ԵՐԵՎԱՆԻ ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱՅԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՔՈԼԵՋ

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ՇԱՐՔԵՐ

Կազմեց Ռ.Ղազարյան

ՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

ԵՐԵՎԱՆ – 2011

Ռ.Ա.ՂԱԶԱՐՅԱՆ
ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ՇԱՐՔԵՐ
ՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Հավասարումը, որը պարունակում է x անկախ փոփոխականը, նրանից կախված y որոնելի ֆունկցիան և նրա ածանցյալները, կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարում:

Ընդհանուր տեսքով դիֆերենցիալ հավասարաումը կարելի է գրել այսպես՝

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

կամ, եթե դա հնարավոր է՝

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right):$$

Տվյալ հավասարման մեջ մտնող ամենաբարձր ածանցյալի կարգը կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարման կարգ:

Օրինակ $3x - y - y' = 0$ հավասարումը առաջին կարգի է:

Դիֆերենցիալ հավասարման լուծում է կոչվում ցանկացած $y = \varphi(x)$ ֆունկցիա, որը տրված հավասարումը դարձնում է նույնություն՝

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) \equiv 0:$$

n-րդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծում է կոչվում $y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ֆունկցիան, որը կախված է $c_1, c_2, \ldots, c_n$ կամայական հաստատուններից և բավարարում է տրված հավասարմանը այդ հաստատունների ցանկացած արժեքների դեպքում:

Դիֆերենցիալ հավասարման մասնավոր լուծում է կոչվում այն լուծումը, որը ստացվում է ընդհանուր լուծումից կամայական հաստատունների սևեռված արժեքների դեպքում:

Մասնավոր լուծումը ընդհանուր լուծումից անջատելու համար տրվում են սկզբնական պայմաններ՝

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ y''(x_0) = y''_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}{}_0,$$

որտեղ x_0-ն արգումենտի որևէ սևեռված արժեք է:

Սկզբնական պայմաններին բավարարող $y = y(x)$ լուծումը գտնելու խնդիրը կոչվում է Կոշու խնդիր:

Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներն ունեն հետևյալ տեսքը՝ $F(x,y,y')=0$, կամ, եթե հնարավոր է այդ հավասարումը լուծել y'-ի նկատմամբ՝ $y'=f(x,y)$:

Ընդհանուր լուծումն ունի $y=\varphi(x,c)$ տեսքը, որտեղ c-ն կամայական հաստատուն է:

$y_0=\varphi(x_0)$ սկզբնական պայմանին բավարարող (Կոշու խնդիր) լուծումը ընդհանուր լուծումից անջատելու համար լուծում ենք $y_0=\varphi(x_0,c)$ հավասարումը c-ի նկատմամբ և գտած $c=c_0$ արժեքը տեղադրում ընդհանուր լուծման մեջ: Որոնելի մասնավոր լուծումը կլինի $y=\varphi(x,c_0)$ ֆունկցիան:

Երկրաչափության տեսակետից $y=\varphi(x,c)$ ընդհանուր լուծումը XOY հարթության մեջ որոշում է կորերի ընտանիք, որոնք կոչվում են ինտեգրալային կորեր, իսկ $y_0=\varphi(x_0)$ սկզբնական պայմանին բավարարող մասնավոր լուծումն այդ ընտանիքի այն կորն է, որն անցնում է $(x_0,\varphi(x_0))$ կետով:

Օրինակ: $y'=y$ հավասարման ընդհանուր լուծումը $y=c\cdot e^x$ ֆունկցիան է, իսկ $y(0)=5$ սկզբնական պայմանին բավարարող լուծումը՝ $y=5\cdot e^x$ ֆունկցիան, որի գրաֆիկը անցնում է $(0,5)$ կետով:

Անջատվող փոփոխականներով առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ

$$f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx+f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy=0$$

տեսքի հավասարումները, որտեղ $f_1(x), f_2(x), \varphi_1(y), \varphi_2(y)$ ֆունկցիաներից ոչ մեկը նույնաբար զերո չէ, անջատվող փոփոխականներով տեսքի են: Այն կարելի է բաժանելով $f_2(x)\cdot\varphi_1(y)$–ի վրա բերել հետևյալ տեսքի $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx=-\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy$: Ինտեգրելով այս հավասարումը, կստանանք $\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = -\int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)} dy$ առնչությունը, որը որոշում է հավասարման լուծումը անբացահայտ տեսքով և կոչվում է այդ հավասարման ինտեգրալ:

Տիպային վարժություններ

1.Լուծել հավասարումը.

$$(1+y^2)dx - xdy = 0:$$

Անջատենք փոփոխականները`

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{x}:$$

Ինտեգրենք ստացված հավասարումը`

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \; arctgy = \ln|x| + \ln c$$

(քանի որ c–ն կամայական է $\ln c$-ն նույնպես կլինի կամայական հաստատուն): Վերջին հավասարությունից կստանանք, որ`

$$y = tg \ln c|x|:$$

2.Լուծել Կոշու խնդիրը.

$$(1-x)y' - y = 0, \; y(0) = 1:$$

Կատարենք $y' = \frac{dy}{dx}$ փոխարինումը և անջատենք փոփոխականները`

$$(1-x)\frac{dy}{dx} - y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1-x}:$$

Երկու կողմն էլ ինտեգրելով կստանանք`

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1-x} \quad \Rightarrow \; \ln|y| = -\ln|x-1| + \ln c \quad \Rightarrow \; y = \frac{c}{|x-1|} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = \begin{cases} \frac{c}{x-1}, \text{եթե } x > 1 \\ \frac{c}{1-x}, \text{եթե } x < 1 \end{cases} :$$

Քանի որ սկզբնական պայմանում $x = 0 < 1$, պետք է վերցնել $y = \frac{c}{1-x}$ լուծումը: Օգտվենք սկզբնական պայմանից և գտնենք c-ի արժեքը`

$$1 = \frac{c}{1-0} \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

հետևաբար մասնավոր լուծումը կլինի $y = \frac{1}{1-x}$ ֆունկցիան:

Առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումներ

Հետևյալ տեսքի հավասարումները` $y' + P(x)y = Q(x)$, որտեղ $P(x)$-ը և $Q(x)$-ը տրված ֆունկցիաներ են x-ից, կամ հաստատուններ են, կոչվում են առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումներ:

Գծային հավսարումները կարելի է լուծել $y = u(x) \cdot v(x)$ տեղադրմամբ, որտեղ $u(x)$-ը և $v(x)$-ը երկու նոր անհայտ ֆունկցիաներ են: Քանի որ $y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, տրված հավասարումը բերվում է հետևյալ տեսքի` $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$ կամ $u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$:

Ընտրելով $v' + P(x)v = 0$ հավասարման որևէ մասնավոր լուծում $u(x)$ ֆունկցիան գտնելու համար ստանում ենք $u' \cdot v = Q(x)$ հավասարումը:

Այս երկու հավասարումներն էլ անջատվող փոփոխականներով հավասարումներ են, որոնք լուծելով ստանում ենք տված հավասարման $y = u \cdot v$ լուծումը:

Նույն $y = u \cdot v$ տեղադրությամբ են լուծվում $y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^n$ տեսքի հավասարումները, որոնք կոչվում են Բեռնուլլիի հավասարումներ:

Տիպային վարժություններ

1. Լուծել գծային հավասարումը.

$$y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}:$$

Կատարենք $y = u(x)\cdot v(x)$ տեղադրումը: Քանի որ $y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, ապա կստանանք $u'v + uv' + uvtgx = \frac{1}{\cos x}$ հավասարումը: Խմբավորենք u պարունակող անդամները՝ $u'v + u(v' + vtgx) = \frac{1}{\cos x}$: Այնուհետև գտնենք այնպիսի v ֆունկցիա, որ՝ $v' + vtgx = 0$ (1): Այդ դեպքում u ֆունկցիան կգտնվի $u'v = \frac{1}{\cos x}$ (2) հավասարումից: (1)-ում անջատենք փոփոխականները՝

$$\frac{dv}{dx} = -vtgx \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = -tgxdx \;:$$

Ինտեգրենք այս հավասարումը և բաց թողնենք ինտեգրման հաստատունը՝

$$\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{\sin x}{\cos x}dx \;\Rightarrow\; \ln|v| = \ln|\cos x| \;\Rightarrow\; v = \cos x:$$

Վերջինս տեղադրենք (2) հավասարման մեջ և լուծենք $u'\cos x = \frac{1}{\cos x}$ հավասարումը՝

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \;\Rightarrow\; du = \frac{dx}{\cos^2 x} \;\Rightarrow\; \int du = \int\frac{dx}{\cos^2 x} \;\Rightarrow\; u = tgx + c \;:$$

Տված հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի $y = (tgx + c)\cos x$ կամ $y = \sin x + c\cdot\cos x$ ֆունկցիան:

2. Գտնել Կոշու խնդրի լուծումը.

$$y' + 2\frac{y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x};\; y(1) = -\frac{1}{2e}:$$

Սա գծային հավասարում է՝ $P(x) = \frac{2}{x}$; $Q(x) = \frac{e^{-x^2}}{x}$: Կատարենք $y = u(x)\cdot v(x)$ տեղադրում՝

$$(u\cdot v)'+2\frac{uv}{x}=\frac{e^{-x^2}}{x}\quad\Rightarrow\quad u'\cdot v+u(v'+2\frac{v}{x})=\frac{e^{-x^2}}{x}:$$

Եթե ընտրենք այնպիսի $v(x)$, որ $v'+2\frac{v}{x}=0$, ապա u-ն կգտնվի $u'\cdot v=\frac{e^{-x^2}}{x}$ հավասարումից: $\frac{dv}{dx}+\frac{2v}{x}=0$ հավասարման մեջ անջատենք փոփոխականները և ինտեգրենք՝

$$\frac{dv}{v}=-\frac{2dx}{x}\quad\Rightarrow\quad\int\frac{dv}{v}=-2\int\frac{dx}{x}\quad\Rightarrow\quad\ln|v|=-2\ln|x|,$$

այստեղից ստանում ենք $v=x^{-2}$:

Այժմ գտնենք $u(x)$ ֆունկցիան՝

$$u'\cdot x^{-2}=\frac{e^{-x^2}}{x}\quad\text{կամ}\quad du=xe^{-x^2}dx:$$

Ինտեգրենք և գտնենք u-ն՝

$$u=\int xe^{-x^2}dx+c\quad\Rightarrow\quad u=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2)+c\quad\Rightarrow\quad u=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c:$$

Տված հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝ $y=(-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c)\cdot\frac{1}{x^2}$:

Անջատենք մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է տված սկզբնական պայմանին՝

$$\frac{-1}{2e}=(-\frac{1}{2}e^{-1^2}+c)\cdot\frac{1}{1^2}\quad\Rightarrow\quad-\frac{1}{2e}=-\frac{1}{2e}+c\quad\Rightarrow\quad c=0:$$

Կոշու խնդրի լուծումը կլինի $y=-\frac{1}{2x^2}e^{-x^2}$ ֆունկցիան:

3. Լուծել Բեռնուլլիի հավասարումը.

