Physique 1 - Jean-Marie Fuerbringer
Résumé

Benjamin Bovey - IC

November 2018

Introduction

Ce document est destiné à résumer les certainement laborieux cours de Physique 1 présentés par Mr Fuerbringer, afin d'en présenter uniquement les aspects les plus cruciaux quand à la résolution d'exercices. Il fait partie d'un projet auquel vous pouvez participer! Plus d'informations sur le GitHub du projet (`https://github.com/Arakniode/almighty-handbook-of-sleep-deprived-student`).
Ce résumé est pour l'instant incomplet par rapport à l'ensemble des notions couvertes par le cours de Physique 1, ce cours n'ayant pas encore touché à sa fin.

0 Notions mathématiques - I

0.1 Vecteurs

0.1.1 Produit vectoriel

Le produit vectoriel est une opération prenant deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ comme input et donnant un troisième vecteur comme output.
Il est défini ainsi:

$$\boxed{\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}} \tag{0.1}$$

Ou, en termes de normes:

$$\boxed{||\vec{a} \wedge \vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \sin(\theta)} \tag{0.2}$$

Le vecteur résultant d'un produit vectoriel a la propriété d'être perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs d'input (orthogonalité).
Si deux vecteurs sont parallèles, leur produit vectoriel est nul.

Le produit vectoriel possède les propriétés suivantes:

- $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$
-

Il est également **anti-commutatif** et **distributif**.

0.1.2 Produit scalaire

Le produit scalaire est une opération prenant deux vecteurs comme input et donnant un scalaire, c'est-à-dire un nombre réel, comme output.
Il est défini ainsi:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3} \tag{0.3}$$

Ou, en termes de normes:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos(\theta)} \tag{0.4}$$

Si deux vecteurs sont perpendiculaires, leur produit scalaire est nul.

Le produit scalaire possède les propriétés suivantes:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
- $(\alpha\vec{a}) \cdot (\beta\vec{b}) = \alpha\beta(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Il est également **commutatif** et **distributif**.

0.1.3 Produit mixte et double produit vectoriel

Quelques propriétés des combinations du produit vectoriel et du produit scalaire:

- $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b}$
- $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires.
- $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

0.2 Dérivée

La dérivée d'une fonction $f(x)$ est la fonction $f'(x)$ qui représente la pente de la fonction $f(x)$.

0.2.1 Notations

- Leibniz: la dérivée première de $f(x)$ est $\frac{d\,f(x)}{dx}$,
  la dérivée seconde est $\frac{d^2\,f(x)}{dx^2}$
  (parfois $\frac{d}{dx}f(x)$ et $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$)
- Lagrange: la dérivée première de $f(x)$ est $f'(x)$,
  la dérivée seconde est $f''(x)$
- Autre: lorsqu'on dérive *par rapport au temps*, en physique, on désigne souvent la dérivée première par $\dot{f}(x)$, et la dérivée seconde par $\ddot{f}(x)$.

La notation utilisée sera le plus souvent la troisième. On désignera donc par exemple la position sur $\hat{x}$ par x, la vitesse par $\dot{x}$ et l'accélération par $\ddot{x}$.

0.3 Systèmes de coordonnées

Pour modéliser certains problèmes physiques, il est souvent pratique d'utiliser différents systèmes de coordonnées.

0.3.1 Système cartésien

Il s'agit du système de coordonnées "basique", qui est assez pratique pour la résolution d'exercices en général (ballistique, chocs à une ou deux dimensions, etc.) Lorsque la géométrie du problème est plus complexe, on préférera choisir parmis les systèmes de coordonnées suivants.

0.3.2 Système de coordonnées cylindriques

Les axes utilisés sont $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi$ et $\hat{e}_z$.

