ПРИКЛАДНИЙ СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ В PYTHON. ЧАСТИНА I

Навчальний посібник

Ігор Мірошниченко

Юлія Хлевна

2025-08-30

Зміст

# Передмова

Цей посібник створено для тих, хто хоче не просто вивчати статистику, а розуміти, як вона працює на практиці — у даних, рішеннях, дослідженнях. Ми починаємо з простого, але фундаментального — з біноміального критерію — і поступово розширюємо горизонти: від гіпотез й довірчих інтервалів до - та -критеріїв та Монте-Карло моделювання.

Кожен розділ поєднує теоретичне підґрунтя, інтерпретації, візуалізації і, що важливо, реалізацію в Python. Це не академічна теорія заради теорії. Тут — статистика як інструмент: перевіряти гіпотези, оцінювати ефекти, шукати закономірності та ухвалювати обґрунтовані рішення.

Цей посібник буде корисним:

* студентам, які хочуть навчитися статистичного мислення;
* дослідникам, які працюють з експериментами;
* аналітикам, які мають справу з вибірками та оцінками;
* і всім, хто не хоче просто “вивчити формули”, а прагне зрозуміти суть.

Ми не обіцяємо, що буде завжди легко. Але гарантуємо, що буде зрозуміло.

## Як користуватись цим посібником

Цей посібник можна проходити послідовно — від першої теми до останньої — або звертатись до окремих розділів за потреби. Щоб отримати максимум користі, ось кілька порад:

1. Читайте, але й кодьте. Теорія дає розуміння, але практика — вміння. Якщо бачите фрагмент коду — спробуйте його виконати, змінити параметри, подивитись, що буде.
2. Грайте з прикладами. В багатьох місцях можна змінити дані, розміри вибірки чи рівень значущості — робіть це. Так найкраще приходить інтуїція.
3. Повертайтесь назад. Якщо на якомусь етапі щось здається складним, це нормально. Часто новий матеріал “вмикає” краще розуміння попереднього.
4. Не бійтесь помилятись. Статистика — це не про ідеальні відповіді, а про ймовірності, невизначеність і пояснення того, що ми бачимо.
5. Задавайте собі питання:
   * Яку гіпотезу ми тут перевіряємо?
   * Що означає результат?
   * Що буде, якщо змінити розмір вибірки чи очікувану різницю?
   * Як це застосувати в моїй сфері?
6. Не ігноруйте “інтерпретацію”. Це не просто розділ — це ключ до розуміння. Бо мало просто отримати результат — важливо знати, що він означає.

Досліджуйте далі. Цей посібник — стартова платформа. Якщо вам цікаво — глибше копати тільки вітається.

## Попередні налаштування Python

Для роботи з цим посібником вам знадобиться Python. В процесі написання ми використовували наступні глобальні бібліотеки та змінні:

import numpy as np  
import seaborn as sns  
import matplotlib.pyplot as plt  
import random  
import time  
from statsmodels.stats.proportion import proportion\_confint  
from IPython.display import Markdown, display  
  
from scipy.stats import (  
 norm,  
 binom,  
 expon,  
 binomtest,  
 chisquare,  
 t,  
 chi2,  
 pareto,  
 ttest\_1samp,  
 ttest\_ind,  
 sem,  
 bernoulli,  
 uniform,  
 gamma  
)  
  
np.random.seed(73)  
  
sns.despine(left=True, bottom=True)  
base\_size = 13  
sns.set\_style("whitegrid")  
palette = sns.color\_palette("Set2")  
sns.set\_palette(palette)  
sns.set\_context("talk")  
  
plt.rcParams['figure.figsize'] = (8, 3.5)  
plt.rcParams['font.size'] = 12  
plt.rcParams['axes.labelsize'] = 12  
plt.rcParams['axes.titlesize'] = 12  
plt.rcParams['xtick.labelsize'] = 8  
plt.rcParams['ytick.labelsize'] = 8  
plt.rcParams['legend.fontsize'] = 8  
plt.rcParams['figure.titlesize'] = 12  
plt.rcParams['grid.color'] = (0.5, 0.5, 0.5, 0.1)  
plt.rcParams['axes.spines.top'] = False  
plt.rcParams['axes.spines.right'] = False  
plt.rcParams['axes.spines.left'] = False  
plt.rcParams['axes.spines.bottom'] = False  
  
red\_pink = "#e64173"  
turquoise = "#20B2AA"  
orange = "#FFA500"  
red = "#fb6107"  
blue = "#181485"  
navy = "#150E37FF"  
green = "#8bb174"  
yellow = "#D8BD44"  
purple = "#6A5ACD"  
slate = "#314f4f"

Рядки 1-7,9-24

Ці бібліотеки використовуються для статистичних обчислень, візуалізації та роботи з даними.

Рядок 26

Встановлюємо випадкове зерно для відтворюваності результатів.

Рядки 28-33

Налаштовуємо стиль графіків для кращої візуалізації.

Рядки 35-47

Налаштовуємо параметри графіків для кращої візуалізації.

Рядки 49-58

Визначаємо кольори для графіків.

# Вступ

В умовах сучасної інформаційної епохи, коли дані стали ключовим ресурсом для ухвалення рішень у всіх сферах людської діяльності, володіння методами статистичного аналізу перетворилося з вузькоспеціалізованої навички на фундаментальну компетенцію сучасного фахівця. Дисципліна “Прикладний статистичний аналіз” відіграє центральну роль у підготовці аналітиків, дослідників, інженерів, маркетологів, економістів та науковців, надаючи їм інструментарій для перетворення сирих даних на знання, висновки та обґрунтовані стратегії.

Значення цієї дисципліни полягає в її здатності формалізувати роботу з невизначеністю. Вона дозволяє робити достовірні висновки про великі сукупності (генеральні сукупності) на основі аналізу їхніх менших частин (вибірок), оцінювати ризики, перевіряти гіпотези та виявляти закономірності там, де на перший погляд панує хаос. Саме статистика дає змогу відрізнити випадковий збіг від значущого ефекту, що є критично важливим для бізнесу, науки та технологій.

У системі підготовки фахівця прикладний статистичний аналіз посідає унікальне міждисциплінарне місце. Він тісно пов’язаний з:

* **Вищою математикою**, спираючись на фундаментальні поняття теорії ймовірностей.
* **Програмуванням та інформаційними технологіями**, оскільки сучасний аналіз даних неможливий без використання програмних засобів, таких як мова Python та її спеціалізовані бібліотеки (scipy, statsmodels, numpy).
* **Машинним навчанням та наукою про дані** (Data Science), для яких статистичні методи є теоретичною основою для розробки та валідації алгоритмів.
* **Фаховими дисциплінами** (економікою, соціологією, біологією, медициною), надаючи універсальні методи для проведення експериментів, A/B-тестування, клінічних досліджень та аналізу ринкових даних.

Основна мета цього навчального посібника — сформувати у студентів не лише теоретичне розуміння статистичних концепцій, а й стійкі практичні навички їх застосування для розв’язання реальних задач.

Перед студентом у процесі вивчення дисципліни стоять такі **основні завдання**:

1. Опанувати логіку та апарат перевірки статистичних гіпотез як основи доказового підходу.
2. Навчитися коректно формулювати нульову та альтернативну гіпотези відповідно до поставленої задачі.
3. Вивчити ключові статистичні критерії (біноміальний, -критерій Фішера, -критерій Стьюдента), розуміти їхні припущення, переваги та обмеження.
4. Зрозуміти концепції статистичної потужності, величини ефекту та довірчих інтервалів для адекватної оцінки результатів аналізу.
5. Набути навичок програмної реалізації статистичних тестів мовою Python, інтерпретації та візуалізації отриманих результатів.

**Студент знатиме**:

* Основні поняття: генеральна сукупність, вибірка, параметр, статистика.
* Теоретичні основи та логіку перевірки статистичних гіпотез.
* Визначення та інтерпретацію рівня значущості (), -значення, помилок першого та другого роду.
* Принципи побудови та застосування біноміального критерію, -критерію Фішера та -критерію Стьюдента.
* Концепцію Центральної граничної теореми та її роль у статистичному висновуванні.
* Визначення статистичної потужності та мінімальної величини ефекту (MDE).
* Принципи побудови та інтерпретації довірчих інтервалів.
* Основи застосування методу Монте-Карло для валідації статистичних критеріїв.

**Студент вмітиме:**

* Формулювати статистичні гіпотези для практичних задач.
* Обирати адекватний статистичний критерій залежно від типу даних та умов задачі.
* Реалізовувати розрахунки за допомогою функцій з бібліотек scipy.stats та statsmodels у Python.
* Розраховувати та інтерпретувати -значення для ухвалення рішення про відхилення нульової гіпотези.
* Обчислювати довірчі інтервали для оцінки параметрів генеральної сукупності.
* Аналізувати статистичну потужність експерименту та розраховувати необхідний розмір вибірки.
* Критично оцінювати результати статистичного аналізу, розрізняючи статистичну значущість та практичну важливість ефекту.

