Mathe 3Inf/4Etit Kochrezepte

Stef9998
4. Juni 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Interpolation

1.1 Polynominterpolation (Newtonsche Interpolationsformel)

Wir berechnen ein Polynom n-ten Grades $p_n(x)$ welches die Ursprungsfunktion annähert.

Dafür benutzen wir das Schema

$$
\begin{array}{c|ccccc}
x_0 & f_{[x_0]} = y_0 & \searrow & & & \\
 & & & f_{[x_0,x_1]} & \searrow & \\
x_1 & f_{[x_1]} = y_1 & \begin{smallmatrix}\nearrow \\ \searrow\end{smallmatrix} & & & f_{[x_0,x_1,x_2]} \\
 & & & f_{[x_1,x_2]} & \nearrow & \\
x_2 & f_{[x_2]} = y_2 & \nearrow & & & \\
\vdots & & & & &
\end{array}
$$

$$f_{[x_j,\dots,x_{k+j}]} = \frac{f_{[x_{j+1}\dots,x_{j+k}]} - f_{[x_j\dots,x_{j+k-1}]}}{x_{j+k} - x_j} = \frac{f_{\text{unten}} - f_{\text{oben}}}{x_{\text{unten}} - x_{\text{oben}}}$$

um dann Polynom zu berechnen

$$p_n(x) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (x - x_0) \dots (x - x_{i-1}) \qquad , \gamma_i = f_{[x_0 \dots x_i]}$$

wobei die γ_i's einfach die oberste Zeile (ohne x_0) im Schema ist.

Hinweis: Man kann Zeilen vertauschen. Das heißt wenn viele $f_{[x]} = 0$ lohnt es sich meist diese nach oben zu tauschen.

Fehlerabschätzung:
Äquidistant

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \max_{x\in[a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Tschebyschev-Abszissen

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \max_{x\in[a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} 2^{-n}$$

1.2 Spline-Interpolation

1.2.1 Linear

$$s_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1} \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Fehlerabschätzung:

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{8} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| h_{\max}^2 \qquad , h_{\max} = \max_{i=0,\dots,n-1} x_{i+1} - x_i$$

1.2.2 Kubisch

Natürliche Randbedingungen:

$$\begin{aligned} M_0 = M_n = 0 &\quad b_0 = b_n = 0 \\ \lambda_0 = \lambda_n = 0 &\quad \mu_0 = \mu_n = 1 \end{aligned}$$

Hermite Randbedingungen:

$$\begin{aligned} b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - f'(a) &\quad b_n = f'(b) - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \\ \lambda_0 = \frac{h_0}{6} \quad \mu_0 = \frac{h_0}{3} &\quad \lambda_n = \frac{h_{n-1}}{6} \quad \mu_n = \frac{h_{n-1}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \lambda_0 & & & \\ \frac{h_0}{6} & \frac{h_0+h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & & \\ & \frac{h_1}{6} & \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & \lambda_n & \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Berechnung:

$$d_i = y_i - \frac{h_i^2}{6} M_i \quad c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i) \qquad \text{mit } h_i = x_{i+1} - x_i$$

$$s_i(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{(x_{i+1} - x)^3}{x_{i+1} - x_i} M_i + \frac{(x - x_i)^3}{x_{i+1} - x_i} M_{i+1} \right) + c_i(x - x_i) + d_i$$

Fehler Natürlich:

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{h_{max}}{h_{min}} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{max}^4$$

$$|f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)| \leq \frac{2 * h_{max}}{h_{min}} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{max}^{4-k}$$

Fehler Hermit:

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{5}{384} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{max}^4$$

$$|f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)| \leq \frac{2 * h_{max}}{h_{min}} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{max}^{4-k}$$

2 Numerische Integration

a, b sind Start- und Endpunkt. h ist die Schrittweite. n sind die Stützstellen.

