Exercice 1

Déterminer, par la méthode des moments, l'estimateur du paramètre μ d'une v.a. de Poisson

Rappel : $\begin{cases} X \sim \mathcal{P}(\mu) & X \geq 0 \text{ (entier)} \\ E(X) = \mu \end{cases}$

Principe de la méthode des moments : prendre comme estimateur "ce qu'il faut" pour que le premier moment m'_1 au niveau de l'échantillon et le premier moment μ'_1 au niveau de la population coïncident

$$\theta = \mu$$

$$\mu'_1 = E(X) = \mu = g(\mu)$$

on remplace $g(\mu)$ par m'_1 $\rightarrow \mu'_1 = E(X) = \mu = \bar{x}$

$$\Longleftrightarrow \hat{\mu} = \bar{x}$$

Exercice 2

Déterminer, par la méthode des moments, l'estimateur du paramètre p d'une v.a. géométrique

Rappel : $\begin{cases} X \sim \mathcal{G}(p) & X > 0 \text{ (entier)} \\ E(X) = \frac{1}{p} \end{cases}$

$$\theta = p$$

$$\mu'_1 = E(X) = \frac{1}{p} = g(p)$$

on remplace $g(p)$ par m'_1 $\rightarrow \mu'_1 = E(X) = \frac{1}{p} = \bar{x}$

$$\Longleftrightarrow \hat{p} = \frac{1}{\bar{x}}$$

Exercice 3

Déterminer, par la méthode des moments, les estimateurs des paramètres n et p d'une v.a. binomiale

Rappel : $\begin{cases} X \sim \mathcal{B}(n,p) & X \in \{0,1,\dots,n\} \\ E(X) = np \\ E(X^2) = np(np-p+1) \end{cases}$

$\theta_1 = n$

$\theta_2 = p$

$$\begin{cases} \mu'_1 = E(X) = np = g_1(n,p) \\ \mu'_2 = E(X^2) = np(np-p+1) = g_2(n,p) \end{cases}$$

on remplace $g_1(n,p)$ par m'_1

$g_2(n,p)$ par m'_2

(*)

$$\rightarrow \begin{cases} \mu'_1 = E(X) = np = \bar{x} \\ \mu'_2 = E(X^2) = np(np-p+1) = s^2 + \bar{x}^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} np = \bar{x} \\ \bar{x}(\bar{x} - p + 1) = s^2 + \bar{x}^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} np = \bar{x} \\ p = \dfrac{\cancel{\bar{x}^2} + \bar{x} - s^2 - \cancel{\bar{x}^2}}{\bar{x}} = \dfrac{\bar{x} - s^2}{\bar{x}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = \dfrac{\bar{x} - s^2}{\bar{x}} \\ n = \dfrac{\bar{x}}{p} = \dfrac{\bar{x}}{\frac{\bar{x} - s^2}{\bar{x}}} = \dfrac{\bar{x}^2}{\bar{x} - s^2} \end{cases}$$

(*) $s^2 = \dfrac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \dfrac{\sum (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} = m'_2 - \bar{x}^2$

Exercice 4

Démontrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre p d'une v.a. binomiale $\mathcal{B}(k, p)$ est donné par

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{nk} \quad \left(= \frac{\overline{x}}{k} \right)$$

où les x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ sont n valeurs réalisées indépendantes d'une telle v.a.

$X \sim \mathcal{B}(k, p)$

$$P_r[X = x_j] = \binom{k}{x_j} p^{x_j} (1-p)^{k-x_j}$$

Echantillon $\to$ $L(x_1, x_2, \dots, x_n, p) = \prod_{j=1}^{n} \binom{k}{x_j} p^{x_j} (1-p)^{k-x_j}$

$$\ln L(p) = \ln \left[\prod_{j=1}^{n} \binom{k}{x_j} p^{x_j} (1-p)^{k-x_j} \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\ln \binom{k}{x_j} + x_j \ln p + (k - x_j) \ln(1-p) \right]$$