Position projetée sur les axes:

$$\boxed{\vec{r} = \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z} \tag{0.5}$$

Vitesse projetée sur les axes:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z} \tag{0.6}$$

Accélération projetée sur les axes:

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\right)\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z} \tag{0.7}$$

0.3.3 Système de coordonnées sphériques

Les axes utilisés sont $\hat{e}_r, \hat{e}_\phi$ et $\hat{e}_\theta$.
Position projetée sur les axes:

$$\boxed{\vec{r} = r\hat{e}_r} \tag{0.8}$$

Vitesse projetée sur les axes:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin(\theta)\hat{e}_\phi} \tag{0.9}$$

Accélération projetée sur les axes:

$$\boxed{\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2(\theta) \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ a_\phi = r\ddot{\phi}\sin(\theta) + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta) + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin(\theta) \end{cases}} \tag{0.10}$$

1 Mécanique du point

1.1 Les 3 lois de Newton

1.1.1 Loi d'inertie

"Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite,
à moins qu'une force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état."

$$\boxed{\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \text{MRU}} \tag{1.1}$$

(MRU = Mouvement Rectiligne Uniforme)

1.1.2 Principe fondamental de la dynamique (*Lex Secunda*)

"Les changements dans le mouvement d'un corps
sont proportionnels à la force et se font dans la direction de la force."

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \tag{1.2}$$

On a aussi la formule plus universelle, qui prend en compte les éventuels changements de masse du système:

$$\boxed{\vec{F} = \dot{\vec{p}}}$$

où $\vec{p}$ est la quantité de mouvement (concept abordé plus tard dans le cours, 2.5). Cette formule est équivalente à la précédente dans des systèmes fermés (où la masse ne change pas).

À partir de la seconde loi de Newton, on peut considérer la masse comme "la capacité qu'a un objet à résister au changement de vitesse". C'est pourquoi il est difficile de mettre un mouvement un gros rocher perché au sommet d'une colline afin d'écraser un vil coquin qui sieste à son pied, et qu'il est tout autant difficile de l'arrêter après qu'il ait commencé à rouler si on est soudainement pris d'une vague d'amour pour le pauvre dormeur (?).

1.1.3 Loi d'action-réaction

"A chaque action, il y a toujours une réaction égale et opposée; si un corps exerce une force sur un autre,
cet autre corps exerce une force égale et opposée sur le premier."

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}} \tag{1.3}$$

1.2 Ballistique

1.2.1 Chute libre

Équation horaire, sans frottement:

$$\boxed{z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0} \tag{1.4}$$

1.2.2 Tir ballistique

Équations horaires, sans frottement:

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_{0x}t + x_0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{1}gt^2 + v_{0z}t + z_0 \end{cases}} \tag{1.5}$$

Hauteur maximale:

$$\boxed{h = \frac{v_{0,z}^2}{2g}} \tag{1.6}$$

$v_{0,z}$ est la vitesse projetée sur l'axe *vertical*.
Portée: La portée est maximale pour $\theta = \frac{\pi}{4}$:

$$x_{\max} = 2h = \frac{v_0^2}{g} \tag{1.7}$$

Angles symmétriques à $\frac{\pi}{4}$:

Deux lancers avec la même vitesse
sur des angles symmétriques par rapport à $\frac{\pi}{4}$
auront la même portée.

Parabole de sûreté:

$$\boxed{z = h - \frac{x^2}{4h}} \tag{1.8}$$

1.3 Oscillateur harmonique

1.3.1 Loi de Hooke

Force exercée par un ressort:

$$\boxed{\vec{F} = -k\vec{x}} \tag{1.9}$$

$\vec{x}$ est la différence entre la longueur actuelle et la longueur au repos du ressort. Le signe $-$ indique que la force est dirigée vers le "centre du ressort" (sa longueur au repos).

1.3.2 Oscillateur harmonique non-amorti

On modélise le système d'un oscillateur harmonique par une équation différentielle de la forme:

$$\boxed{m\ddot{x} = -kx = -\omega^2 x} \tag{1.10}$$

ω est la vitesse angulaire du mouvement.
La solution générale de l'équation 1.10 est:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)} \tag{1.11}$$

On peut aussi utiliser cette seconde solution:

$$\boxed{x(t) = C\sin(\omega_0 t + \phi)} \tag{1.12}$$

La constante C est l'amplitude du mouvement.

1.3.3 Oscillateur harmonique amorti

On rajoute une force de frottement proportionnelle à la vitesse. On se retrouve avec l'équation différentielle suivante:

$$\boxed{m\ddot{x} = -k(x - x_0) - b\dot{x}} \tag{1.13}$$

2 Travail et énergie

2.1 Forces de frottement

La force de frottement s'oppose au mouvement du corps.