$$y'-\frac{y}{x-1}=\frac{y^2}{x-1},\quad y(0)=\frac{1}{2}:$$

Կատարելով $y=uv$ տեղադրում կստանանք՝

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x-1}=\frac{u^2v^2}{x-1}:$$

Ձախ մասում խմբավորենք u պարունակող անդամները՝

$$u'v+u(v'-\frac{v}{x-1})=\frac{u^2v^2}{x-1}:$$

Եթե ընտրենք այնպիսի v ֆունկցիա, որ $v'-\frac{v}{x-1}=0$, ապա u-ն կգտնվի $u'v=\frac{u^2v^2}{x-1}$ հավասարումից: $\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x-1}$ հավասարման մեջ անջատենք փոփոխականները և ինտեգրենք՝

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x-1}\quad\Rightarrow\quad\ln|v|=\ln|x-1|\quad\Rightarrow\quad v=x-1:$$

Տեղադրենք v-ի արժեքը u-ն որոշող հավասարման մեջ և կատարենք կրճատումներ.

$$u'=\frac{u^2v}{x-1}\ \text{ կամ }\ \frac{du}{dx}=u^2:$$

Անջատելով փոփոխականները և ինտեգրելով կստանանք՝

$$\frac{du}{u^2}=dx\quad\Rightarrow\quad\int u^{-2}du=x+c\quad\Rightarrow\quad-\frac{1}{u}=x+c\quad\Rightarrow\quad u=-\frac{1}{x+c}:$$

Այսպիսով, տրված հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի `

$$y=-\frac{1}{x+c}(x-1)\ \text{ կամ }\ y=\frac{1-x}{x+c}:$$

Օգտվենք սկզբնական պայմանից՝ $\frac{1}{2}=\frac{1-0}{0+c}\quad\Rightarrow\quad c=2$: Մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է տված սկզբնական պայմանին կլինի $y=\frac{1-x}{x+2}$ ֆունկցիան:

Առաջին կարգի համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումներ

$f(x,y)$ ֆունկցիան կոչվում է k-չափանի համասեռ ֆունկցիա, եթե՝

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k f(x,y):$$

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

տեսքի հավասարումը կոչվում է համասեռ, եթե $P(x,y)$ և $Q(x,y)$ ֆունկցիաները միևնույն չափանի համասեռ ֆունկցիաներ են: Համասեռ հավասարումները կարելի է ներկայացնել $y' = f(\frac{y}{x})$ տեսքով, և կատարելով $y = ux$ տեղադրում, բերել անջատվող փոփոխականներով հավասարման:

Տիպային վարժություններ

1. Լուծել համասեռ հավասարումը.

$$xyy' = y^2 + 2x^2:$$

$y' = \frac{y^2 + 2x^2}{xy} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} + 2\frac{x}{y}$: Կատարենք $y = ux$ տեղադրումը: Քանի որ $y' = u'x + u = x\frac{du}{dx} + u$, կստանանք՝

$$x\frac{du}{dx} + u = u + \frac{2}{u}, \text{ կամ } udu = 2\frac{dx}{x}:$$

Ինտեգրելով հավասարումը, կտանանք՝

$$\int udu = 2\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{u^2}{2} = 2\ln|x| + \frac{1}{2}\ln c \Rightarrow u^2 = \ln cx^4 \Rightarrow u = \pm\sqrt{\ln cx^4}$$

(կամայական հաստատունը ընտրվեց $\frac{1}{2}\ln c$ տեսքով, ելնելով հարմարության տեսակետից): Վերադառնալով $y = ux$ տեղադրմանը և փոխարինելով $u = \frac{y}{x}$ արտահայտությամբ, ստանում ենք ընդհանուր լուծումը՝ $y = \pm x\sqrt{\ln cx^4}$:

2. Լուծել Կոշու խնդիրը.

$$xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y; \; y(1) = 0:$$

Հավասարման երկու մասերը բաժանելով x-ի վրա, կստանանք՝

$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$: Սա համասեռ հավասարում է: Կատարենք $\frac{y}{x} = u$, կամ, որ նույնն է $y = ux$ տեղադրումը.

$$u'x + u = e^u + u \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = e^u:$$

Անջատենք փոփոխականները և ինտեգրենք`

$$e^{-u}du = \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \int e^{-u}du = \int\frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; -e^{-u} = \ln c|x| \;\Rightarrow\; e^{-u} = \ln\frac{1}{c|x|} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -u = \ln\ln\frac{1}{c|x|} \;\Rightarrow\; -\frac{y}{x} = \ln\ln\frac{1}{c|x|} \;\Rightarrow\; y = -x\ln\ln\frac{1}{c|x|}:$$

$y = -x\ln\ln\frac{1}{c|x|}$-ը հավասարման ընդհանուր լուծումն է: Օգտվենք սկզբնական պայմանից.

$$0 = -\ln\ln\frac{1}{c} \;\Rightarrow\; \ln\frac{1}{c} = 1 \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{e}:$$

Մասնավոր լուծումը կլինի`

$$y = -x\ln\ln\frac{e}{|x|}:$$

Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ, որոնք թույլ են տալիս կարգի իջեցում

Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումը ընդհանուր դեպքում գրվում է`

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

կամ, եթե հնարավոր է

$$y'' = f(x, y, y')$$

տեսքով:

Հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի $y = \varphi(x, c_1, c_2)$, իսկ սկզբնական պայմանները` $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ տեսքը:

Որոշ դեպքերում հավասարումը թույլ է տալիս կարգի իջեցում.

1) $y''=f(x)$ տեսքի հավասարումները երկու անգամ հաջորդաբար ինտեգրելով ստանում ենք ընդհանուր լուծումը.

Օրինակ 1: $y''=\sin x+\cos 2x$:

Ինտեգրենք հավասարումը`

$$y'=\int \sin xdx+\int \cos 2xdx+c_1=-\cos x+\frac{\sin 2x}{2}+c_1:$$

Կրկին ինտեգրելով ստանում ենք.

$$y=-\int \cos xdx+\frac{1}{2}\int \sin 2xdx+\int c_1dx+c_2=-\sin x-\frac{1}{4}\cos 2x+c_1x+c_2:$$

Օրինակ 2: Գտնել Կոշու խնդրի լուծումը.

$$y''=27e^{3x}+x^2;\ y(0)=5,\ y'(0)=10:$$

$y'=27\int e^{3x}dx+\int x^2dx+c_1 \Rightarrow y'=9e^{3x}+\frac{x^3}{3}+c_1$: Օգտվելով $y'(0)=10$ սկզբնական պայմանից ստանում ենք` $10=9+c_1$, որտեղից $c_1=1$ և $y'=9e^{3x}+\frac{x^3}{3}+1$: Ինտեգրելով ստացված հավասարումը, կստանանք`

$y=3e^{3x}+\frac{x^4}{12}+x+c_2$: c_2-ը գտնում ենք $y(0)=5$ պայմանից` $5=3+c_2$, որտեղից $c_2=2$: Այսպիսով, մասնավոր լուծումն է`

$$y=3e^{3x}+\frac{x^4}{12}+x+2:$$

2) $y''=f(x,y')$ տեսքի հավասարումները, որոնք բացահայտ տեսքով չեն պարունակում y անհայտ ֆունկցիան, բերվում են առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման $y'=P(x)$ նշանակման միջոցով:

Օրինակ 3: Լուծել հավասարումը.

$$xy''-y'=0:$$

Նշանակելով $y'=P(x)$, կստանանք` $xP'-P=0$ հավասարումը: Քանի որ $P'=\frac{dP}{dx}$, ուստի` $x\frac{dP}{dx}=P$: Անջատենք փոփոխականները և ինտեգրենք՝

$$\frac{dP}{p}=\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dP}{p}=\int\frac{dx}{x}+\ln c_1 \quad \Rightarrow \quad \ln|P|=\ln|x|+\ln c_1 \quad \Rightarrow \quad P=c_1x$$

կամ, որ նույնն է՝ $y'=c_1x$:

Կրկին ինտեգրելով ստացված հավասարումը, գտնում ենք ընդհանուր լուծումը.

$$y=\int c_1xdx+c_2=\frac{c_1x^2}{2}+c_2, \text{ կամ } \quad y=c_1x^2+c_2$$

($\frac{c_1}{2}$-ը նորից գրեցինք c_1 , քանի որ այն ցանկացած թիվ է):

Օրինակ 4: Գտնել Կոշու խնդրի լուծումը.

$$y''(1+x^2)=2xy'; \ y(0)=1, \ y'(0)=3:$$

Նշանակենք $y'=P(x)$: Քանի որ $y''=(y')'=P'$, ստանում ենք՝ $P'(1+x^2)=2xP$, կամ $(1+x^2)\frac{dP}{dx}=2xP$ անջատվող փոփոխականներով հավասարումը: Այստեղից.

$$\frac{dP}{P}=\frac{2x}{1+x^2}dx:$$

Ինտեգրենք ստացված հավասարումը՝

$$\int\frac{dP}{P}=\int\frac{2x}{1+x^2}dx+\ln c_1 \quad \Rightarrow \quad \ln|P|=\ln c_1(1+x^2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ P=c_1(1+x^2) \text{ կամ } y'=c_1(1+x^2):$$

$y'(0)=3$ պայմանից գտնում ենք c_1-ի արժեքը՝ $3=c_1(1+0^2)$, որտեղից $c_1=3$, հետևաբար $y'=3(1+x^2)$: Այստեցից.

$$y=3\int(1+x^2)dx+c_2 \quad \text{կամ} \quad y=3x+x^3+c_2:$$

Օգտվենք $y(0)=1$ սկզբնական պայմանից՝ $1=3\cdot 0+0^3+c_2 \ \Rightarrow c_2=1$, հետևաբար Կոշու խնդրի լուծումը կլինի հետևյալ ֆունկցիան՝

$$y=x^3+3x+1:$$

3) $y''=f(y,y')$ տեսքի հավասարումներում բացահայտ տեսքով չի

մասնակցում x-անկախ փոփոխականը: Նման դեպքերում կատարում են $y'(x)=P(y)$ տեղադրումը: Քանի որ՝

$$y''(x)=(y'(x))'=\frac{d}{dx}P(y)=\frac{dP}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dP}{dy}P,$$

ուստի տրված հավասարումը բերվում է $P\frac{dP}{dy}=f(y,P)$ տեսքի, որը առաջին կարգի հավասարում է:

Օրինակ 5: Լուծել դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$y\cdot y''=(y')^2:$$

Քանի որ x-ը բացահայտ տեսքով չի պարունակվում, նշանակենք $y'(x)=P(y) \;\Rightarrow\; y''=P\frac{dP}{dy}$ և կստանանք՝

$$yP\frac{dP}{dy}=P^2 :$$

Պարզ է, որ $P=0$-ն հավասարման լուծում է, կամ $y'=0 \Leftrightarrow y=const$: Եթե $P\neq 0$, ապա կրճատելով հավասարումը և ինտեգրելով ստանում ենք՝

$$y\frac{dP}{dy}=P \;\Rightarrow\; \frac{dP}{P}=\frac{dy}{y} \;\Rightarrow\; P=c_1y:$$

Վերադառնանք նշանակմանը.

$$y'=c_1y \text{ կամ } \frac{dy}{dx}=c_1y :$$

Անջատենք փոփոխականները և ինտեգրենք՝

$$\frac{dy}{y}=c_1dx \;\Rightarrow\; \ln|y|=c_1x+c_2 \text{ կամ } y=e^{c_1x+c_2}:$$

Հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումներ

Հետևյալ տեսքի հավասարումները՝

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (1)$$

որտեղ p-ն և q-ն հաստատուններ են, կոչվում են երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ (առանց աջ մասի) հավասարումներ: Եթե $y_1(x)$ և $y_2(x)$ ֆունկցիաները տված հավասարման գծորեն անկախ լուծումներ են, ապա այդ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի հետևյալ տեսքը`