Цей посібник має виразну практичну спрямованість і побудований за принципом “від простого до складного”, що дозволить крок за кроком опанувати інструменти, які є невіддільною частиною арсеналу сучасного аналітика.

# 1. Біноміальний критерій

## 1.1 Генеральна сукупність та вибірка

Ви вирішили створити платформу онлайн-курсів з програмування. Ви записали навчальні відео та запропонували користувачам доступ за передплатою. Вартість курсу для студента становить 1000 гривень, а витрати на підтримку платформи та індивідуальні консультації коштують вам 500 гривень з кожного студента.

Проте ви помічаєте, що деякі люди відмовляються від курсу після першого заняття, якщо матеріал їм здається складним або нецікавим. Інвестори готові підтримати ваш проєкт, якщо рівень відмов буде нижче 50%.

Щоб це перевірити, ви проводите експеримент: залучаєте 30 нових студентів. 20 із них проходять курс й оплачують доступ, а 11 відмовляються. 20 — це більше половини, але чи достатньо цього, щоб довести перспективність проєкту?

Розв’язуючи таку задачу, ми припускаємо, що існує певна аудиторія, яка користуватиметься нашим сервісом. Цю групу називають **генеральною сукупністю**. Якщо запустити сервіс для всіх потенційних користувачів, у ньому буде певна частка успішних випадків, позначимо її як . Це невідомий параметр, який ми не можемо визначити безпосередньо. Натомість ми можемо проводити експерименти та **досліджувати** результати. Оскільки протестувати продукт на всій аудиторії неможливо, ми беремо **вибірку** з генеральної сукупності та аналізуємо частку успішних випадків.

Згідно з результатами нашого експерименту, спостережувана ймовірність оплати становить [[1]](#footnote-25). Це означає, що 67% студентів оплатили доступ. Чи можемо ми зробити висновок, що справжня частка успішних випадків перевищує 50%?

Розгляньмо, чому отримане значення *може не бути* переконливим доказом. Припустимо, що ймовірність успішної оплати дорівнює , і змоделюємо можливі результати для 30 студентів.

Давайте спростимо цю задачу до прикладу з підкиданням монетки та змоделюємо результати для 30 спроб:

* Якщо монетка випаде орлом, студент оплачує доступ.
* Якщо монетка випаде решкою, студент відмовляється від курсу.
* Використаємо метод integers()[[2]](#footnote-26) до класу Generator, яка генерує випадкові цілі числа в заданому діапазоні.
* Підкинемо монетку 30 разів та порахуємо кількість успішних випадків.

rng = np.random.default\_rng(seed=18)  
  
n = 30  
results = rng.integers(0, 1, size = 30, endpoint = True)  
success = np.sum(results) / n  
  
print(f"Кількість успішних випадків: {round(success, 3) \* 100}%")

Рядок 1

Ініціалізуємо генератор випадкових чисел з фіксованим seed.

Рядок 3

Кількість студентів.

Рядок 4

Генеруємо випадкові числа для кожного студента.

Рядок 5

Обчислюємо частку успішних випадків.

Рядок 7

Виводимо результат.

Кількість успішних випадків: 70.0%

Ми бачимо, що в експерименті частка успішних випадків навіть перевищила 63%, тоді як у симуляції була закладена ймовірність 50%.

Тому, на жаль, ми не можемо з абсолютною точністю визначити, яким є справжнє значення у генеральній сукупності та чи перевищує воно 50%, незалежно від того, скільки спостережень ми проводимо. Однак, застосовуючи методи прикладної статистики, ми зможемо використати інструменти, які допоможуть ухвалити правильне рішення, зокрема й у цьому випадку.

## 1.2 Статистичні гіпотези

### 1.2.1 Постановка задачі

Ми з’ясували, що навіть за ймовірності можна отримати значну кількість успішних випадків. Насправді ми спеціально підбирали seed для отримання такого результату. Якщо повторити цей експеримент з іншим значенням seed або збільшити кількість спостережень, результат може виявитися іншим.

|  |
| --- |
| Порада |
| Спробуйте змінити seed (наприклад 22) або кількість спостережень та перевірте, як змінюється результат. |

Тож велика кількість успішних випадків може бути результатом випадковості. Щоб вирішити, чи можна вважати результати експерименту **статистично значущими** необхідно отримати відповідь на питання:

Чи можна вважати, що спостережуване значення є більшим від ?

Звернімося до теорії ймовірностей. Факт підписки на наш сервіс для кожного окремого студента можна розглядати як випадкову величину , яка підпорядковується розподілу Бернуллі[[3]](#footnote-32). Параметр цього розподілу, а саме ймовірність успіху, нам невідомий.

де — ймовірність успіху.

Нас цікавить підтвердження того, що . У статистиці для перевірки гіпотез розглядають дві можливості (Neyman and Pearson (1933)):

* **Нульова гіпотеза** () формулюється як твердження, яке ми прагнемо спростувати.
* **Альтернативна гіпотеза** () висловлює припущення, яке ми хочемо довести.

Скорочено це записують як:

Зауважимо, що якщо в нашому експерименті з 30 студентами можна дивитися не на частку успіхів, а на їх **кількість**.

Тоді питання можна переформулювати так:

За умови вірності наскільки ймовірно отримати 20 або більше успішних випадків з 30?

Якщо ми проводимо незалежних спостережень, то сума цих випадкових величин також підпорядковується біноміальному розподілу[[4]](#footnote-33).

де — випадкова величина, яка показує успіх у -му спостереженні, — кількість успішних випадків у спостереженнях, — кількість спостережень, — ймовірність успіху.

Давайте подивимось, як це виглядає графічно. Для цього побудуємо графік функції щільності ймовірностей для біноміального розподілу з параметрами та .

n = 30  
mu = 0.5  
  
x = np.arange(0, n + 1)  
y = binom.pmf(x, n, mu)  
  
plt.bar(x, y, color=turquoise)  
plt.bar(x[x >= 20], y[x >= 20], color=red\_pink)  
plt.xlabel("Кількість успішних випадків")  
plt.ylabel("Ймовірність")  
plt.show()

Рядок 1

Кількість студентів.

Рядок 2

Ймовірність успіху.

Рядок 4

Створюємо масив з усіма можливими значеннями кількості успішних випадків.

Рядок 5

Обчислюємо ймовірності для кожної кількості успішних випадків.

Рядок 7

Створюємо гістограму з ймовірностями.

Рядок 8

Виділяємо ймовірності для кількості успішних випадків, які є більшими або рівними 20.

|  |
| --- |
| Рисунок 1.1: Візуалізація функції щільності ймовірностей для біноміального розподілу |

Ціановим[[5]](#footnote-39) кольором позначено ймовірності для кожної кількості успішних випадків. Рожевими виділено ймовірності для кількості успішних випадків, яка перевищує або дорівнює 20.

### 1.2.2 Критерій

Щойно ми розробили алгоритм, який на основі вибірки або визнає наявність доказів на користь , або повідомляє, що таких доказів немає. Відповідно, він або відхиляє , або не відхиляє її.

Такий алгоритм називається **критерієм**. Його можна подати у вигляді функції , яка приймає реалізацію вибірки та повертає , якщо слід відхилити , та в іншому випадку.

Давайте припустимо, що ми вирішили відхилити , якщо кількість успішних випадків перевищує або дорівнює 21. Тоді критерій набуде вигляду:

Зазвичай скорочують запис і пишуть просто правило, за яким відхиляємо

Позначимо , , тоді критерій набуває вигляду:

Так влаштована більшість класичних критеріїв у прикладній статистиці, тому величинам у ньому дано спеціальні назви. називається **статистикою критерію**, — **критичним значенням**.

може бути будь-якою функцією від вибірки, яку ви вважаєте логічною для перевірки гіпотези. У нашому випадку це кількість успіхів, або сума всіх . Але ви можете вибрати й інші: максимальне значення, суму перших 5 значень або навіть просто перший елемент.

### 1.2.3 Критична область

Знову перепишемо наше основне запитання, тільки тепер з використанням нашого критерію :

Наскільки часто може бути таке, що за справедливості критерій відхиляє гіпотезу?

Відповідь на це запитання залежить від критичного значення. Зараз ми взяли його рівним 21, побачивши на [рисунку 1.1](#fig-binom-pmf), що великі відхилення відбуваються при рідко. Але що означає рідко й наскільки рідко, не сказали. Тепер наша мета зрозуміти, як вибрати критичне значення , виходячи з **частоти помилок** нашого критерію.

Вибираючи , ми можемо або часто відхиляти нульову гіпотезу, коли мале, або можемо робити це рідше, коли велике. Щоб вибрати правильне значення, потрібно визначитися, коли наш критерій помиляється.