$$\|f(\xi)\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

2.1 Newton-Cotes

Allgemeiner Fehler

$$\int_a^b \|f(x) - p_n(x)\| \, dx \leq \frac{\left\|f^{(n+1)}(\xi)\right\|}{(n+1)!}(b-a)^{n+2} = \max_{x \in [a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}(b-a)^{n+2}$$

2.1.1 geschlossen

$$x_i = a + ih \qquad i = 0, \ldots, n, \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

n	h	$\alpha_{i,n}$					$E_n(f)$	Name
1	$b-a$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				$\frac{-f^{(2)}(\xi)}{12}h^3$	Trapezregel
2	$\frac{b-a}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$			$\frac{-f^{(4)}(\xi)}{90}h^5$	Simpson-Regel
3	$\frac{b-a}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{8}$		$\frac{-3f^{(4)}(\xi)}{80}h^5$	3/8-Regel
4	$\frac{b-a}{4}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{-8f^{(6)}(\xi)}{945}h^7$	Milne-Regel

$$I_n(f) = h \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i,n} f(x_i)$$

2.1.2 offen

$$x_i = a + ih \qquad i = 1, \ldots, n+1, \qquad h = \frac{b-a}{n+2}$$

n	h	$\tilde{\alpha}_{i,n}$			$\tilde{E}_n(f)$	Name
0	$\frac{b-a}{2}$	2			$\frac{f^{(2)}(\xi)}{3}h^3$	Rechteckregel
1	$\frac{b-a}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$		$\frac{3f^{(2)}(\xi)}{4}h^3$	Rechteckregel
2	$\frac{b-a}{4}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{28f^{(4)}(\xi)}{90}h^5$	Rechteckregel

$$\tilde{I}_n(f) = h \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{\alpha}_{i,n} f(x_i)$$

2.2 summiert

Aufteilen in Teilintervalle m

$$N = n \cdot m \qquad H = \frac{b-a}{m} \qquad h = \frac{b-a}{N}$$
$$x_i = a + ih \qquad i = 0, \ldots, N$$

Summierte Trapezregel
(geschlossen, $n = 1$, $h = \frac{b-a}{m}$)

$$S_N^{(1)}(f) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{m-1} (f(x_j) + f(x_{j+1}))$$

Fehler: $R_N^{(1)}(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)h^2$

Summierte Simpson-Regel
(geschlossen, $n = 2$, $h = \frac{b-a}{2m}$)

$$S_N^{(2)}(f) = \frac{h}{3} \sum_{j=0}^{m-1} (f(x_{2j}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2}))$$

Fehler: $R_N^{(2)}(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}(b-a)h^4$

Summierte Rechteck-Regel
(offen, $n = 0$, $2m = N$, $h = \frac{b-a}{N}$)

$$\tilde{S}_N^{(0)} = 2h \sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1})$$

Fehler: $\tilde{R}_N^{(0)}(f) = \frac{f''(\xi)}{6}(b-a)h^2$

4 Lineare Gleichungssysteme

4.3 Cholesky Verfahren $(LL^T = A)$

Für $j = 1, \dots, n$

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}$$

Falls Wurzel nicht existiert, STOPP $\Rightarrow$ A nicht definit

Für $i = j+1, \dots, n$:

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \Sigma_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}$$

4.4 Fehlerabschätzung für gestörte Gleichungssysteme

$$Ax = b \qquad\qquad (A + \Delta A)\tilde{x} = b + \Delta b$$

dann gilt für den Fehler

$$\frac{||\tilde{x} - x||}{||x||} \leq \frac{cond(A)}{1 - cond(A)||\Delta A||/||A||} \left(\frac{||\Delta A||}{||A||} + \frac{||\Delta b||}{||b||} \right)$$

mit

$$||x||_2 = \sqrt{x^T x} \quad \text{induziert} \quad ||A||_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$$

