

Analyse 1 - Anna Lachowska

Résumé

Benjamin Bovey - EPFL IC

November 2018

Introduction

Ce document est destiné à résumer les certainement laborieux cours d'Analyse 1 présentés par Mme Lachowska, afin d'en présenter uniquement les aspects les plus cruciaux quand à la résolution d'exercices. Il fait partie d'un projet auquel vous pouvez participer! Plus d'informations sur le GitHub du projet (<https://github.com/Arakniode/almighty-handbook-of-sleep-deprived-student>).

Ce résumé est pour l'instant incomplet par rapport à l'ensemble des notions couvertes par le cours d'analyse 1, ce cours n'ayant pas encore touché à sa fin.

1 Identités

Ces quelques identités de base permettent de transformer des expressions, ce qui est souvent utile lorsqu'on cherche leur limite et que celle de l'équation de base est indéterminée. Il faut les connaître, mais surtout savoir les *reconnaître* et les dénicher. N'oublions pas que les rédacteurs d'exercices aiment bien cacher les solutions sous ce genre d'identités simples, mais parfois bien camouflées.

1.1 Identités algébriques

1.1.1 Polynômes

$x, y \in \mathbb{R}$:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

N.B.: Il est utile de se souvenir que $1^2 = 1^3 = 1$, ce qui peut aider à dénicher des expressions de la forme $x^3 \pm y^3$. Par exemple:

$$\begin{aligned} 1 - a^3 &= 1^3 - a^3 \\ &= (1 - a)(1 + a + a^2) \end{aligned}$$

Dans le cas, par exemple, d'une limite fraction de polynômes, dans lequel l'expression de base donnerait une limite indéterminée, on pourrait peut-être utiliser cette identité pour simplifier le calcul de la limite, en faisant apparaître des facteurs communs au numérateur et au dénominateur.

1.1.2 Exponentielles

$a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}_{>0}$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

1.1.3 Logarithmes

On assume que la notation \log sans indice précisé dénote le logarithme naturel, car c'est la convention utilisée par Mme Lachowska dans son cours.

$a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\log(ab) &= \log(a) + \log(b) & \log\left(\frac{a}{b}\right) &= \log(a) - \log(b) & \log(a^c) &= c \cdot \log(a) \\ \log_a(1) &= 0 & \log(e) &= 1 & \log_a(a) &= 1, a \neq 1 \\ \log_a(b) &= \frac{\log(b)}{\log(a)}\end{aligned}$$

L'identité de changement de base est applicable avec toute autre base réelle, pas juste base e .

1.1.4 Trigonométrie

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y) \quad \cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y) \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x) \\ \cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x) \\ \quad \quad \quad = -1 + 2 \cos^2(x) \\ \quad \quad \quad = \cos^2(x) - \sin^2(x) \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad (1.3)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad (1.4)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad (\text{impaire}) \quad \cos(-x) = \cos(x) \quad (\text{paire}) \quad (1.5)$$

Souvenons-nous que l'on peut parfois "compliquer nos équations pour les simplifier": par exemple, l'identité $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ peut être retrouvée à partir de l'identité 1.1 par les observations suivantes:

$$\cos(0) = 1 \quad (\text{se référer au tableau des valeurs de } \cos(x) \text{ et } \sin(x) \text{ ci-dessous})$$

mais aussi:

$$\begin{aligned}\cos(0) &= \cos(x - x) \\ &= \cos^2(x) + \sin^2(x)\end{aligned}$$

Donc, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Il est toujours plus simple de trouver une limite lorsque le facteur de x dans $\sin(x)$ ou $\cos(x)$ est simplement 1. Les identités 1.2, appelées "*identités de l'angle double*", sont donc très utiles dans la recherche de limite.

Il n'y a malheureusement pas d'autre façon que de s'entraîner par des exercices afin d'apprendre à connaître quand et comment utiliser ces identités. Cependant, dans les exercices de recherche de limites comportant des expressions, par exemple, du type $\sin(3x)$, on peut généralement assumer qu'il faudra transformer l'expression en $\sin(2x + x)$, puis utiliser les identités 1.1 et 1.2 pour simplifier.

