Lineare Gleichungssysteme	11
4.1	Problemstellung	11
4.2	Gaußsche Eliminationsverfahren, Dreieckszerlegung einer Matrix	11
4.2.1	Lösung gestaffelter Gleichungssysteme	11
4.2.2	Gaußsches Eliminationsverfahren	11
4.2.3	Pivotstrategie	11
4.2.4	LR-Zerlegung	11
4.2.5	Matrizenklassen, die keine Pivotsuche erfordern	12
4.3	Das Cholesky Verfahren	12
4.4	Fehlerabschätzung und Rundungsfehlereinfluss	13
4.4.1	Fehlerabschätzung für gestörte Gleichungssysteme	13
5	Nichtlineare Gleichungssysteme	14
5.2	Das Newton-Verfahren	14
5.2.1	Herleitung	14
5.2.2	Superlineare und quadratische lokale Konvergenz des Newton-Verfahrens	14
5.2.3	Globalisierung des Newton-Verfahrens	14
6	Verfahren zur Eigenwert- und Eigenvektorberechnung	15
6.1	Eigenwertprobleme	15
6.1.1	Grundlagen	15
6.1.3	Grundkonzepte numerischer Verfahren	15
6.1.4	Störungstheorie für Eigenwertprobleme	15

6.2	Die Vektoriteration	17
6.2.1	Definition und Eigenschaften der Vektoriteration	17
6.2.2	Die Vektoriteration nach v. Mises und Wielandt	17
6.2.3	Kochrezept	18
6.3	Das QR-Verfahren	18
7	Grundbegriffe der Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie	19
7.1	Messreihen	19
7.2	Lage- und Streumaßzahlen	19
7.2.1	Lagemaßzahlen	19
7.2.2	Streuungsmaße	19
7.2.3	Zweidimensionale Messreihen	20
7.2.4	Regressionsgerade	20
7.3	Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeit	21
7.3.1	Zufallsexperimente	21
7.3.2	Wahrscheinlichkeit	21
7.3.3	Elementare Formeln der Kombinatorik	21
7.4	Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeiten	22
7.4.1	Bedingte Wahrscheinlichkeit	22
7.4.2	Unabhängigkeit	22
7.5	Zufallsvariablen und Verteilungsfunktion	22
7.5.1	Beispiele für diskrete Verteilungen	23
7.5.2	Beispiele für Stetige Verteilungen	23
7.6	Erwartungswert und Varianz	24
7.6.1	Rechenregeln	25
7.7	Gesetz der großen Zahlen, zentraler Grenzwertsatz	26
7.7.1	Das schwache gesetz der großen Zahlen	26
7.7.2	Zentraler Grenzwertsatz	26
7.8	Testverteilungen und Quantilapproximationen	26
7.8.1	Wichtige Anwendungsbeispiele	27
8	Schätzverfahren und Konfidenzintervalle	27
8.1	Grundlagen zu Schätzverfahren	27
8.2	Maximum-Likelihood-Schätzer	28
8.2.1	Kochrezept für Berechnung	29
8.3	Konfidenzintervalle	29
8.3.1	Konstruktion von Konfidenzintervallen	29
9	Tests bei Normalverteilungsannahmen	31
9.1	Grundlagen	31
9.2	Wichtige Tests bei Normalverteilungsannahme	31
9.3	Verteilungstests	31

1 Interpolation

1.1 Polynominterpolation

n = Anzahl Stützstellen - 1

1.1.1 Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_{k,n}(x) \quad \text{mit} \quad L_{k,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

Trick effiziente/ übersichtliche Berechnung

k/j	x_0	x_1	\dots	x_n	$L_{k,n}$
x_0	\backslash	$\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$	\dots	$\frac{x - x_n}{x_0 - x_n}$	\prod diese Zeile
x_1	$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$	\backslash	\dots	$\frac{x - x_n}{x_1 - x_n}$	\prod diese Zeile
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
x_n	$\frac{x - x_0}{x_n - x_0}$	$\frac{x - x_1}{x_n - x_1}$	\dots	\backslash	\prod diese Zeile

Satz 1.1.1 es gibt genau ein Polynom $p(x)$ vom Grad $\leq n$, das die Interpolationsbedingungen erfüllt, nämlich $p_n(x)$

1.1.2 Newton

$$p_n(x) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^n \gamma_i (x - x_0) \dots (x - x_{i-1}), \quad \gamma_i = f_{[x_0, \dots, x_i]}$$

$$f_{[x_j, \dots, x_{j+k}]} = \frac{f_{[x_{j+1}, \dots, x_{j+k}]} - f_{[x_j, \dots, x_{j+k-1}]}}{x_{j+k} - x_j} = \frac{f_{\text{unten}} - f_{\text{oben}}}{x_{\text{unten}} - x_{\text{oben}}}$$

Die Oberste Zeile ab dem Strich sind dann die γ_i

$$\begin{array}{c|l} x_0 & f_{[x_0]} = y_0 \searrow \\ & f_{[x_0, x_1]} \searrow \\ x_1 & f_{[x_1]} = y_1 \swarrow \quad f_{[x_0, x_1, x_2]} \\ & f_{[x_1, x_2]} \swarrow \\ x_2 & f_{[x_2]} = y_2 \nearrow \\ \vdots & \end{array}$$

Hinweis: Man kann Zeilen vertauschen. Das heißt wenn viele $f_{[x]} = 0$ lohnt es sich meist diese nach oben zu tauschen.

1.1.3 Fehlerabschätzung

Satz 1.1.3 Voraussetzungen für max error Korollar: f ist $n+1$ mal stetig diffbar

Korollar 1.1.4 Wenn Satz 1.1.3 gilt:

Äquidistant:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Tschebyschev-Abszissen:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{n+1} 2^{-n}$$

Inverse Interpolation:

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv. Sind dann alle $(x_i, y_i), y_i = f(x_i)$ Stützpunkte von f dann sind (y_i, x_i) Stützpunkte für f^{-1} und eine Approximation kann durch Interpolation dieser gewonnen werden.

Hinweis:

f ist auf Wertebereich von x stetig differenzierbar und aufgrund der Ableitung streng monoton wachsend \Rightarrow injektiv

Die Grenzen von x müssen genau auf die Grenzen von y abbilden, da dann (wegen monoton wachsend) die gesamte Zielmenge getroffen wird \Rightarrow surjektiv

\Rightarrow bijektiv

1.2 Spline-Interpolation

Definition 1.2.1 Eine Splinefunktion der Ordnung k zur Zerlegung Δ ist eine Funktion $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- es gilt $s \in C^{k-1}([a, b])$ (stetig diffbar)
- s stimmt auf jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$

Spline-Interpolation:

Zu einer Zerlegung $\Delta = \{x_i : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ und werten $y_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n$ bestimme $s \in S_{\Delta, k}$ mit

$$s(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$$

1.2.1 Linear

$$s(x) = s_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1} \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$$

mit Hilfsknoten $x_{-1} < a$ und $x_{n+1} > b$ gilt dann

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{falls } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{falls } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{falls } x > x_{i+1} \end{cases}$$
$$s(x) = \sum_{i=0}^n y_i \varphi_i(x), x \in [a, b]$$

Satz 1.2.2 Zu einer Zerlegung $\Delta = \{x_i : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ von $[a, b]$ und Werten y_i existiert genau ein interpolierender Spline

Satz 1.2.3

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{8} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| h_{\max}^2$$

1.2.2 Kubisch

$$s_i(x) = \frac{1}{6} \left(\frac{(x_{i+1} - x)^3}{x_{i+1} - x_i} M_i + \frac{(x - x_i)^3}{x_{i+1} - x_i} M_{i+1} \right) + c_i(x - x_i) + d_i$$

mit $h_i = x_{i+1} - x_i$

$$d_i = y_i - \frac{h_i^2}{6} M_i \quad c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} (M_{i+1} - M_i)$$

Natürliche Randbedingungen:

$$M_0 = M_n = 0 \quad b_0 = b_n = 0 \\ \lambda_0 = \lambda_n = 0 \quad \mu_0 = \mu_n = 1$$

Hermite Randbedingungen:

$$b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - f'(a) \quad b_n = f'(b) - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \\ \lambda_0 = \frac{h_0}{3} \quad \mu_0 = \frac{h_0}{3} \quad \lambda_n = \frac{h_{n-1}}{6} \quad \mu_n = \frac{h_{n-1}}{3}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \lambda_0 & & & \\ \frac{h_0}{6} & \frac{h_0+h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & & \\ & \frac{h_1}{6} & \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & \lambda_n & \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Satz 1.2.6 Fehler Natürlich

