Filtrage Numérique

SEATECH parcours IRIS

TP 2 : Filtres récursifs, fonction de transfert et stabilité

1 Filtre auto-regressif d'ordre 2

1.1 Génération de la fonction de transfert du filtre et affichages

On considère un filtre AR d'ordre 2 défini par sa fonction de transfert en Z :

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1\, z^{-1} + a_2\, z^{-2}} = \frac{b_0}{(1 - p\, z^{-1})(1 - p^*\, z^{-1})}$$

b_0, a_1 et a_2 sont les coefficients du filtre, p et p^* sont les pôles (conjugués). On définit :

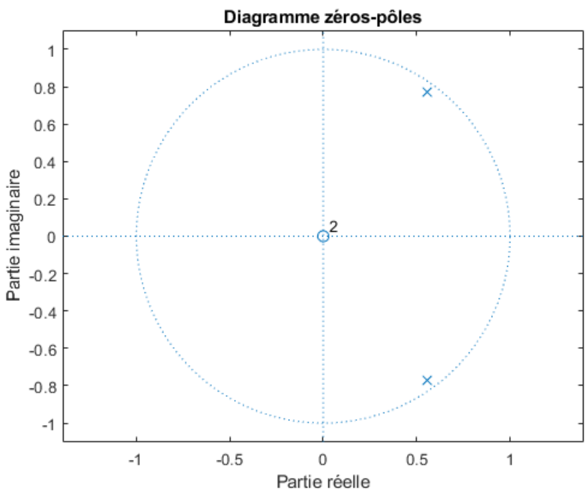
$$\begin{aligned} &b_0 = 0.15 \\ &p = r\, e^{j2\pi\nu_1} \\ &r = 0.95 \\ &\nu_1 = 0.15 \end{aligned}$$

Sous Matlab, on définit les fonctions de transfert par deux polynômes (numérateur B et dénominateur A), représentés par les vecteurs des coefficients :

$$\begin{aligned} B &= [\, b_0\,] \\ A &= [\, 1\; a_1\; a_2\,] \end{aligned}$$

Obtenir sous Matlab les vecteurs B et A à partir des informations ci-dessus (utiliser la fonction `poly`).

Il existe une fonction qui trace directement le diagramme zéros-pôles d'une fonction de transfert : `zplane(B,A)`. Afficher le diagramme pour ce filtre particulier. Il est possible de modifier les labels des axes et le titre de la figure a posteriori.

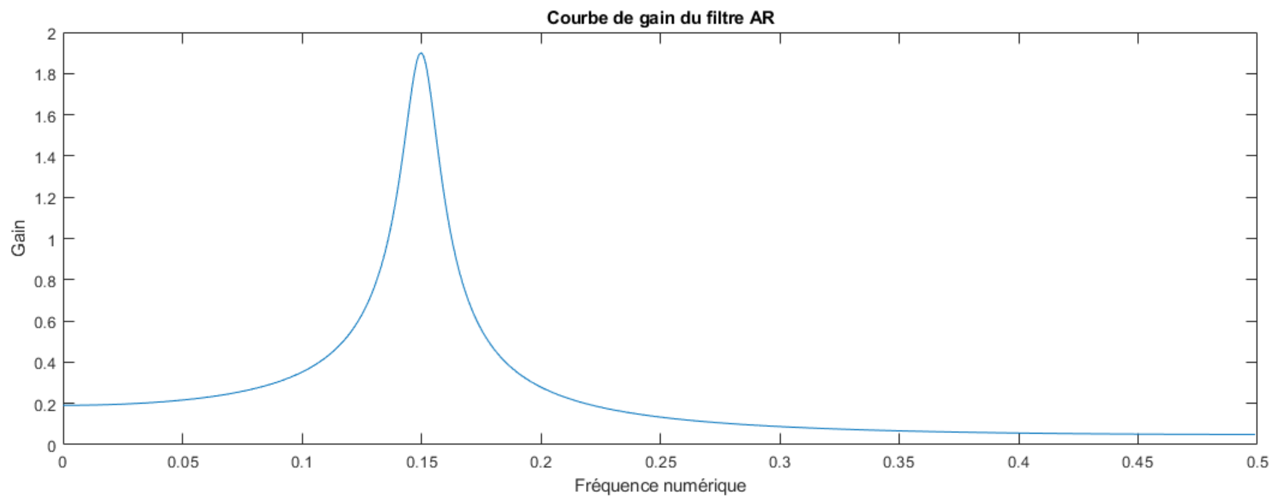


De même que dans le TP1, on peut générer la réponse en fréquence en utilisant la fonction `freqz`. Dans le cas d'un filtre récursif, la syntaxe est :

```
[H,w] = freqz(B,A,K)
```

On remarquera que dans le cas RIF, le polynôme B est égal à la réponse impulsionnelle, et le polynôme A est égal à 1.