* . Якщо відхиляти гіпотезу при отриманні хоча б 16 успішних підписок із 30, то це навряд чи влаштує інвесторів. Так, успіхів більше половини. Але якщо в генеральній сукупності ймовірність 0.5, то майже в половині випадків ми будемо відхиляти гіпотезу. Критерій помилково повертає , тобто це помилка **хибно позитивна** (false positive, **FP**).
* . У такому разі будемо відхиляти гіпотезу тільки за 29 або 30 успіхів. Ці значення, звісно, говорять про те, що відхилення від 50% успіхів сильне. Але якщо в генеральній сукупності ймовірність, наприклад, 60%, то такі значення будуть виходити рідко. Але ж такі ймовірності теж влаштували б інвесторів, й ми б змогли відкрити стартап! А з таким критерієм ми навряд чи доб’ємося цього. Не відхилити гіпотезу , коли вона неправильна — це теж помилка. Вона називається **хибно негативна** (false negative, **FN**), оскільки критерій повернув 0 помилково.

У нашому завданні інвесторам важливіше хибно позитивна помилка. Їм дуже не хочеться потрапити в ситуацію, коли їм показали доказ успішності бізнесу, а виявилося, більшість користувачів відмовляється оформлювати підписку й компанія не отримує прибуток. Це призведе до збитків. Хибно негативна помилка призведе до того, що ви втратите успішний бізнес, але інвестори грошей не втратять.

Тому виберемо поріг, щоб ймовірність хибно позитивної помилки була задовільною, або ж **частота хибнопозитивних спрацьовувань** (False Positive Rate, FPR). Для цього треба зрозуміти, як часто ми будемо відхиляти гіпотезу, за умови вірності .

Тепер знову переформулюємо основне питання, повністю з використанням нових термінів, й врешті-решт відповімо на нього.

Який FPR у критерію для перевірки гіпотези проти ?

Коли є вірною, щоб порахувати кількість успіхів ми проводили 30 разів підкидання монетки з ймовірністю орла . Кількість орлів (тобто успіхів) у такому експерименті має розподіл, який називається біноміальним, тобто при наша статистика має біноміальний розподіл .

Обчислимо FPR для

Це вже ймовірність події за конкретного розподілу випадкової величини. Його можна подивитися за таблицею або, що зручніше, обчислити з використанням мов програмування.

### 1.2.4 Обчислення FPR

Давайте порахуємо суму ймовірностей для кількостей успіхів від 21 до 30 включно. Покажемо графічно, як це виглядає на [Рисунку 1.2](#fig-binom-pmf-fpr).

x = np.arange(0, n + 1)  
y = binom.pmf(x, n, 0.5)  
  
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 3))  
plt.bar(x, y, color=turquoise)  
plt.bar(x[x >= crit\_subs], y[x >= crit\_subs], color=red\_pink)  
for i in range(crit\_subs - 2, crit\_subs + 4):  
 plt.text(i + 0.5, y[i] + 0.001, f"{round(y[i] \* 100, 1)}%",  
 ha='center', va='bottom', size=8, rotation = 30)  
plt.xlabel("Кількість успішних випадків")  
plt.ylabel("Ймовірність")  
plt.show()

Рядок 1

Створюємо масив з усіма можливими значеннями кількості успішних випадків.

Рядок 2

Обчислюємо ймовірності для кожної кількості успішних випадків.

Рядок 5

Створюємо гістограму з ймовірностями.

Рядок 6

Виділяємо ймовірності для кількості успішних випадків, яка є більшою або рівною 21.

Рядки 7-9

Додаємо текст до гістограми.

|  |
| --- |
| Рисунок 1.2: Ймовірність хибно відхилити за умови її вірності |

Залишається лише обчислити суму ймовірностей для кількостей успіхів від 21 до 30 включно. Це і буде нашим FPR.

У нашому випадку це буде 2.1%. Якщо FPR не перевищує деякої константи , то критерій називається критерієм **рівня значущості** . Статистичний критерій з = 100% створити тривіально — достатньо завжди відхиляти — тому така постановка не має сенсу.

Рівень значущості зазвичай обирають на основі бізнес-міркувань. Він позначає те, який ризик неправильного прийняття позитивного рішення ми вважаємо прийнятним. Зазвичай беруть , але якщо потрібне більш точне ухвалення рішення, можуть вибрати , , . Якщо ж рішення не таке критичне, можуть вибрати .

Припустимо, вибрали значення , скористаємося критерієм : тобто якщо кількість успішних випадків перевищує або дорівнює 21, то відхиляємо .

Якщо уважно подивитись на [Рисунок 1.2](#fig-binom-pmf-fpr), то можна помітити, що ми можемо відхиляти при кількості успіхів від 20, а не 21, оскільки такий все ще буде відповідати :

Якщо ж обрати 19, то FPR буде більше :

## 1.3 Статистичні функції в Python

У цій частині подивимося, як вивести те, що ми отримали в частині 2, за допомогою Python. А також зрозуміємо, як знайти відповідне за допомогою Python.

### 1.3.1 Біноміальний розподіл

Ми з’ясували, що статистика має біноміальний розподіл.

Біноміальний розподіл — розподіл кількості успіхів у послідовності з незалежних випадкових експериментів, ймовірність успіху в кожному з яких дорівнює .

Щоб працювати з розподілом, можна створити об’єкт-розподіл за допомогою бібліотеки scipy.stats (SciPy community (2023)).

from scipy.stats import binom  
  
n = 30  
mu = 0.5  
  
binom\_dist = binom(n, mu)

Рядок 3

Кількість спостережень.

Рядок 4

Ймовірність успіху.

Рядок 6

Створюємо об’єкт біноміального розподілу.

### 1.3.2 Функція ймовірностей

Функція ймовірності дискретного розподілу — ймовірність, з якою приймає значення .

У Python це функція pmf (probability mass function).

result = binom\_dist.pmf(20)  
print(f"Ймовірність отримати 20 успішних випадків: {result:.4f}")

Ймовірність отримати 20 успішних випадків: 0.0280

Зобразимо розподіл статистики за справедливості на графіку. Для цього можна передати відразу масив точок, для яких треба розрахувати ймовірність.

x = np.arange(0, n + 1)  
y = binom\_dist.pmf(x)  
  
crit\_subs = 21  
  
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 2.5))  
plt.bar(x, y, color=turquoise, label="Ймовірність успіхів")  
plt.bar(x[x >= crit\_subs], y[x >= crit\_subs],  
 color=red\_pink, label="Критичне значення")  
plt.xlabel("Кількість успішних випадків")  
plt.ylabel("Ймовірність")  
plt.show()

Рядок 1

Масив точок.

Рядок 2

Розрахунок ймовірностей.

Рядок 4

Критичне значення.

Рядок 7

Ймовірність успіхів.

Рядки 8-9

Критичне значення.

|  |
| --- |
| Рисунок 1.3: Функція щільності ймовірностей біноміального розподілу |

Насправді вже зараз ми можемо порахувати ймовірність потрапляння в критичну область. Потрібно просто підсумувати ймовірності для кількостей успіхів від 21 до 30.

result = np.sum(y[crit\_subs:])  
print(f"Ймовірність потрапляння в критичну область: {result:.4f}")

Ймовірність потрапляння в критичну область: 0.0214

Отже, ми дійсно побудували критерій рівня значущості . Ба більше, це критерій рівня значущості 0.021.

А що якби ми взяли ?

crit\_subs = 19  
result = np.sum(y[crit\_subs:])  
print(f"Ймовірність потрапляння в критичну область: {result:.4f}")

Ймовірність потрапляння в критичну область: 0.1002

Тоді ймовірність помилки вже навіть більше , що зовсім нам не підходить.

А якщо ?

crit\_subs = 20  
result = np.sum(y[crit\_subs:])  
print(f"Ймовірність потрапляння в критичну область: {result:.4f}")

Ймовірність потрапляння в критичну область: 0.0494

Видно, що немає такого , щоб FPR був рівно .

### 1.3.3 Кумулятивна функція розподілу

Кумулятивна функція розподілу задається формулою:

У Python це метод cdf() (Cumulative Distribution Function).

result = binom\_dist.cdf(19)  
print(f"Ймовірність отримати 19 або менше успішних випадків: {result:.4f}")

Ймовірність отримати 19 або менше успішних випадків: 0.9506

А оскільки , можемо обчислити рівень значущості нашого критерію.

result = 1 - binom\_dist.cdf(19)  
print(f"Ймовірність потрапляння в критичну область: {result:.4f}")

Ймовірність потрапляння в критичну область: 0.0494

### 1.3.4 Квантиль

Щоб вибрати критичну область для критерію, ми хотіли б знайти точку, площа стовпців праворуч від якої була б . Тобто площа стовпців зліва — . Така точка називається *квантилью*.

Але при й нашому біноміальному розподілі, такої точки немає. Ми з’ясували, що є точка, праворуч від якої площа , а в наступної вже . Щоб визначити квантиль у цьому випадку, модифікуємо визначення. Квантиль — величина, яку не перевищує з імовірністю хоча б . Тобто .

**Приклад 1.1** Для величини порахуємо 0.95-квантиль. Вирішимо задачу просто підбором.

Бачимо, що 18 нам ще не підходить, а 19 й більші значення вже підійдуть. У них функція розподілу буде більшою за . Відповідь — найменше відповідне значення, тобто 19. При цьому немає точки, де функція розподілу дорівнювала б в точності.