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{h_{max}}{h_{min}} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{max}^4$$

$$|f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)| \leq \frac{2h_{max}}{h_{min}} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{max}^{4-k}$$

Satz 1.2.7 Fehler Hermit

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{5}{384} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{max}^4$$

$$|f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)| \leq \frac{2h_{max}}{h_{min}} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{max}^{4-k}$$

2 Numerische Integration

2.1 Newton-Cotes-Quadratur

2.1.1 geschlossen

Definition 2.1.1 Eine Integrationsformel $J(f) = \sum_{i=0}^n \beta_i f(x_i)$ heißt exakt vom Grad n falls sie alle Polynome bis mindestens vom Grad n exakt integriert

Allgemeiner Fehler

$$\int_a^b \|f(x) - p_n(x)\| dx \leq \frac{\|f^{(n+1)}(\xi)\|}{(n+1)!} (b-a)^{n+2} = \max_{x \in [a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} (b-a)^{n+2}$$

Berechnung

$$x_i = a + ih \qquad i = 0, \dots, n, \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

$$I_n(f) = h \sum_{i=0}^n \alpha_{i,n} f(x_i)$$

n	h	$\alpha_{i,n}$				$E_n(f)$	Name
1	$b-a$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			$-\frac{f^{(2)}(\xi)}{12}h^3$	Trapezregel
2	$\frac{b-a}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$		$-\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}h^5$	Simpson-Regel
3	$\frac{b-a}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80}h^5$	3/8-Regel
4	$\frac{b-a}{4}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{64}{45}$	$-\frac{8f^{(6)}(\xi)}{945}h^7$	Milne-Regel

2.1.2 offen

Berechnung

$$x_i = a + ih \qquad i = 1, \dots, n+1, \qquad h = \frac{b-a}{n+2}$$

$$\tilde{I}_n(f) = h \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{\alpha}_{i,n} f(x_i)$$

n	h	$\tilde{\alpha}_{i,n}$			$\tilde{E}_n(f)$	Name
0	$\frac{b-a}{2}$	2			$\frac{f^{(2)}(\xi)}{3} h^3$	Rechteckregel
1	$\frac{b-a}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$		$\frac{3f^{(2)}(\xi)}{4} h^3$	Rechteckregel
2	$\frac{b-a}{4}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{28f^{(4)}(\xi)}{90} h^5$	Rechteckregel

2.2 Summierte Newton-Cotes

Newton Cotes nur auf kleinen Intervallen präzise in kleinen Intervallen

Idee: Aufteilen in Teilintervalle m

$$N = n \cdot m$$

$$x_i = a + ih$$

$$H = \frac{b-a}{m}$$

$$i = 0, \dots, N$$

$$h = \frac{b-a}{N}$$

Summierte Trapezregel

(geschlossen, $n = 1$, $h = \frac{b-a}{m}$)

$$S_N^{(1)}(f) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{m-1} (f(x_j) + f(x_{j+1}))$$

$$\text{Fehler: } R_N^{(1)}(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)h^2$$

Summierte Simpson-Regel

(geschlossen, $n = 2$, $h = \frac{b-a}{2m}$)

$$S_N^{(2)}(f) = \frac{h}{3} \sum_{j=0}^{m-1} (f(x_{2j}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2}))$$

$$\text{Fehler: } R_N^{(2)}(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}(b-a)h^4$$

Summierte Rechteck-Regel

(offen, $n = 0$, $2m = N$, $h = \frac{b-a}{N}$)

$$\tilde{S}_N^{(0)} = 2h \sum_{j=1}^m f(x_{2j-1})$$

$$\text{Fehler: } \tilde{R}_N^{(0)}(f) = \frac{f''(\xi)}{6}(b-a)h^2$$

3 Numerische Behandlung von Anfangswertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen

3.1 Einführung

t_j sind die Stützpunkte. Also untere Grenze + Schrittweite ($a + j * h$)
 $y'(t) = f(t, y(t))$

3.1.1 Verfahren

Expliziter Euler

$$u_{j+1} := u_j + hf(t_j, u_j)$$

Impliziter Euler

$$u_{j+1} := u_j + hf(t_{j+1}, u_{j+1})$$

Implizite Trapezregel

$$u_{j+1} := u_j + \frac{h}{2}(f(t_j, u_j) + f(t_{j+1}, u_{j+1}))$$

Verfahren von Heun, erstes Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung

$$u_{j+1} := u_j + \frac{h}{2}(f(t_j, u_j) + f(t_{j+1}, u_j + hf(t_j, u_j)))$$

kann man auch schreiben als:

$$u_{j+1} := u_j + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

mit $k_1 = f(t_j, u_j)$, $k_2 = f(t_{j+1}, u_j + hk_1)$

Modifizierter Euler, zweites Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung

$$u_{j+1} = u_j + hk_2$$

mit $k_1 = f(t_j, u_j)$, $k_2 = f(t_j + \frac{h}{2}, u_j + \frac{h}{2}k_1)$

Klassisches Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung (RK4)

$$u_{j+1} := u_j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 := f(t_j, u_j)$$

$$k_2 := f(t_j + \frac{h}{2}, u_j + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 := f(t_j + \frac{h}{2}, u_j + \frac{h}{2}k_2)$$

$$k_4 := f(t_{j+1}, u_j + hk_3)$$

r-stufiges explizites Runge-Kutta-Verfahren

$$k_i(t, u, h) = k_i := f(t + \gamma_i h, u + h \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j), i = 1 \dots r$$

$$\phi(t, h; u) = \sum_{i=1}^r \beta_i k_i$$

Butcher – Schema

γ_1	0				
γ_2	α_{21}	0			
γ_3	α_{31}	α_{32}	0		
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\ddots	
γ_r	α_{r1}	\dots	\dots	$\alpha_{r,r-1}$	0
	β_1	β_2	\dots	β_{r-1}	β_r

Satz 3.1.7 Konsistenzordnungen p

$p = 1$ falls

$$\sum_{i=1}^r \beta_i = 1$$

$p = 2$ falls zusätzlich

$$\sum_{i=1}^r \beta_i \gamma_i = \frac{1}{2}$$

$p = 3$ falls zusätzlich

$$\sum_{i=1}^r \beta_i \gamma_i^2 = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{i,j=1}^r \beta_i \alpha_{ij} \gamma_j = \frac{1}{6}$$

$p = 4$ falls zusätzlich

$$\sum_{i=1}^r \beta_i \gamma_i^3 = \frac{1}{4},$$
$$\sum_{i,j=1}^r \beta_i \alpha_{ij} \gamma_j^2 = \frac{1}{12}$$

$$\sum_{i,j=1}^r \beta_i \gamma_i \alpha_{ij} \gamma_j = \frac{1}{8}$$
$$\sum_{i,j,k=1}^r \beta_i \alpha_{ij} \alpha_{jk} \gamma_k = \frac{1}{24}$$

3.2 Steife Differentialgleichungen

Definition 3.2.2 ein Anfangswertproblem

$$y'(t) = Ay(t) + c$$

$$y(a) = y_0$$

heißt steif, wenn die Realteile der Eigenwerte von A nichtpositiv sind und A Eigenwerte mit $\operatorname{Re}(\lambda) \ll -1$ und Eigenwerte λ_i mit schwach negativen Realteil besitzt.