1.1.5 Quelques valeurs de $\cos(x)$ et $\sin(x)$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞

Pour se souvenir de ces valeurs importantes, on peut observer que les valeurs de $\sin(x)$ croissent avec l'angle, et décroissent pour $\cos(x)$ (penser aux graphes des fonctions!). Il existe une symétrie verticale entre la colonne $\sin(x)$ et la colonne $\cos(x)$.

2 Limites utiles

Ces limites ont été définies lors du cours, parfois dans le cadre des suites, et parfois dans celui des fonctions. Généralement, les limites de suites et les séries sont exprimées par rapport à n , et les limites de fonctions par rapport à x . Elles s'appliquent cependant dans la majorité des cas, et selon le bon sens, de la même façon dans les deux cas.

Soient P_n et Q_n deux suites polynomiales:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \begin{cases} 0, & \text{si } \deg P_n < \deg Q_n \\ \frac{p_n}{q_n}, & \text{si } \deg P_n = \deg Q_n, \text{ avec } p_n \text{ et } q_n \text{ les coefficients du terme de plus haut degré} \\ \infty, & \text{si } \deg P_n > \deg Q_n \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}_+^* \quad (2.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}_+ \quad (2.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n}{n!} = 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}_+^* \quad (2.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \quad (2.5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} = 0 \quad (2.6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (2.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} = e^{-1} \quad (2.8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \quad (2.9)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & |r| < 1 \\ \text{diverge}, & |r| \geq 1 \end{cases} \quad r \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge } \forall p \in \mathbb{R}_{>1} \quad (2.11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge.} \quad (2.12)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ converge } \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_n \text{ converge. } (\nLeftarrow) \quad (2.13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (2.14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ n'existe pas.} \quad (2.15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x} = 0 \quad (2.16)$$

$$e^x \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (2.17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (2.18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0 \quad (2.19)$$

2.1 Critères de convergence

Ces critères permettent de déterminer si une **série** de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge ou non. Souvenons-nous que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ est une *condition nécessaire* à la convergence, mais n'implique pas la convergence.

2.1.1 Critère d'Alembert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \in \mathbb{R} \begin{cases} \rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge absolument.} \\ \rho > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge.} \\ \rho = 1 \text{ ne nous indique rien sur la convergence de la série.} \end{cases}$$

2.1.2 Critère de Cauchy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \rho \in \mathbb{R} \begin{cases} \rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge absolument.} \\ \rho > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge.} \\ \rho = 1 \text{ ne nous indique rien sur la convergence de la série.} \end{cases}$$

2.1.3 Critère de comparaison

Soient a_n et b_n deux suites telles que $\exists k : \forall n \geq kb_n \geq a_n$:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ diverge} \end{cases}$$

2.1.4 Critère de Leibniz

$$\left. \begin{array}{l} \exists p \in \mathbb{N} : \forall n \geq p \quad |a_{n+1}| \leq |a_n| \\ \exists p \in \mathbb{N} : \forall n \geq p \quad a_{n+1} \cdot a_n \leq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

La seconde condition peut sembler étrange, mais il s'agit juste de la définition formelle de l'alternance: comme chaque terme positif est suivi d'un terme négatif et vice-versa, si on multiplie deux termes arbitraires consécutifs, le résultat devrait être négatif.

2.1.5 Conclusion sur les critères de convergence

Il est généralement optimal d'appliquer ces critères dans cet ordre précis (sauf si la suite est alternée, auquel cas on préférera Leibniz) pour plusieurs raisons:

- ils sont classés par ordre de difficulté d'application (encore une fois, la difficulté dépend de la suite et certaines suites appellent à l'utilisation de certains critères).
- Le critère d'Alembert est souvent plus facile à appliquer, cependant il existe des cas où le critère d'Alembert ne donne aucune information ($\rho = 1$), mais où le critère de Cauchy nous en donne. Le cas inverse n'existe pas.