Якби розподіл був неперервним, можна було б сказати, що квантиль — це таке , на якому функція розподілу дорівнює . Але для дискретного розподілу такого може не бути.

У Python квантиль можна порахувати через методу ppf() (Percent Point Function).

result = binom\_dist.ppf(0.95)  
print(f"0.95-квантиль: {result}")

0.95-квантиль: 19.0

Як тепер підібрати для будь-яких й для будь-якого рівня значущості ?

1. Потрібно знайти , таке що
2. Тобто потрібно
3. приймає тільки цілі значення: , або
4. Отже, з визначення квантилі,
5. Значить

def find\_crit\_subs(n, mu, alpha):  
 """  
 Знаходить критичне значення для біноміального розподілу.  
  
 n: кількість спостережень  
 mu: ймовірність успіху  
 alpha: рівень значущості  
 """  
 binom\_dist = binom(n, mu)  
 return binom\_dist.ppf(1 - alpha) + 1  
  
  
result = find\_crit\_subs(30, 0.5, 0.05)  
print(f"Критичне значення для n = 30, mu = 0.5, alpha = 0.05: {result}")

Рядок 1

Функція, що приймає кількість спостережень, ймовірність успіху та рівень значущості.

Рядок 9

Створюємо об’єкт біноміального розподілу.

Рядок 10

Повертаємо критичне значення.

Критичне значення для n = 30, mu = 0.5, alpha = 0.05: 20.0

Критичне значення , отже підсумковий критерій має такий вигляд:

, значить гіпотезу ми не відкидаємо.

При цьому нам вдалося побудувати процес, за яким ми ухвалюємо рішення для будь-якого рівня значущості та значення статистики критерію.

## 1.4 -значення

Зауважимо, що зараз, якщо нам зададуть іншу , нам доведеться перебудовувати критерій заново. Це не зовсім зручно. У статистиці є механізм *-значення*, який дає змогу прийняти рішення для всіх відразу.

### 1.4.1 Більш екстремальні значення

Припустимо, ми провели експеримент й порахували для критерію його статистику . Позначимо отримане значення , у поточній задачі це . Якби кількість успішних підписок була більшою, це б сильніше свідчило на користь альтернативної гіпотези . Тобто в разі значення ми були б ще сильніше впевнені в тому, що наш бізнес буде окупатися. Тоді значення називається *більш екстремальним*, ніж значення . У нашій задачі більш екстремальним із двох значень є те, яке більше.

Визначимо поняття екстремальності формально:

Найчастіше критерії інших видів можна привести до цього, тоді для них теж визначено поняття екстремальності.

### 1.4.2 -значення

**p-value** — це ймовірність отримати таке або більш екстремальне значення статистики за умови вірності (Wasserman (2004)).

|  |
| --- |
| Рисунок 1.4: -значення для критерію |

Тепер виведемо формулу через функції Python:

Зобразимо на графіку область більш екстремальних значень й p-value для різних значень статистики.

|  |
| --- |
| Рисунок 1.5: -значення для критерію |

Можна побачити, що в критичній області -значення , а поза нею -значення . Саме таке правило й використовується для прийняття рішення.

Причому за -значення одразу видно, що якби в нашу критичну область включили значення , наш критерій допускав би FPR у випадків, що вже неприпустимо. Тому й гіпотезу ми не відкидаємо.

Зауважимо, що для обчислення -значення не знадобилося знання , а потрібна була тільки статистика й форма критерію.

## 1.5 Двосторонні критерії

До цього моменту нас цікавили відхилення від ймовірності в тільки в один бік. І логічно, адже це продиктовано бізнесом. Тільки велика частка успішних підписок призведе до успіху. І зазвичай при прийнятті рішень так й буває. **При тестуванні нового рішення або продукту розглядають альтернативну гіпотезу тільки в бік поліпшення**, тому що в іншому разі немає сенсу впроваджувати рішення на всіх користувачів.

Однак **іноді** може знадобитися доводити відхилення в обидва боки, якщо ви перевіряєте якесь припущення. Нехай вам дали монетку й просять перевірити, чесна вона чи ні. Монетка чесна, якщо під час підкидання ймовірність випадання орла дорівнює . Ви підкидаєте монетку разів, кожен кидок — бернуллівська величина, аналогічно завданню з сервісом освітніх послуг. Нульова гіпотеза та ж сама: . Але тепер ми хочемо відкидати цю гіпотезу як у разі великої ймовірності орла, так і в разі маленької, відповідно перевіряємо *двосторонню гіпотезу*.

Виберемо критичну область для критерію за такої альтернативи. Скористаємося тією ж статистикою . Тільки тепер відхилення в кожну сторону однаково важливі. Відкидати гіпотезу будемо не тільки на досить великих значеннях, а й на досить маленьких. Наприклад, якщо у нас було всього орла з — це свідчення на користь того, що , але не на користь .

Оскільки відхилення в різні боки однаково важливі, а розподіл симетричний, шукати критерій можна в такому вигляді:

### 1.5.1 Як вибрати критичну область

Для двостороннього критерію потрібно вибрати таку область, щоб ймовірність потрапляння в неї була . Тобто

Але оскільки розподіл симетричний, то

Подивимося, який вигляд матиме критична область у такому разі. Для цього зобразимо функцію ймовірностей біноміального розподілу, а також критичну область.

|  |
| --- |
| Рисунок 1.6: Двостороння критична область для критерію |

На [рисунку 1.6](#fig-binom-pmf-two-sided) можемо побачити, що якщо тепер відкидати відхилення за , то необхідно відкидати й , а отже, загальна площа стовпців буде вже приблизно . Тому за рівня значущості й успіхів гіпотеза вже не відкинеться.

Якщо ж виставити , то така область уже підходить, площа стовпців .

Щоб вибрати порогову константу за формулою, можна помітити, що критична область симетрична, а значить праворуч площа не повинна бути більшою, ніж . А таку задачу ми вже вміємо розв’язувати.

Реалізуємо функцію на Python.

def find\_crit\_subs\_two\_sided(n, mu, alpha):  
 """  
 Знаходить критичне значення для двостороннього біноміального розподілу.  
  
 n: кількість спостережень  
 mu: ймовірність успіху  
 alpha: рівень значущості  
 """  
 binom\_dist = binom(n, mu)  
 return n / 2 - binom\_dist.ppf(alpha / 2) + 1  
  
result = find\_crit\_subs\_two\_sided(30, 0.5, 0.05)  
print(f"Критичне значення для n = 30, mu = 0.5, alpha = 0.05: {result}")

Рядок 1

Функція для знаходження критичного значення.

Рядок 9

Створюємо об’єкт біноміального розподілу.

Рядок 10

Знаходимо критичне значення.

Критичне значення для n = 30, mu = 0.5, alpha = 0.05: 6.0

### 1.5.2 Як знайти -значення

Критерій має вигляд

Позначимо відхилення суми від 15 як , тоді ми маємо критерій

Тобто більш екстремальними вважатимуться ті значення суми, що знаходяться далі від 15. Щоб обчислити -значення, доведеться порахувати суму площ із двох сторін окремо.

def pvalue\_two\_sided\_sym(n, q):  
 """  
 Обчислює p-значення для двостороннього біноміального розподілу.  
  
 n: кількість спостережень  
 q: значення статистики критерію  
 """  
 binom\_h0 = binom(n=n, p=0.5)  
 diff = np.abs(q - 15)  
 right\_sq = 1 - binom\_h0.cdf(15 + diff - 1)  
 left\_sq = binom\_h0.cdf(15 - diff)  
 return left\_sq + right\_sq  
  
result = pvalue\_two\_sided\_sym(30, 21)  
print(f"p-значення для q = 21: {result:.4f}")

Рядок 1

Функція для обчислення -значення.

Рядок 8

Створюємо об’єкт біноміального розподілу.

Рядок 9

Обчислюємо відхилення від 15.

Рядок 10

Обчислюємо праву площу.

Рядок 11

Обчислюємо ліву площу.

Рядок 12

Повертаємо суму площ.

p-значення для q = 21: 0.0428

Насправді через симетричність розподілу ліва й права площа виходять однаковими, тому можна порахувати площу з одного боку й помножити на 2.

def pvalue\_two\_sided\_sym\_simple(n, q):  
 """  
 Обчислює p-значення для двостороннього біноміального розподілу.  
  
 n: кількість спостережень  
 q: значення статистики критерію  
 """  
 binom\_h0 = binom(n=n, p=0.5)  
 diff = np.abs(q - 15)  
 right\_sq = 1 - binom\_h0.cdf(15 + diff - 1)  
 return 2 \* right\_sq  
  
result = pvalue\_two\_sided\_sym\_simple(30, 21)  
print(f"p-значення для q = 21: {result:.4f}")

p-значення для q = 21: 0.0428

Тепер навіть у разі орлів -значення , тому відкидати будемо значення, починаючи з й менші або такі, що дорівнюють .

### 1.5.3 Випадок із несиметричним розподілом

Коли розподіл за справедливості несиметричний, відхилення від очікуваного значення в різні боки можуть бути по-різному критичними. Як приклад розглянемо також біноміальний розподіл, але з імовірністю успіху .