Definition 3.2.3 Ein Verfahren heißt A -Stabil wenn seine Anwendung auf das Modellproblem

$$y' = \lambda y,$$

$$y(0) = 1,$$

$$\text{mit } \lambda \in \mathbb{C},$$

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

mit der Lösung

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

für jede schrittweite $h > 0$ eine Folge $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ produziert mit

$$|u_{j+1}| \leq |u_j|, \quad \forall j \geq 0$$

bei Einschrittverfahren gilt bei Anwendung auf das Modellproblem die Beziehung

$$u_{j+1} = R(q)u_j \text{ mit } q = \lambda h$$

Definition 3.2.5 Man nennt R die Stabilitätsfunktion des Einschrittverfahrens. Die Menge

$$S = \{q \in \mathbb{C} : |R(q)| \leq 1\}$$

heißt Stabilitätsgebiet des Einschrittverfahrens

Definition 3.2.6 Ein Verfahren heißt L -Stabil, wenn es A -Stabil ist und die Stabilitätsfunktion zudem erfüllt

$$\lim_{q \rightarrow -\infty} R(q) = 0$$

3.2.1 Stabilitätsgebiete einiger Verfahren

Expliziter Euler

$$\begin{aligned}u_{j+1} &= (1 + \lambda h)u_j \\R(q) &= 1 + q \\S &= \{q \in \mathbb{C} : |1 + q| \geq 1\}\end{aligned}$$

Nicht A-Stabil (gilt für alle Expliziter RKs)

Impliziter Euler

$$\begin{aligned}u_{j+1} &= \frac{1}{1 - \lambda h}u_j \\R(q) &= \frac{1}{1 - q}; q \neq 1 \\S &= \{q \in \mathbb{C} : |1 - q| \geq 1\} \supset \{q \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(q) < 0\}\end{aligned}$$

A und L Stabil

Implizite Trapezregel

$$\begin{aligned}u_{j+1} &= \frac{1 + \lambda h/2}{1 - \lambda h/2}u_j \\R(q) &= \frac{1 + q/2}{1 - q/2}; q \neq 2 \\S &= \{q \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(q) \leq 0\}\end{aligned}$$

A aber nicht L Stabil

Implizite Runge-Kutta-Verfahren

$$k_i = k_i(t, u, h) := f(t + \gamma_i h, u + h \sum_{l=1}^r \alpha_{il} k_l), \quad i = 1, \dots, r$$

$$\phi(t, h; u) = \sum_{i=1}^r \beta_i k_i$$

Butcher-Schema

γ_1	α_{11}	\dots	\dots	$\alpha_{1,r-1}$	$\alpha_{1,r}$
γ_2	α_{21}	\dots	\dots	$\alpha_{2,r-1}$	$\alpha_{2,r}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
γ_r	α_{r1}	\dots	\dots	$\alpha_{r,r-1}$	$\alpha_{r,r}$
	β_1	β_2	\dots	β_{r-1}	β_r

$$u_{j+1} = (1 + q\beta^T(I - qA)^{-1}\mathbf{1})u_j$$

$$R(q) = 1 + q\beta^T(I - qA)^{-1}\mathbf{1} = \frac{\det(I - qA + q\mathbf{1}\beta^T)}{\det(I - qA)}$$

4 Lineare Gleichungssysteme

4.1 Problemstellung

Lineares Gleichungssystem: Gesucht ist eine Lösung x von

$$Ax = b$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Definition 4.1.1 Das LGS hat eine Lösung g.d.w.

$$\text{rang}(a) = \text{rang}(A, b)$$

4.2 Gaußsche Eliminationsverfahren, Dreieckszerlegung einer Matrix

4.2.1 Lösung gestaffelter Gleichungssysteme

Subsection Damit Nummerierung stimmt

4.2.2 Gaußsches Eliminationsverfahren

1. Wähle ein Pivotelement $a_{rk}^{(k)} \neq 0, k \leq r \leq n$ vertausche Zeile k und $r \rightsquigarrow (\tilde{A}^{(k)}, \tilde{b}^{(k)})$
2. Für $i = k + 1, \dots, n$: Subtrahiere das l_{ik} -fache mit

$$l_{ik} = \frac{\tilde{a}_{ik}^{(k)}}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}}$$

der k -ten Gleichung von der i -ten Gleichung

4.2.3 Pivotstrategie

- Spaltenpivot: wähle $k \leq r \leq n$ mit

$$|a_{rk}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|$$

- Vollständige Pivotsuche: Bestimme $k \leq r \leq n, k \leq s \leq n$ mit

$$|a_{rs}^{(k)}| = \max_{k \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{(k)}|$$

4.2.4 LR-Zerlegung

Finden einer Zerlegung von A der Form

$$LR = PA(Q)$$

Gaußsche Eliminationsverfahren liefert dies "gratis" mit

$$R = A^{(n)} \quad c = b^{(n)} \quad L = I + L^{(n)}$$

um P zu erhalten fängt man mit I an und tauscht die Zeilen jedes mal wenn man in A auch die Zeilen tauscht, Q das selbe nur mit Spalten (nur bei Vollständige Pivotsuche)

nachdem Zerlegung gefunden kann einfach $Ax = \tilde{b}$ gelöst werden

- Löse $Lz = P\tilde{b}$
- Löse $Ry = z$
- Lösung: $x = Qy$

4.2.5 Matrizenklassen, die keine Pivotsuche erfordern

- $A = A^T$ ist symmetrisch positiv definit, also

$$x^T A x > 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- A ist strikt diagonaldominant, d.h.,

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, i = 1, \dots, n$$

- A ist M-Matrix, dh. es gilt

$$a_{ii} > 0, i = 1, \dots, n$$

$$a_{ij} \leq 0, i \neq j$$

$$D^{-1}(A - D) \text{ hat lauter Eigenwerte vom Betrag } < 1, D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$$

4.3 Das Cholesky Verfahren

Definition 4.3.1 eine reelle Matrix heißt positiv definit falls

$$A = A^T, \quad x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

positiv semi definit falls

$$A = A^T, \quad x^T A x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Satz 4.3.2 Es sei A positiv definit, Dann gibt es genau eine untere Dreiecksmatrix L mit positiven Diagonaleinträgen $l_{ii} > 0$, so dass

$$LL^T = A \text{ (Cholesky-Zerlegung)}$$

Ferner besitzt A eine eindeutige Dreieckszerlegung

$$\tilde{L}\tilde{R} = A,$$

wobei $\tilde{L} = LD^{-1}$, $\tilde{R} = DL^T$

Satz 4.3.3 Cholesky-Verfahren zur Berechnung der Zerlegung $LL^T = A$

Für $j = 1, \dots, n$

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}$$

Falls Wurzel nicht existiert, STOPP, A nicht definit

Für $i = j + 1, \dots, n$:

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}$$

4.4 Fehlerabschätzung und Rundungsfehlereinfluss

4.4.1 Fehlerabschätzung für gestörte Gleichungssysteme

Definition 4.4.1 Eine Vektornorm auf \mathbb{R}^n ist eine Abbildung $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\| \in [0, \infty[$ mit den Eigenschaften

- a) $\|x\| = 0$ nur für $x = 0$
- b) $\|ax\| = |a| \|x\|$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$
- c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ (Dreiecksungleichung)

Definition 4.4.2 Eine Vektornorm induziert eine Matrixnorm, diese haben die Eigenschaften

- a) $\|A\| = 0$ nur für $A = 0$
- b) $\|aA\| = |a| \|A\|$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- c) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (Dreiecksungleichung)
- d) $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (Verträglichkeitsbedingung)
- e) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (Submultiplikativität)

Beispiele hierfür sind:

$\ x\ _2 = \sqrt{x^T x}$	induziert	$\ A\ _2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$	
$\ x\ _1 = \sum_{i=1}^n x_i $	induziert	$\ A\ _1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n a_{ij} $	(Spaltensummen Norm = "größte" Spalte)
$\ x\ _\infty = \max_{i=1, \dots, n} x_i $	induziert	$\ A\ _\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n a_{ij} $	(Zeilensummen Norm = "größte" Zeile)

Definition 4.4.3 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar und sei $\|\cdot\|$ eine induzierte Matrixnorm. Dann heißt die Zahl $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ die Konditionszahl von A bezüglich der Matrixnorm

Satz 4.4.4 (Störeinfluss von Matrix und rechter Seite). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar; $b, \Delta b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$ und $\Delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\|\Delta A\| < 1/\|A^{-1}\|$ mit einer beliebigen durch eine Norm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{R}^n induzierten Matrixnorm $\|\cdot\|$. Ist x die Lösung von

$$Ax = b$$

und \tilde{x} die Lösung von

$$(A + \Delta A)\tilde{x} = b + \Delta b$$

dann gilt

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A)\|\Delta A\|/\|A\|} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)$$

5 Nichtlineare Gleichungssysteme

5.2 Das Newton-Verfahren

5.2.1 Herleitung

Satz 5.2.1

$$\begin{aligned}x^{(k+1)} &= x^{(k)} - J_F(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}) \\x^{(k+1)} &= x^{(k)} + s^{(k)} \\s^{(k)} &\text{ Lösung von } J_F(x^{(k)}) s^{(k)} = -F(x^{(k)})\end{aligned}$$