Tracer la courbe de gain de ce filtre pour 500 points en fréquence et l'afficher en tracé "semi-continu". Interpréter la figure en terme de résonnance.



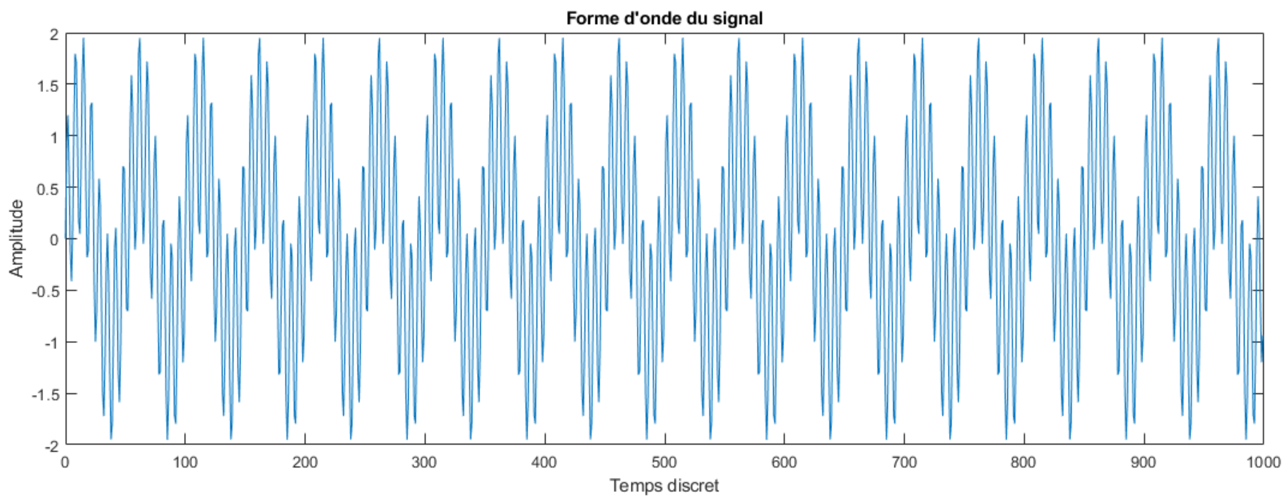
1.2 Application du filtre AR

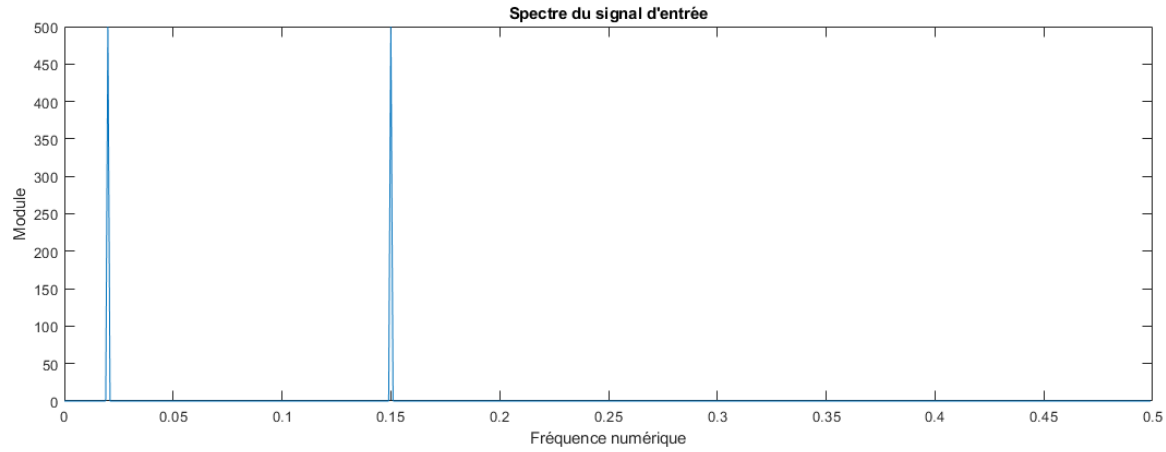
On considère un signal d'entrée défini comme la somme de deux sinusoïdes :

