Formulaire de Physique I - Mécanique

C.B.

Semestre d'automne 2019

1 Notions mathématiques

1.1 Produit scalaire et produit vectoriel

$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\theta) \qquad \|\vec{a} \cdot \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\theta) \tag{1}$$

En particulier:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \perp \Pi(\vec{a}, \vec{b}) \qquad \vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \tag{2}$$

Produit mixte et double produit vectoriel:

$$\begin{cases} (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b} \\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ coplanaires} \end{cases} \qquad \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \tag{3}$$

1.2 Systèmes de coordonnées

1.2.1 Système de coordonnées cylindriques

Position projetée sur les axes:

$$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z \tag{4}$$

Vitesse projetée sur les axes:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z \tag{5}$$

Accélération projetée sur les axes:

$$\begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 \\ a_\phi = \rho \ddot{\phi} + 2 \dot{\rho} \dot{\phi} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases} \tag{6}$$

1.2.2 Système de coordonnées sphériques

Position projetée sur les axes:

$$\vec{r} = r \hat{e}_r \tag{7}$$

Vitesse projetée sur les axes:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin(\theta) \hat{e}_\phi \tag{8}$$

Accélération projetée sur les axes:

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) \\ a_\theta = r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ a_\phi = r \ddot{\phi} \sin(\theta) + 2 r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos(\theta) + 2 \dot{r} \dot{\phi} \sin(\theta) \end{cases} \tag{9}$$

2 Mécanique du point

2.1 Les 3 lois de Newton

2.1.1 Loi d'inertie

"Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite,
à moins qu'une force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état."

$$\boxed{\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \text{MRU}} \tag{10}$$

(MRU = Mouvement Rectiligne Uniforme)

2.1.2 Principe fondamental de la dynamique (*Lex Secunda*)

"Les changements dans le mouvement d'un corps
sont proportionnels à la force et se font dans la direction de la force."

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \tag{11}$$

On a aussi la formule plus universelle, qui prend en compte les éventuels changements de masse du système (et qui est donc équivalente à la première dans les systèmes sans changement de masse):

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} \tag{12}$$

2.1.3 Loi d'action-réaction

"A chaque action, il y a toujours une réaction égale et opposée;
si un corps exerce une force sur un autre,
cet autre corps exerce une force égale et opposée sur le premier."

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}} \tag{13}$$

2.2 Oscillateur harmonique

2.2.1 Loi de Hooke

Force exercée par un ressort:

$$\boxed{\vec{F} = -k\Delta x} \tag{14}$$

où Δx est la différence entre la position au repos de l'extrémité du ressort et la position actuelle de l'extrémité ressort (peut être positive ou négative).

2.2.2 Équation du mouvement d'un oscillateur harmonique

L'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique est de la forme

$$m\ddot{x} = -\omega_0^2 x \tag{15}$$

où on nomme ω_0 la vitesse angulaire du mouvement. Cette équation différentielle admet deux formes de solution:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \tag{16}$$
$$x(t) = C\sin(\omega_0 t + \phi) \tag{17}$$

Comme $\sin(\theta + \pi/2) = \cos(\theta)$, on peut également avoir

$$x(t) = D\cos(\omega_0 t + \phi') \tag{18}$$

3 Énergie et travail

3.1 Forces de frottement

Une force de frottement s'oppose toujours au mouvement d'un corps.

3.1.1 Frottement sec statique

L'aspect important de la force de frottement sec statique n'est pas sa valeur, mais sa norme maximale:

$$\boxed{\|\vec{F}_s\| \leq \mu_s \cdot \|\vec{N}\|.} \tag{19}$$

La force de frottement sec statique s'oppose exactement aux forces qui tentent de déplacer l'objet le long de la surface de contact, de telle façon à ce que l'objet reste statique (somme des forces $= \vec{0} \iff$ pas de changement de vitesse):

$$\vec{F}_s = -\vec{F}_{\|} \tag{20}$$

Une fois sa norme maximale dépassée, la force de frottement sec statique ne peut plus équilibrer les autres forces parallèles à la surface de contact, et l'objet se met à bouger.

