RAPPELS

	POPULATION QUANTITATIVE		POPULATION QUALITATIVE DICHOTOMIQUE
POPULATION	ESTIMER μ	ESTIMER σ^2	ESTIMER $\pi_A = \frac{N_A}{N}$
UN ECH^{ON} ⇓ une estimation ponctuelle	$\hat{\mu} = \bar{x}$	$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{n}{n-1} s^2$	$\hat{\pi}_A = \frac{n_A}{n} = p_A$
Estimateur = v.a. = Formule de calcul	$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = s^2$	$\hat{\pi}_A = \frac{n_A}{n}$ avec $n_A = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où $X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\pi_A & \pi_A \end{pmatrix}$
Bonne "représentation" biais ?	$E(\hat{\mu}) = \mu$ non !	$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$ oui ! On corrige l'estimateur ! $\frac{n}{n-1} E(s^2) = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\sigma^2$ $E\left(\frac{n}{n-1} s^2\right) = \sigma^2$ $\frac{n}{n-1} s^2 = S^2$ non biaisé	$E(\hat{\pi}_A) = \pi_A$ non !
Précision efficace ?	$var(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n}$ oui !	? ?	$var(\hat{\pi}_A) = \frac{\pi_A(1-\pi_A)}{n}$ oui !
Loi de Probabilité	voir distribution d'échantillonnage (on suppose EAS)	voir distribution d'échantillonnage (on suppose EAS)	voir distribution d'échantillonnage (on suppose EAS)

Construction des estimateurs

Jusqu'ici : (voir RAPPELS)

- construction intuitive : $\hat{\mu} = \bar{x} \quad \hat{\pi}_A = n_A / n$
- avec adaptation éventuelle pour correction de biais : $\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2$

car : $\hat{\sigma}^2 = \boxed{S^2 = \frac{n}{n-1} s^2} = \frac{\cancel{n}}{n-1} \frac{1}{\cancel{n}} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2$

N.B. : EAS

$m'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k$

$\Rightarrow m'_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

$= \bar{x}$

(NB) : utile pour les exercices :

$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \bar{x}^2$

$= m'_2 - \bar{x}^2$

$\Leftrightarrow m'_2 = s^2 + \bar{x}^2$

Méthode des moments

$\mu'_k = E(X^k)$ (Proba Ch.4)

$\Rightarrow \mu'_1 = E(X)$

Le premier moment de la population (μ'_1) est le plus important dans le « résumé » de la loi de probabilité.

Si le paramètre à estimer est θ, μ'_1 dépendra de θ : $\mu'_1 = g(\theta)$

A partir de l'échantillon $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on estime μ'_1 par $m'_1 = m'_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

→ Il suffit de résoudre $m'_1 = g(\theta)$ pour obtenir un estimateur de θ :

$$\hat{\theta} = h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Méthode du Maximum de Vraisemblance

"Trouver la valeur de θ qui <u>maximise la probabilité</u> d'obtenir l'échantillon <u>effectivement observé</u>"

<u>Fontion de vraisemblance</u> = Probabilité d'obtenir l'éch^{on} effectivement observé, soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ EAS

si aléas discrets

$$= Pr\left[(X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \dots\dots \cap (X_n = x_n)\right]$$

car EAS indépendance des X_i

$$= \left[Pr(X_1 = x_1)\right] \cdot \left[Pr(X_2 = x_2)\right] \cdot \dots\dots \cdot Pr(X_n = x_n)$$

car EAS : X_i identiquement distribués !

$$= \prod_{k=1}^{n} \underbrace{Pr(X_k = x_k)}$$

- voir contexte (cf distributions classiques discrètes)
- dépend de θ

si aléas continus

$$= f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

car EAS indépendance des X_i

$$= f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \dots\dots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

car EAS : X_i identiquement distribués

$$= f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots\dots \cdot f(x_n)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \underbrace{f(x_k)}$$

- voir contexte (cf distributions classiques continues)
- dépend de θ

$$= L(\theta ; x_1, x_2, \dots, x_n)$$

→ **A MAXIMISER !**

<u>En pratique</u>, on maximise plus souvent $\ln L(\theta ; x_1, \dots, x_n)$ car :
- équivalent
- élimine produits et puissances.