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{induziert} \quad ||A||_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{(Spaltensummen Norm = “größte” Spalte)}$$

$$||x||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \quad \text{induziert} \quad ||A||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{(Zeilensummen Norm = “größte” Zeile)}$$

$$cond(A) = ||A|| \, ||A^{-1}||$$

5 Nichtlineare Gleichungssysteme

5.2.1 lokales Newton-Verfahren

$$s^{(k)} \text{ Lösung von } J_F(x^{(k)})s^{(k)} = -F(x^{(k)})$$
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$$

Bei $f(x) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$

$$J_F(x^{(k)})^{-1} = F'(x^{(k)})$$

$$\Rightarrow s^{(k)} = -\frac{F(x^{(k)})}{F'(x^{(k)})} \qquad x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{F(x^{(k)})}{F'(x^{(k)})}$$

6 Verfahren zur Eigenwert- und Eigenvektorberechnung

6.2 Vektoriteration

Einfache Vektoriteration nach von Mises:
Wir setzen die zu Iterationsmatrix B einfach gleich der gegebenen Matrix A

$$B = A$$

Um die nächste Iteration von z zu bekommen bedarf es nur dieser Formel, welche man die ganze so lange durchiteriert, bis man bei der gewünschten Zahl angekommen ist.

$$z^{(k+1)} = \frac{1}{||Bz^{(k)}||} Bz^{(k)}$$

Um nun den Rayleigh-Quotienten von einem beliebigen k (meistens wird das vorletzte benutzt) einfach alles in die Formel einsetzen.

$$R(z^{(k)}, B) = \frac{(z^{(k)})^H Bz^{(k)}}{(z^{(k)})^H z^{(k)}}$$

Bei reellen Werten entspricht $(.)^H$ der Transponierten.

Inverse Vektoriteration von Wielandt:
Hier ist B mit einem Shift μ verschoben, und das Ganze invertiert.

$$B = (A - \mu I)^{-1}$$

Achtung! Dabei nicht die Inverse bestimmen, sondern über die DGL

$$(A - \mu I)\hat{z}^{(k+1)} = z^{(k)}$$

$\hat{z}^{k+1}$ bestimmen und dann normieren zu

$$z^{(k+1)} = \frac{\hat{z}^{(k+1)}}{||\hat{z}^{(k+1)}||}$$

Um nun den Rayleigh-Quotienten von einem beliebigen k (meistens wird das vorletzte benutzt) einfach alles in die Formel einsetzen.

$$R(z^{(k)}, (A - \mu I)^{-1}) = \frac{(z^{(k)})^H \hat{z}^{(k+1)}}{(z^{(k)})^H z^{(k)}}$$

Bei reellen Werten entspricht $(.)^H$ der Transponierten.
Einen Eigenwert λ_i (oder Schätzung) erhalten wir dann durch Umstellen von

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i - \mu}$$

Wobei μ_i dem Rayleigh-Quotienten entspricht.

7 Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

7.5 Zufallsvariablen und Verteilungsfunktion

Alle Wahrscheinlichkeiten $P(\Omega)$ / die Verteilungsfunktion im unendlichen $F(+\infty)$ muss $= 1$ werden.

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) \qquad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$E(X^2) = \sum_i (x_i)^2 P(X = x_i) \qquad E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

8 Schätzverfahren und Konfidenzintervalle

8.2 Maximum-Likelihood-Schätzer

$f_\theta(x)$ entspricht der Dichtefunktion. Bei diskreten Werten siehe oben.

$$L(\theta; x_1, \dots x_n) = f_\theta(x_1) f_\theta(x_2) \dots f_\theta(x_n)$$

$$ln\left(L(\theta; x_1, \dots x_n)\right) = \sum_{i=1}^{n} ln\left(f_\theta(x_i)\right)$$

Teilweise kann man f_θ durch den ln nochmal in Summen aufteilen, da dann alle Summanden ohne θ bei der Ableitung rausfliegen.