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \ ,$$

որտեղ c_1-ը և c_2-ը կամայական հաստատուններ են: Յավասարման լուծումը փնտրելով $y = e^{kx}$ տեսքով, ստանում ենք բնութագրիչ հավասարում`

$$k^2 + pk + q = 0:$$

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

1. Բնութագրիչ հավասարման արմատները իրական են և իրարից տարբեր $(D = p^2 - 4q > 0)$: Այս դեպքում $y_1 = e^{k_1 x}$ և $y_2 = e^{k_2 x}$ լուծումները գծորեն անկախ են $\left(\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const \right)$ և (1)-ի ընդհանուր լուծումը կլինի`
$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} \ :$$
2. Բնութագրիչ հավասարման արմատները իրար հավասար են` $k_1 = k_2 = k \ (D = p^2 - 4q = 0)$: Այդ դեպքում $y_1 = e^{kx}$, իսկ որպես երկրորդ լուծում կվերցնենք $y_2 = xe^{kx}$ ֆունկցիան, որը գծորեն անկախ է $y_1$-ից $\left( \dfrac{y_2}{y_1} = x \neq const \right)$: (1)-ի ընդհանուր լուծումը կլինի`
$$y = (c_1 + c_2 x)e^{kx}:$$
3. Բնութագրիչ հավասարման արմատները կոմպլեքս համալուծ են` $k = \alpha \pm i\beta$: Այդ դեպքում $y = e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i \sin\beta x)$: Որպես

(1)-ի իրական լուծումներ կվերցնենք $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ և $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ ֆունկցիաները: (1)-ի ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x):$$

Տիպային վարժություններ

1. Լուծել հավասարումը.

$$y'' - 2y' - 3y = 0:$$

Լուծումը փնտրենք $y = e^{kx}$ տեսքի ֆունկցիաների դասում: Քանի որ $y' = ke^{kx}$ և $y'' = k^2e^{kx}$, ուստի ստանում ենք՝

$k^2e^{kx} - 2ke^{kx} - 3e^{kx} = 0$ կամ $e^{kx}(k^2 - 2k - 3) = 0$ հավասարումը:

$e^{kx} \neq 0$, հետևաբար $k^2 - 2k - 3 = 0$: Սա բնութագրիչ հավասարումն է, որի արմատներն են $k_1 = 3$ և $k_2 = -1$: $y_1 = e^{3x}$ և $y_2 = e^{-x}$ ֆունկցիաները տրված հավասարման մասնավոր լուծումներն են, որոնք գծորեն անկախ են, քանի որ $k_1 \neq k_2$: Ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}:$$

2. Լուծել հավասարումը.

$$y'' + 4y' + 4y = 0:$$

Լուծումը փնտրենք $y = e^{kx}$ տեսքով և կազմենք բնութագրիչ հավասարումը՝

$k^2 + 4k + 4 = 0$ կամ $(k+2)^2 = 0$:

Պարզ է, որ $k_1 = k_2 = -2$, հետևաբար $y_1 = e^{-2x}$, իսկ որպես նրա հետ գծորեն անկախ լուծում կվերցնենք $y_2 = xe^{-2x}$ լուծումը: Ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = (c_1 + c_2x)e^{-2x}:$$

3. Լուծել հավասարումը.

$$y'' - 2y' + 5y = 0:$$

Կազմենք բնութագրիչ հավասարումը՝

$$k^2 - 2k + 5 = 0,$$

Նրա արմատները կլինեն $k_1 = 1 - 2i$ և $k_2 = 1 + 2i$ կոմպլեքս համալուծ թվերը, որտեղ $\alpha = 1$ և $\beta = 2$: Որպես մասնավոր լուծումներ, որոնք գծորեն անկախ են, կարող ենք վերցնել $y_1 = e^x \cos 2x$ և $y_2 = e^x \sin 2x$ ֆունկցիաները: Ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$y = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x):$$

4. Գտնել սկզբնական պայմաններին բավարարող մասնավոր լուծումը.

$$y'' + 3y' + 2y = 0; \; y(0) = 3; \; y'(0) = -4:$$

Գտնենք ընդհանուր լուծումը: Կազմենք բնութագրիչ հավասարումը՝

$$k^2 + 3k + 2 = 0:$$

Բնութագրիչ հավասարման արմատներն են՝ $k_1 = -1$ և $k_2 = -2$, ուստի $y_1 = e^{-x}$ և $y_2 = e^{-2x}$ գծորեն անկախ լուծումներ են: Ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}:$$

Մասնավոր լուծումը ընդհանուր լուծումից անջատելու համար օգտվենք սկզբնական պայմաններից: Հաշվենք ընդհանուր լուծման ածանցյալը՝

$$y' = (c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x})' = (c_1 e^{-x})' + (c_2 e^{-2x})' = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x}:$$

Ընդհանուր լուծման և նրա ածանցյալի մեջ տեղադրելով $x = 0$, $y(0) = 3$ և $y'(0) = -4$ արժեքները, կստանանք՝ $\begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ -c_1 - 2c_2 = -4 \end{cases}$ գծային համակարգը, որի լուծումը $c_1 = 2$ և $c_2 = 1$ թվազույգն է: Հետևաբար տված սկզբնական պայմաններին բավարարող մասնավոր լուծումը կլինի հետևյալ ֆունկցիան՝

$$y = 2e^{-x} + e^{-2x}:$$

Հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ (աջ մասով) դիֆերենցիալ հավասարումներ

Դիտարկենք $y'' + py' + qy = f(x)$ տեսքի դիֆերենցիալ հավասարումները: Այս հավասարման ընդհանուր լուծումը ունի $y = \overline{y} + y^*$ կառուցվածքը, որտեղ $\overline{y}$-ը $y'' + py' + qy = 0$ համապատասխան համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է, իսկ y^*-ը՝ տված հավասարման որևէ լուծում:

Եթե հավասարման աջ մասը ունի $f(x) = P_n(x)e^{mx}$ կամ $f(x) = e^{\alpha x}(a\sin\beta x + b\cos\beta x)$ տեսքը, որտեղ $P_n(x)$-ը n-րդ աստիճանի տված բազմանդամ է, իսկ a-ն և b-ն հայտնի հաստատուններ են, ապա y^*-ը փնտրում ենք անորոշ գործկիցների մեթոդով:

1. Ենթադրենք $f(x) = P_n(x)e^{mx}$:

   Մասնավոր լուծումը փնտրվում է հետևյալ տեսքով՝

$$y^* = x^r Q_n(x)e^{mx},$$

   որտեղ $Q_n(x)$-ը n-րդ աստիճանի բազմանդամ է, որի բոլոր գործակիցները անորոշ են, իսկ r-ը բնութագրիչ հավասարման k=m արմատի պատիկությունն է: Այսպիսով՝

   ա) $y^* = Q_n(x)e^{mx}$, եթե $k = m$-ը արմատ չէ $(\mathrm{r} = 0)$,

   բ) $y^* = xQ_n(x)e^{mx}$, եթե $k = m$-ը միապատիկ արմատ է $(\mathrm{r} = 1)$,

   գ) $y^* = x^2 Q_n(x)e^{mx}$, եթե $k_1 = k_2 = m$ $(\mathrm{r} = 2)$:

2. Ենթադրենք $f(x) = e^{\alpha x}(a\sin\beta x + b\cos\beta x)$:

   Այս դեպքում պետք է պարզել $k = \alpha \pm i\beta$ արժեքները բնութագրիչ հավասարման արմատներն են, թե ոչ:

   ա) Եթե արմատ չէ, ապա որոնում ենք $y^* = e^{\alpha x}(A\sin\beta x + B\cos\beta x)$ տեսքով, որտեղ A և B անորոշ գործակիցներ են:

   բ) Եթե $k = \alpha \pm i\beta$ արմատ է, ապա որոնում ենք

$y^* = xe^{\alpha x}(A\sin\beta x + B\cos\beta x)$ տեսքով:

Տիպային վարժություններ

1. Լուծել հավասարումը.

$$y'' - 5y' + 6y = 24x + 10:$$

Նախ գտնենք համապատասխան համասեռ հավասարման՝ $y'' - 5y' + 6y = 0$-ի ընդհանուր լուծումը: Գրենք բնութագրիչ հավասարումը՝ $k^2 - 5k + 6 = 0$: Քանի որ $k_1 = 2$ և $k_2 = 3$, հետևաբար $y_1 = e^{2x}$ և $y_2 = e^{3x}$, իսկ ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$\overline{y} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}:$$

Այժմ որոնենք անհամասեռ հավասարման որևէ լուծում.

$$f(x) = e^{0\cdot x}(24x + 10) = 24x + 10:$$

Այստեղ $m = 0$ և $n = 1$: Քանի որ $m = 0$ արժեքը բնութագրիչ հավասարման արմատ չէ, ուստի փնտրենք $y^* = ax + b$ տեսքով՝ $\left(y^*\right)' = a$, $\left(y^*\right)'' = (a)' = 0$: Տեղադրենք հավասարման մեջ՝ $0 - 5a + 6(ax + b) = 24x + 10$ կամ $6ax + 6b - 5a = 24x + 10$: Այս հավասարությունը նույնություն է միայն այն դեպքում, երբ՝ $\begin{cases} 6a = 24 \\ 6b - 5a = 10 \end{cases}$

(բազմանդամները նույնաբար հավասար են միայն այն դեպքում, երբ x-ի միևնույն աստիճանների գործակիցները աջ և ձախ մասերում իրար հավասար են): Լուծելով համակարգը, ստանում ենք $a = 4$, $b = 5$, հետևաբար $y^* = 4x + 5$: Հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + 4x + 5:$$

2. Լուծել հավասարումը.

$$2y'' - 3y' = 36x^2 - 78x + 8:$$

Նախ լուծենք համապատասխան համասեռ հավասարումը՝

$$2y'' - 3y' = 0:$$

Բնութագրիչ հավասարումը՝ $2k^2 - 3k = 0$ ունի $k_1 = 0$ և $k_2 = \frac{3}{2}$ արմատները: Հետևաբար համասեռ հավասարման մասնավոր լուծումները կլինեն $y_1 = e^{0\cdot x} = 1$ և $y_2 = e^{\frac{3}{2}x}$ ֆունկցիաները, իսկ նրա ընդհանուր լուծումը՝

$$\overline{y} = c_1 + c_2 e^{\frac{3}{2}x} :$$

Քանի որ, $f(x) = e^{0\cdot x}(36x^2 - 78x + 8)$, ուստի $m = 0$ և $n = 2$: $k = m = 0$ արժեքը բնութագրիչ հավասարման արմատ է, այդ պատճառով փնտրենք $y^* = x(ax^2 + bx + c)$ տեսքով: Գտնենք ածանցյալները `

$$\left(y^*\right)' = (ax^3 + bx^2 + cx)' = 3ax^2 + 2bx + c \quad \Rightarrow \left(y^*\right)'' = 6ax + 2b:$$

Տեղադրենք տված հավասարման մեջ՝

$$2(6ax + 2b) - 3(3ax^2 + 2bx + c) = 36x^2 - 78x + 8:$$

Խմբավորենք ըստ x–ի աստիճանների՝

$$-9ax^2 + (12a - 6b)x + 4b - 3c = 36x^2 - 78x + 8:$$

Հավասարեցնենք համապատասխան գործակիցները՝

$$\begin{array}{c|l} x^2 & -9a = 36, \\ x^1 & 12a - 6b = -78, \\ x^0 & 4b - 3c = 8: \end{array}$$