2.1.1 Frottement sec statique

La force de frottement statique s'oppose à la force parallèle à la surface, et est proportionnelle à la force normale et à un coefficient de frottement spécifique aux deux surfaces:

$$\vec{F}_s = -\vec{F}_{||}$$

La force dépend des deux matériaux en contact, mais pas des surfaces:

$$\boxed{||\vec{F}_s|| \leq \mu_s ||\vec{N}||} \tag{2.1}$$

Lorsque la force de frottement maximale $||\vec{F}_{s,\max}|| = \mu_s ||\vec{F}_{||}||$ est atteinte, l'objet commence à glisser.

2.1.2 Frottement sec cinétique

La force de frottement cinétique s'oppose à la vitesse, et est proportionnelle à la force normale:

$$\boxed{\vec{F}_d = -\mu_c ||\vec{N}|| \hat{v}} \tag{2.2}$$

2.2 Impulsion, quantité de mouvement et lien avec la force

2.2.1 Impulsion

On définit l'impulsion de la force appliquée d'un point 1 à un point 2 comme:

$$\boxed{\vec{I}_{12} = \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{t}} \tag{2.3}$$

$$\boxed{\vec{I}_{12} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1} \tag{2.4}$$

2.2.2 Quantité de mouvement

On définit la quantité de mouvement $\vec{p}$:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \tag{2.5}$$

La variation de la quantité de mouvement est égale
à l'impulsion de la force résultante.

Force et quantité de mouvement sont directements liées par la *Lex Secunda* de Newton (1.2). La quantité de mouvement d'un système ne change pas tant que la somme des forces extérieures est nulle.

2.3 Travail et énergie cinétique

On peut définir le travail entre deux points de manière infinitésimale (sur une très courte distance, de manière précise):

$$\boxed{W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}} \tag{2.6}$$

Ce type de définition infinitésimale est utile lorsqu'on veut appliquer la notion de travail à des trajectoires curvilignes. Le calcul est plus simple pour des trajectoires rectilignes:

$$\boxed{W = ||\vec{F}|| \cdot \text{distance}} \tag{2.7}$$

2.3.1 Énergie cinétique

Définition de l'énergie cinétique:

$$\boxed{K = E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}m||\vec{v}||^2} \tag{2.8}$$

"La variation de l'énergie cinétique
est égale au travail de la somme des forces"

2.3.2 Puissance d'une force

La puissance d'une force est la quantité d'énergie fournie par la force (*le travail*) par unité de temps:

$$\boxed{P = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}} \tag{2.9}$$

La formule suivante est parfois plus pratique:

$$\boxed{\frac{\text{travail}}{\text{temps}}} \tag{2.10}$$

2.3.3 Théorème de l'énergie cinétique

"Dans un référentiel galiléen, pour un corps ponctuel de masse m constante parcourant un chemin reliant un point A à un point B, la variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux W des forces extérieures et intérieures qui s'exercent sur le solide considéré."

Pour un point matériel:

$$\boxed{K_2 - K_1 = W_{12} \Leftrightarrow \frac{dK}{dt} = P = \vec{F} \cdot \vec{v}} \tag{2.11}$$

2.3.4 Conservation de l'énergie mécanique, forces conservatives

Une force conservative est une force qui dérive d'un potentiel et ne dépend que de la position. Avec les forces conservatives, on peut introduire la notion de "potentiel d'une force" $V(\vec{r})$.

La pesanteur est un exemple commun de force conservative: elle ne dépend que de la hauteur de l'objet, et non pas de la trajectoire que parcourt ou qu'a parcourue l'objet. Elle dérive d'un champ, le champ gravitationnel, représenté par g dans la formule suivante:

$$W_{12} = mgz_1 - mgz_2 \tag{2.12}$$

On représente typiquement l'énergie potentielle gravitationnelle d'un système par mgh, ou mgz, où z/h représentent la hauteur du système, m sa masse et g l'accélération gravitationnelle terrestre. On peut y penser comme "le travail qu'il faudrait fournir pour élever le système à cette hauteur".

Lorsque les seules forces agissant sur le système sont conservatives, on peut postuler que l'énergie mécanique totale $(K + V)$ est constante. Quand on rencontre de telles situations dans un problème, on peut utiliser ce postulat pour déduire les vitesses maximales du système (lorsque V est nul, K est maximale), et tirer bien d'autres conclusions utiles.