3.1.2 Frottement sec cinétique

La force de frottement cinétique est de sens opposé à la vitesse du corps.

$$\boxed{\vec{F}_c = -(\mu_c \cdot \|\vec{N}\|)\hat{v}} \tag{21}$$

3.2 Quantité de mouvement et impulsion

3.2.1 Quantité de mouvement

On définit la **quantité de mouvement** d'un point matériel par

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}.} \tag{22}$$

La seconde loi de Newton (12) dit que la quantité de mouvement d'un point matériel ne change pas tant que la somme des forces extérieures est nulle (et que la masse ne change pas).

3.2.2 Impulsion

On définit l'**impulsion** d'une force $\vec{F}$ appliquée sur un point matériel entre un instant 1 et un instant 2 par

$$\vec{I}_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot dt. \tag{23}$$

Si $\vec{F}$ est la résultante des forces s'appliquant sur le point matériel, alors $\vec{F} = m\vec{a}$ et cette équation se simplifie en

$$\boxed{\vec{I}_{12} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1.} \tag{24}$$

3.3 Énergie cinétique, travail et puissance d'une force

3.3.1 Énergie cinétique

On définit l'**énergie cinétique** d'un point matériel par

$$\boxed{K = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2} \tag{25}$$

3.3.2 Travail d'une force

On définit le **travail** d'une force $\vec{F}$ appliquée sur un point matériel entre un point 1 et un point 2 par

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{26}$$

Si la trajectoire entre le point 1 et le point 2 est rectiligne et la force reste constante sur cette trajectoire, cette équation se simplifie en

$$\boxed{W_{12} = \|\vec{F}\| \cdot d_{12}} \tag{27}$$

où d_{12} est la distance entre le point 1 et le point 2.
Si $\vec{F}$ est la résultante des forces s'appliquant sur le point matériel, alors $\vec{F} = m\vec{a}$ et l'intégrale (26) se simplifie en

$$W_{12} = K_2 - K_1 \tag{28}$$

3.3.3 Puissance d'une force

On définit la **puissance instantanée** d'une force par

$$P = \frac{dW}{dt}. \tag{29}$$

Or

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{30}$$

(à compléter parce que je sais pas trop comment inscrire ça dans le reste de la théorie)

3.3.4 Théorème de l'énergie cinétique

(mettre également thm de l'énergie cinétique)

3.4 Force conservative et énergie mécanique

3.4.1 Force conservative et énergie potentielle

Une force conservative est une force dont la valeur dépend uniquement de la position à laquelle elle est évaluée. Ainsi, on peut introduire la notion du potentiel $V(\vec{r})$ d'une force conservative, par lequel la force est déterminée.

3.5 Énergie mécanique

Si $\vec{F}$ est conservative, (26) donne

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1). \tag{31}$$

On définit l'énergie mécanique d'un point matériel comme la somme de son énergie cinétique et de l'énergie potentielle de chacune des forces conservatives par lesquelles il est affecté:

$$\boxed{E = K + \sum_{\vec{F}} V_{\vec{F}}(\vec{r}).} \tag{32}$$

Si toutes les forces qui agissent sur le point matériel sont conservatives, E est une constante.

3.6 Équilibre et petites oscillations d'un oscillateur harmonique

L'étude de la fonction $V(x)$ permet de déterminer les points d'équilibre, ainsi que la fréquence des petites oscillations autour des points d'équilibre stable.
(à compléter)

4 Mouvements de rotation

4.0.1 Vitesse angulaire

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \tag{33}$$

Vitesse d'un point A quelconque selon la vitesse angulaire:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_A. \tag{34}$$

Si un point est soumis à plusieurs rotations, les vitesses angulaires s'ajoutent:

$$\vec{v}_A = \left(\sum \vec{\omega}\right) \wedge \vec{r}_A \tag{35}$$

4.0.2 Moment de force

$$\boxed{\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F}} \tag{36}$$

4.0.3 Moment cinétique

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p}} \tag{37}$$

4.0.4 Théorème du moment cinétique

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O} \tag{38}$$

4.0.5 Théorème du transfert

Le théorème du transfert permet de calculer le moment cinétique en un AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{v}_A + \vec{L}_A \tag{39}$$