Լուծելով համակարգը, ստանում ենք $a = -4,\ b = 5,\ c = 4$: Այսպիսով.

$$y^* = -4x^3 + 5x^2 + 4x,$$

իսկ տված հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$y = c_1 + c_2 e^{\frac{3}{2}x} - 4x^3 + 5x^2 + 4x:$$

3. Լուծել հավասարումը.

$$y'' - y' - 2y = (24x - 13)e^{2x}:$$

Գտնենք $y'' - y' - 2y = 0$ համապատասխան համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը: Բնութագրիչ հավասարումն է $k^2-k-2=0$, որի արմատներն են $k_1=2$ և $k_2=-1$, հետևաբար՝

$$\overline{y}=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}:$$

$f(x)=(24x-13)e^{2x}$, հետևաբար $n=1$ և $m=2$:

Քանի որ $k=m=2$ բնութագրիչ հավասարման արմատն է, ուստի y^*-ը փնտրենք հետևյալ տեսքով՝

$$y^*=x(ax+b)e^{2x}=(ax^2+bx)e^{2x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(y^*\right)'=(ax^2+bx)'e^{2x}+(ax^2+bx)(e^{2x})'=(2ax+b)e^{2x}+2(ax^2+bx)e^{2x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(y^*\right)''=4(2ax+b)e^{2x}+4(ax^2+bx)e^{2x}+2ae^{2x}:$$

Տեղադրենք հավասարման մեջ՝

$$4(ax^2+bx)e^{2x}+4(2ax+b)e^{2x}+2ae^{2x}-2(ax^2+bx)e^{2x}-(2ax+b)e^{2x}-$$
$$-2(ax^2+bx)e^{2x}=(24x-13)e^{2x}:$$

Հավասարման երկու կողմն էլ բաժանենք $e^{2x}\neq 0$ վրա և միացնենք նման անդամները՝

$$6ax++2a+3b=24x-13:$$

Հավասարեցնելով համապատասխան գործակիցները՝

$$\begin{array}{c|c} x^1 & 6a=24 \\ x^0 & 2a+3b=-13 \end{array};$$

կստանանք՝ a=4, b=-7 և $y^*=(4x^2-7x)e^{2x}$:

Հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+(4x^2-7x)e^{2x}:$$

4. Լուծել հավասարումը.

$$y''-4y=26\sin 3x-39\cos 3x:$$

Գտնենք $y''-4y=0$ համապատասխան համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը: Բնութագրիչ հավասարումն է $k^2-4=0$, որի արմատներն են $k_1=2$ և $k_2=-2$, հետևաբար $\overline{y}=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$:

Քանի որ $k=\alpha\pm i\beta=0\pm 3i=\pm 3i$ բնութագրիչ հավասարման արմատ չէ, ուստի y^*-ը փնտրենք հետևյալ տեսքով՝

$$y^*=A\sin 3x+B\cos 3x:$$

Երկու անգամ ածանցենք և տեղադրենք հավասարման մեջ.

$$(y^*)'=3A\cos 3x-3B\sin 3x;\ (y^*)''=-9A\sin 3x-9B\cos 3x;$$

$$-9A\sin 3x-9B\cos 3x-4(A\sin 3x+B\cos 3x)=26\sin 3x-39\cos 3x:$$

Հավասարեցնենք $\sin 3x$ և $\cos 3x$ ֆունկցիաների համապատասխան գործակիցները՝

$$\begin{array}{c|c|c} \sin 3x & -13A=26 & a=-2 \\ \cos 3x & -13B=-39 & B=3 \end{array}:$$

Այսպիսով $y^*=-2\sin 3x+3\cos 3x$ և ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-2\sin 3x+3\cos 3x:$$

5. Լուծել հավասարումը.

$$y''+4y=32\sin 2x-4\cos 2x::$$

Համապատասխան համասեռ հավասարումն է $y''+4y=0$, որի բնութագրիչ հավասարումը՝ $k^2+4=0$, ունի $k=\pm 2i$ արմատները: Հետևաբար համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի $\overline{y}=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$ ֆունկցիան: Քանի որ $k=\alpha\pm i\beta=\pm 2i$ բնութագրիչ հավասարման արմատ է, ուստի անհամասեռ հավասարման մասնավոր լուծումը փնտրենք $y^*=x(A\sin 2x+B\cos 2x)$ տեսքով: Հաշվենք y^*-ի ածանցյալները.

$$(y^*)'=x'(A\sin 2x+B\cos 2x)+x(A\sin 2x+B\cos 2x)'=A\sin 2x+B\cos 2x+$$

$$+x(2A\cos 2x-2B\sin 2x);$$

$$(y^*)''=4A\cos 2x-4B\sin 2x-4x(A\sin 2x+B\cos 2x):$$

Տեղադրելով հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$4A\cos 2x-4B\sin 2x=32\sin 2x-4\cos 2x:$$

Հավասարեցնենք համապատասխան գործակիցները՝

$$\begin{array}{c|c|l} \sin 2x & -4B=32 & B=-8 \\ \cos 2x & 4A=-4 & A=-1 \end{array}\;:$$

Այսպիսով՝ $y^{*}=-x(\sin 2x+8\cos 2x)$ և ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x-x(\sin 2x+8\cos 2x):$$

Տեսական հարցեր

1. Դիֆերենցիալ հավասարման սահմանումը:
2. Դիֆերենցիալ հավասարման կարգի և լուծման սահմանումները:
3. Դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր և մասնավոր լուծման սահմանումները:
4. Կոշու խնդիրը: Սկզբնական պայմաններ:
5. Անջատվող փոփոխականներով առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ:
6. Համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումներ:
7. Առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումներ:
8. Երկրորդ կարգի դիֆենցիալ հավասարումների սահմանումը, ընդհանուր և մասնավոր լուծումները:
9. Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ, որոնք թույլ են տալիս կարգի իջեցում:
10. Հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների հատկությունները:
11. Հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների ընդհանուր լուծման կառուցվածքը:
12. Հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի գծային համասեռ հավասարումների լուծումը: Բնութագրիչ հավասարումը:
13. Անհամասեռ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների ընդհանուր լուծման կառուցվածքը:
14. Անհամասեռ հավասարումների լուծումը, երբ աջ մասը

$f(x) = P_n(x)e^{mx}$ տեսքի է:

15. Անհամասեռ հավասարումների լուծումը, երբ աջ մասը $f(x) = a\sin nx + b\cos nx$ տեսքի է:

Առաջարկվող խնդիրներ

Անջատվող փոփոխականներով հավասարումներ

Գտնել հավասարման ընդհանուր լուծումը (1-30).

1. $(1+y)dx + (1-x)dy = 0$
2. $(xy^2 + x)dx = (y - x^2 y)dy$
3. $x^2 dy + (y-1)dx = 0$
4. $(xy + x)dx - (y^2 - 1)dy = 0$
5. $(x^2 y - y)dx + x(y+1)dy = 0$
6. $\frac{2x+1}{3y+2} \cdot y' = 2$
7. $(x-2)yy' = 1$
8. $(3x-4)(2y+5)dy = dx$
9. $(\mathrm{xy} + \mathrm{x})\mathrm{dy} = \mathrm{ydx}$
10. $(1+x^2)dy = (xy + y)dx$
11. $\sqrt{1+x^2}dy - \sqrt{1+y^2}dx = 0$
12. $\sqrt{1-x^2}dy - \sqrt{1-y^2}dx = 0$
13. $(4+x^2)dy - (4-y^2)dx = 0$
14. $\sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy = 0$
15. $\sqrt{2x+1}dy - \sqrt{3y-2}dx = 0$
16. $x^2 y' - 2xy = 5y$
17. $(y-2)xdy + (3x-4)y^2 dx = 0$
18. $\sin x \cos y dx - \cos x \sin y dy = 0$
19. $y' = yxe^x$
20. $xy' = \ln|x|$
21. $x \sin y dy + \cos y dx = 0$
22. $y' = e^{x+y}$
23. $\sqrt{1-x^2}\, y' + xy = 0$
24. $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$
25. $(e^y + 4)(5+x^2)dy - 6xe^y dx = 0$
26. $(1+x)dy = 2ydx$
27. $(9+x^2)dy - (3y+1)dx = 0$
28. $\cos^2 x \cdot y' = y \ln y$
29. $xydx + (x+1)dy = 0$
30. $xy' + 2y = y^2$

Գտնել հավասարման մասնավոր լուծումը (31-41).

31. $(x^2 y - x^2)dy - xydx = 0$; $\quad y = 1$, երբ $x = e$

32. $(xy + x)dx - dy = 0$; $\quad y = e - 1$, երբ $x = 2$

33. $ydx + (1 - y)xdy = 0$; $\quad y = 1$, երբ $x = e$

34. $(1 - x^2)dy + xydx = 0$; $\quad y = 4$, երբ $x = 0$

35. $2y' = \frac{y^3}{x^2}$; $\quad y = 1$, երբ $x = 1$

36. $ydx + (1 - y)xdy = 0$; $\quad y = 1$, երբ $x = e$

37. $2(yx + y)dx - xdy = 0$; $\quad y = e^2$, երբ $x = 1$

38. $2dy - (1 + x^2)dx = 0$; $\quad y = 10$, երբ $x = 0$

39. $(2x - 1)dy - (y + 1)dx = 0$; $\quad y = 2$, երբ $x = 5$

40. $y' = \frac{y}{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}$; $\quad y = 4$, երբ $x = 4$

Առաջին կարգի համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումներ

Գտնել հավասարման ընդհանուր լուծումը (1-27).

1. $y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$

5. $y' = \frac{y}{x} + tg\,\frac{y}{x}$

2. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$

6. $y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$

3. $xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$

4. $xy' = y\ln\frac{y}{x}$

7. $x^3y' = x^2y$

8. $y' = \frac{y}{x} + \cos^2\frac{y}{x}$

9. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

10. $y' = \frac{2x-y}{x+2y}$

11. $yy' = 2y - x$

12. $x^2 + y^2 = 2xyy'$

13. $x^2y' = y^2 + xy$

14. $(x-y)ydx - x^2dy = 0$

15. $xyy' = x^2 + y^2$

16. $y' - \frac{y}{x} = \sin^2\frac{y}{x}$

17. $xy' = y + ye^{-\frac{y}{x}}$

18. $xy' + 2\sqrt{xy} = y$

19. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$

20. $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$

21. $xy' = y - x\sin\frac{y}{x}$

22. $x^2y' - 3y^2 = xy$

23. $xy' - 6\sqrt{xy} = y$

24. $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$

25. $y'\sin\frac{y}{x} = \frac{y}{x}\sin\frac{y}{x} + 2$

26. $y'\cos\frac{y}{x} = \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$

27. $xy' = y + \frac{x^2+y^2}{x}$

Գտնել սկզբնական պայմանին բավարարող լուծումը (28-30).

28. $x^2y' = y^2 - 2xy$; $y = 1$, երբ $x = 1$

29. $2xy' - 5\sqrt{xy} = 2y$; $y = \frac{25}{16}$, երբ $x = 1$

30. $xy' = y(1+\ln\frac{y}{x})$; $y = \frac{1}{\sqrt{e}}$, երբ $x = 1$

Առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումներ

Գտնել հավասարման ընդհանուր լուծումը (1-30).