$$x[n] = \sin(2\pi\nu_1 n) + \sin(2\pi\nu_2 n), \quad n \in [0 \cdots N-1]$$

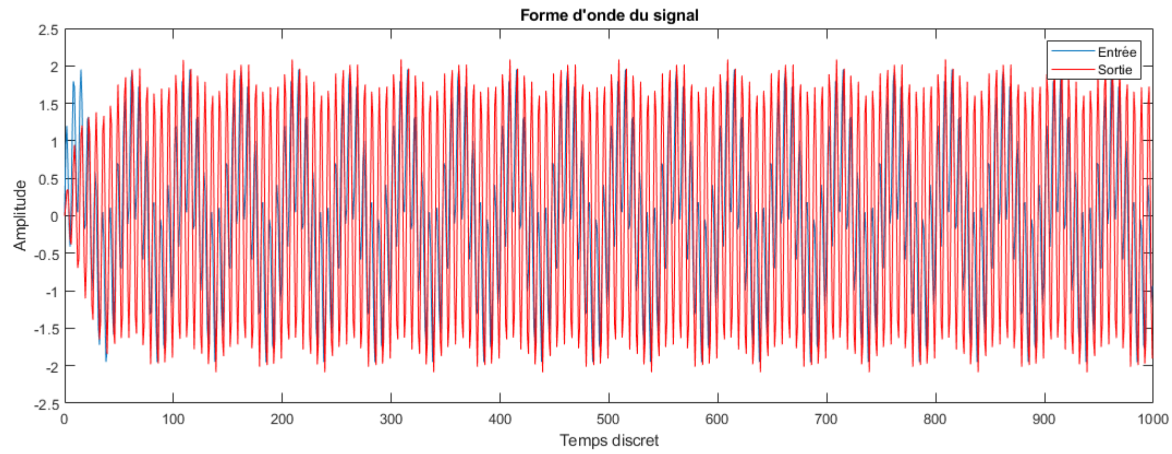
$N = 1000$
$\nu_1 = 0.15$
$\nu_2 = 0.02$

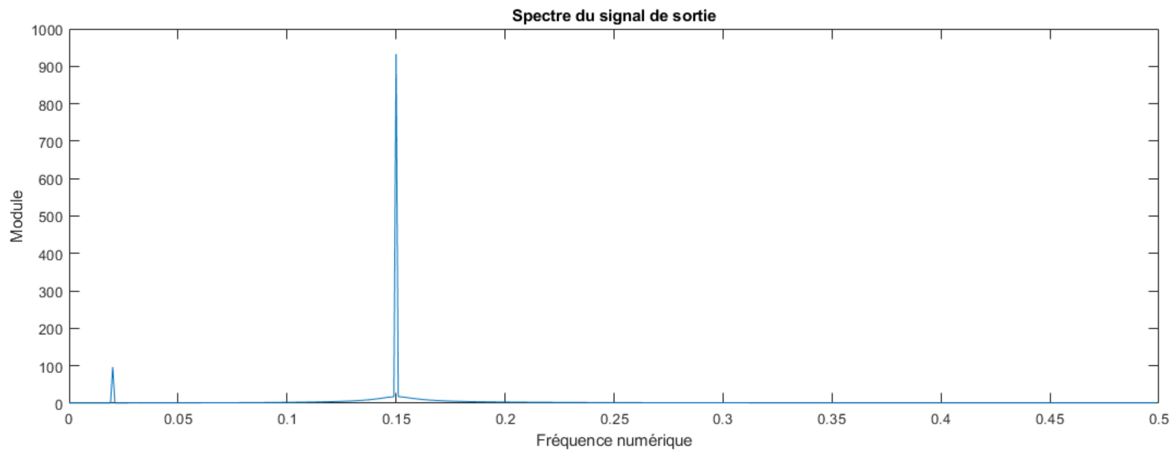
Tracer la forme d'onde du signal et son spectre, toujours sur 500 points en fréquence.





Pour appliquer un filtre récursif, on utilise la syntaxe `y = filter(B,A,x)`. Calculer et afficher le signal de sortie et son spectre. Décrire l'effet du filtre.

