Introduction

Résumé du cours d'Analyse II par Anna Lachowska. Retrouvez la page github contenant d'autres résumés et documents, à laquelle tout le monde peut participer: https://github.com/arakniode/almighty-handbook-of-sleep-deprived-student

Chapter 1

Équations différentielles

1.1 02 février 2019

Une équation différentielle ordinaire est une équation qui lie une fonction $y = y(x)$ à sa dérivée. Par exemple, l'équation

$$y' + y = 0 \tag{1.1}$$

est une équation différentielle.
La solution d'une équation différentielle est une fonction ou un **ensemble de fonctions**, à la différence des équations "classiques" qui acceptent comme solution un nombre ou un ensemble de nombres.

1.1.1 Équation à variables séparées (EDVS)

Une équation différentielle est dite "à variable séparées" lorsqu'on peut placer tous les termes en x d'un côté de l'équation, et tous les termes en y de l'autre (n'oublions pas que x est la *variable* de la fonction y). Par exemple, on peut réécrire l'équation différentielle présentée plus haut ainsi:

$$\begin{aligned} y' + y &= 0 \\ y' &= -y \end{aligned}$$

On emploie la notation de Leibniz, qui permet notamment de séparer les variables:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -y \\ \frac{dy}{y} &= -dx \end{aligned}$$

On peut désormais intégrer les deux côtés de l'équation, et résoudre pour y:

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y} &= -\int dx\\ log(y) + C_1 &= -x + C_2\\ e^{\log(y)+C_1} &= e^{-x+C_2}\\ e^{C_1}\cdot y &= e^{C_2}\cdot e^{-x}\\ y &= e^{C_2-C_1}\cdot e^{-x}\end{aligned}$$

Renommons $e^{C_2-C_1}$ (qui n'est qu'une constante) en C:

$$y = Ce^{-x}$$

C'est la solution générale de l'équation différentielle. Ici, on voit qu'il existe une infinité de fonctions (pour chaque $C \in \mathbb{R}$) qui satisfont cette équation.

1.1.2 Terminologie de base

Ordre, degré, linéarité, solution générale, problème de Cauchy (conditions intiales)

Définition 1 *le* ***degré*** *d'une équation différentielle est l'exposant le plus haut sur un terme $y^{(n)}$. Par exemple, l'équation $y^2 = y'$ est une équation différentielle de degré 2.*

Définition 2 *l'****ordre*** *d'une équation différentielle est de n si l'équation contient un terme en $y^{(n)}$, et pas plus. Par exemple, $y = y''$ est une équation différentielle d'ordre 2.*

Définition 3 *la* ***solution générale*** *d'une équation différentielle est l'ensemble de toutes les solutions qui satisfont l'équation (sans conditions initiales)*

Définition 4 *la* ***solution maximale*** *d'une équation différentielle avec la condition initiale $y(x_0) = b_0$ est une fonction y(x) satisfaisant l'équation et la condition initiale, et définie sur le plus grand intervalle possible.*

1.2 05 février 2019

1.2.1 Équation à variables séparées (EDVS) (suite)

Théorème existence et unicité d'une solution de EDVS
Toute équation différentielle à variables séparées avec une condition initiale: $y(x_0) = b_0$ possède une unique solution y.
Attention: la démonstration de l'existence (à retrouver dans les notes) peut

être demandée à l'examen! Idée: $f(y)y' = g(x) \iff f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \iff \int f(y)dy = \int f(x)dx \iff F(y) = G(x)$. Puis, remarquer que $F(y)$ est inversible sur l'intervalle de définition de $f(y)$

Exemple 1

$$\begin{aligned}\frac{y'(x)}{y^2(x)} = 1 \implies \int \frac{dy}{y^2} = \int dx \implies -\frac{1}{y} = x + C \forall C \in \mathbb{R} \\ \implies y = -\frac{1}{x+C} \forall C \in \mathbb{R} \quad \textit{(solution générale)}\end{aligned}$$

Supposons qu'on cherche une solution telle que $y(0) = b_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\implies y(0) = -\frac{1}{C} = b_0 \implies C = -\frac{1}{b_0} \implies y(x) &= -\frac{1}{x - \frac{1}{b_0}} \\ &= \frac{b_0}{1 - xb_0} \\ \textit{Si } b_0 > 0 \implies \frac{1}{b_0} > 0 \implies y(x) &= -\frac{1}{x - \frac{1}{b_0}}\end{aligned}$$

sur $]-\infty, \frac{1}{b_0}[\ni 0$ *(solution particulière,* $b_0 > 0$*)*

On peut également calculer la solution particulière pour $b_0 < 0$*, qui sera définie sur un autre intervalle.*

1.2.2 Equation différentielle linéaire de premier ordre (EDL1)

Une équation différentielle linéaire de premier ordre est une équation de la forme

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x) \tag{1.2}$$

Considérons l'équation:

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0 \tag{1.3}$$

Elle s'appelle l'**équation homogène associée** à l'EDL1 précédente.
Tout d'abord, on voit que $y(x) = 0$ est une solution $\forall x \in \mathbb{R}$. Mettons de côté cette solution triviale en divisant par y. On se retrouve avec l'équation

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x)$$

qui est une EDVS, donc

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$$

1.2.3 Méthode de la variation de constante

On cherche une solution particulière de $y^(x) + p(x)y(x) = f(x),\ p, f : I \to \mathbb{R}$ sous la forme: <u>Ansatz</u> $v(x) = C(x)e^{-P(x)}$ où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I

Si $v(x)$ est une solution de l'équation:

$$\implies v'(x) + p(x)v(x) = f(x) \implies c'(x)e^{-P(x)} + c(x)e^{-P(x)}(-p(x)) + p(x)c(x)e^{-P(x)} = f(x)$$
$$\implies c'(x) = f(x)e^{P(x)} \implies c(x) = \int f(x)e^{P(x)}dx$$

$\implies$ une solution particulière de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ est $v(x) = \left(\int f(x)e^{P(x)}dx\right)\cdot e^{-P(x)}$ où $P(x)$ est <u>une</u> primitive de p(x) sur I.