$$[\ln L(p)]' = \sum_{j=1}^{n} \left[0 + \frac{x_j}{p} - \frac{k - x_j}{1-p} \right]$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n} x_j - \frac{kn}{1-p} + \frac{1}{1-p} \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$= \frac{1 - \cancel{p} + \cancel{p}}{p(1-p)} \sum_{j=1}^{n} x_j - \frac{kn}{1-p}$$

$$[\ln L(p)]' = 0 \iff \frac{1}{p(1-p)} \sum_{j=1}^{n} x_j - \frac{kn}{1-p} = 0$$

$$\iff \frac{1}{p(1-p)} \left[\sum_{j=1}^{n} x_j - knp \right] = 0$$

$$\iff p = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{nk}$$

$$\rightarrow \hat{p} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \cdot \frac{1}{k} = \frac{\overline{x}}{k}$$

Exercice 5

Démontrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre μ d'une v.a. de Poisson est donné par :

$$\hat{\mu} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

où les x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ sont n valeurs réalisées, indépendantes d'une telle v.a.

Poisson : $P_r[X = x_k] = \dfrac{e^{-\mu}\mu^{x_k}}{(x_k)!}$

Echantillon $\rightarrow$ $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu) = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{e^{-\mu}\mu^{x_k}}{(x_k)!}$

$$\ln L(\mu) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{e^{-\mu}\mu^{x_k}}{(x_k)!}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{e^{-\mu}\mu^{x_k}}{(x_k)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big[\underbrace{\ln e^{-\mu}}_{= -\mu} + x_k \ln\mu - \ln(x_k)!\Big]$$

$$[\ln L(\mu)]'_\mu = \sum_{k=1}^{n} \left[-1 + \frac{x_k}{\mu} + 0\right]$$

$$= -n + \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$[\ln L(\mu)]'_\mu = 0 \iff -n + \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$$

$$\iff \mu n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$\rightarrow \hat{\mu} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Exercice 6 :

Démontrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre p d'une v.a. géométrique est donné par

$$\hat{p} = \frac{n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}$$

où les k_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ sont les n valeurs réalisées, indépendantes, d'une telle v.a.

(**RAPPEL** : $P_r[X = k] = p(1-p)^{k-1}$
$k = 1, 2, \dots, n$)

Echantillon $\rightarrow$ $L(k_1, k_2, \dots, k_n, p) = \prod_{i=1}^{n} \left[p(1-p)^{k_i - 1} \right]$

$$\ln L(p) = \ln \left[\prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{k_i-1} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln \left[p(1-p)^{k_i-1} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\ln p + (k_i - 1)\ln(1-p) \right]$$

$$[\ln L(p)]'_p = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{p} + \frac{(-1)(k_i-1)}{1-p} \right]$$

$$= \frac{n}{p} - \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{1-p} + \frac{n}{1-p}$$

$$= \frac{n}{p} - \frac{1}{1-p} \sum_{i=1}^{n} k_i + \frac{n}{1-p}$$

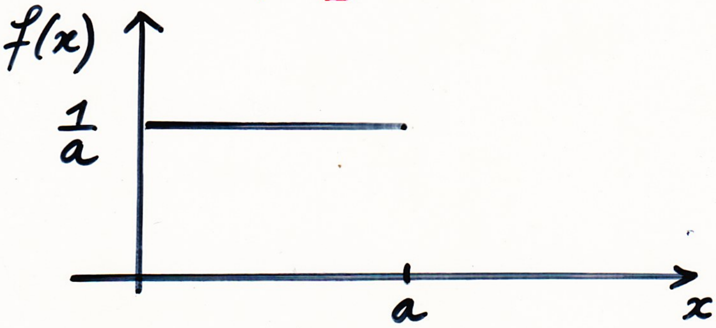
$$[\ln L(p)]'_p = 0 \iff \frac{n(1-p) + np - \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) p}{p(1-p)} = 0$$

$$\iff n \cancel{- np} \cancel{+ np} - p \sum_{i=1}^{n} k_i = 0$$

$$\longrightarrow \hat{p} = \frac{n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}$$