Satz 5.2.2 Algorithmus für Lokales Newton-Verfahren

1. Falls $F(x^{(k)}) = 0$ STOPP mit Ergebnis $x^{(k)}$
2. Berechne $s^{(k)}$
3. $x^{k+1} = x^{(k)} + s^{(k)}$

5.2.2 Superlineare und quadratische lokale Konvergenz des Newton-Verfahrens

Satz 5.2.3 (Schnelle Lokale Konvergenz des Newton-Verfahrens) Sei F stetig diffbar und sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ ein Punkt mit $F(\tilde{x}) = 0$ und $F'(\tilde{x})$ nichtsingulär. Dann gibt es $\delta > 0$, so dass folgende Aussagen gelten:

- i) \tilde{x} ist die einzige Nullstelle in der δ -Kugel

$$B_\delta(\tilde{x}) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \tilde{x}\|_2 < \delta\}$$

- ii) Für alle $x_0 \in B_\delta(\tilde{x})$ Terminiert der Algorithmus 5.2.2 entweder mit $x^{(k)} = \tilde{x}$ oder erzeugt eine Folge $(x^{(k)}) \subset B_\delta(\tilde{x})$, die superlinear gegen \tilde{x} konvergiert d. h.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \tilde{x} \quad \text{wobei} \quad \|x_{k+1} - \tilde{x}\|_2 \leq v_k \|x^{(k)} - \tilde{x}\|_2$$

mit einer Nullfolge $v_k \searrow 0$

- iii) ist F' Lipschitz-stetig auf $B_\delta(\tilde{x})$ mit Konstante L dann konvergiert (x_k) sogar quadratisch gegen \tilde{x} , d.h.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \tilde{x} \quad \text{wobei} \quad \|x_{k+1} - \tilde{x}\|_2 \leq C \|x^{(k)} - \tilde{x}\|_2^2$$

wobei für $\delta > 0$ klein genug $C = L \|F'(\tilde{x})^{-1}\|_2$ gewählt werden kann. Automatisch wenn zwei mal diffbar in B

5.2.3 Globalisierung des Newton-Verfahrens

Schrittweitenwahl nach Armijo:

sei $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ (z.B. 10^{-3}) fest gegeben. Wähle das Größte $\sigma_k \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$ mit

$$\|F(x^{(k)} + \sigma_k s^{(k)})\|_2^2 \leq \|F(x^{(k)})\|_2^2 - 2\delta\sigma_k \|F(x^{(k)})\|_2^2$$

Satz 5.2.4 Algo für das Globalisierte Newton-Verfahren:

1. Falls $F(x^{(k)}) = 0$ STOPP mit Ergebnis $x^{(k)}$
2. Berechne $s^{(k)}$
3. Bestimme σ_k nach Armijo
4. $x_{k+1} = x^{(k)} + \sigma_k s^{(k)}$

6 Verfahren zur Eigenwert- und Eigenvektorberechnung

6.1 Eigenwertprobleme

6.1.1 Grundlagen

Definition 6.1.1 Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, wenn es einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ gibt mit

$$Ax = \lambda x$$

Jeder solche Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ heißt (Rechts-)Eigenvektor zum Eigenwert λ . Die Menge $\sigma(A)$ aller Eigenwerte von A heißt Spektrum von A . Der Unterraum

$$\text{Eig}_A(\lambda) := \{x \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda I)x = 0\}$$

Ist der Eigenraum von A zum Eigenwert λ . Seine Dimension

$$\gamma(\lambda) := \dim \text{Eig}_A(\lambda) = n - \text{Rang}(A - \lambda I)$$

ist die geometrische Vielfachheit von λ und gibt die Maximalzahl linear unabhängigen Eigenvektoren zu λ an. λ ist EW zu A wenn:

$$\chi(\lambda) := \det(A - \lambda I) = 0$$

also wenn λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi(\mu)$ von A ist

$$\begin{aligned}\chi(\mu) &= (-1)^n \mu^n + (-1)^{n-1} \mu^{n-1} \text{Spur}(A) + \dots + \det(A) \\ &= (-1)^n (\mu - \lambda_1)^{\nu_1} \dots (\mu - \lambda_k)^{\nu_k}\end{aligned}$$

man nennt $\nu(\lambda_i) = \nu_i$ die algebraische Vielfachheit von λ_i . Es gilt:

$$\gamma(\lambda_i) \leq \nu(\lambda_i)$$

Definition 6.1.2 Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ beliebig:

- a) Ist λ EW von A , so ist λ EW von A^T und $\bar{\lambda}$ EW von $A^H := \bar{A}^T$
- b) für jede nichtsinguläre Matrix $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hat die zu A ähnliche Matrix $B := T^{-1}AT$, das selbe charakteristische Polynom und die selben Eigenwerte wie A . Ist x Eigenvektor von A , so ist $y := T^{-1}x$ Eigenvektor von B
- c) Ist A hermitisch also $A^H = A$, dann hat A lauter reelle Eigenwerte. Ist A unitär, also $A^H = A^{-1}$, so gilt $|\lambda| = 1$ für jeden Eigenwert λ

6.1.3 Grundkonzepte numerischer Verfahren

Vektoriteration

$$x^{(k+1)} = \frac{Bx^{(k)}}{\|Bx^{(k)}\|}, \text{ mit } k = 0, 1, \dots$$

Ähnlichkeitstransformation auf einfachere Gestalt Nach Definition 6.1.2 bleiben die Eigenwerte einer Matrix A bei einer Ähnlichkeitstransformation erhalten. Daher liegt nahe A durch

$$A^{(0)} := A \rightarrow A^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow A^{(k+1)} = T_k^{-1}A^{(k)}T_k$$

in eine einfachere Form zu überführen

6.1.4 Störungstheorie für Eigenwertprobleme

Satz 6.1.3 Bezeichnet $\lambda_i(A)$, $i = 1, \dots, n$ die angeordneten EWs einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann sind die Abbildungen

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mapsto \lambda_i(A)$$

stetig. Eigenwerte hängen also stetig von der Matrix ab

Satz 6.1.4 Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ beliebig

a)

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^n K_i$$
$$K_i = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : |\mu - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \text{ (Zeilensumme ohne Diagonale)} \right\}$$

b) ist die Vereinigung G_1 von k Gershgorin-Kreisen disjunkt von der Vereinigung G_2 der restlichen $n-k$ Gershgorin-Kreise, dann enthält G_1 genau k EWs und G_2 genau $n-k$ EWs von A

Eine reelle Matrix (alle Elemente sind reelle Zahlen) hat nur reelle sowie komplex-konjugierte Paare von Eigenwerten. Wenn ein Gershgorin-Kreis nun nur einen Eigenwert beinhaltet, kann dieser daher auch nur reell sein.

Satz 6.1.5 (Bauer/Fike). Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar, also

$$T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: D$$

Dann gilt für jede Matrix $\Delta A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$\forall \mu \in \sigma(A + \Delta A) : \min_{i=1, \dots, n} |\mu - \lambda_i| \leq \text{cond}_2(T) \|\Delta A\|_2$$

mit $\text{cond}_2(T) := \|T\|_2 \|T^{-1}\|_2$; $\text{cond}_2(T) := 1$ für A hermitisch

6.2 Die Vektoriteration

6.2.1 Definition und Eigenschaften der Vektoriteration

Definition 6.2.1 für eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist die Vektoriteration gegeben durch

$$z^{(k+1)} = \frac{1}{\|Bz^{(k)}\|} Bz^{(k)}, \text{ mit } k = 0, 1, \dots$$

mit einem Startvektor $z^{(0)} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

mit geeigneter Wahl von B erhält man so Näherungen an einen Eigenvektor $z^{(k)}$ zu Eigenwert λ .
Eine Eigenwertnäherung für λ erhält man dann durch den **Rayleighquotienten**

$$R(z^{(k)}, B) = \frac{(z^{(k)})^H B z^{(k)}}{(z^{(k)})^H z^{(k)}}$$

Satz 6.2.2 Es sei $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar mit EWs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_r, |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n| \quad (1)$$

mit $r < n$. Falls der Startvektor $z^{(0)}$ einen Anteil in $\text{Eig}_B(\lambda_1)$ besitzt, gilt für die Vektoriteration

$$R(z^{(k)}, B) = \frac{(z^{(k)})^H B z^{(k)}}{(z^{(k)})^H z^{(k)}} = \lambda_1 + O(q^k) \text{ für } k \rightarrow \infty, q = \frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_1} < 1$$

zudem gilt

$$z^{(k)} = \frac{\lambda_1^k}{|\lambda_1|^k} \frac{x_1}{\|x_1\|} + O(q^k), k \leq 1$$

wobei x_1 den Anteil von $z^{(0)}$ in $\text{Eig}_B(\lambda_1)$ bezeichnet

6.2.2 Die Vektoriteration nach v. Mises und Wielandt

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gegeben

Einfache Vektoriteration nach von Mises

Erhält man durch die Wahl von $B = A$

Inverse Vektoriteration von Wieland

für $\mu \neq \lambda_j$ hat die Matrix $B = (A - \mu I)^{-1}$ die EWs

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i - \mu}$$

$$z^{(k+1)} = \frac{\hat{z}^{(k+1)}}{\|\hat{z}^{(k+1)}\|} \text{ mit } \hat{z}^{(k+1)} = (A - \mu I)^{-1} z^{(k)}$$