Voici quelques exemples de forces conservatives:

- La pesanteur
- La force exercée par un ressort
- La gravitation
- La force centrale

Et une force non-conservative bien commune, et dont l'apparition dans un problème supprime tout espoir de pouvoir utiliser les énergies à son avantage:

- La force de frottement

Des observations faites ci-dessus, on peut transitionner vers le Théorème de l'énergie.

2.3.5 Théorème de l'énergie

Le théorème est le suivant:

$$\boxed{E_2 - E_1 = W_{12}^{\mathrm{NC}}} \tag{2.13}$$

Ce qui revient à dire:

"La variation de l'énergie mécanique du système est égale au travail des forces non-conservatives."

Cette observation découle assez directement de celle qui précède, ç.à.d que les forces conservatives ne modifient pas l'énergie totale du système. Les seules forces qui peuvent la modifier sont donc les forces non-conservatives.

Une expression équivalente du théorème est:

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = P^{\mathrm{NC}} = \vec{F}^{\mathrm{NC}} \cdot \vec{v}} \tag{2.14}$$

Autrement dit,

"La dérivée de l'énergie mécanique est égale à la puissance des forces non-conservatives."

2.3.6 L'énergie mécanique en tant qu'intégrale première du mouvement

On dit que l'énergie mécanique, si elle est conservée ($\Leftrightarrow$ si seules des forces conservatives entrent en jeu, 2.13), est une **intégrale première du mouvement**.

Nous n'inclurons pas ici le procédé mathématique un poil longuet, mais sachez qu'en dérivant l'énergie mécanique $E = K + V$, on peut retomber sur le principe fondamental de la dynamique, la *Lex Secunda* (1.2). Le processus est simplifié si l'on considère non pas le cas général mais celui d'un oscillateur harmonique:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + C \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + C\right) &= m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \\ &= m\ddot{x} + kx = 0 \\ m\ddot{x} &= -kx \\ \Rightarrow \ddot{x} &= -\frac{k}{m}x, \end{aligned}$$

ce qui est effectivement l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique.
(On a posé $\frac{dE}{dt} = 0$, car seules des forces conservatives entrent en jeu.)

2.3.7 Points d'équilibre

"Un point d'équilibre est une position d'un système physique
à laquelle le système restera immobile s'il est placé sans vitesse initiale.
Un point x_0 est un point d'équilibre si $F(x_0) = 0$ ou si $\frac{dV}{dx}\big|_{x=x_0} = 0$."

On étudie la fonction $V(x)$ afin de déterminer les points d'équilibre et les fréquences des petites oscillations autour des points d'équilibre stable. On effectue un développement limité autour d'un point d'équilibre pour déterminer la nature de l'équilibre (stable ou instable).

3 Moment cinétique et gravitation

3.1 Moment

En physique, le moment est une quantité qui rend compte de la distribution spatiale d'une quantité physique. En gros, on va considérer cette quantité physique non pas en tant que telle, mais plutôt dans un contexte spatial, c'est à dire par rapport à une origine O et à sa position par rapport à cette origine $\vec{r}$. On appelle souvent cette origine le *pivot*, car ces moments entrent souvent en compte lors de mouvements rotatifs autour d'un ou plusieurs points.
Il est important de bien comprendre que les moments ne sont pas des grandeurs physiques objectives dans un système: on les utilise juste afin d'étudier certains types de mouvements. On peut donc choisir le point de pivot comme cela nous arrange (p. ex problème de l'échelle contre un mur).

En physique, il existe plusieurs types de moment, qui possèdent des propriétés qui peuvent nous être utile afin d'étudier certains types de mouvements.

"Lorsque la quantité physique à laquelle on s'intéresse est un vecteur, l'angle entre le vecteur position et la quantité physique est pris en compte grâce au produit vectoriel."

3.1.1 Moment de force

$$\boxed{\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F}} \tag{3.1}$$

On peut imaginer ce moment de force comme "l'aptitude d'une force à faire tourner un système autour du point O". Comme on le disait dans le paragraphe précédent, il dépend de l'endroit où on applique la force: pensez à un bras de levier.

3.1.2 Moment cinétique

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}} \tag{3.2}$$

Si $\vec{p}$ est la *quantité de mouvement*, $\vec{L}_O$ pourrait être appelé la *quantité de rotation*.

3.1.3 Mouvement central

"Un point p de masse m a un mouvement central si la droite portant son accélération passe toujours par le même point O (le pivot)."