Exercice 7 : (cf théorie : "METHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE)

Estimation du paramètre a pour une distribution uniforme dans $[0\,;a]$



densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{a}\underbrace{I_{[0,a]}(x)}_{\text{indicatrice de l'intervalle } [0,a]}$$

$$I_{[0,a]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > a \quad (\text{ou } x < 0) \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

La valeur de a qui maximise la fct de vraisemblance = la plus grande valeur de l'échantillon	car

La fonction de vraisemblance correspondant à a :

$$L(a) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots\ldots \cdot f(x_n)$$

$$= \frac{1}{a} I_{[0,a]}(x_1) \cdot \frac{1}{a} I_{[0,a]}(x_2) \ldots\ldots \frac{1}{a} I_{[0,a]}(x_n)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a} I_{[0,a]}(x_k) \right)$$

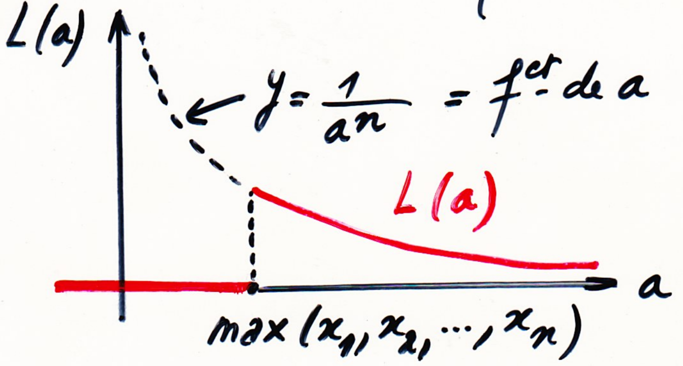
$$= \frac{1}{a^n} \underbrace{\prod_{k=1}^{n} I_{[0,a]}(x_k)}$$

$= 0$ dès qu'un facteur est nul cad si $\exists k : x_k > a$

$= 1$ si tous les $I(x_k) =$ cad si $0 \leq x_k \leq a, \forall k$ cad si $\max x_k \leq a$ (on sait que les $x_k \geq 0$

On a donc :

$$L(a) = \frac{1}{a^n} \begin{cases} 0 & \text{si } \max(x_1, x_2, \dots, x_n) > a \\ 1 & \text{si } \max(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq a \end{cases}$$



$\Longrightarrow$ $\hat{a} = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Remarque :

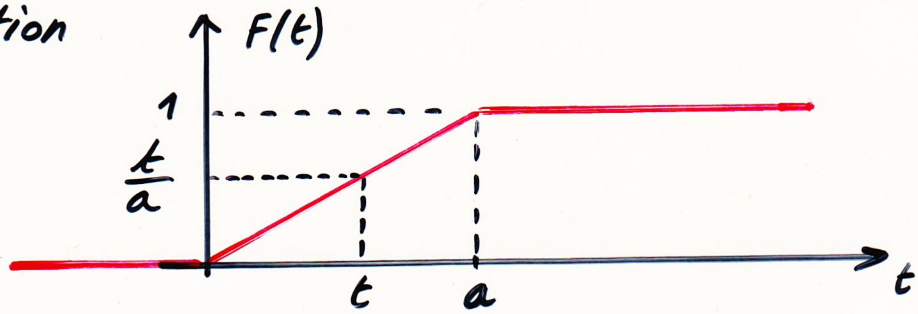
> L'estimateur du maximum de vraisemblance :
> - n'est pas sans biais
> - est asymptotiquement sans biais

Démonstration :