Lösbar durch

$$(A - \mu I) \hat{z}^{(k+1)} = z^{(k)}$$

hat im Falle

$$q := \max_{1 \leq i \leq n, \lambda_i \neq \lambda_j} \frac{|\lambda_j - \mu|}{|\lambda_i - \mu|} < 1$$

die Konvergenzeigenschaften

$$R(z^{(k)}, (A - \mu I)^{-1}) = \frac{(z^{(k)})^H \hat{z}^{(k+1)}}{(z^{(k)})^H z^{(k)}} = \frac{1}{\lambda_i - \mu} + O(q^k)$$
$$z^{(k)} = \frac{|\lambda_j - \mu|^k}{(\lambda_j - \mu)^k} \frac{x_j}{\|x_j\|} + O(q^k)$$

wobei x_j den Anteil von $z^{(0)}$ in $\text{Eig}_A(\lambda_j) = \text{Eig}_{(A - \mu I)^{-1}}(1/(\lambda_j - \mu))$. Ist A dabei hermitisch, so erfüllt der Rayleigh-Quotient

$$R(z^{(k)}, (A - \mu I)^{-1}) = \frac{(z^{(k)})^H \hat{z}^{(k+1)}}{(z^{(k)})^H z^{(k)}} = \frac{1}{\lambda_i - \mu} + O(q^{2k})$$

6.2.3 Kochrezept

Einfache Vektoriteration nach von Mises:

Wir setzen die zu Iterationsmatrix B einfach gleich der gegebenen Matrix A

$$B = A$$

Um die nächste Iteration von z zu bekommen bedarf es nur dieser Formel, welche man die ganze so lange durchiteriert, bis man bei der gewünschten Zahl angekommen ist.

$$z^{(k+1)} = \frac{1}{\|Bz^{(k)}\|} Bz^{(k)}$$

Um nun den Rayleigh-Quotienten von einem beliebigen k (meistens wird das vorletzte benutzt) einfach alles in die Formel einsetzen.

$$R(z^{(k)}, B) = \frac{(z^{(k)})^H B z^{(k)}}{(z^{(k)})^H z^{(k)}}$$

Bei reellen Werten entspricht $(\cdot)^H$ der Transponierten.

Inverse Vektoriteration von Wielandt:

Hier ist B mit einem Shift μ verschoben, und das Ganze invertiert.

$$B = (A - \mu I)^{-1}$$

Achtung! Dabei nicht die Inverse bestimmen, sondern über die DGL

$$(A - \mu I)\hat{z}^{(k+1)} = z^{(k)}$$

\hat{z}^{k+1} bestimmen und dann normieren zu

$$z^{(k+1)} = \frac{\hat{z}^{(k+1)}}{\|\hat{z}^{(k+1)}\|}$$

Um nun den Rayleigh-Quotienten von einem beliebigen k (meistens wird das vorletzte benutzt) einfach alles in die Formel einsetzen.

$$R(z^{(k)}, (A - \mu I)^{-1}) = \frac{(z^{(k)})^H \hat{z}^{(k+1)}}{(z^{(k)})^H z^{(k)}}$$

Bei reellen Werten entspricht $(\cdot)^H$ der Transponierten.

Einen Eigenwert λ_i (oder Schätzung) erhalten wir dann durch Umstellen von

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i - \mu}$$

Wobei μ_i dem Rayleigh-Quotienten entspricht.

6.3 Das QR-Verfahren

Definition 6.3.1 Algorithmus QR-Verfahren

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine gegebene Matrix

- Setze $A^{(1)} := A$
- für $l = 1, 2, \dots$: Berechne

$$\begin{aligned} A^{(l)} &:= Q_l R_l, \\ A^{(l+1)} &:= R_l Q_l \end{aligned}$$

$$Q \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ unitär}$$

$$R_l \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ obere Dreiecksmatrix,}$$

7 Grundbegriffe der Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

7.1 Messreihen

- quantitativ diskret: Merkmale sind Ganze zahlen
- quantitativ stetig: Die Merkmale sind reelle Zahlen

Definition 7.1.1 Zu x_1, x_2, \dots, x_n ist $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ die geordnete Messreihe mit $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$. Die empirische Verteilungsfunktion hierzu ist

$$F(z; x_1, x_2, \dots, x_n) = F(z) = \frac{\text{Zahl der } x_i \text{ mit } x_i \leq z}{n}$$

Mit $r-1$ Zahlen $a_1 < a_2 < \dots < a_{r-1}$ entsteht eine Unterteilung in r Klassen.

$$\mathbb{R} =]-\infty, a_1] \cup]a_1, a_2] \cup \dots \cup]a_{r-2}, a_{r-1}] \cup]a_{r-1}, \infty[$$

Man erhält die relativen Klassenhäufigkeiten für diese durch

$$F(a_1), F(a_2) - F(a_1), \dots, F(a_{r-1}) - F(a_{r-2}), 1 - F(a_{r-1})$$

Für Histogramm wähle $a_0 < \min(a_1, x_{(1)})$, $a_r > \max(a_{r-1}, x_{(n)})$. Für jede Klassenhäufigkeit: Teile durch Klassenbreite und zeichne in Diagramm

7.2 Lage- und Streumaßzahlen

7.2.1 Lagemaßzahlen

Arithmetisches Mittel:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

Median:

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{(\frac{n}{2})} & n \text{ wenn gerade} \\ x_{(\frac{n+1}{2})} & n \text{ wenn ungerade} \end{cases} \quad (2)$$

p-Quantil ($0 < p < 1$):

$$x_p = \begin{cases} x_{(np)} & n \text{ wenn } np \text{ ganzzahlig} \\ x_{(\lfloor np \rfloor + 1)} & n \text{ wenn } np \text{ nicht ganzzahlig} \end{cases} \quad (3)$$

α gestutztes Mittel ($0 < \alpha < 0.5$):

$$\bar{x}_\alpha = \frac{1}{n - 2k}(x_{(k+1)} + \dots + x_{(n-k)}), k = \lfloor n\alpha \rfloor$$

7.2.2 Streumaße

Empirische Varianz oder empirische Stichprobenvarianz:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)$$

Empirische Streuung:

$$s = \sqrt{s^2}$$

Spannweite:

$$v = x_{(n)} - x_{(1)}$$

Quartilabstand:

$$q = x_{0.75} - x_{0.25}$$

7.2.3 Zweidimensionale Messreihen

Arithmetisches Mittel:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

Empirische Varianz:

$$\begin{aligned}s_x^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_y^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 \right)\end{aligned}$$

Empirische Streuung:

$$s_x = \sqrt{s_x^2}$$

$$s_y = \sqrt{s_y^2}$$

Empirische Kovarianz

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} \right)$$

Empirischer Korrelationskoeffizient

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

7.2.4 Regressionsgerade

$$y = ax + b$$

$$a = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

Residuen

$$r_i = y_i - ax_i - b, i = 1, \dots, n$$

Residuenquadrat

$$\sum_{i=1}^n r_i^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

- Für $r_{xy} > 0$ streng monoton fallende Gerade
- Für $r_{xy} < 0$ streng monoton steigende Gerade
- Für $r_{xy} = 0$ horizontale Gerade

7.3 Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeit

7.3.1 Zufallsexperimente

Definition 7.3.1 Ω heißt Ergebnismenge, seine Elemente ω Ergebnisse. Teilmengen $A \subseteq \Omega$ heißen Ereignisse. Ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ tritt ein, falls ein Ergebnis $\omega \in A$ beobachtet wird.