1. $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$
2. $y' - \frac{3}{x+2}y = (x+1)^4$
3. $y' + \frac{4}{x+3}y = \frac{x}{(x+1)^4}$
4. $y' + \frac{5}{x}y = x+2$
5. $y' - \frac{3}{x+4}y = (x+4)^2$
6. $y' - \frac{7}{x}y = \frac{x^7}{1+x^2}$
7. $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^2\cos x$
8. $y' + \frac{4}{x-3}y = \frac{\sin 2x}{(x-3)^4}$
9. $y' + \frac{1}{\cos^2 x}y = x^2 e^{-tgx}$
10. $y' - \frac{y}{\sin^2 x}y = x^3 e^{-ctgx}$
11. $y' + ytgx = x^2\cos x$
12. $y' - \frac{2}{x}y = x^2 e^x$
13. $y' - \frac{3}{x}y = x^3\cos 2x$
14. $y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^{3x+1}}{x^2}$
15. $y' + \frac{5}{x-2}y = \frac{x^2}{(x-2)^5}$
16. $xy' - (2x-1)y = x^3 e^{2x}$
17. $(1+x)y' - 3y = (x+1)^4\sin 2x$
18. $y'\sin x - y\cos x = \sin 2x$
19. $y'\sin x - 2y\cos x = x^2\sin^3 x$
20. $y'\cos x + 2y\sin x = e^x\cos^3 x$
21. $y'\cos^2 x - y\sin 2x = x^3$
22. $y'(x+5) - 3y = (x+5)^4 e^{3x}$
23. $y' + y = e^{-x}(2x-1)$
24. $y' + 2y = e^{-2x}\cos x$
25. $y' - 3y = x^2 e^{3x}$
26. $y' + 4y = x^3 e^{-4x}$
27. $y' + \frac{20y}{x} = \frac{e^x}{x^{20}}$
28. $y' - 10\frac{y}{x} = x^{15}$
29. $y' - 10y = 15e^{10x}\sin 3x$
30. $y' + ytgx = \frac{4}{\cos x}$

Գտնել սկզբնական պայմանին բավարարող լուծումը (31-40).

31. $xy' - 2y = x^3 e^x$; $y = e$, երբ $x = 1$

32. $y' + 2y = x^2 e^{-2x}$; $y = 2$, երբ $x = 0$

33. $y' - \dfrac{3y}{x} = x^3 \sin x$; $y = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^3$, երբ $x = \dfrac{\pi}{2}$

34. $xy' + y = 3$; $y = 0$, երբ $x = 1$

35. $xy' - y = x^2 e^x$; $y = 2e^2$, երբ $x = 2$

36. $y' - ytgx = \dfrac{1}{\cos x}$; $y(0) = 0$

37. $xy' + y = x + 1$; $y(2) = 3$

38. $y' - 5y = e^{5x} \sin x$; $y(0) = 2$

39. $y' + 2xy = e^{-x^2} \cos x$; $y(0) = 5$

40. $y' - \dfrac{4y}{x} = x^3$; $y(1) = 3$

Լուծել Բեռնուլլիի հավասարումը (41-44).

41. $y' + 2xy = 2xy^2$

42. $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$

43. $y' - ytgx = -y^2 \cos x$

44. $xy' + y = y^2 \ln x$

Գտնել երկրորդ կարգի հավասարման ընդհանուր լուծումը (1-14).

1. $y'' = x + 6$
2. $y'' = 6x + \sin x$
3. $y'' = 8e^{2x} + \cos x$
4. $y'' = xe^x$
5. $y'' = (2x+1)\sin x$
6. $y'' = x \ln x$
7. $xy'' = y'$
8. $y'' = y' + x$
9. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$
10. $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$
11. $2yy'' = 1 + (y')^2$
12. $yy'' + (y')^2 = 0$
13. $yy'' = y' \ln y'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
14. $3y'y'' = 2y$, $y(0) = y'(0) = 1$

Երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումներ

Գտնել հավասարման ընդհանուր լուծումը (1-35).

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' + 2y' - 3y = 0$
3. $y'' - y' - 2y = 0$
4. $y'' + 5y' + 6y = 0$
5. $y'' - y' - 6y = 0$
6. $2y'' - 3y' + y = 0$
7. $3y'' + 2y' - 5y = 0$
8. $4y'' - 3y' - 10y = 0$
9. $2y'' + 5y' - 18y = 0$
10. $5y'' - 12y' + 4y = 0$
11. $y'' - 4y = 0$
12. $4y'' - 9y = 0$
13. $2y'' - 3y' = 0$
14. $y'' + 2y' = 0$
15. $3y'' - 5y' = 0$
16. $y'' - 2y' + y = 0$
17. $y'' + 4y' + 4y = 0$
18. $4y'' - 12y' + 9y = 0$
19. $y'' - 10y' + 25y = 0$
20. $9y'' - 6y' + y = 0$
21. $y'' + 6y' + 9y = 0$
22. $16y'' + 8y' + y = 0$
23. $y'' - 8y' + 16y = 0$
24. $4y'' - 20y' + 25y = 0$
25. $25y'' - 10y' + y = 0$
26. $y'' + y = 0$
27. $y'' + 4y = 0$
28. $y'' + 9y = 0$
29. $y'' - 4y' + 8y = 0$
30. $y'' + 2y' + 5y = 0$
31. $y'' - 6y' + 34y = 0$
32. $y'' + 6y' + 25y = 0$
33. $y'' - 8y' + 41y = 0$
34. $y'' + 2y' + 2y = 0$
35. $y'' - 2y' + 2y = 0$

Գտնել մասնավոր լուծումները (36-45).

36. $y'' - y' = 0$; $y(0) = 5$, $y'(0) = 2$
37. $y'' - 3y' + 2y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$
38. $y'' + 2y' + 5y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

39. $y''-10y'+25y=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=6$

40. $y''+6y'+9y=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=2$

41. $y''-6y'+5y=0$; $y(0)=2$, $y'(0)=6$

42. $y''-8y'+15y=0$; $y(0)=2$, $y'(0)=3$

43. $y''+5y'+4y=0$; $y(0)=2$, $y'(0)=4$

44. $y''-8y'+16y=0$; $y(0)=3$, $y'(0)=15$

45. $y''-4y'+13y=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=8$

Գտնել հավասարման ընդհանուր լուծումը (1-30).

1. $y''-y'+2y=4x$
2. $y''-2y'=32x-50$
3. $y''+5y'=10x+12$
4. $y''+2y'+y=3x+7$
5. $y''-3y'+2y=4x+4$
6. $4y''+4y'+y=3x+2$
7. $y''-3y'+2y=2x^2-4x-10$
8. $y''+y=x^2+2x-1$
9. $y''+4y'=12x^2+22x+4$
10. $y''-4y'+4y=4x^2+8x+6$
11. $y''+y'-2y=5e^{-x}$
12. $y''+y'-2y=6e^{x}$
13. $y''+y'-2y=9e^{-2x}$
14. $y''-y'=(2x+5)e^{x}$
15. $y''-2y'=(3x+1)e^{3x}$
16. $y''+9y=75e^{4x}$
17. $y''-y=(4x-4)e^{x}$
18. $y''-4y=-20x+16+12e^{2x}$
19. $y''+2y'+y=8e^{-x}$
20. $y''-4y'+4y=10e^{2x}$
21. $y''+3y'=10\sin x$
22. $y''-2y'-3y=12\sin x-8\cos x$
23. $y''+y=15\sin 2x$
24. $y''+4y=20\cos 3x$
25. $y''+2y'-3y=\sin x+\cos 2x$
26. $y''+y=\cos x$
27. $y''+9y=\sin 3x$
28. $y''-y=10\sin 2x-5\cos 2x$
29. $y''+2y'=5\sin x+6e^{-2x}$
30. $y''-2y'+y=4\cos x-8e^{x}+3x-5$

ԹՎԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐ

Ենթադրենք $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ անվերջ թվային հաջորդականություն է:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

արտահայտությունը կոչվում է թվային շարք, $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ թվերը՝ շարքի անդամներ, իսկ a_n-ը՝ շարքի ընդհանուր անդամ:

Շարքի առաջին n-անդամների գումարը նշանակում են S_n և անվանում n-րդ մասնակի գումար՝ $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$:

Շարքը կոչվում է զուգամետ, եթե նրա մասնակի գումարների $S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...$ հաջորդականությունը զուգամետ է, այսինքն՝ գոյություն ունի վերջավոր $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ սահմանը: Այդ դեպքում S-ը կոչվում է շարքի գումար: Եթե $\lim_{n\to\infty} S_n$ վերջավոր սահմանը գոյություն չունի , ապա շարքը կոչվում է տարամետ:

Զուգամետ շարքի օրինակ է անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամներից կազմված շարքը՝ $a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...$ ($|q|$<1): Նրա գումարը հավասար է՝ $S = \dfrac{a}{1-q}$:

Տարամետ շարքի օրինակ է հարմոնիկ շարքը՝ $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{n} + ...$, որը կազմված է բնական թվերի հակադարձներից:

Եթե շարքը զուգամետ է, ապա նրա ընդհանուր անդամը ձգտում է զրոյի՝ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$: Այս պայմանը շարքի զուգամիտության համար անհրաժեշտ, բայց ոչ բավարար պայման է:

Եթե $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, ապա շարքը տարամետ է (տարամիտության համար բավարար պայման):

Եթե $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n ...$ շարքը զուգամետ է և նրա գումարը S է, ապա զուգամետ է նաև $ca_1 + ca_2 + ca_3 + ... + ca_n + ...$ շարքը և նրա գումարը $c \cdot S$ է:

Եթե $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ և $b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots$ շարքերը զուգամետ են և ունեն համապատասխանաբար S և Q գումարներ, ապա՝ $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)+\ldots$ շարքը նույնպես զուգամետ է և նրա գումարը $(S+Q)$ է:

Դրական անդամներով շարքերի զուգամիտությունը ուսումնասիրելիս կարելի է օգտվել հետևյալ հայտանիշներից.

1.Բաղդատման հայտանիշ I.

Եթե $0 \le a_n \le b_n$ սկսած որևէ $n=n_0$ համարից, և $b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots$ շարքը զուգամետ է, ապա զուգամետ է նաև $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\ldots$ շարքը: Եթե $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\ldots$ շարքը տարամետ է, ապա $b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots$ շարքը նույնպես տարամետ է:

2.Բաղդատման հայտանիշ II.

Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$ վերջավոր սահմանը և $A\neq 0$, ապա $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\ldots$ և $b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots$ շարքերը միաժամանակ զուգամետ են կամ տարամետ :

3.Դալամբերի հայտանիշը.

Եթե $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\ldots$ դրական անդամներով շարքի համար գոյություն ունի $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$ սահմանը, ապա՝

ա) $\rho<1$ դեպքում շարքը զուգամետ է,

բ) $\rho>1$ դեպքում շարքը տարամետ է,

գ) $\rho=1$ դեպքում Դալամբերի հայտանիշը չի պարզում շարքի զուգամիտությունը:

4.Կոշիի հայտանիշ.

Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$ սահմանը, ապա $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքը՝

ա) $\rho<1$ դեպքում զուգամետ է,

բ) $\rho>1$ դեպքում տարամետ է,

գ) $\rho=1$ դեպքում Կոշիի հայտանիշը չի պարզում շարքի զուգամիտությունը:

5.Կոշիի ինտեգրալային հայտանիշը:

Եթե $a_n=f(n)$, որտեղ $f(x)$-ը մոնոտոն նվազող և անընդհատ ֆունկցիա է, երբ $x\geq a\geq 1$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքը և $\int_a^{\infty}f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը միաժամանակ զուգամետ են կամ տարամետ:

Օրինակ 1: Գտնել $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$ շարքի մասնակի գումարները և գումարը:

Օգտվելով $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ նույնությունից կունենանք `

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=$$
$$=1-\frac{1}{n+1}:$$

Այստեղից ` $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1:$

Օրինակ 2: Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{4}+\frac{2}{7}+\frac{3}{10}+\ldots+\frac{n}{3n+1}+\ldots$ շարքի զուգամիտությունը:

Շարքի ընդհանուր անդամն է`

$$a_n=\frac{n}{3n+1}:$$

Հաշվենք ընդհանուր անդամի սահմանը, երբ $n\to\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}:$$

Քանի որ զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը բավարարված չէ, հետևաբար շարքը տարամետ է:

Օրինակ 3: Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n2^n}+\ldots$ շարքի զուգամիտությունը կամ տարամիտությունը:

Այս շարքի ընդհանուր անդամի համար տեղի ունի $a_n=\frac{1}{n2^n}<\frac{1}{2^n}=b_n$ անհավասարությունը: Քանի որ $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ շարքը $q=\frac{1}{2}$ հայտարարով երկրաչափական պրոգրեսիայի շարքն է, որը զուգամետ է, ուստի զուգամետ է նաև տրված շարքը (ըստ բաղդատման հայտանիշի):

Օրինակ 4: Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$ շարքի զուգամիտությունը:

Տրված շարքը տարամետ է, քանի որ նրա $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ ընդհանուր անդամը մեծ է հարմոնիկ շարքի համապատասխան $b_n=\frac{1}{n}$ անդամից:

Օրինակ 5: Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+3}=\frac{1}{4}+\frac{2}{7}+\frac{3}{12}+\frac{4}{19}+\ldots+\frac{n}{n^2+3}+\ldots$ շարքի զուգամիտությունը:

Այս շարքը համեմատենք $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ հարմոնիկ շարքի հետ:

$a_n=\frac{n}{n^2+3}$, $b_n=\frac{1}{n}$: Հաշվենք սահմանը՝

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+3}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{n^2}}=1:$$

Քանի որ $A\neq 0$ և հարմոնիկ շարքը տարամետ է, ուստի տրված շարքը նույնպես տարամետ է (բաղդատման II հայտանիշ):

Օրինակ 6: Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{3}{9}+\frac{5}{27}+\frac{7}{81}+\ldots+\frac{2n-1}{3^n}+\ldots$ շարքի զուգամիտությունը Դալամբերի հայտանիշի միջոցով:

$$a_n = \frac{2n-1}{3^n};\ a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{3^{n+1}} = \frac{2n+1}{3^{n+1}};$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3^{n+1}} : \frac{2n-1}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{2n-1} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}\ :$$

Քանի որ $\rho = \frac{1}{3} < 1$, ուստի տրված շարքը զուգամետ է:

Օրինակ 7: Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$ շարքի զուգամիտությունը Դալամբերի հայտանիշի միջոցով:

$$a_n = \frac{3^n}{n\cdot 2^n};\ \ a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\ \Rightarrow$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{3}{2} > 1:$$

Ըստ Դալամբերի հայտանիշի շարքը տարամետ է, քանի որ $\rho > 1$:

Օրինակ 8: Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n = \frac{2}{1} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n + \ldots$ շարքի զուգամիտությունը:

Օգտվենք Կոշիի հայտանիշից: Շարքի ընդհանուր անդամն է՝

$$a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n :$$

Հաշվենք հետևյալ սահմանը՝

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1:$$

Շարքը զուգամետ է, քանի որ $\rho < 1$:

օրինակ 9: Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}+\ldots$ շարքի զուգամիտությունը:

Շարքի ընդհանուր անդամի մեջ փոխարինենք n -ը x -ով՝

$$a_n=\frac{1}{n\sqrt{n}},\ \ f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}:$$

Պարզ է որ $f(n)=a_n$ և $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ և մոնոտոն նվազող է $x\in[1,\infty)$ միջակայքում: Հաշվենք $\int_1^{\infty}f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը՝

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}dx=\lim_{a\to\infty}\int_1^{a}x^{\frac{-3}{2}}dx=\lim_{a\to\infty}\left(-2x^{\frac{-1}{2}}\right)\Bigg|_1^a=\lim_{a\to\infty}-2\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-1\right)=2:$$

Ինտեգրալը զուգամետ է և, հետևաբար, ըստ ինտեգրալային հայտանիշի, շարքը նույնպես զուգամետ է:

Օրինակ 10: Պարզել $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}=\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}+\ldots$ շարքի զուգամիտությունը:

$f(n)=a_n=\frac{1}{n\ln n}$ պայմանից ստանում ենք $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ ֆունկցիան, որն անընդհատ և մոնոտոն նվազող է $x\in[2,\infty)$ միջակայքում: Կոշիի ինտեգրալային հայտանիշի պայմանները բավարարված են: Հաշվենք անիսկական ինտեգրալը՝

$$\int_2^{\infty}f(x)dx=\lim_{a\to\infty}\int_2^{a}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{a\to\infty}\int_2^{a}\frac{d\ln x}{\ln x}=\lim_{a\to\infty}(\ln\ln x)\Big|_2^a=\lim_{a\to\infty}(\ln\ln a-\ln\ln 2)=\infty:$$

Ինտեգրալը տարամետ է, հետևաբար տարամետ է նաև տրված շարքը:

Նշանափոխ շարքեր

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ շարքը կոչվում է նշանափոխ, եթե այն պարունակում է ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական անվերջ թվով անդամներ:

Եթե $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n| + ...$ շարքը զուգամետ է, ապա զուգամետ է նաև $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը, որին անվանում են բացարձակ զուգամետ շարք: Իսկ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է, բայց $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ շարքը տարամետ՝ ապա պայմանական, կամ ոչ բացարձակ զուգամետ շարք:

Օրինակ 11: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n}$ շարքը բացարձակ զուգամետ շարք է, քանի որ $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$ շարքը զուգամետ է:

Օրինակ 12: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2} = \frac{\sin \alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + ... + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + ...$ շարքը նշանափոխ $(\alpha \neq \pi k)$ և բացարձակ զուգամետ շարք է, քանի որ $\left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, իսկ $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ...$ շարքը զուգամետ է: Ըստ բաղդատման I հայտանիշի զուգամետ է նաև $\frac{|\sin \alpha|}{1^2} + \frac{|\sin 2\alpha|}{2^2} + ... + \frac{|\sin n\alpha|}{n^2} + ...$ շարքը:

Շարքը կոչվում է նշանահերթափոխ, եթե դրական և բացասական անդամները իրար հերթով հաջորդում են:

Լայբնիցի հայտանիշը: Նշանահերթափոխ շարքը՝

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1} a_n + ...$, $(a_n > 0)$ զուգամետ է, եթե՝

1. $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_n \geq ...$,
2. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$:

Այդ դեպքում շարքի S գումարը բավարարում է $0 < S < a_1$, իսկ շարքի R_n մնացորդը՝ $|R_n| < a_{n+1}$ պայմանին:

Օրինակ 13: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$ շարքը զուգամետ է, քանի որ՝

1. նշանահերթափոխ է,
2. $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$,
3. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$:

Այս շարքի գումարը փոքր է մեկից՝ $0 < S < a_1 = 1$ (իրականում $S = \ln 2 < 1$):

Այս շարքը պայմանական զուգամետ է, քանի որ նրա անդամների բացարձակ արժեքներից կազմված շարքը ՝ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$,

հարմոնիկ շարքն է, որը տարամետ է:

Օրինակ 14: $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{\ln n}+\ldots$ շարքը նույնպես բավարարում է Լայբնիցի թեորեմի պայմաններին՝

1. նշանահերթափոխ է,
2. $\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{\ln 4} > \frac{1}{\ln 5} > \ldots > \frac{1}{\ln n} > \ldots$,
3. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = 0$:

Հետևաբար զուգամետ է: Սա նույնպես պայմանական զուգամետ շարքի օրինակ է, քանի որ $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+\ldots+\frac{1}{\ln n}+\ldots$ շարքի անդամները գերազանցում են $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ տարամետ շարքի համապատասխան անդամները՝ $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$:

Օրինակ 15: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt{n}}=1-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{8}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt{n}}+\ldots$ շարքը ակնհայտ է, որ զուգամետ է (ըստ Լայբնիցի հայտանիշի): Այս շարքը նաև բացարձակ զուգամետ է՝ $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}+\ldots$ շարքը զուգամետ է (տես օրինակ 9-ը):

Օրինակ 16: Գտնել $S=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}+\ldots$ շարքի գումարը 0.01 ճշտությամբ:

Քանի որ $|R_n|<a_{n+1}$, գտնենք այն n-ը, որ $\frac{1}{(n+1)!}<0.01$ կամ $(n+1)!>100$: Քանի որ $5!=120>100$, ուրեմն n=4 և $S\approx S_4=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}=0.625$: Այսպիսով՝ $S\approx 0.63$ 0.01 ճշտությամբ:

Աստիճանային շարքեր

Աստիճանային շարք է կոչվում՝

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0).+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$$

տեսքի շարքը, որտեղ $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$-ը և x_0-ն հաստատուններ են, իսկ x-ը անկախ փոփոխականն է: Եթե նշանակենք $x-x_0=t$, ապա աստիճանային շարքը կընդունի $a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_nt^n+\ldots$ տեսքը:

$x=x_0$ կետը կոչվում է $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ շարքի զուգամիտության կետ, եթե $a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_0^n+\ldots$ թվային շարքը զուգամետ է: Շարքի զուգամիտության կետերի բազմությանը անվանում են զուգամիտության տիրույթ:

Եթե աստիճանային շարքը ունի 0-ից տարբեր, ինչպես զուգամիտության, այնպես էլ տարամիտության կետեր, ապա գոյություն ունի այնպիսի թիվ, որ շարքը բացարձակ զուգամիտում է

$(-R;R)$ միջակայքի ցանկացած x արժեքի դեպքում, և տարամիտում է ցանկացած x-երի դեպքում, որոնց համար $|x|>R$ $(x\in(-\infty,-R)\cup(R,\infty))$:

$x=\pm R$ կետերում շարքի զուգամիտությունը ուսումնասիրվում է առանձին:

R-ը կոչվում է զուգամիտության շառավիղ: Եթե $R=0$, ապա շարքը զուգամետ է միայն $x=0$ կետում:

Եթե $R=\infty$, ապա շարքը զուգամետ է ամբողջ թվային առանցքի վրա՝ $x\in(-\infty;\infty)$:

Եթե շարքի գործակիցները տարբեր են զրոյից՝ $a_n\neq 0$, ապա զուգամիտության շառավիղը կարելի է գտնել հետևյալ բանաձևով՝

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|:$$

Աստիճանային շարքը կարելի է անդամ առ անդամ ածանցել և ինտեգրել զուգամիտության միջակայքի ներսում, ընդ որում, ստացված շարքը կունենան նույն զուգամիտության միջակայքը:

Օրինակ 17: Գտնել $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$ շարքի զուգամիտության տիրույթը:

Այս շարքում $a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}$, իսկ $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$, գտնենք նրա զուգամիտության շառավիղը՝

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\cdot 2^n}:\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n2^n}\cdot(n+1)2^{n+1}\right)=2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=2:$$

$x\in(-2;2)$ միջակայքում շարքը զուգամետ է, իսկ $|x|>2$, այսինքն՝ $x\in(-\infty:-2)\cup(2;\infty)$ միջակայքում՝ տարամետ:

Երբ $x=2$, կստանանք $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ հարմոնիկ շարքը, որը տարամետ է:

Երբ $x=-2$, ապա կստանանք $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots$ շարքը, որը զուգամետ է ըստ Լայբնիցի հայտանիշի: Այսպիսով, շարքի զուգամիտության տիրույթն է՝ $x\in[-2;2)$:

Օրինակ 18: Գտնել $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^2}$ շարքի զուգամիտության տիրույթը:

Նշանակենք $x+2=t$: Շարքը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}=\frac{t}{1^2}+\frac{t^2}{2^2}+\frac{t^3}{3^2}+\ldots+\frac{t^n}{n^2}+\ldots,$$

այստեղ $a_n=\frac{1}{n^2}$ և $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$: Գտնենք զուգամիտության շառավիղը՝

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}:\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\lim_{n\leftarrow\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\lim_{n\leftarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1:$$

$-1<t<1$ միջակայքում շարքը զուգամետ է: Քննարկենք միջակայքի ծայրակետերում շարքի զուգամիտության հարցը:

Երբ $t=1$, ապա ստանում ենք $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$ շարքը, որը զուգամետ է: Իրոք, կիրառենք ինտեգրալային հայտանիշը:

Դիտարկենք $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ֆունկցիան, քանի որ $a_n=\frac{1}{n^2}=f(n)$:

Հաշվենք $\int_1^{\infty}f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը՝

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}x^{-2}dx=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^A\right)=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{A}+1\right)=1:$$

Քանի որ ինտեգրալը զուգամետ է, հետևաբար շարքը նույնպես զուգամետ է:

Երբ $t=-1$, ստանում ենք $-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots$ նշանահերթափոխ շարքը, որը բացարձակ զուգամետ է: Այսպիսով $t\in[-1;1]$ միջակայքում շարքը զուգամետ է: Քանի որ $t=x+2$, ուստի $-1\le x+2\le 1$, այսինքն $-3\le x\le -1$ միջակայքում տրված շարքը զուգամետ է:

Զուգամիտության տիրույթն է՝ $[-3;-1]$ հատվածը:

Օրինակ 19: Գտնել հետևյալ շարքի զուգամիտության տիրույթը.

$$\frac{x}{5}+\frac{x^3}{5^2}+\frac{x^5}{5^3}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{5^n}+\ldots :$$

Այստեղ $a_{2k}=0$, հետևաբար զուգամիտության շառավիղը հաշվելու բանաձևը կիրառելի չէ: Օգտվենք Դալամբերի հայտանիշից.

$$U_n(x)=\frac{x^{2n-1}}{5^n},\ U_{n+1}(x)=\frac{x^{2(n+1)-1}}{5^{n+1}}=\frac{x^{2n+1}}{5^{n+1}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{5^{n+1}}\div\frac{x^{2n-1}}{5^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{x^{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{5}=\frac{x^2}{5}:$$

Երբ $\rho<1$, շարքը զուգամետ է՝ $\frac{x^2}{5}<1 \ \Rightarrow\ x^2<5$ կամ $|x|<\sqrt{5}$, հետևաբար $-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ միջակայքում շարքը զուգամետ է: Պարզենք շարքի զուգամիտությունը այս միջակայքի ծայրակետերում:

Երբ $x=\sqrt{5}$, ստանում ենք՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{5}\right)^{2n-1}}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{5}\right)^{2n}}{5^n\cdot\sqrt{5}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{5^n\cdot\sqrt{5}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots$$

տարամետ շարքը:

Երբ $x=-\sqrt{5}$, նույն ձևով ստանում ենք՝ $-\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots+\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\ldots$ նույնպես տարամետ շարքը:

Այսպիսով, շարքի զուգամիտության տիրույթն է $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$ միջակայքը:

Օրինակ 20: Գտնել շարքի զուգամիտության տիրույթը.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots :$$

Գտնենք շարքի զուգամիտության շառավիղը՝

$$a_n = \frac{1}{n!},\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!\cdot(n+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!} : \frac{1}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

հետևաբար շարքը զուգամետ է $x \in (-\infty;\infty)$ ամբողջ թվային առանցքի վրա:

Օրինակ 21: Գտնել $\sum_{n=1}^{\infty} n!\cdot x^n$ շարքի զուգամիտության տիրույթը:

Շարքի զուգամիտության շառավիղը` $R = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$, հետևաբար շարքը զուգամետ է միայն $x = 0$ կետում:

Օրինակ 22: Գտնել $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$ շարքի գումարը:

Նախ գտնենք զուգամիտության շառավիղը`

$$R = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} \div \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1:$$

Շարքը $x \in (-1;1)$ միջակայքում որոշում է մի $f(x)$ ֆունկցիա, որի համար $f(0) = 0$ և $f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$: Հաշվենք $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը $(-1;1)$ միջակայքի ցանկացած x կետում`

$$f'(x) = x' + \left(\frac{x^2}{2}\right)' + \left(\frac{x^3}{3}\right)' + \ldots + \left(\frac{x^n}{n}\right)' + \ldots = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots:$$

Ստացված շարքը $q = x$ հայտարարով երկրաչափական պրոգրեսիա է: Քանի որ` $|q| = |x| < 1$, ուստի $f'(x) = \frac{1}{1-x}$ և

$$f(x) = \int_0^x f'(x)dx = \int_0^x \frac{1}{1-x}dx = -\ln|1-x|\Big|_0^x = -\ln|1-x| = \ln\frac{1}{|1-x|} = \ln\frac{1}{1-x}$$

(քանի որ $x \in [-1;1) \Rightarrow |1-x| = 1-x$):

Օրինակ 23: Քանի որ $x \in (-1;1)$ մաջակայքում

$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots$, ուստի կարող ենք անդամ առ անդամ ինտեգրել $[0;x)$ միջակայքում, որտեղ $x\in(-1;1)$

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^x dx-\int_0^x x^2dx+\int_0^x x^4dx+\ldots+(-1)^n\int_0^x x^{2n}dx\ldots$$

$$arctgx\Big|_0^x=x\Big|_0^x-\frac{x^3}{3}\Big|_0^x+\frac{x^5}{5}\Big|_0^x+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^x+\ldots$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

Այս շարքը զուգամետ է $(-1;1]$ միջակայքում: Երբ x=1, ստանում ենք $\left(arctg1=\frac{\pi}{4}\right), \frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\ldots$:

Այստեղից ստանում ենք π թվի մոտավոր արժեքները հաշվելու հնարավորություն՝

$$\pi\approx 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}\right):$$

Թեյլորի շարք

Ենթադրենք $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետի որևէ $|x-x_0|<R$ շրջակայքում ունի բոլոր ածանցյալները մինչև $(n+1)$-րդ կարգը ներառյալ:

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

արտահայտությունը կոչվում է x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի n -րդ աստիճանի բազմանդամ:

$$f(x)=T_n(x)+r_n(x)$$

բանաձևը կոչվում է x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիայի համար Թեյլորի բանաձև, $r_n(x)$-ը Թեյլորի բանաձևի մնացորդային անդամ: Մնացորդային անդամի համար Լագրանժը ստացել է հետևյալ տեսքը՝

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

որտեղ $x<t<x_0$ կամ $x_0<t<x$ միջակայքերի ինչ որ կետ է:

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի բոլոր կարգի ածանցյալները, ապա կարելի է կազմել հետևյալ շարքը, որը կոչվում է x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի շարք.

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots:$$

$f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է Թեյլորի շարքի ծնող ֆունկցիա: Թեյլորի շարքը զուգամիտում է $f(x)$ ծնող ֆունկցիային այն և միայն այն դեպքում, երբ Թեյլորի բանաձևում $r_n(x)$ մնացորդային անդամը x_0 կետի որոշ շրջակայքի բոլոր x կետերում ձգտում է զրոյի: Այդպես կլինի, օրինակ, եթե $f(x)$ ֆունկցիայի բոլոր ածանցյալները լինեն սահմանափակ՝ $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M; n=1,2,3,\ldots$:

Եթե ֆունկցիան վերածվում է աստիճանային շարքի ինչ որ միջակայքում՝ $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, ապա այն միակն է և համընկնում է ֆունկցիայի Թեյլորի շարքի հետ, այսինքն՝

$$a_0=f(x_0),\ a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ \ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}:$$

Երբ $x_0=0$՝ ստանում ենք Մակլորենի շարքը.

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots:$$

Բերենք մի քանի հիմնական տարրական ֆունկցիաների Մակլորենի շարքի վերածման օրինակներ.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots(-\infty<x<\infty);$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots(-\infty<x<\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots (-\infty < x < \infty);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \ldots (-1 < x < 1);$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n \ldots (-1 < x < 1):$$

Օրինակ 24: Վերլուծել Մակլորենի շարքի $f(x) = xe^{-2x}$ ֆունկցիան:

Օգտվենք e^x-ի շարքից: Նրա մեջ x-ը փախարինելով (-2x)-ով կստանանք՝

$$e^{-2x} = 1 + \frac{(-2x)}{1!} + \frac{(-2x)^2}{2!} + \frac{(-2x)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-2x)^n}{n!} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{(2x)}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n (2x)^n}{n!} + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = xe^{-2x} = x - \frac{2}{1!}x^2 + \frac{2^2}{2!}x^3 - \frac{2^3}{3!}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^n 2^n x^{n+1}}{n!} + \ldots:$$

Քանի որ աստիճանային շարքի վերլուծումը միակն է, ուստի ստացվածը որոնելի շարքն է:

Օրինակ 25: Վերլուծել Մակլորենի շարքի $f(x) = \cos^2 x$ ֆունկցիան:

Օգտվենք $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$ նույնությունից.