$\underline{X}_i = \mathcal{U}([0, a])$

$\hat{a} = \max(\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n)$

Fonction de répartition



- Calculons la fct de répartition de $\hat{a}$:

$$F_{\hat{a}}(t) = \Pr[\max(\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n) \leq t]$$

$$= \Pr\big([\underline{X}_1 \leq t] \underset{\text{"et"}}{\cap} [\underline{X}_2 \leq t] \underset{\text{"et"}}{\cap} \dots \cap [\underline{X}_n \leq t]\big)$$

$$= F_{X_1}(t) \cdot F_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(t)$$ car EAS $\rightarrow$ indpdts

$$= [F_X(t)]^n$$ car tous les $\underline{X}_k$ ont même fct de répartition

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t > a \\ \left(\frac{t}{a}\right)^n & \text{si } 0 \leq t \leq a \end{cases}$$

- Calculons l'espérance de $\underline{\hat{a}}$

$$E(\underline{X}) = \int_0^{+\infty} [1 - F(t)]\, dt \qquad (\text{car } \underline{X} \text{ v.a. positive})$$

$$\Rightarrow E(\hat{a}) = \int_0^{a} \left[1 - \left(\frac{t}{a}\right)^n\right] dt$$

car $F(t) = 1$ si $t > a$
$\Rightarrow [1 - 1] = 0$

$$= \left[t - \frac{1}{a^n} \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{t=0}^{t=a}$$

$$= a - \frac{1}{a^n} \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

$$= a - \frac{a}{n+1}$$

$$= \frac{(n+1)a - a}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1} a$$

- Conclusion : $E(\underline{\hat{a}}) \neq a \Rightarrow$ n'est pas sans biais!

mais

$$\lim_{n \to \infty} E(\underline{\hat{a}}) = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} a$$

$$= a \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1}}_{= 1}$$

$$= a$$

$\Rightarrow$ asymptotiquement sans biais!

Exercice 8

La v.a. prend les valeurs (-1) et 1 avec les probabilités respectives p et $(1-p)$. Un EAS de taille n (n valeurs réalisées de cette v.a.) est composé de n_1 observations de la valeur (-1) et n_2 observations de la valeur 1 $(n_1 + n_2 = n)$.

Dtm l'estimateur du maximum de la vraisemblance de p

$$X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, p) = \binom{n}{n_1} p^{n_1} (1-p)^{n-n_1}$$

$$= \Pr\left[n_1 \text{ indiv. porteurs de la valeur "-1"} \right]$$

$$\ln\left[L(p)\right] = \ln \binom{n}{n_1} + n_1 \ln p + (n-n_1)\ln(1-p)$$

$$\left[\ln L(p)\right]' = \frac{n_1}{p} - \frac{n-n_1}{1-p} = \frac{n_1(1-p) - (n-n_1)p}{p(1-p)}$$

$$\left[\ln L(p)\right]' = 0 \iff n_1(1-p) - (n-n_1)p = 0$$

$$\iff n_1 - \cancel{n_1 p} - np + \cancel{n_1 p} = 0$$

$$\iff p = \frac{n_1}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{p} = \frac{n_1}{n}}$$

Exercice 10 a

Déterminer, par la méthode des moments, l'estimateur du paramètre λ d'une distribution dont la densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} (\lambda-1)\, x^{-\lambda} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

$$\mu'_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 x\,(\lambda-1)\, x^{-\lambda}\, dx$$

$$= (\lambda-1) \int_0^1 x^{1-\lambda}\, dx$$

$$= (\lambda-1) \left[\frac{x^{1-\lambda+1}}{2-\lambda} \right]_0^1$$

$$= \frac{\lambda-1}{2-\lambda}$$

$$m'_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^1 = \bar{x}$$

il faut que $\mu'_1 = m'_1 \iff \dfrac{\lambda-1}{2-\lambda} = \bar{x}$

$$\iff \lambda - 1 = (2-\lambda)\,\bar{x}$$

$$\iff \lambda\,(1+\bar{x}) = 2\bar{x} + 1$$

$$\iff \lambda = \frac{2\bar{x}+1}{1+\bar{x}}$$

On prendra donc

$$\hat{\lambda} = \frac{2\bar{x}+1}{\bar{x}+1}$$

NB : cet estimateur est différent de celui construit par la méthode du maximum de vraisemblance !