Definition 7.3.3 • Das aus zwei Ereignissen A und B zusammengesetzte Ereignis $A \cup B$ tritt ein, falls ein Ergebnis $\omega : \omega \in A \vee \omega \in B$ beobachtet wird

- Das Ereignis $A \cap B$ tritt ein, falls ein Ergebnis $\omega : \omega \in A \wedge \omega \in B$ beobachtet wird (A und B wird gleichzeitig beobachtet)
- $A^c = \Omega \setminus A$ heißt zu A komplementäres Ereignis
- Zwei Ereignisse A und B heißen unvereinbar, falls $A \cap B = \emptyset$
- \emptyset heißt unmögliches Ereignis und Ω sicheres Ereignis
- die einelementigen Mengen $\{\omega\}$ von Ω heißen Elementarereignisse

7.3.2 Wahrscheinlichkeit

Definition 7.3.4 Ein System $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ von Ereignissen heißt σ -Algebra (oder Ereignissystem) wenn gilt:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- Falls $A \in \mathcal{A}$, dann auch $A^c \in \mathcal{A}$
- mit jeder Folge $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ gilt auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Definition 7.3.6 Eine Abbildung $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn sie Folgenden Axiomen von Komogorov genügt:

- $P(A) \geq 0$ für $A \in \mathcal{A}$
- $P(\Omega) = 1$
- $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_i P(A_i)$ für paarweise unvereinbare $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$

Für beliebige Ereignisse $A \subseteq \Omega$ mit Elementzahl $\# A$ gilt

$$P(A) = \frac{\text{Elementzahl von } A}{n} = \frac{\# A}{\# \Omega}$$

7.3.3 Elementare Formeln der Kombinatorik

Geordnete Probe mit Wiederholungen

$$n^k$$

Bsp: k mal würfeln

Geordnete Probe ohne Wiederholungen

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Bsp: k Autos parken auf n Parkplätzen

Im Falle $k = n$ **Permutation der Menge Ω**

$$n!$$

Ungeordnete Probe ohne Wiederholungen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Bsp: Lotto

k_1 aus N_1, k_2 aus N_2 in k aus N

$$\frac{\binom{N_1}{k_1} \binom{N_2}{k_2}}{\binom{N}{k}}$$

mit $N = N_1 + N_2$ und $k = k_1 + k_2$

7.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeiten

7.4.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Regel von der vollständigen Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

Formel von Bayes

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$

Multiplikationsformel

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

7.4.2 Unabhängigkeit

Definition 7.4.3 Zwei Ereignisse A und B heißen unabhängig, falls

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Ereignisse A_1, \dots, A_n heißen vollständig unabhängig, falls für alle $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ gilt

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

7.5 Zufallsvariablen und Verteilungsfunktion

Definition 7.5.1 Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft, dass für jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ die Urbildmenge

$$A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$$

zum Ereignissystem \mathcal{A} gehört. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses "X nimmt Werte im Intervall I an" bezeichnet man abkürzend mit $P(X \in I)$ und schreibt

$$P(A \leq X \leq B), P(X \leq x), \quad P(|X - a| < b), P(X = b), \quad usw$$

Definition 7.5.3 Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Die Abbildung $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R}$$

heißt Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X

Verteilungsfunktionen sind monoton wachsende Funktionen mit

$$F(-\infty) = 0 \quad F(\infty) = 1 \quad F(x+) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Zudem:

$$\begin{aligned} P(X = a) &= F(a) - F(a-) \\ P(a < X \leq b) &= F(b) - F(a) \\ P(a \leq X < b) &= F(b-) - F(a-) \\ P(a \leq X \leq b) &= F(b) - F(a-) \\ P(x > a) &= 1 - F(a) \end{aligned}$$

Eine Zufallsvariable heißt stetig verteilt mit der Dichte f wenn ihre Verteilungsfunktion F durch

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, x \in \mathbb{R}$$

gegeben ist.

7.5.1 Beispiele für diskrete Verteilungen

Geometrische Verteilung

Es sei $0 < p < 1$ eine Zufallsvariable X mit dem Wertebereich \mathbb{N} heißt geometrisch verteilt mit dem Parameter p falls

$$P(X = i) = (1 - p)^{i-1} p, i = 1, 2, \dots$$

Anwendung:

Wird ein Zufallsexperiment, bei dem ein bestimmtes Ereignis mit Wahrscheinlichkeit p eintritt, so lange unabhängig wiederholt, bis zum ersten Mal dieses Ereignis eintritt, dann kann die Anzahl der dazu benötigten Versuche durch eine geometrisch verteilte Zufallsvariable modelliert werden („Warten auf den ersten Erfolg“).

Binominalverteilung

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $0 < p < 1$. Eine Zufallsvariable X mit dem Wertebereich $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ heißt binominalverteilt mit Parametern n und p , kurz $B(n, p)$ -verteilt falls

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}, i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Anwendung:

Wird ein Zufallsexperiment, bei dem ein bestimmtes Ereignis mit Wahrscheinlichkeit p eintritt, n -mal unabhängig wiederholt, und dabei gezählt, wie oft dieses Ereignis eintritt, so kann diese zufällige Anzahl als $B(n, p)$ -verteilte Zufallsvariable X beschrieben werden („Anzahl der Erfolge bei n Versuchen“).

Poissonverteilung

Sei $\lambda > 0$. Eine Zufallsvariable X mit dem Wertebereich \mathbb{N}_0 heißt Poisson-verteilt falls gilt

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, i = 0, 1, 2, \dots$$

Sie eignet sich zur Modellierung von Zählergebnissen folgenden Typs: In einer Telefonzentrale wird die Anzahl der innerhalb von 10 Minuten eingehenden Anrufe gezählt. λ gibt die „mittlere Anzahl“ der eingehenden Anrufe an.

$$E(X) = \lambda$$

7.5.2 Beispiele für Stetige Verteilungen

Rechteckverteilung

Es sei $a < b$. Eine Stetig verteilte Zufallsvariable mit der Dichte

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt rechteckverteilt im Intervall $[a, b]$, kurz $R(a, b)$ -verteilt. Für die Verteilungsfunktion ergibt sich

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

Exponentialverteilung

Sei $\lambda > 0$. Eine Stetig verteilte Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

heißt exponentialverteilt mit Parameter λ , kurz $Ex(\lambda)$. Für die Verteilungsfunktion ergibt sich

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Normalverteilung

Es seien $\mu \in \mathbb{R}$ (Erwartungswert) und $\sigma > 0$ (Standardabweichung). (σ^2 = Varianz)
Eine Stetig verteilte Zufallsvariable mit der Dichte

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}, t \in \mathbb{R}$$

heißt normalverteilt mit Parameter μ und σ^2 kurz: $N(\mu, \sigma^2)$. Im Falle $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ spricht man von einer Standard-Normalverteilung mit der Verteilungsfunktion

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}, x \geq 0 \qquad \Phi(x) = P(X \leq x)$$

(Kann aus Tabelle Entnommen werden)

Es gilt:

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}, \qquad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad x \geq 0$$

Allgemein ist die Verteilungsfunktion

$$F_{\mu, \sigma^2}(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

7.6 Erwartungswert und Varianz

Ist X eine Diskret verteilte Zufallsvariable mit Werten x_1, x_2, \dots so heißt

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Erwartungswert von X falls $\sum_i |x_i| P(X = x_i) < \infty$. Entspricht arithmetischem Mittel, wenn Wahrscheinlichkeit für alle x_i gleich ist
Ist X eine stetig verteilte Zufallsvariable mit Dichte f so heißt

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Erwartungswert von X, falls $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$

Ist $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stückweise stetige funktion dann hat die Zufallsvariable $h(X)$ für eine diskret verteilte Zufallsvariable X den Erwartungswert

$$E(h(X)) = E(X) = \sum_i h(x_i) P(X = x_i)$$

Ist X stetig verteilt mit Dichte f , dann hat $h(X)$ den Erwartungswert

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx$$

Der Erwartungswert der quadratischen Abweichung der Zufallsvariablen X zu $E(X)$ heißt Varianz von X

$$Var(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Die Standardabweichung ist definiert durch $\sqrt{Var(X)}$