Exemple: un mouvement circulaire uniforme. La rotation des planètes autour du soleil.
Lorsqu'un mouvement est central, la loi des aires est respectée: l'aire balayée par le vecteur position sera toujours la même pour un même intervalle de temps (troisième loi de Kepler).

On a une équivalence entre ces trois propositions:

- Le mouvement est central
- $\Leftrightarrow$ Le moment cinétique $\vec{L}_O$ est constant
- $\Leftrightarrow$ La loi des aires est respectée et le mouvement est plan

3.1.4 Loi de la gravitation universelle

Force gravitationnelle entre deux corps:

$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{e}_r} \tag{3.3}$$

Potentiel de cette force:

$$\boxed{V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}} \tag{3.4}$$

4 Systèmes de points matériels

Nous nous intéresseront à des systèmes composés de plusieurs points matériels **non-liés** (en opposition aux corps indéformables).

4.1 Lois de conservation pour un système isolé

Le terme "isolé" peut être défini ainsi dans le contexte d'un système de points matériels:

"Un système de points matériels est isolé si les somme des forces extérieures ainsi que des moments de forces extérieurs sont nulles."

$$\boxed{\begin{cases} \vec{F}^{\text{ext}} = 0 \\ \vec{M}_O^{\text{ext}} = 0 \end{cases}}$$

4.1.1 Théorème du moment cinétique

La dérivée du moment cinétique est égale au moment de la somme des forces:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O} \tag{4.1}$$

Ce théorème est assez facilement prouvé à partir de la seconde loi de Newton (1.2).

4.1.2 Forces internes et externes

"La somme des forces internes est nulle.
Le moment de la somme des forces internes est nul."

Si le moment est nul, on peut selon le théorème du moment cinétique 4.1 déduire que le moment cinétique est constant. De cela, on peut tirer que:

"Seules les forces extérieures au système
déterminent l'évolution de la quantité de mouvement totale
et du moment cinétique total."

4.1.3 Conclusions sur les systèmes isolés

Un système isolé possède donc les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} \vec{F}^{\text{ext}} = 0 \\ \vec{M}_O^{\text{ext}} = 0 \\ \text{Moment cinétique total} = \text{cst.} \\ \text{Quantité de mouvement totale} = \text{cst.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Les propriétés 3 et 4 sont équivalentes aux propriétés 1 et 2 par le théorème du moment cinétique (4.1) et le principe fondamental de la dynamique (1.2).

4.1.4 Système à l'équilibre

Dans un système de points matériels à l'équilibre, chaque point matériel a une vitesse nulle ($\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{p} = 0$). Un système est à l'équilibre si il est isolé et que les conditions suivantes sont également respectées:

$$\begin{cases} \vec{p}^{\text{ tot}} = 0 \\ \vec{L}_O^{\text{tot}} = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

4.2 Centre de masse

La position du centre de masse:

$$\boxed{\vec{R} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{\alpha} m_\alpha \vec{r}_\alpha} \tag{4.4}$$

Les termes en majuscule désignent les attributs du centre de masse. Dans le cas de la masse, M désigne simplement la somme des masses des points composant le système.

4.2.1 Théorème du centre de masse

"Le centre de masse d'un système se comporte comme un point matériel de masse $M = \sum_\alpha m_\alpha$ subissant toutes les forces extérieures appliquées sur les différentes parties du système, comme si ces forces étaient directement exercées sur ce centre de masse."

Bref, on va principalement se soucier du centre de masse d'un système de points matériels, parce qu'il se comporte de façon plus prévisible que les points matériels individuels.
Chaque système possède un centre de masse **unique**.

4.2.2 Propriétés du centre de masse

Lorsqu'on prend la position du centre de masse comme origine, on désignera les vecteurs exprimés par rapport à cette origine par une astérisque (*).

Les propriétés du centre de masse sont les suivantes:

$$\begin{cases} \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}^*_\alpha = 0 \\ \sum_\alpha m_\alpha \vec{p}^*_\alpha = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

avec les $\vec{r}_\alpha *$ les vecteurs position de chaque point matériel du système, relatifs au le centre de masse.