4.0.6 Moment d'inertie

AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA

5 Le solide indéformable

5.1 Centre de masse

On définit la position du **centre de masse** par

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \tag{40}$$

5.2 Tenseur d'inertie

5.2.1 Par rapport au centre de masse

Le tenseur d'inertie $\tilde{I}_G$ d'un solide indéformable par rapport à son centre de masse G est donné par

$$(\tilde{I}_G)_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[(\overrightarrow{GP_\alpha})^2 \delta_{ij} - (\overrightarrow{GP_\alpha})_i (\overrightarrow{GP_\alpha})_j \right]. \tag{41}$$

Les tenseurs d'inertie de quelques solides homogènes communs sont donnés en annexe [REFERENCE???????????????????????????????

5.2.2 Théorème de Steiner

Le théorème de Steiner permet de calculer le tenseur d'inertie d'un solide indéformable par rapport à n'importe quel point A du solide, à partir du tenseur par rapport au centre de masse:

$$(\tilde{I}_A)_{ij} = (\tilde{I}_G)_{ij} + M \left[(\overrightarrow{AG})^2 \delta_{ij} - (\overrightarrow{AG})_i (\overrightarrow{AG})_j \right]. \tag{42}$$

5.3 Moment cinétique

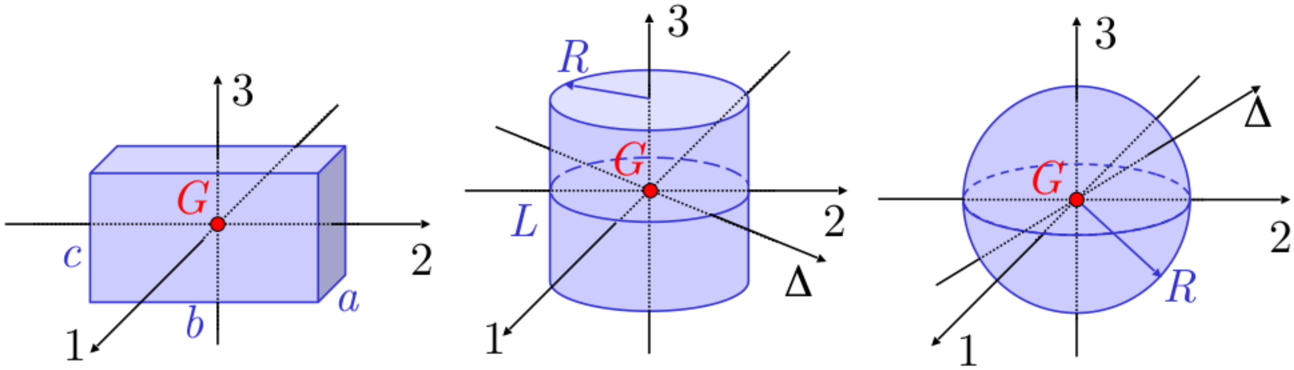
Le moment cinétique d'un solide indéformable est donné par

$$\vec{L}_G = \tilde{I}_G \vec{\omega} \tag{43}$$

6 Annexe

6.1 Tenseurs d'inertie de solides homogènes communs

Les axes sont choisis ainsi:



On note les composantes des tenseurs diagonaux ainsi:

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Brique pleine de dimensions $a \times b \times c$:

$$\tilde{I}_G = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \tag{44}$$

Brique cubique pleine de côté a:

$$\tilde{I}_G = \frac{ma^2}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{45}$$

Cylindre plein de rayon R **et de longueur** L:

$$\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{pmatrix} \tag{46}$$

Cylindre vide de rayon R **et de longueur** L:

$$\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix} \tag{47}$$

Sphère pleine de rayon R:

$$\tilde{I}_G = \frac{2}{5}mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{48}$$

Sphère vide de rayon R:

$$\tilde{I}_G = \frac{2}{3}mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{49}$$