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} - \frac{2^5 x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} - \frac{2^5 x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}:$$

Օրինակ 26: Վերլուծել Մակլորենի շարքի $f(x) = \ln(10+x)$ ֆունկցիան:

$$\ln(10+x) = \ln 10(1+\frac{x}{10}) = \ln 10 + \ln\left(1+\frac{x}{10}\right):$$

Օգտվենք $\ln(1+x)$ շարքից, նրա մեջ x-ը փոխարինենք $\frac{x}{10}$-ով, կստանանք՝

$$\ln(10+x)=\ln 10+\frac{x}{10}-\frac{x^2}{2\cdot 10^2}+\frac{x^3}{3\cdot 10^3}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n10^n}+\ldots:$$

Օրինակ 27: Վերլուծել Մակլորենի շարքի $f(x)=\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$ ֆունկցիան:

Նախ $f(x)$-ը ներկայցնենք պարզ կոտորակների գումարի տեսքով՝

$$\frac{3x-5}{x^2-4x+3}=\frac{3x-5}{(x-3)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}\ \Rightarrow\ 3x-5=A(x-1)+B(x-3);$$

Վերցնենք՝ $x=1$, կունենանք՝ $3\cdot 1-5=B(1-3)\Rightarrow B=1;$

Վերցնենք՝ $x=3$, կունենանք՝ $3\cdot 3-5=A(3-1)\Rightarrow A=2:$

Այսպիսով ստացանք, որ $f(x)=\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x-1}:$

Քանի որ՝ $\frac{2}{\mathrm{x}-3}=\frac{2}{-3(1-\frac{\mathrm{x}}{3})}=\frac{-2/3}{1-\frac{\mathrm{x}}{3}}$,

$$-\frac{2}{3}\left(1+\frac{\mathrm{x}}{3}+\frac{\mathrm{x}^2}{3^2}+\frac{\mathrm{x}^3}{3^3}+\ldots+\frac{\mathrm{x}^n}{3^n}+\ldots\right)=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3^2}\mathrm{x}-\frac{2}{3^3}\mathrm{x}^2-\frac{2}{3^4}\mathrm{x}^3+\ldots+\left(\frac{-2}{3^{n+1}}\right)\mathrm{x}^n+\ldots$$

վերլուծությունը ճիշտ է, երբ $\frac{|x|}{3}<1$, այսինքն $|x|<3$ միջակայքում, իսկ նույն կերպ ստանում ենք, որ

$$\frac{1}{x-1}=\frac{-1}{1-x}=-(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots)=-1-x-x^2-\ldots-x^n+\ldots$$

վերլուծությունը ճիշտ է $|x|<1$ միջակայքում, ուստի ստացվում է

$$f(x)=\left(-\frac{2}{3}-\frac{2}{3^2}x-\frac{2}{3^3}x^2+\ldots(\frac{-2}{3^{n+1}})x^n+\ldots\right)+\left(-1-x-x^2-\ldots-x^n+\ldots\right)=$$

$$-\frac{5}{3}-\left(1+\frac{2}{3^2}\right)x-\left(1+\frac{2}{3^3}\right)x^2-\ldots-\left(1+\frac{2}{3^{n+1}}\right)x^n+\ldots$$

վերլուծությունը, որը ճիշտ է, երբ $|x|<1$, այսինքն $-1<x<1$ միջակայքում:

Օրինակ 28: Հաշվենք e թիվը 0.001 ճշտությամբ:

Հայտնի է, որ $2<e<3$: Օգտվենք Մակլորենի շարքից`

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots:$$

Երբ x=1, ստանում ենք`

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots:$$

Եթե վերցնենք շարքի առաջին n անդամները, մնացած անդամները դեն նետենք ,ապա սխալի բացարձակ արժեքը կարելի է գնահատել օգտվելով մնացորդային անդամի Լագրանժի տեսքից`

$$|r_n(x)|=\frac{e^t|x|^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{e^t\cdot 1^{n+1}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!},$$

քանի որ $0<t<1$, հետևաբար $e^t<e^1<3$: n-ը ընտրենք այնպես, որ $\frac{3}{(n+1)!}<0.001$, կամ որ նույնն է` $(n+1)!>3000$: Բավական է վերցնել n=6, քանի որ $(6+1)!=7!=5040>3000$: Այսպիսով`

$$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}\approx 2.718:$$

Օրինակ 29: Հաշվենք $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ ինտեգրալը 0.0001 ճշտությամբ:

Գրենք $\sin x$ ֆունկցիայի Մակլորենի շարքը`

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots,$$

երկու կողմն էլ բաժանենք $x\neq 0$ -ի վրա`

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots:$$

Ստացած վերլուծությունը ճիշտ է $x\in(-\infty,\infty)$ ամբողջ թվային ուղղի վրա, հետևաբար այն կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել ցանկացած միջակայքում՝

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^x 1dx - \int_0^x \frac{x^2}{3!}dx + \int_0^x \frac{x^4}{5!}dx - \int_0^x \frac{x^6}{7!}dx + \ldots = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots :$$

Երբ x=1, ստանում ենք՝

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \ldots :$$

Ստացած շարքը նշանահերթափոխ է, հետևաբար նրա մնացորդը չի գերազանցում առաջին դեն նետվող անդամը: Քանի որ $\frac{1}{7\cdot 7!} < 0.00003 < 0.0001$, ուստի բավական է վերցնել՝

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} \approx 0.9461:$$

Օրինակ 30: Հաշվենք $\int_0^{0.5} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ ինտեգրալը 0.001 ճշտությամբ:

e^x ֆունկցիայի վերլուծության մեջ x-ի փոխարեն տեղադրենք $-\frac{x^2}{2}$, կստանանք՝

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 1!} + \frac{x^4}{2^2\cdot 2!} - \frac{x^6}{2^3\cdot 3!} + \frac{x^8}{2^4\cdot 4!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx = x - \frac{x^3}{3\cdot 2\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2^2\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 2^3\cdot 3!} + \ldots:$$

Վերցնենք $x = \frac{1}{2}$, կստանանք՝ $\int_0^{1/2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3\cdot 3\cdot 2\cdot 1!} + \frac{1}{2^5\cdot 5\cdot 2^2\cdot 2!} -$

$$- \frac{1}{2^7\cdot 7\cdot 2^3\cdot 3!} + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 16} + \frac{1}{5\cdot 2^8} - \frac{1}{7\cdot 2^{10}\cdot 3!} + \ldots :$$

Քանի որ՝ $\frac{1}{7\cdot 2^{10}\cdot 3!} = \frac{1}{7\cdot 1024\cdot 6} < \frac{1}{42000} < \frac{1}{10000}$, ուստի բավական է վերցնել առաջին երեք անդամները՝

$$\int_0^{0.5} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{48} + \frac{1}{5\cdot 256} = \frac{1920 - 80 + 3}{3\cdot 5\cdot 256} \approx 0.4799:$$

Օրինակ 31: Հաշվենք $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - arctgx}{x^3}$:

Վերածենք շարքի $arctgx$ ֆունկցիան՝

$$arctgx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^x \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\right)dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots :$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - arctgx}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots\right) - \left(x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3!}\right) - x^5\left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{5!}\right) + \ldots}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3!}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5!}\right)x^2 + \ldots\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}:$$

Տեսական հարցեր

1. Թվային շարքի գումարի սահմանումը: Զուգամետ և տարամետ շարքեր:
2. Զուգամետ շարքերի հատկությունները:
3. Շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը: Հարմոնիկ շարքի տարամիտությունը:
4. Բաղդատման հայտանիշները:
5. Դալամբերի հայտանիշը:
6. Կոշիի հայտանիշը:
7. Ինտեգրալային հայտանիշը:
8. Բացարձակ և պայմանական զուգամիտություններ:
9. Լայբնիցի հայտանիշը: Շարքի մնացորդի գնահատումը:
10. Աստիճանային շարքի սահմանումը: Զուգամիտության տիրույթ: Զուգամիտության շառավիղ:
11. Աբելի թեորեմը: Աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը:
12. Աստաճանային շարքերի հատկությունները:
13. Թեյլորի շարքը և Մակլորենի շարքը:
14. Թեյլորի շարքի զուգամիտությունը ծնող ֆունկցիային:

15. Թեյլորի շարքի մնացորդային անդամը Լագրանժի տեսքով:

16. $f(x)=e^x$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=\ln(1+x)$ և $f(x)=(1+x)^m$ ֆունկցիաների Մակլորենի շարքերը:

Առաջարկվող խնդիրներ

Պարզել շարքի զուգամիտությունը՝ օգտվելով զուգամիտության սահմանումից: Զուգամիտության դեպքում գտնել շարքի գումարը.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})=\ln 2+\ln(1+\frac{1}{2})+\ln(1+\frac{1}{3})+\ldots$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\ldots$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots$

6. $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2n}=1+e^{-2}+e^{-4}+e^{-6}+\ldots$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}=1+0+1+0+1+\ldots$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 9. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

Ապացուցել շարքի տարամիտությունը օգտվելով շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանից.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+5}{n}}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{5n-1}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-3}{3n^2+4n+5}$

4.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+10}}$ 7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n-1}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n}{3^{n+1}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n+1}{n+2}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^{n+3}+5}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{3}$

Պարզել շարքի զուգամիտությունը օգտվելով բաղդատման հայտանիշներից.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{5n^3+3n}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3n^2+1}$

Պարզել շարքի զուգամիտությունը Դալամբերի հայտանիշով.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n(n+1)}$ 16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot 3^n+4}{5^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n4^n}$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)n}{3^{n+1}}$ 17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n5^n}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n5^n}{(n+1)7^n}$ 13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$ 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n+1}}{7^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}$ 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5\cdot 2^n-3}$ 19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n!}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n-1}}{10^n}$ 15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 2^n+5}{2\cdot 3^n+1}$ 20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

Պարզել շարքի զուգամիտությունը Կոշիի հայտանիշով.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{e^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\right)^n$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\pi^n\cdot 3^{-n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\pi^n\cdot e^{-n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3}{2n^2+n+1}\right)^n$

Օգտվելով ինտեգրալային հայտանիշից պարզել շարքի զուգամիտությունը.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

6. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$

7. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{n^2}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{1+n^2}$

Պարզել նշանափոխ շարքերի զուգամիտությունը.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2}n$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$

7. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$

8. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln^4 n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n+1}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2^n\alpha}{2^n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(\ln(n+1))^n}$

13. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\pi n$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{3n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^3+2}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2n+1}$

Գտնել աստիճանային շարքերի զուգամիտության տիրույթը.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{2n}}{10^n}$

3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(\ln 10)^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}x^n$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n3^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^3}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{5^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}2^nx^n$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}\cdot 3^n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n\sqrt[3]{n}}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$

21.

Գտնել շարքի գումարը.

1. $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$

2. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$

3. $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$

4. $1-3x^2+5x^4+\ldots+(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}+\ldots$

5. $1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\ldots+n(n+1)x^{n-1}$

Վերածել Մակլորենի շարքի.

1. $f(x)=xe^x$
2. $f(x)=xe^{x^2}$
3. $f(x)=\sin x^2$
4. $f(x)=\sin^2 x$
5. $f(x)=\sin 2x+x\cos 2x$
6. $f(x)=\sin 2x$
7. $f(x)=x\ln(1+x)$
8. $f(x)=\sqrt{1+x}$
9. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$
10. $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$
11. $f(x)=\dfrac{3}{(x-1)(1+3x)}$
12. $f(x)=\dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$
13. $f(x)=\ln(10+x)$
14. $f(x)=\ln(1-x^2)$

Հաշվել մոտավոր արժեքը 0.001 ճշտությամբ.

1. $\int_0^{0.1}\dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$
2. $\int_0^{0.5}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$
3. $\int_0^1\cos\sqrt{x}dx$
4. $\int_0^1\sin x^2dx$
5. $\int_0^{0.5}\dfrac{dx}{1+x^3}$
6. $\int_0^{0.5}\dfrac{arctgx}{x}dx$
7. $\int_0^{0.5}\dfrac{dx}{1+x^4}$
8. $\int_0^{1/2}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}dx$
9. $\int_0^{2/3}\dfrac{\ln(1+x^3)}{x^2}dx$
10. $\int_0^{1/2}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}dx$
11. $\int_0^{1/2}\dfrac{x-\sin x}{x^3}dx$
12. $\int_0^{1/2}\dfrac{1-\cos x}{x^2}dx$
13. $\int_0^{1/2}\dfrac{\sin^2 3x}{x^2}dx$
14. $\sqrt{e}$
15. $\sqrt[3]{80}$
16. $\sqrt[4]{72}$
17. $\sin 36^0$
18. $\cos 5^0$

19. $\sqrt[4]{78}$

20. e^{-2}

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