Тоді можна ліву і праву критичні області побудувати окремо, виділивши на них по площі. Праву область ми вже вміємо шукати, знайдемо ліву.

fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 2.5))  
binom\_h0\_nonsym = binom(n=30, p=0.8)  
probs = binom\_h0\_nonsym.pmf(np.arange(31))  
  
plt.bar(np.arange(31), probs, color=turquoise, label="Binom(30, 0.8)")  
plt.legend()  
plt.show()

Рядок 2

Створюємо об’єкт біноміального розподілу з ймовірністю успіху .

Рядок 3

Обчислюємо ймовірності для всіх можливих значень.

|  |
| --- |
| Рисунок 1.7: Біноміальний розподіл з імовірністю успіху |

Для того, щоб побудувати двосторонній критерій, потрібно знайти ліворуч і праворуч області, площа яких становить не більше, ніж . Для правого боку ми вже розв’язували таку задачу, розв’яжемо для лівого.

Шукаємо , таке що

Спочатку знайдемо перше число, де ймовірність . А це за визначенням -квантиль. Достатньо взяти попереднє число, і воно буде задовольняти нашій умові.

def two\_sided\_criterion\_nonsym(n, mu, alpha):  
 """  
 Знаходить критичні значення для двостороннього біноміального розподілу.  
  
 n: кількість спостережень  
 mu: ймовірність успіху  
 alpha: рівень значущості  
 """  
 binom\_h0 = binom(n=n, p=mu)  
 c2 = binom\_h0.ppf(1 - alpha/2) + 1  
 c1 = binom\_h0.ppf(alpha/2) - 1  
 return c1, c2  
  
result = two\_sided\_criterion\_nonsym(30, 0.8, 0.05)  
print(f"Критичні значення для n = 30, mu = 0.8, alpha = 0.05: {result}")

Критичні значення для n = 30, mu = 0.8, alpha = 0.05: (18.0, 29.0)

Отже, наш критерій для перевірки гіпотези

має вигляд

Тут межа уже має логічний вигляд, бо треба спростувати 80% орлів/успіхів, а для цього потрібна велика їхня кількість.

Зобразимо критичну область на графіку.

C1, C2 = two\_sided\_criterion\_nonsym(30, 0.8, 0.05)  
  
x = np.arange(31)  
  
plt.bar(x, probs, color=turquoise, label="Binom(30, 0.8)")  
plt.bar(x[x <= C1], probs[x <= C1],  
 color=red\_pink, label="Критичне значення")  
plt.bar(x[x >= C2], probs[x >= C2],  
 color=red\_pink)  
   
plt.xlabel("Кількість успішних випадків")  
plt.ylabel("Ймовірність")  
plt.legend(loc = 'upper left')  
plt.show()

Рядок 1

Знаходимо критичні значення

Рядок 3

Створюємо масив значень для графіка.

Рядок 5

Будуємо графік біноміального розподілу.

Рядки 6-7

Відзначаємо ліву критичну область.

Рядки 8-9

Відзначаємо праву критичну область.

|  |
| --- |
| Рисунок 1.8: Двостороння критична область для критерію |

### 1.5.4 -значення для несиметричного розподілу

Цей критерій — об’єднання двох критеріїв рівня значущості , для кожного з яких можна порахувати -значення. Позначимо їх як . Перший критерій відкидається при , другий при . А наш об’єднаний, коли виконано одну з цих умов, тобто

Отже, можна рахувати -значення як й порівнювати з .

Проведемо аналогію із симетричним випадком: якщо сума опинилася в лівій частині, то потрібно порахувати -значення лівого критерію і помножити на 2. Якщо сума опинилася в правій частині, то потрібно порахувати -значення правого критерію і помножити на 2.

def pvalue\_two\_sided(n, q, mu=0.5):  
 """  
 Обчислює p-значення для двостороннього біноміального розподілу.  
  
 n: кількість спостережень  
 q: значення статистики критерію  
 mu: ймовірність успіху  
 """  
 binom\_h0 = binom(n=n, p=mu)  
 pvalue\_left = binom\_h0.cdf(q)  
 pvalue\_right = 1 - binom\_h0.cdf(q - 1)  
 return 2 \* min(pvalue\_left, pvalue\_right)  
  
result = pvalue\_two\_sided(30, 28, 0.8)  
print(f"p-значення для q = 28: {result:.4f}")

Рядок 1

Функція для обчислення -значення:

Рядок 9

Створюємо об’єкт біноміального розподілу.

Рядок 10

Обчислюємо -значення для лівого критерію.

Рядок 11

Обчислюємо -значення для правого критерію.

Рядок 12

Повертаємо -значення.

p-значення для q = 28: 0.0884

Видно, що -значення , отже, на рівні значущості навіть успіхів недостатньо, щоб відкинути ймовірність успіху в .

Зауважимо, що ця ж функція працює і для симетричного випадку, повертаючи той самий результат.

result = pvalue\_two\_sided(n=30, q=20, mu=0.5)  
print(f"p-значення для q = 20: {result:.4f}")

p-значення для q = 20: 0.0987

result = pvalue\_two\_sided\_sym(n=30, q=20)  
print(f"p-значення для q = 20: {result:.4f}")

p-значення для q = 20: 0.0987

## 1.6 Готові функції

Звісно, можна використати готові функції з бібліотеки scipy. Для цього використаємо функцію binomtest, котра має параметри:

* k — кількість успіхів
* n — кількість спостережень
* p — ймовірність успіху
* alternative — тип гіпотези:
  + two-sided: двостороння
  + greater: правостороння
  + less: лівостороння

from scipy.stats import binomtest  
  
result = binomtest(19, 30, 0.5, alternative='two-sided')  
  
print(f"Статистика: {result.statistic:.2f}")  
print(f"p-значення: {result.pvalue:.4f}")

Рядок 1

Імпортуємо функцію binomtest.

Рядок 3

Викликаємо функцію з параметрами.

Рядки 5-6

Виводимо статистику та -значення.

Статистика: 0.63  
p-значення: 0.2005

## 1.7 Питання для самоперевірки

**Загальні поняття та постановка задачі:**

1. Що таке генеральна сукупність та вибірка в контексті наведеного прикладу з онлайн-курсами?
2. Що позначають символи та ? Яка між ними різниця?
3. Чому спостережувана частка успіхів у вибірці () може не точно відображати справжню частку () в генеральній сукупності?
4. Який розподіл ймовірностей описує результат для одного студента (успіх/невдача)?
5. Який розподіл ймовірностей описує загальну кількість успішних випадків серед студентів? Які параметри має цей розподіл?

**Статистичні гіпотези та критерій:**

1. Що таке нульова () та альтернативна () гіпотези? Сформулюйте їх для прикладу з онлайн-курсами.
2. Що таке статистичний критерій? Яка його мета?
3. Що таке статистика критерію () та критичне значення () у контексті біноміального тесту?
4. Що таке критична область критерію?

**Помилки та рівень значущості:**

1. Які два типи помилок можливі при перевірці статистичних гіпотез? Опишіть їх (хибно позитивна та хибно негативна). Яка помилка була важливішою для інвесторів у прикладі?
2. Що таке рівень хибнопозитивних спрацьовувань (FPR)? Як він пов’язаний з нульовою гіпотезою?
3. Що таке рівень значущості ()? Як він використовується для вибору критичного значення ()?
4. Як розрахувати FPR для заданого критичного значення , використовуючи функцію щільності ймовірностей (PMF) біноміального розподілу?

**Обчислення в Python (scipy.stats):**

1. Які функції з scipy.stats.binom використовуються для обчислення:
   * Ймовірності конкретної кількості успіхів ()?
   * Кумулятивної ймовірності ()?
   * Квантиля розподілу?
2. Як можна знайти критичне значення для правостороннього тесту () з заданим рівнем значущості , використовуючи функцію квантиля (ppf)?

**P-значення:**

1. Що таке p-значення (p-value)? Як воно інтерпретується?
2. Як визначається поняття “більш екстремального” значення статистики для правостороннього тесту?
3. Як розраховується p-значення для правостороннього біноміального тесту, знаючи спостережувану кількість успіхів ?
4. Яке правило прийняття рішення щодо використовується на основі p-значення та рівня значущості ?
5. Яка перевага використання p-значення порівняно з визначенням критичної області?

**Двосторонні критерії:**

1. Коли використовують двосторонні критерії? Як формулюються гіпотези ( та ) для двостороннього тесту?
2. Як зазвичай визначається критична область для двостороннього критерію при симетричному розподілі (наприклад, )? Як рівень значущості розподіляється між “хвостами”?
3. Як розраховується p-значення для двостороннього критерію при симетричному розподілі?
4. Як визначається критична область для двостороннього критерію, коли розподіл статистики при є несиметричним (наприклад, )?
5. Як розраховується p-значення для двостороннього критерію при несиметричному розподілі?

**Готові функції:**

1. Як можна виконати біноміальний тест (односторонній або двосторонній) за допомогою функції binomtest з бібліотеки scipy.stats? Які основні параметри вона приймає і що повертає?