3 Formes indéterminées

Voici toutes les formes indéterminées qui peuvent être rencontrées lors du calcul de limite:

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

Pour les valeurs des limites de puissances avec 0, 1, ou ∞ en base ou en exposant, il y a trois cas d'indétermination. Ces cas sont soulignés ci-dessous.

Dans les cas déterminés, la valeur de la limite sera la valeur de la base.

$\frac{0^0}{\infty^0}$	$\frac{0^1}{\infty^1}$	$\frac{0^\infty}{\infty^\infty}$
$\frac{\infty^0}{1^0}$	$\frac{\infty^1}{1^1}$	$\frac{\infty^\infty}{1^\infty}$

4 Dérivées

4.1 Définition

La dérivée d'une fonction $f(x)$ en $x = x_0$ est définie par la limite suivante:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

On peut également utiliser cette définition, qui est équivalente:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Cette seconde définition est peut-être plus facile à lier à une représentation graphique de la dérivée: on prend deux points sur la fonction, x_0 et $x_0 + h$, on regarde la différence verticale entre les deux ($f(x_0 + h) - f(x_0)$) et on la divise par la différence horizontale entre les deux ($\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$). Ici, nous avons retrouvé la formule de la pente d'un graphe linéaire, ou de l'estimation de la pente d'un graphe courbe. Tout ce que la dérivée ajoute à la formule, c'est une limite afin d'améliorer la précision de cette estimation. On accomplit cela en "pinçant" les deux points ensemble, c'est à dire en réduisant la distance h qui les sépare en la faisant tendre vers 0. On se retrouve donc non plus avec une estimation, mais avec la valeur exacte de la pente du graphe en ce point.

4.2 Dérivées utiles

$$\begin{array}{lll} (\sin(x))' = \cos(x) & (\cos(x))' = -\sin(x) & (\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} \\ (x^2)' = 2x & (x^3)' = 3x^2 & (x^n)' = n \cdot x^{n-1} \\ (e^x)' = e^x & (\log(x))' = \frac{1}{x} & \end{array}$$

4.3 Opérations sur les dérivées

Soient les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et les réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll} (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' & (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' & \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \\ (f \circ g)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) & & \\ (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} & & \end{array}$$

4.4 Théorèmes utiles

4.4.1 Théorème de la valeur intermédiaire

Soit $a < b \in \mathbb{R}$; $f : [a, b] \rightarrow F$ une fonction continue.

Alors, f atteint son $\sup_{[a,b]}$, son $\inf_{[a,b]}$, et toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

4.4.2 Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Continue sur } [a, b] \\ \text{Dérivable sur } [a, b] \\ f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in]a, b[: f'(c) = 0$$

4.4.3 Théorème des accroissements finis (TAF)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Continue sur } [a, b] \\ \text{Dérivable sur } [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in]a, b[: f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

4.4.4 Théorème de Bernoulli-l'Hospital

Attention: la limite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas \nRightarrow la limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ n'existe pas.

4.5 Développement limité

Stop! Avant quoique ce soit, allez voir la vidéo de 3Blue1Brown sur le sujet des développements limités (appelés *Taylor series* ou *Taylor approximations* en anglais). Cela vous donnera une excellente compréhension de ce que sont les développements limités, et pourquoi ils sont définis ainsi.

5 Étude de fonctions

Lorsqu'on étudie une fonction, on tente de connaître un maximum de ses propriétés. La liste des étapes à suivre lors de l'étude d'une fonction est généralement du type:

- domaine de définition
- signe de la fonction
- extremums
- points de flexion, convexité et concavité
- asymptotes
- ...

Dans cette section du document, pour des raisons de simplicité, nous appellerons " $f(x)$ " la fonction réelle à étudier. Nous assumerons que ses dérivées existent lorsque nous les utiliserons. Ce qui est entendu par les "zéros" d'une fonction est les valeurs de x pour lesquelles la valeur de la fonction est nulle. Graphiquement, ce sont les points sur l'axe des abscisses où cet axe est touché ou traversé par le graphe de la fonction.

