Construction d'estimateurs

1. Déterminer, par la méthode des moments, l'estimateur du paramètre μ d'une variable aléatoire de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$.

2. Déterminer, par la méthode des moments, l'estimateur du paramètre p d'une variable aléatoire géométrique $\mathcal{G}(p)$.

3. Déterminer, par la méthode des moments, les estimateurs des paramètres n et p d'une variable aléatoire binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

4. Démontrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre p d'une variable aléatoire binomiale $\mathcal{B}(k,p)$ est donné par :
$$\widehat{p} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{nk} = \frac{\overline{x}}{k}$$
où les x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ sont n valeurs réalisées indépendantes d'une telle variable aléatoire.

5. Démontrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre μ d'une variable aléatoire de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$ est donné par :
$$\widehat{\mu} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$
où les x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ sont n valeurs réalisées indépendantes d'une telle variable aléatoire.

6. Démontrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre p d'une variable aléatoire géométrique $\mathcal{G}(p)$ est donné par :
$$\widehat{p} = \frac{n}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}$$
où les k_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ sont n valeurs réalisées indépendantes d'une telle variable aléatoire.
(Rappel : $\Pr[X = k] = p(1-p)^{k-1} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$).

7. (a) Démontrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre a d'une distribution uniforme $\mathcal{U}(0,a)$ est donné par :
$$\widehat{a} = \max(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
où les x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ sont n valeurs réalisées indépendantes d'une telle variable aléatoire.
   (b) Démontrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance n'est pas un estimateur sans biais de a.
   (c) Démontrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance est un estimateur asymptotiquement sans biais de a.

8. La variable aléatoire prend les valeurs -1 et 1 avec les probabilités respectives p et $1-p$.
Un échantillon EAS de taille n (n valeurs réalisées de cette variable aléatoire) est composé de n_1 observations de la valeur -1 et n_2 obsrvations de la valeur 1 $(n_1 + n_2 = n)$.
Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de p.

9. Déterminer, à l'aide d'un EAS de n observations, l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre λ d'une distribution dont la densité de probabilité est donnée par :
   (a)
$$f(x) = \begin{cases} (\lambda - 1)x^{-\lambda} & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [0,1] \end{cases}$$
   (b)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{-x/\lambda}}{\lambda^2} \quad (\lambda > 0) & \text{si} \quad x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

10. Utiliser la méthode des moments pour déterminer l'estimateur du paramètre λ dans l'exercice 9.

11. La variable aléatoire X prend les valeurs entières positives $\{0, 1, 2, \cdots\}$ avec les probabilités suivantes :

$$\Pr[X = k] = p(1-p)^k \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

où $0 < p < 1$.
Un échantillon EAS de taille n a été extrait de la population suivant cette loi et donne comme valeurs observées : $k_1, k_2, \cdots, k_n$.
Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre p et l'exprimer à l'aide de la moyenne $\overline{k}$ des observations.

12. La variable aléatoire X prend les valeurs réelles positives et admet la densité de probabilité suivante :

$$f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \qquad (x > 0)$$

avec $\lambda > 0$.
Un échantillon EAS de taille n a été extrait de la population suivant cette loi et donne comme valeurs observées : $x_1, x_2, \cdots, x_n$.
Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre λ et l'exprimer à l'aide de la moyenne $\overline{x}$ des observations.

13. La variable aléatoire X prend les valeurs réelles positives et admet la densité de probabilité suivante :

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\ln x - \mu)^2\right] \qquad (x > 0)$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$.
Un échantillon EAS de taille n a été extrait de la population suivant cette loi et donne comme valeurs observées : $x_1, x_2, \cdots, x_n$.
Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre μ et l'exprimer à l'aide de la moyenne géométrique $g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ des observations.

14. Une variable aléatoire continue de support $\mathbb{R}$ a pour densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda |x|)$$

où λ est un paramètre strictement positif.
Un échantillon EAS de taille n a été extrait de la population suivant cette loi et donne comme valeurs observées : $x_1, x_2, \cdots, x_n$.
Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre λ.

Solutions

Exercice 1 : $\widehat{\mu} = \overline{x}$

Exercice 2 : $\widehat{p} = \dfrac{1}{\overline{x}}$

Exercice 3 : $\widehat{p} = \dfrac{\overline{x} - s^2}{\overline{x}}$ et $\widehat{n} = \dfrac{\overline{x}^2}{\overline{x} - s^2}$

Exercice 8 : $\widehat{p} = \dfrac{n_1}{n}$

Exercice 9 : a) $\widehat{\lambda} = 1 + \dfrac{1}{\ln \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}$ b) $\widehat{\lambda} = \dfrac{\overline{x}}{2}$

Exercice 10 : a) $\widehat{\lambda} = \dfrac{2\overline{x} + 1}{\overline{x} + 1}$ b) $\widehat{\lambda} = \dfrac{\overline{x}}{2}$

Exercice 11 : $\widehat{p} = \dfrac{1}{1 + \overline{k}}$

Exercice 12 : $\widehat{\lambda} = \dfrac{2}{\overline{x}}$

Exercice 13 : $\widehat{\mu} = \ln g$

Exercice 14 : $\widehat{\lambda} = \dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum |x_i|}$