## 1.8 Рекомендована література

Для глибшого вивчення основ перевірки статистичних гіпотез, роботи з пропорціями та біноміальним розподілом рекомендується звернутися до таких джерел:

1. **Agresti, A. (2018). An Introduction to Categorical Data Analysis.** Це більш доступна версія фундаментальної праці автора, яка ідеально підходить для початкового ознайомлення з біноміальним критерієм та Z-критерієм для пропорцій.
2. **Wasserman, L. (2004). All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference.** Книга пропонує стислий, але математично строгий огляд теорії статистичного висновування. Розділи, присвячені перевірці гіпотез, допоможуть закріпити теоретичну базу.
3. **Downey, A. B. (2014). Think Stats: Exploratory Data Analysis in Python.** Практичний посібник, що демонструє застосування статистичних концепцій, включно з біноміальним розподілом та перевіркою гіпотез, з використанням реальних даних та бібліотеки SciPy.
4. **Neyman, J., & Pearson, E. S. (1933). On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses.** Фундаментальна історична стаття, що формалізувала сучасний підхід до перевірки гіпотез (нульова та альтернативна гіпотези, помилки I та II роду), який є основою цього розділу.

# 2. Статистична потужність, ефект та довірчі інтервали

## 2.1 Статистична потужність

### 2.1.1 Хибно негативні помилки

Раніше під час побудови критеріїв ми звертали увагу тільки на , рівень значущості критерію. Але цей параметр контролює лише хибнопозитивну помилку (False Positive), а саме ймовірність, що критерій прийме за умови вірності .

Але є ще один вид помилок, які може допустити критерій — хибно негативні помилки (False Negative). Це випадки, коли критерій приймає за умови вірності . Це важливо, оскільки вони можуть вказувати на те, що критерій не чутливий до змін, які відбуваються в даних.

Випадок, коли ймовірність FPR , але при цьому ймовірність хибно негативні помилки (False Negative Rate, FNR) величезна, можна навести легко. Для цього достатньо **ніколи** не відкидати гіпотезу, взявши критерій .

Наведемо приклад, коли помилки False Negative відбуваються не завжди, але критерії є все одно нечутливими.

### 2.1.2 Критерій пори року

Поставимо гіпотезу про те, що зараз на вулиці літо. Для перевірки можна було б, звісно, подивитися в календар, але ми зробимо інакше.

Подивимося у вікно і визначимо, чи йде там сніг. Якщо він йде, то це непоганий доказ того, що зараз не літо, а отже можна відкинути .

Порахуємо FPR та FNR для цього критерію. Ми знаємо, що влітку сніг іде дуже рідко (ймовірність помилки нижча за ), тож це точно критерій рівня значущості , чого зазвичай достатньо для критеріїв.

Але що з FNR? Розглянемо конкретний випадок: зараз вересень. Оскільки у вересні майже завжди немає снігу, можна сказати, що FNR більша за , отже, цей критерій насправді мало дієвий.

Сформулюємо інший критерій рівня значущості , причому в цьому разі рівень значущості можна вибрати довільним.

Виходить, цей критерій випадковий, і він не використовує взагалі жодної інформації про погоду. Однак вимогам до рівня значущості він задовольняє.

Обчислимо FNR.

За , як у першому випадку, отримуємо ймовірність FNR , тобто за однакового рівня значущості з першим критерієм, другий критерій частіше припускається хибно негативної помилки.

### 2.1.3 Потужність

У статистиці заведено позитивним результатом вважати відкидання нульової гіпотези, бо зазвичай підтвердження альтернативи означає наявність бізнес-результату. Тому вважається хорошим критерій, який частіше дає змогу виявити бізнес-результат. І рахують тоді не ймовірність хибно негативної помилки, а *потужність*, що дорівнює ймовірності відкинути нульову гіпотезу за вірності , тобто ймовірність **істинно позитивного результату** (True Positive Rate, TPR) (Cohen (1988)).

Коли альтернатива складається з множини результатів, потужність розглядають як функцію від результату. Наприклад, можна порахувати потужність першого та другого критеріїв взимку й восени.

**Перший критерій**

**Другий критерій**

Зазвичай завдання пошуку найкращого критерію формулюється як пошук якомога потужнішого критерію за заданого рівня значущості . Але ми сказали, що потужність — функція від параметра, у нашому випадку від місяця.

Якщо ми застосовуватимемо критерій у січні, то потужнішим буде перший критерій, а якщо в травні, то потужнішим буде другий критерій. Тому потрібно розуміти, коли буде застосовуватися критерій, а отже, ми шукаємо найпотужніший критерій у галузі, яка нас цікавить.

Хоча в реальності в травні потужність обох критеріїв настільки низька, що вони просто не приносять користі, й використовувати їх не має сенсу.

## 2.2 Потужність для біноміального розподілу

Застосуємо нові знання про потужність для нашої задачі з освітнім сервісом. З бізнес-міркувань ми вже вибрали , а отже, знаємо, що ми неправильно відкидаємо гіпотезу з ймовірністю не більше, ніж . Тобто цим обмежена ймовірність хибно позитивної помилки.

А з якою ймовірністю ми будемо *правильно* відкидати гіпотезу? І яка в нас буде ймовірність хибно негативної помилки? На це запитання якраз відповість формула потужності.

Згадаймо критерій, за яким ми приймаємо рішення:

Тобто якщо отримуємо хоча б успішних підписок, то відкидаємо .

Зауважимо, що потужність залежить від того, яке значення у нашій генеральній сукупності. Зафіксуємо спочатку параметр й порахуємо потужність для нього. Якщо істинний параметр такий, то статистика має розподіл .

binom\_h0 = binom(n=30, p=0.5)  
binom\_alternative = binom(n=30, p=0.6)  
  
x\_grid = np.arange(1, 31)  
crit\_reg = x\_grid >= 20  
  
probs\_h0 = binom\_h0.pmf(x\_grid)  
plt.bar(x\_grid, probs\_h0, color=turquoise, label='PMF, $Binom(0.5, 30)$')  
  
probs\_alternative = binom\_alternative.pmf(x\_grid)  
plt.bar(x\_grid, probs\_alternative, color=slate,  
 label='PMF, $Binom(0.6, 30)$')  
plt.bar(x\_grid[crit\_reg], probs\_alternative[crit\_reg], color=red\_pink,  
 label='Критична область')  
  
plt.legend()  
plt.show()

Рядок 1

Розподіл нульової гіпотези

Рядок 2

Розподіл альтернативної гіпотези

Рядок 4

Вибираємо значення для осі

Рядок 5

Критична область

Рядок 7

Обчислюємо ймовірності для нульової гіпотези

Рядок 8

Будуємо гістограму для нульової гіпотези

Рядок 10

Обчислюємо ймовірності для альтернативної гіпотези

Рядки 11-12

Будуємо гістограму для альтернативної гіпотези

Рядки 13-14

Будуємо гістограму для критичної області

|  |
| --- |
| Рисунок 2.1: Потужність критерію для |

Як і раніше, нас цікавить імовірність отримати або більше успіхів. Але якщо раніше ми дивилися на неї для розподілу з й хотіли, щоб вона була меншою за , то тепер ми дивимося за та прагнемо зробити цю величину якомога більшою. Порівняно з обчисленням FPR формула не зміниться, змінюється тільки

critical\_value = 20  
power = 1 - binom(n=30, p=0.6).cdf(critical\_value - 1)  
fpr = 1 - binom(n=30, p=0.5).cdf(critical\_value - 1)  
  
print(f"Хибно позитивна помилка: {fpr:.1%}")  
print(f"Потужність: {power:.1%}")

Хибно позитивна помилка: 4.9%  
Потужність: 29.1%

Видно, що потужність близько . Це досить маленьке значення, адже якщо наш продукт прибутковий, то ми побачимо це за допомогою нашого тесту тільки з імовірністю в відсотків. Ми легко можемо пропустити ефект.

Що ж можна зробити, щоб зробити потужність вищою? Щоб розібратися, реалізуємо функцію потужності в загальному вигляді.

def get\_stat\_power(N, mu\_h0, mu\_alternative, alpha):  
 """  
 Функція потужності для біноміального розподілу  
  
 N: розмір вибірки  
 mu\_h0: ймовірність успіху в нульовій гіпотезі  
 mu\_alternative: ймовірність успіху в альтернативній гіпотезі  
 alpha: рівень значущості  
 """  
 binom\_h0 = binom(n=N, p=mu\_h0)  
 binom\_alternative = binom(n=N, p=mu\_alternative)  
 critical\_value = binom\_h0.ppf(1 - alpha) + 1  
 return 1 - binom\_alternative.cdf(critical\_value - 1)  
  
result = get\_stat\_power(30, 0.5, 0.6, alpha=0.05)  
print(f"Потужність: {result:.1%}")

Рядок 1

Функція потужності:

Рядок 10

Розподіл нульової гіпотези

Рядок 11

Розподіл альтернативної гіпотези

Рядок 12

Критичне значення

Рядок 13

Повертаємо потужність

Потужність: 29.1%

Коли в житті ми спостерігаємо якесь явище і бачимо його лише кілька разів, ми не впевнені в тому, що воно не випадкове. Якщо ж бачимо його досить часто, то вже складаємо закономірності. Так і в статистиці. Коли ми подивилися на 30 потенційних підписок, ми помічаємо, що частка доставок більше половини. Але ми все ще не впевнені. Щоб отримати більше впевненості, потрібно провести більше спостережень, тобто знайти більше пробних клієнтів.