7.6.1 Rechenregeln

Es gilt

$$\begin{aligned}E(aX + b) &= aE(X) + b \\E(h_1(X) + h_2(X)) &= E(h_1(X)) + E(h_2(X))\end{aligned}$$

für Eine Zufallsvariable $X, a, b \in \mathbb{R}$ und h_1, h_2 stückweise Stetige Funktionen

Allgemeiner gilt für Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n und $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$:

$$E(a_1X_1 + \dots + a_nX_n + b) = a_1E(X_1) + \dots + a_nE(X_n) + b$$

Der Erwartungswert ist also linear

Weiterhin gilt

$$Var(aX + b) = a^2Var(X)$$

Verteilung	$E(X)$	$Var(X)$
$N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2
$Ex(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$B(n, p)$	np	$np(1-p)$
Geom	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson	λ	λ
Rechteck	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{1}{12}(b-a)$

Tschebyschevsche Ungleichung

Es gilt

$$P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{Var(X)}{c^2}, c > 0$$

Definition 7.6.3 (Unabhängigkeit) Seien X_1, X_2, \dots, X_n Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F_1, F_2, \dots, F_n die gemeinsame Verteilungsfunktion von X_1, X_2, \dots, X_n ist definiert durch

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n), (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Die Zufallsvariablen heißen unabhängig, wenn für alle $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ die Ereignisse

$$\{X_1 \leq x_1\}, \dots, \{X_n \leq x_n\}$$

vollständig unabhängig sind, also

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) \dots P(X_n \leq x_n)$$

oder kurz

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n)$$

Satz 7.6.4 Die Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_n seien unabhängig. Es gilt

$$Var(X_1 + \dots + X_n) = Var(X_1) + \dots + Var(X_n)$$

7.7 Gesetz der großen Zahlen, zentraler Grenzwertsatz

7.7.1 Das schwache gesetz der großen Zahlen

Satz 7.7.1 Ist X_1, X_2, \dots eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$ dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| \geq \epsilon \right) = 0, \forall \epsilon > 0$$

7.7.2 Zentraler Grenzwertsatz

Satz 7.7.2 Ist X_1, X_2, \dots eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$E(X_i) = \mu_i \qquad Var(X_i) = \sigma_i^2 \qquad i = 1, 2, \dots$$

so gilt unter schwachen zusätzlichen Voraussetzungen, z.B dass die X_i identisch verteilt sind:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{X_1 + \dots + X_n - (\mu_1 + \dots + \mu_n)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}} \leq y \right) = \Phi(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Ein Arithmetisches Mittel $\bar{X}_{(n)}$ ist für großes n also Näherungsweise $N(\mu, \sigma^2)$ verteilt, wobei

$$\mu = \frac{1}{n} E(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} (\mu_1 + \dots + \mu_n) \qquad \sigma^2 = \frac{1}{n^2} Var(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n^2} (\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)$$

Wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell für Messreihen

Empirische Verteilungsfunktion

$$F_n(z; x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\text{Zahl der } x_i \text{ mit } x_i \leq z}{n}$$

Satz 7.7.4 (Zentralsatz der Statistik) Sei X_1, X_2, \dots eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit der Verteilungsfunktion F und bezeichne

$$D_n(X_1, \dots, X_n) = \sup_{z \in \mathbb{R}} |F_n(z; X_1, \dots, X_n) - F(z)|$$

die Zufällige Maximalabweichung zwischen empirischer und

wahrer

Verteilungsfunktion, Dann gilt

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(X_1, \dots, X_n) = 0 \right) = 1$$

$D_n(X_1, \dots, X_n)$ konvergiert also mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen 0

7.8 Testverteilungen und Quantilapproximationen

Seien Z_1, \dots, Z_n unabhängige identisch $N(0,1)$ -Verteilte Zufallsgrößen.

χ_r^2 -Verteilung:

Es sei $r \in \{1, \dots, n\}$. Eine Zufallsvariable X heißt χ_r^2 -verteilt, falls sie die Verteilungsfunktion

$$F(x) = P(Z_1^2 + \dots + Z_r^2 \leq x), x \in \mathbb{R}$$

besitzt

t_r -Verteilung:

es sei $r \in \{1, \dots, n-1\}$. Eine Zufallsvariable X heißt t_r -verteilt, falls sie die Verteilungsfunktion

$$F(x) = P \left(\frac{Z_{r+1}}{\sqrt{(Z_1^2 + \dots + Z_r^2)/r}} \leq x \right), x \in \mathbb{R}$$

besitzt **$F_{r,s}$ -Verteilung**

Es sei $r, s \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $r+s \leq n$. Eine Zufallsvariable X heißt F-verteilt mit r und s Freiheitsgraden, falls sie die Verteilungsfunktion

$$F(x) = P\left(\frac{(Z_1^2 + \dots + Z_r^2)/r}{(Z_{r+1}^2 + \dots + Z_{r+s}^2)/s} \leq x\right), x \in \mathbb{R}$$

besitzt

Die Dichte dieser Verteilungen können unter Verwendung der Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, x > 0$$

und der Beta-Funktion

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt, \alpha, \beta > 0$$

(Don't ask me how)

Bezeichnungen für Quantile

Allgemein $F(x_p) = p$.

u_p	p-Quantil der $N(0,1)$ -Verteilung
$t_{r;p}$	p-Quantil der t_r -Verteilung
$\chi_{r;p}^2$	p-Quantil der χ_r^2 -Verteilung
$F_{r,s;p}$	p-Quantil der $F_{r,s}$ -Verteilung

7.8.1 Wichtige Anwendungsbeispiele

Satz 7.8.1 Es seien X_1, \dots, X_n unabhängige, identisch $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable. Dann gilt

- $\bar{X}_{(n)}$ ist $N(\mu, \sigma^2/n)$ -verteilt
- $\frac{n-1}{\sigma^2} S_{(n)}^2$ ist χ_{n-1}^2 -verteilt
- $\bar{X}_{(n)}$ und $S_{(n)}^2$ sind unabhängig
- $\sqrt{n} \frac{\bar{X}_{(n)} - \mu}{\sqrt{S_{(n)}^2}}$ ist t_{n-1} -verteilt

8 Schätzverfahren und Konfidenzintervalle

8.1 Grundlagen zu Schätzverfahren

Definition 8.1.2 Ein Schätzverfahren oder eine Schätzfunktion oder kurz Schätzer ist eine Abbildung

$$T_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Sie ordnet einer Messreihe x_1, \dots, x_n einen Schätzwert $T_n(x_1, \dots, x_n)$ (Zufallsvariable) für den unbekannten Wert $\tau(\theta)$ zu. Die Zufallsvariable $T_n(X_1, \dots, X_n)$ heißt Schätzvariable.

Definition 8.1.3 ein Schätzer $T_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt erwartungstreu für $\tau : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, falls gilt

$$E_\theta(T_n(X_1, \dots, X_n)) = \tau(\theta) \text{ für alle } \theta \in \Theta$$

Definition 8.1.4 • τ sei gegeben durch $\tau(\theta) = E_\theta(X) = \mu$. Das arithmetische Mittel $\bar{X}_{(n)}$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für μ

- τ sei gegeben durch $\tau(\theta) = \text{Var}_\theta(X) = \sigma^2$. Die Stichprobenvarianz $S_{(n)}^2$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2

Definition 8.1.5 Eine Folge von Schätzern $T_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ heißt asymptotisch erwartungstreu für τ falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_\theta(T_n(X_1, \dots, X_n)) = \tau(\theta) \text{ für alle } \theta \in \Theta$$

Mittlerer quadratischer Fehler (mean squared error):

$$MSE_{\theta}(T) := E_{\theta}((T - \tau(\theta))^2)$$

Es gilt

$$T \text{ erwartungstreu} \Rightarrow MSE_{\theta}(T) = Var_{\theta}(T)$$

T_1 ist effizienter als T_2 wenn gilt

$$MSE_{\theta}(T_1) \leq MSE_{\theta}(T_2)$$

Definition 8.1.6 Eine Folge von Schätzern T_1, T_2, \dots heißt konsistent für τ wenn für alle $\varepsilon > 0$ und alle $\theta \in \Theta$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta}(|T_n(X_1, \dots, X_n) - \tau(\theta)| > \varepsilon) = 0$$

Sie heißt konsistent im quadratischen Mittel für τ wenn für alle $\theta \in \Theta$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} MSE_{\theta}(T_n) = 0$$