4.3 Problèmes à deux corps

4.3.1 Coordonnées relatives

Masse réduite du système:

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \tag{4.6}$$

4.3.2 Équation du mouvement et variables dynamiques

Théorème de la quantité de mouvement:

$$\begin{cases} \vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = M\vec{V}_G \\ \vec{p}* = m_1 \vec{v}^*_1 + m_2 \vec{v}^*_2 = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

4.3.3 Les deux théorèmes de König

1er théorème, le mouvement cinétique total:

$$\boxed{\vec{L}_{\text{tot, O}} = \vec{R} \wedge M\vec{V} + \vec{L}^*_{\text{tot, O}}} \tag{4.8}$$

2nd théorème, l'énergie cinétique totale:

$$K_{\text{tot}} = \frac{1}{2} M V^2 + K^*_{\text{tot}} \tag{4.9}$$

4.4 Les chocs

4.4.1 Concept d'impulsion, "force" du choc

En partant de la seconde loi de Newton (1.2), on voit que:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \approx \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$
$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$$

Si on prend, par exemple, un oeuf qui tombe depuis la même hauteur (a) sur un matelas ou (b) sur du goudron, on observe que:

- (a) le choc prend plus de temps, il est "amorti". L'oeuf ne se casse pas (*don't try this at home, kiddos. I won't take responsibility.*)
- (b) le choc est instantané. L'oeuf se casse (*probablement. Sinon, pourriez-vous m'indiquer votre fournisseur d'oeufs?*).

Dans les deux cas, la quantité de mouvement était identique avant le choc, et nulle après. $\Delta\vec{p}$ est donc identique. Mais Δt était plus court dans le cas (b), ce qui a fait que le choc était plus "fort" (si Δt est plus petit, $\vec{F}$ doit être plus grand pour que l'égalité tienne).

4.4.2 Chocs élastiques

Dans le cas d'un choc élastique, on a:

- conservation de la quantité de mouvement totale du système ($\vec{P}_i = \vec{P}_f$)
- conservation de l'énergie mécanique totale du système ($E_i = E_f$)

Cela est vrai pour l'entier du mouvement et du choc (= longtemps avant et après le choc) uniquement si le système est isolé et qu'aucun potentiel ne change (= p.ex, le système reste à la même hauteur et ne gagne ou ne perd aucune énergie potentielle gravitationnelle).
Cependant, ces deux conservations valent dans tous les cas à l'instant exact du choc élastique. Si on parle par exemple d'une balle qui tombe verticalement ($\Rightarrow$ subit un changement d'énergie potentielle) et qui est soumise lors de sa chute à une force de frottement fluide ($\Rightarrow$ non conservative), on peut considérer que la quantité de mouvement de la balle et son énergie mécanique *un instant* avant le choc sera la même que *un instant* après le choc.

4.4.3 Chocs (totalement) inélastiques

Dans ce cas-ci, on a uniquement:

- conservation de la quantité de mouvement totale du système ($\vec{P}_i = \vec{P}_f$)

L'énergie n'est pas conservée parce qu'une partie est perdue durant le choc. On rencontre ce cas, par exemple, dans les problèmes suivants:

- un choc avec un bloc mou (*si vous faites du hockey avec une plaque de beurre p.ex*)
- une fusée qui se sépare d'un module (il y a une petite explosion qui dissipe une partie de l'énergie, mais $\vec{p}$ est constante)
- ...

Les paragraphes explicatifs de la section précédente sur les chocs élastiques s'appliquent aussi, mais uniquement pour la quantité de mouvement et non l'énergie.

5 Le solide indéformable

En gros, c'est un système de points matériels, mais qui sont fixés les uns par rapport aux autres. Rien de bien grave.
Le seul problème avec ça c'est que vu que les gens veulent toujours être très précis, ils remplacent la somme de points pour un nombre fini de points par des intégrales de Riemann pour des nombres infinis de points. Faut pas se faire trop impressionner, on utilise ces intégrales uniquement dans la théorie par souci de précision, et pas en exercices.

Système de points matériels:

$$\vec{R}_G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} \vec{r}_\alpha m_\alpha$$

Solide indéformable:

$$\vec{R}_G = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$$

On intègre par rapport au volume V. La fonction $\rho(\vec{r})$ représente la masse volumique à la position $\vec{r}$.
Vraiment, ces intégrales ne sont pas très importantes au niveau des calculs. Je n'intégrerai (*hmmm*) donc dans ce résumé que peu des résultats intermédiaires qui en comprennent, et tenterai de présenter uniquement les formules applicables.