Подивимося, що буде, якщо ми проведемо експеримент на 300 клієнтах.

result = get\_stat\_power(300, 0.5, 0.6, alpha=0.05)  
print(f"Потужність при N=300: {result:.1%}")

Потужність при N=300: 96.6%

Бачимо, що потужність уже дуже близька до . Але провести 300 пробних занять набагато затратніше, ніж 30. І за ресурсами, і за часом. Тому зазвичай балансують між потужністю і тривалістю/витратами експерименту.

Прийнято вважати, що прийнятною для роботи потужністю вважається . Подивимося, як змінюється потужність при зростанні розміру вибірки, і скільки потрібно провести експериментів, щоб детектувати ефект при у випадків.

n\_grid = np.arange(10, 600, 10)  
power = get\_stat\_power(n\_grid, 0.5, 0.6, alpha=0.05)  
  
plt.plot(n\_grid, power, color=turquoise)  
plt.axhline(0.8, ls='--', color=red\_pink, label='Потужність = 80%')  
  
min\_n = n\_grid[power >= 0.8].min()  
plt.axvline(min\_n, ls='--', color=slate, label=f'N = {min\_n}')  
  
plt.xlabel('Кількість пробних занять')  
plt.ylabel('Потжність')  
plt.legend()  
plt.show()

Рядок 1

Вибираємо значення для осі

Рядок 2

Обчислюємо потужність для різних розмірів вибірки

Рядок 4

Будуємо графік

Рядок 5

Додаємо горизонтальну лінію для потужності

Рядок 7

Знаходимо мінімальну кількість пробних занять, щоб потужність була більшою за

Рядок 8

Додаємо вертикальну лінію для мінімальної кількості пробних занять

|  |
| --- |
| Рисунок 2.2: Залежність потужності від розміру вибірки для |

Бачимо, що для потужності в достатньо набрати 160 пробних занять.

А що, якщо ми хочемо детектувати ще менший ефект? Наприклад, якщо хочемо відкидати гіпотезу за . Часто поліпшення ймовірності успіху на може бути значущим для продукту, тому це питання не позбавлене сенсу.

n\_grid = np.arange(10, 30000, 59)  
power = get\_stat\_power(n\_grid, 0.5, 0.51, alpha=0.05)  
  
plt.plot(n\_grid, power, color=turquoise)  
plt.axhline(0.8, ls='--', color=red\_pink, label='Потужність = 80%')  
  
min\_n = n\_grid[power >= 0.8].min()  
plt.axvline(min\_n, ls='--', color=slate, label=f'N = {min\_n}')  
  
plt.xlabel('Кількість пробних занять')  
plt.ylabel('Потжність')  
plt.legend()  
plt.show()

Рядок 1

Вибираємо значення для осі

Рядок 2

Обчислюємо потужність для різних розмірів вибірки

Рядок 4

Будуємо графік

Рядок 5

Додаємо горизонтальну лінію для потужності

Рядок 7

Знаходимо мінімальну кількість пробних занять, щоб потужність була більшою за

Рядок 8

Додаємо вертикальну лінію для мінімальної кількості пробних занять

|  |
| --- |
| Рисунок 2.3: Залежність потужності від розміру вибірки для |

Бачимо, що потрібно понад 15 тисяч клієнтів, щоб детектувати такий ефект! Дуже складно знайти стільки пробних клієнтів. Але потрібно замислитися над питанням, а чи варто це робити? У нашому випадку, якщо ймовірність успіху , то прибуток із замовлень буде невеликий, і вкладення інвесторів, звісно, окупатимуться, але дуже довго. Тому збільшення на для нашого завдання не значуще *практично*, а отже, не потрібно намагатися набирати 15 тисяч людей, а можна зупинитися і на 160.

Перед кожним експериментом аналітику варто замислюватися над питанням тривалості тесту і кількості учасників. Для цього потрібно зрозуміти:

* Який ефект є для завдання практично значущим?
* Скільки знадобиться випробовуваних, щоб детектувати цей ефект частіше, ніж у випадків?

З графіків видно, що для детектування меншого ефекту потрібен більший розмір вибірки. Подивимося, як для фіксованого змінюється потужність для різних параметрів .

mu\_grid = np.linspace(0.5, 0.9, 100)  
power = get\_stat\_power(30, 0.5, mu\_grid, alpha=0.05)  
  
plt.plot(mu\_grid, power, color=turquoise)  
plt.axhline(0.8, ls='--', color=red\_pink, label='Потужність = 80%')  
  
min\_mu = mu\_grid[power >= 0.8].min()  
plt.axvline(min\_mu, ls='--', color=slate, label=f'$\mu = {min\_mu:.2f}$')  
  
plt.xlabel('Ймовірність успіху')  
plt.ylabel('Потужність')  
plt.legend()  
plt.show()

Рядок 1

Вибираємо значення для осі

Рядок 2

Обчислюємо потужність для різних параметрів

Рядок 4

Будуємо графік

Рядок 5

Додаємо горизонтальну лінію для потужності

Рядок 7

Знаходимо мінімальну ймовірність успіху, щоб потужність була більшою за

Рядок 8

Додаємо вертикальну лінію для мінімальної ймовірності успіху

|  |
| --- |
| Рисунок 2.4: Залежність потужності від параметра |

У нашому експерименті ми добре детектуємо ефект, тільки якщо ймовірність успіху в генеральній сукупності хоча б .

## 2.3 Мінімальна величина ефекту

Вище на [Рисунок 2.4](#fig-binom-power-mu) ми побачили, що з хорошою потужністю понад ми можемо помітити ефект у процентних пункти. Причому це можна порахувати навіть до проведення експерименту. У нашому випадку таке збільшення успішності щодо цілком можливо, і з ним можна працювати. Але коли аналітики перевіряють зміни, найчастіше очікуваний ефект коливається в районі одного, максимум двох відсотків! Для подібних змін не підійде обрана постановка експерименту, а значить і проводити його не має сенсу.

Тому перед запуском експериментів аналітики повідомляють **мінімальну величину ефекту, яку можна задетектувати** (Minimal Detectable Effect, MDE).. У нашому випадку процентних пункти (Cohen (1988)).

Більш формально, MDE для гіпотези — це мінімальний ефект , за якого критерій рівня значущості для перевірки цієї гіпотези за істинного параметра та розміру вибірки відкидатиме з потужністю більшою, ніж .

Найчастіше беруть . Напишемо функцію, яка обчислюватиме MDE підбором.

def binom\_test\_mde\_one\_sided(N, mu0, alpha=0.05, min\_power=0.8):  
 """  
 Розрахунок MDE для біноміального тесту  
  
 N: розмір вибірки  
 mu0: параметр нульової гіпотези  
 alpha: рівень значущості  
 min\_power: мінімальна потужність  
 """  
 delta\_grid = np.linspace(0, 1 - mu0, 500)  
 power = get\_stat\_power(N, mu0, mu0 + delta\_grid, alpha=alpha)  
 fit\_delta = delta\_grid[power >= min\_power]  
 return fit\_delta[0]  
  
result = binom\_test\_mde\_one\_sided(30, 0.5)  
print(f"MDE: {result:.1%}")

Рядок 1

Функція, яка обчислює MDE.

Рядок 10

Створюємо сітку для

Рядок 11

Обчислюємо потужність для різних значень

Рядок 12

Знаходимо значення , для яких потужність більша за

Рядок 13

Повертаємо перше значення , для якого потужність більша за

MDE: 21.8%

Результат збігається з обчисленнями за графіком [Рисунок 2.4](#fig-binom-power-mu). Тобто ми можемо детектувати ефект у процентних пункти.

Зазвичай MDE розраховують не просто так, а нерозривно з ним іде питання про визначення **розміру вибірки**.

У нашому завданні ми знайшли клієнтів, не обчислюючи спочатку, скільки їх знадобиться. Але що якщо отриманий MDE занадто великий й потрібно зробити його меншим, оскільки очікувані зміни набагато менші? Тоді вирішується зворотне завдання, За необхідним MDE визначити обсяг вибірки. Якщо ми говоримо, що хочемо детектувати +10 в.п., тобто 60% успішних підписок, то потрібно знайти 160 тестових клієнтів, це видно з попередніх графіків. Якщо 30 осіб нам, наприклад, шукати місяць, такий тест може затягнутися майже на півроку. Тому варто подумати про те, щоб виділити додаткові ресурси на пошук клієнтів, наприклад, залучити маркетологів.