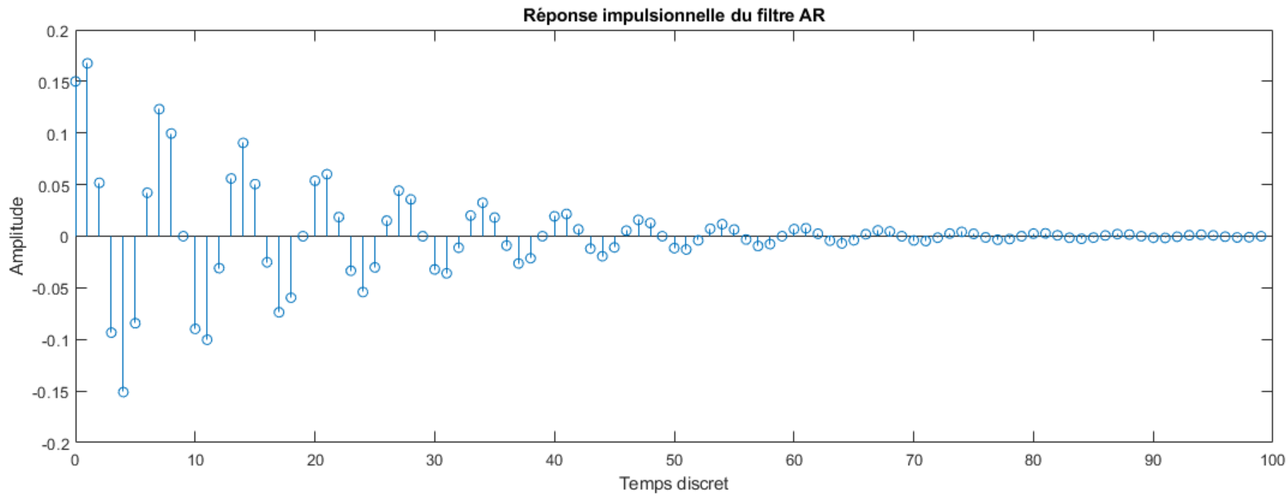




La même méthode permet aussi de calculer et d'afficher la réponse impulsionnelle (infinie) du filtre. Il suffit de définir comme signal d'entrée l'impulsion unité :

$$x[0] = 1$$
$$x[n] = 0, \quad n \neq 0$$

Caculer et afficher la réponse impulsionnelle du filtre sur $n \in [0 \cdots 100]$ en tracé "discret".



2 Etude de la stabilité du filtre AR

On considère maintenant un second filre AR d'ordre 2, pour lequel $r = 1/0.95$. Autrement dit, on déplace les pôles en les symétrisant par rapport au cercle unité.

Afficher le diagramme zéros-pôles et la courbe de gain de ce nouveau filtre. Commenter.

Afficher la réponse impulsionnelle et le signal de sortie, avec le même signal d'entrée que précédemment. Le filtre est-il stable ? Comment peut-on le vérifier ?

3 Filtre ARMA d'ordre 2

On considère maintenant un filtre ARMA d'ordre 2 défini par sa fonction de transfert en Z :

$$H(z) = \alpha \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \alpha \frac{(1 - \zeta z^{-1})(1 - \zeta^* z^{-1})}{(1 - p z^{-1})(1 - p^* z^{-1})}$$

ζ et ζ^* sont les zéros (conjugués), les pôles restent inchangés. On définit :

$\alpha = 0.15$
$\zeta = e^{j2\pi\nu_2}$
$\nu_2 = 0.02$

Afficher le diagramme zéros-pôles et la courbe de gain de ce nouveau filtre. Commenter.

Afficher la réponse impulsionnelle et le signal de sortie, avec le même signal d'entrée que précédemment. Commenter.

4 Filtre réjecteur

On reprend le signal créneaux du TP1, partie 2.1 : Chaque période est constituée de 32 échantillons de valeur +1 puis 32 échantillons de valeur -1. Le signal total comprend 20 périodes (soit 1280 échantillons au total). On ajoute au signal créneaux une sinsoïde pure d'amplitude 1 et de fréquence $\nu_0 = 0.16$. Tracer la forme d'onde du signal et son spectre, sur 500 points en fréquence.

On souhaite appliquer à ce signal un filtre qui "nettoie" le signal en supprimant la sinusoïde et en conservant le créneau. Pour cela, on propose le filtre ARMA d'ordre 2 suivant, défini par ses zéros et ses pôles, appelé "filtre réjecteur" (on reprend les notations de la section 3) :

$\alpha = 1$
$\zeta = e^{j2\pi\nu_0}$
$p = \rho\, e^{j2\pi\nu_0}$
$\rho = 0.95$

Afficher le diagramme zéros-pôles, la réponse impulsionnelle et la courbe de gain de ce filtre. Justifier le qualificatif "réjecteur".

Appliquer le filtre au signal défini précédemment et afficher la forme d'onde et le spectre du signal de sortie. Manifestement, l'effet du filtre dans le domaine fréquentiel est conforme aux attentes, mais son effet dans le domaine temporel est décevant. Comment peut-on expliquer cet échec (relatif) ?