Satz 8.1.7 Ist T_1, T_2, \dots eine Folge von Schätzern, die erwartungstreu für τ sind und gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var_{\theta}(T_n(X_1, \dots, X_n)) = 0 \text{ für alle } \theta \in \Theta$$

dann ist die Folge von Schätzern konsistent für τ

Satz 8.1.8 Ist T_1, T_2, \dots eine Folge von Schätzern, die konsistent im quadratischen Mittel für τ ist, dann ist die Folge von Schätzern konsistent für τ

8.2 Maximum-Likelihood-Schätzer

Bei gegebener Verteilungsklasse $F_{\theta}, \theta \in \Theta$, lassen sich Schätzer für den Parameter θ oft mit der Maximum-Likelihood-Methode gewinnen. Sind die zugrundeliegenden Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n stetig mit einer **Dichte** verteilt, so hängt diese ebenfalls von den Parametern ab:

$$f_{\theta}(x), x \in \mathbb{R}.$$

Wir definieren hier $\mathbb{X} = \mathbb{R}$. Im Fall diskreter Zufallsvariablen X , bzw. X_1, \dots, X_n definieren wir

$$f_{\theta}(x) = P_{\theta}(X = x) \text{ für alle } x \text{ aus dem Wertebereich } \mathbb{X} \text{ von } X.$$

Definition 8.2.1 Für eine Messreihe x_1, \dots, x_n heißt die Funktion $L(\cdot; x_1, \dots, x_n)$ mit

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = f_{\theta}(x_1)f_{\theta}(x_2) \dots f_{\theta}(x_n)$$

die zu x_1, \dots, x_n gehörige Likelihood-Funktion

Ein Parameterwert

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$$

mit

$$L(\hat{\theta}; x_1, \dots, x_n) \geq L(\theta; x_1, \dots, x_n) \text{ für alle } \theta \in \Theta$$

heißt Maximum-Likelihood-Schätzwert für Θ . Existiert dieser zu jeder möglichen Messreihe, dann heißt

$$T_n : \mathbb{X}^n \rightarrow \Theta, T_n(x_1, \dots, x_n) = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$$

Maximum-Likelihood-Schätzer.

8.2.1 Kochrezept für Berechnung

$f_\theta(x)$ entspricht der Dichtefunktion. Bei diskreten Werten siehe oben.

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = f_\theta(x_1) f_\theta(x_2) \dots f_\theta(x_n)$$
$$\ln(L(\theta; x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n \ln(f_\theta(x_i))$$

Teilweise kann man f_θ durch den \ln nochmal in Summen aufteilen, da dann alle Summanden ohne θ bei der Ableitung rausfliegen.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln(L(\theta; x_1, \dots, x_n)) = \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{i=1}^n \ln(f_\theta(x_i)) \stackrel{!}{=} 0$$

Nun nach θ umstellen. Dies ist dann die eindeutige Nullstelle

$$\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \dots$$

Um zu wissen, dass es ein Maximum ist, muss man noch schauen ob die 2. Ableitung < 0 ist

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln(L(\theta; x_1, \dots, x_n)) \stackrel{!}{<} 0$$

8.3 Konfidenzintervalle

Definition 8.3.1 Sei $0 < \alpha < 1$. Das zufällige Intervall $I(X_1, \dots, X_n)$ heißt Konfidenzintervall für $\tau(\theta)$ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$, falls gilt

$$P_\theta(U(X_1, \dots, X_n) \leq \tau(\theta) \leq O(X_1, \dots, X_n)) \geq 1 - \alpha \text{ für alle } \theta \in \Theta$$

Das zu einer bestimmten Messreihe x_1, \dots, x_n gehörige Intervall

$$I(x_1, \dots, x_n) = [U(X_1, \dots, X_n), O(X_1, \dots, X_n)]$$

heißt konkretes Schätzintervall für $\tau(\Theta)$

8.3.1 Konstruktion von Konfidenzintervallen

Im Folgenden

$$F_\theta(x) = F_{(\mu, \sigma^2)}(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad \bar{X}_{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad S_{(n)}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_{(n)})^2$$

Konfidenzintervalle zum Niveau $1 - \alpha$:

Konfidenzintervall für μ bei bekannter Varianz $\sigma^2 = \sigma_0^2$

Hier ist $\Theta = \{(\mu, \sigma_0^2) : \mu \in \mathbb{R}\}$ und $\tau(\theta) = \mu$. Das Konfidenzintervall für μ zum Niveau $1 - \alpha$ lautet

$$I(X_1, \dots, X_n) = \left[\bar{X}_{(n)} - u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{X}_{(n)} + u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right]$$

Konfidenzintervall für μ bei unbekannter Varianz σ^2

Hier ist $\Theta = \{(\mu, \sigma_0^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$ und $\tau(\theta) = \mu$. Das Konfidenzintervall für μ lautet

$$I(X_1, \dots, X_n) = \left[\bar{X}_{(n)} - t_{n-1; 1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S_{(n)}^2}{n}}, \bar{X}_{(n)} + t_{n-1; 1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S_{(n)}^2}{n}} \right]$$

Konfidenzintervall für σ^2 bei bekanntem Erwartungswert $\mu = \mu_0$

Hier ist $\Theta = \{(\mu, \sigma_0^2) : \sigma^2 > 0\}$ und $\tau(\theta) = \sigma^2$. Das Konfidenzintervall für σ^2 lautet

$$I(X_1, \dots, X_n) = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\chi_{n-1; 1-\alpha/2}^2}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\chi_{n-1; \alpha/2}^2} \right]$$

Konfidenzintervall für σ^2 bei unbekanntem Erwartungswert μ

Hier ist $\Theta = \{(\mu, \sigma_0^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$ und $\tau(\theta) = \sigma^2$. Das Konfidenzintervall für σ^2 lautet

$$I(X_1, \dots, X_n) = \left[\frac{(n-1)S_{(n)}^2}{\chi_{n-1; 1-\alpha/2}^2}, \frac{(n-1)S_{(n)}^2}{\chi_{n-1; \alpha/2}^2} \right]$$

9 Tests bei Normalverteilungsannahmen

9.1 Grundlagen

Konstruktionsprinzip für Test zum Niveau α

Tests lassen sich nach dem folgenden allgemeinen Prinzip konstruieren

1. Verteilungsannahme formulieren
2. Nullhypothese H_0 formulieren
3. Testgröße T wählen und ihre Verteilung unter H_0 bestimmen
4. $I \subseteq \mathbb{R}$ so wählen, dass unter H_0 gilt $P(T(X_1, \dots, X_n) \in I) \leq \alpha$

9.2 Wichtige Tests bei Normalverteilungsannahme

Gauß-Test

1. X_1, \dots, X_n unabhängig, identisch $N(\mu, \sigma_0^2)$ -verteilt σ_0^2 bekannt
2. a) $H_0 : \mu = \mu_0$, b) $H_0 : \mu \leq \mu_0$, c) $H_0 : \mu \geq \mu_0$
3. Testgröße

$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_0} (\bar{X}_{(n)} - \mu_0)$$

4. Ablehnung Falls
 - a) $|T| > u_{1-\alpha/2}$, b) $T > u_{1-\alpha}$, c) $T < u_\alpha$

t-Test

1. X_1, \dots, X_n unabhängig, identisch $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt σ^2 unbekannt
2. a) $H_0 : \mu = \mu_0$, b) $H_0 : \mu \leq \mu_0$, c) $H_0 : \mu \geq \mu_0$
3. Testgröße

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_{(n)} - \mu_0}{\sqrt{S_{(n)}^2}}$$

4. Ablehnung Falls
 - a) $|T| > t_{n-1; 1-\alpha/2}$, b) $T > t_{n-1; 1-\alpha}$, c) $T < t_{n-1; \alpha}$

χ^2 -Streuungstest

1. X_1, \dots, X_n unabhängig, identisch $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt μ unbekannt
2. a) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, b) $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$, c) $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$
3. Testgröße

$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{(n-1)}{\sigma_0^2} S_{(n)}^2$$

4. Ablehnung falls
 - a) $T < \chi_{n-1; \alpha/2}^2$ oder $T > \chi_{n-1; 1-\alpha/2}^2$, b) $T > \chi_{n-1; 1-\alpha}^2$, c) $T < \chi_{n-1; \alpha}^2$

9.3 Verteilungstests

Könnt ich auch nicht kürzer zusammenfassen, einfach im Skript schauen