Il y a donc deux types de zéros d'une fonction:

- ceux où le graphe touche simplement l'axe de la variable et repart ensuite dans la direction d'où il est venu (sans changer de signe), que nous appellerons **zéros faibles**,
- ceux où le graphe traverse l'axe des abscisses et continue de l'autre côté (ce qui signifie que le signe de la fonction est inversé), que nous appellerons **zéros forts**.

N.B: les termes "zéro faible" et "zéro fort" sont uniquement définis dans ce document, et ne sont pas officiellement définis dans le cours en général.

5.1 Étude de la fonction originale

5.1.1 Domaine de définition

Pour trouver le domaine de définition d'une fonction réelle f , il faut éliminer de \mathbb{R} toutes les valeurs pour lesquelles la fonction n'est pas définie. Il faut donc faire en sorte qu'aucune division par zéro ne puisse arriver, que les racines n'entourent pas de nombre négatif, que les logarithmes n'entourent pas de nombre négatif ou nul, etc. Après avoir déterminé ces valeurs / intervalles "interdites", on écrit le domaine de définition de la fonction f ainsi:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \text{ est une valeur interdite}\}$$

D_f est donc l'ensemble des valeurs pour lesquelles

5.1.2 Signe de la fonction

Étudier le signe de la fonction f signifie déterminer sur quels intervalles la fonction est positive ou négative. La meilleure façon de procéder est de déterminer les zéros de la fonction, et de regarder quel est le signe de la fonction sur les intervalles délimités par les zéros. Comme défini plus haut, les zéros forts sont les zéros qui marquent un changement de signe de la fonction, et les zéros faibles sont ceux où le signe ne change pas.

5.2 Étude des dérivées de la fonction

5.2.1 Extremums

Mathématiquement, les extremums sont des points où f' est nulle. Attention, un point où f' est nulle *n'est pas forcément un extremum (c'est le cas des zéros faibles)*.

La condition proposée ci-dessous est suffisante à l'existence d'un extremum de f en $x = c$: Soit $c \in I$, et soit n pair, tels que:

$$f'(c) = f''(c) = f^{(3)}(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0,$$

mais $f^{(n)}(c) \neq 0$, alors:

$$\begin{cases} f \text{ admet un minimum local en } x = c \text{ si } f^{(n)}(c) > 0 \\ f \text{ admet un maximum local en } x = c \text{ si } f^{(n)}(c) < 0 \end{cases}$$

Cette condition est ici définie de façon très générale, mais il suffit généralement d'étudier les première et seconde dérivées de f , voire les troisième et quatrième dans le pire des cas, afin de définir s'il existe un extremum local en $x = c$.

Afin de se souvenir pourquoi on a un minimum lorsque la $n^{\text{ème}}$ dérivée est positive, et vice-versa, on peut penser par exemple:

- au graphe de x^2 , dont la 2nde dérivée est $2 > 0$, et qui admet un minimum en $x = 0$.
- au graphe de $-x^2$, dont la 2nde dérivée est $-2 < 0$, et qui admet un minimum en $x = 0$.

5.2.2 Points de flexion, convexité et concavité

Les points de flexion, la convexité et la concavité sont étudiées avec l'aide de la dérivée seconde de la fonction.

Sur un intervalle I , une fonction est:

- **convexe**, si $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$
- **concave**, si $\forall x \in I, f''(x) \leq 0$

Graphiquement, "convexe" signifie que le graphe est "plié vers le haut" (un peu comme un bol), et concave signifie à l'inverse "plié vers le bas". Cependant, la convexité/concavité n'est pas toujours aussi évidente lorsqu'on observe simplement le graphe d'une fonction.

Les points de flexions sont les points où la fonction passe de concave à convexe, ou inversement. De manière analogue aux extremums, les points de flexions sont des points où f'' est nulle. Encore une fois, un point où f'' est nulle *n'est pas nécessairement un point de flexion*.