$$\frac{\partial}{\partial\theta} ln\left(L(\theta; x_1, \dots x_n)\right) = \frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{i=1}^{n} ln\left(f_\theta(x_i)\right) \stackrel{!}{=} 0$$

Nun nach θ umstellen. Dies ist dann die eindeutige Nullstelle

$$\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \dots$$

Um zu wissen, dass es ein Maximum ist, muss man noch schauen ob die 2. Ableitung < 0 ist

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} ln\left(L(\theta; x_1, \dots x_n)\right) \stackrel{!}{<} 0$$

8.3 Konfidenzintervalle

$$F_\theta(x) = F_{(\mu,\sigma^2)}(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) \qquad \bar{X}_{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S^2_{(n)} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_{(n)})^2$$

$\Theta = \{(\mu, \sigma_0^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$ und $\tau(\theta) = \mu/\sigma^2$.

Das Konfidenzintervall I zum Niveau $1-\alpha$ lautet:

$$I(X_1, \dots, X_n) =$$

für μ	bei bekannter Varianz $\sigma^2 = \sigma_0^2$	bei unbekannter Varianz σ^2
	$\left[\bar{X}_{(n)} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \,,\, \bar{X}_{(n)} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$	$\left[\bar{X}_{(n)} - t_{n-1;1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S^2_{(n)}}{n}} \,,\, \bar{X}_{(n)} + t_{n-1;1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S^2_{(n)}}{n}}\right]$

für σ^2	bei bekanntem Erwartungswert $\mu = \mu_0$	bei unbekanntem Erwartungswert μ
	$\left[\frac{\Sigma_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;1-\alpha/2}} \,,\, \frac{\Sigma_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;\alpha/2}}\right]$	$\left[\frac{(n-1)S^2_{(n)}}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}} \,,\, \frac{(n-1)S^2_{(n)}}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}\right]$

9 Tests

1. $X_1, \dots, X_n$ unabhängig, identisch $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt

<table>
<tr><td rowspan="8">testen für μ</td><td colspan="3">2. a) $H_0 : \mu = \mu_0$, b) $H_0 : \mu \leq \mu_0$, c) $H_0 : \mu \geq \mu_0$</td></tr>
<tr><td rowspan="7"></td><td>bei bekannter Varianz $\sigma^2 = \sigma_0^2$
$\Rightarrow$ Gauß-Test</td><td>bei unbekannter Varianz σ^2
$\Rightarrow$ t-Test</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Testgröße $T(X_1, \dots, X_n) =$</td></tr>
<tr><td>$\frac{\sqrt{n}}{\sigma_0}(\bar{X}_{(n)} - \mu_0)$</td><td>$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_{(n)} - \mu_0}{\sqrt{S^2_{(n)}}}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Ablehnung Falls</td></tr>
<tr><td>a) $|T| > u_{1-\alpha/2}$
b) $T > u_{1-\alpha}$
c) $T < u_\alpha$</td><td>a) $|T| > t_{n-1;1-\alpha/2}$
b) $T > t_{n-1;1-\alpha}$
c) $T < t_{n-1;\alpha}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="7">testen für σ^2</td><td colspan="2">2. a) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, b) $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$, c) $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$</td></tr>
<tr><td rowspan="6"></td><td>bei unbekanntem Erwartungswert μ $\Rightarrow$ χ^2-Streuungstest</td></tr>
<tr><td>3. Testgröße $T(X_1, \dots, X_n) =$</td></tr>
<tr><td>$\frac{(n-1)}{\sigma_0^2} S^2_{(n)}$</td></tr>
<tr><td>4. Ablehnung Falls</td></tr>
<tr><td>a) $T < \chi^2_{n-1;\alpha/2}$ oder $T > \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}$
b) $T > \chi^2_{n-1;1-\alpha}$
c) $T < \chi^2_{n-1;\alpha}$</td></tr>
</table>