<u>Exemple</u>

$$y' + y = 5x + 1, \quad p(x) = 1, f(x) = 5x + 1$$
$$P(x) = \int 1dx = x \quad \text{(une primitive, sans constante)}$$

La solution générale de l'équation homogène associée: $y' + y = 0$ est $y(x) = Ce^{-P(x)} = Ce^{-x}\forall C, x \in \mathbb{R}$

pour trouver une solution particulière de l'équation $y' + y = 5x + 1$ on calcule

$$c(x) = \int f(x)e^{P(x)}dx = \int (5x + 1)e^x dx = 5\int xe^x dx + \int e^x dx$$
$$= 5xe^x - 5\int e^x dx + \int e^x dx = \underbrace{5xe^x - 4e^x + 1}_{\text{on ne peut choisir une constante arbitraire}}$$

Une solution particulière de $y' + y = 5x + 1$ est

$$v(x) = (5xe^x - 4e^x - 1)e^{-x} = \underbrace{5x - 4 + e^{-x}}_{\text{une solution particulière}}$$

Vérification:

$$v'(x) + v(x) = 5 - \cancel{e^{-x}} + 5x - 4 + \cancel{e^{-x}} = 5x + 1 = f(x)$$

<u>Proposition</u> Soient $p, f \to \mathbb{R}$ deux fonction continues. Supposons que $v_0 : I \to \mathbb{R}$ est une solution particulière de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$. Alors la solution générale de cette équation est

$$v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)} \tag{1.4}$$

$\forall C \in \mathbb{R}$, où $P(x)$ est <u>une</u> primitive de $p(x)$ sur I.

1.2.4 Solution générale d'une EDL1

La solution générale de l'EDL1 $y' + p(x)y = f(x)$ est:

$$y(x) = C \cdot e^{-P(x)} + \big(f(x)e^{P(x)}dx\big)e^{-P(x)} \tag{1.5}$$

où $P(x)$ est <u>une</u> intégrale de $p(x)$ (donc pas besoin d'inclure la constante d'intégration).

1.3 25 février 2019

1.3.1 Équation de Bernouilli

Définition 5 *Une équation différentielle de la forme* $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$*, où* $p, q : I \to \mathbb{R}$ *fonctions continues et* $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, 1$*, est dite l'équation de Bernouilli.*

On peut la transformer en EDL1 par le changement de variable $z(x) = (y(x))^{1-\alpha}$. Cela nous permet d'arriver à l'EDL 1 $\frac{1}{1-\alpha}z'(x) + p(x)z(x) = q(x)$.

Exemple 2 $y'(x) = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y} \iff y'(x) - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y} \implies x \neq 0, y(x) \geq 0.$

Changement de variable: $z(x) = (y(x))^{1-\alpha} = \sqrt{y}$

$$\implies z'(x) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = \frac{1}{2}\frac{y'}{\sqrt{y}} \implies \ldots \implies z' - \underbrace{\frac{2}{x}}_{p(x)} z = \underbrace{\frac{x}{2}}_{f(x)} \quad \textit{(EDL1)}$$

On cherche la solution générale de l'équation homogène associée:

$$P(x) = -\int \frac{2dx}{x} = -2\log|x| = -\log(x^2), \quad x \neq 0 \quad \textit{(pas de constante)}$$

$$\implies z_{hom}(x) = Ce^{-P(x)} = Ce^{\log(x^2)} = Cx^2, \quad x \neq 0$$

On cherche une solution particulière de l'équation complète:

$$z' - \frac{2}{x}z = \underbrace{\frac{x}{2}}_{f(x)}$$

$$\int f(x)e^{P(x)}dx = \ldots = \frac{1}{2}\log|x|, x \neq 0 \quad \textit{(pas de constante)}$$

$$\implies z_{part}(x) = \frac{1}{2}\log|x| \cdot e^{\log(x^2)} = \frac{1}{2}x^2\log|x|, \quad x \neq 0$$

Solution générale de l'EDL1:

$$z(x) = \begin{cases} Cx^2 + \dfrac{x^2}{2}\log(x), & x \in]0, \infty[, C \in \mathbb{R} \\ Cx^2 + \dfrac{x^2}{2}\log(-x), & x \in]-\infty, 0[, C \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Solution générale de l'équation originale avec $y(x) = z^2(x)$:

$$y(x) = \begin{cases} x^4(C + \frac{1}{2}\log(x))^2, & x \in \left]0, +\infty\right[\ , C \in \mathbb{R} \\ x^4(C + \frac{1}{2}\log(-x))^2, & x \in \left]-\infty, 0\right[\ , C \in \mathbb{R} \\ 0, & x \in \left]0, +\infty\right[\\ 0, & x \in \left]-\infty, 0\right[\end{cases}$$