## 2.4 Довірчі інтервали

Раніше ми навчилися перевіряти гіпотезу . Як відповідь ми отримуємо лише вердикт “відкидаємо ” або “не відкидаємо ”. Однак у вибірці міститься набагато більше інформації, й ми можемо більше зрозуміти про параметр, ніж порівняння з числом .

Якщо гіпотеза не відкидається, це означає, що значення припустиме для нашої вибірки. Отримані значення можна пояснити значенням . Але якщо у нас є механізм перевірки для будь-якого , ми можемо для всіх значень дізнатися, які з них допустимі, і отримати множину можливих значень . Така множина називається *довірчим інтервалом*.

**Довірчий інтервал** рівня — множина значень параметра , для яких гіпотеза не відкидається критерієм рівня значущості (Casella and Berger (2002)).

З визначення випливає, що різні критерії можуть породжувати різні довірчі інтервали. У цій частині розглянемо, які інтервали породжуються двостороннім критерієм. Для цього з кроком переберемо значення і перевіримо гіпотези.

def two\_sided\_criterion\_nonsym(n, mu, alpha):  
 """  
 Функція, що обчислює критичні значення для двостороннього критерію  
  
 n: розмір вибірки  
 mu: параметр нульової гіпотези  
 alpha: рівень значущості  
 """  
 binom\_h0 = binom(n=n, p=mu)  
 c2 = binom\_h0.ppf(1 - alpha/2) + 1  
 c1 = binom\_h0.ppf(alpha/2) - 1  
 return c1, c2  
  
  
success\_cnt = 19  
mu\_grid = np.arange(0, 1, 0.001)  
mu\_no\_rejection = []  
  
for mu\_h0 in mu\_grid:  
 c1, c2 = two\_sided\_criterion\_nonsym(30, mu\_h0, alpha=0.05)  
 if success\_cnt > c1 and success\_cnt < c2:  
 mu\_no\_rejection.append(mu\_h0)  
  
print(f'95% довірчий інтервал: [{min(mu\_no\_rejection)} - {max(mu\_no\_rejection)}]')

Рядок 1

Функція, що обчислює критичні значення для двостороннього критерію.

Рядок 9

Розподіл нульової гіпотези

Рядок 10

Права межа критичної області

Рядок 11

Ліва межа критичної області

Рядок 12

Повертаємо межі критичної області

Рядок 15

Кількість успіхів

Рядок 16

Сітка для

Рядок 17

Список для значень , для яких не відкидається

Рядок 19

Перебираємо значення та обчислюємо критичні значення

95% довірчий інтервал: [0.439 - 0.8]

Отримавши такий інтервал, ми відразу можемо зробити висновок, що гіпотеза не відкидається, оскільки лежить у довірчому інтервалі. Але при цьому відразу зрозуміло, що на рівні значущості .

Звичайно ж, у довірчому інтервалі лежить значення , для якого успіхів — це найбільш правдоподібний результат. При цьому інтервал несиметричний щодо точки .

Подивимося, як можна візуально знайти межу інтервалу. Ми отримали успіхів. Для кожного статистика має розподіл . Будемо малювати цей розподіл і дивитися, чи потрапляє у критичну область.

mus\_h0 = [0.2, 0.438, 0.439, 0.8, 0.81, 0.9]  
  
fig, axes = plt.subplots(3, 2, figsize=(8, 8))  
  
for mu\_h0, ax in zip(mus\_h0, axes.flatten()):  
 binom\_h0 = binom(n=30, p=mu\_h0)  
 probs = binom\_h0.pmf(x\_grid)  
  
 ax.bar(x\_grid, probs, color=turquoise, label=f'PMF, $Binom({mu\_h0}, 30)$')  
 c1, c2 = two\_sided\_criterion\_nonsym(30, mu\_h0, alpha=0.05)  
 crit\_reg = (x\_grid <= c1) | (x\_grid >= c2)  
 ax.bar(x\_grid[crit\_reg], probs[crit\_reg],  
 color=red\_pink, label='Критична область')  
 is\_rejection = success\_cnt <= c1 or success\_cnt >= c2  
 ax.axvline(success\_cnt, ls='--',  
 label=f'Q = {success\_cnt} ' + ('відхилено' if is\_rejection else 'не відхилено'),  
 color='gray', alpha=0.4)  
  
 rejection\_prob = probs[crit\_reg].sum()  
 ax.set\_title(f'$\mu = {mu\_h0}$', fontsize=8)  
 ax.legend()

Рядок 1

Сітка для

Рядок 3

Створюємо сітку для графіків

Рядок 5

Перебираємо значення та осі

Рядок 6

Розподіл нульової гіпотези

Рядок 7

Обчислюємо ймовірності

Рядок 9

Будуємо гістограму

Рядок 10

Обчислюємо критичні значення

Рядок 11

Критична область

Рядки 12-13

Підсвічуємо критичну область

Рядок 14

Чи потрапляє у критичну область

Рядки 15-17

Вертикальна лінія для успіхів

Рядки 19-20

Ймовірність потрапляння в критичну область

|  |
| --- |
| Рисунок 2.5: Довірчі інтервали для біноміального розподілу |

Видно, що зі зростанням гістограма зсувається вправо. І спочатку потрапляє в праву критичну область. Потім, починаючи з точки , значення вже опиняється поза критичною областю, і тільки з починає потрапляти в ліву критичну область.

Таким чином, ліва межа довірчого інтервалу — це перша точка, коли значення статистики перестало потрапляти до критичної області, а права межа - остання точка, коли значення не потрапляє до правої критичної області.

## 2.5 Односторонні довірчі інтервали

Насправді, двосторонній критерій потрібен вкрай рідко. Контролювати хибно похитивну помилку нам потрібно тільки для відхилень у бік, корисний для бізнесу. У випадку завдання з освітнім сервісом це отримання *більшої* конверсії в успіх.

Спробуємо скористатися одностороннім критерієм для побудови довірчого інтервалу.

def make\_binom\_criterion(n, mu=0.5, alpha=0.05):  
 """  
 Функція, що обчислює критичне значення для одностороннього критерію  
  
 n: розмір вибірки  
 mu: параметр нульової гіпотези  
 alpha: рівень значущості  
 """  
 binom\_h0 = binom(n=n, p=mu)  
 q = binom\_h0.ppf(1 - alpha)  
 return q + 1  
  
success\_cnt = 19  
mu\_grid = np.arange(0, 1.001, 0.001)  
mu\_no\_rejection = []  
  
for mu\_h0 in mu\_grid:  
 crit\_val = make\_binom\_criterion(n=30, mu=mu\_h0, alpha=0.05)  
 if success\_cnt < crit\_val:  
 mu\_no\_rejection.append(mu\_h0)  
  
print(f'95% довірчий інтервал: [{min(mu\_no\_rejection)} - {max(mu\_no\_rejection)}]')

Рядок 1

Функція, що обчислює критичне значення для одностороннього критерію.

Рядок 9

Розподіл нульової гіпотези

Рядок 10

Критичне значення

Рядок 11

Повертаємо критичне значення

Рядок 13

Кількість успіхів

Рядок 14

Сітка для

Рядок 15

Список для значень , для яких не відкидається

Рядки 17-20

Перебираємо значення та обчислюємо критичне значення

95% довірчий інтервал: [0.467 - 1.0]

Коли ми використовували двосторонній інтервал, ми отримали ліву межу . Виходить, що односторонній інтервал з точки зору лівої межі дає нам більше інформації. При цьому з точки зору правої межі ми втрачаємо інформацію зовсім. Вона дорівнює 1 просто тому, що ймовірність не може бути більшою.

Насправді зазвичай на праву межу не дивляться під час аналізу, коли ми шукаємо позитивний ефект.

Припустимо, ми отримали не успіхів, а . Побудуємо 2 види інтервалів.

success\_cnt = 22  
mu\_grid = np.arange(0, 1, 0.001)  
mu\_no\_rejection = []  
  
for mu\_h0 in mu\_grid:  
 c1, c2 = two\_sided\_criterion\_nonsym(30, mu\_h0, alpha=0.05)  
 if success\_cnt > c1 and success\_cnt < c2:  
 mu\_no\_rejection.append(mu\_h0)  
  
print(f'Двосторонній 95% ДІ: [{min(mu\_no\_rejection):.3f} - {max(mu\_no\_rejection):.3f}]')

Двосторонній 95% ДІ: [0.542 - 0.877]

success\_cnt = 22  
mu\_grid = np.arange(0, 1.001, 0.001)  
mu\_no\_rejection = []  
  
for mu\_h0 in mu\_grid:  
 crit\_val = make\_binom\_criterion(n=30, mu=mu\_h0, alpha=0.05)  
 if success\_cnt < crit\_val:  
 mu\_no\_rejection.append(mu\_h0)  
  
print(f'Односторонній 95% ДІ: [{min(mu\_no\_rejection):.3f} - {max(mu\_no\_rejection):.3f}]')

Односторонній 95% ДІ: [0.571 - 1.000]

За обома довірчими інтервалами ми робимо висновок, що конверсія значимо відрізняється від . Але односторонній інтервал дає кращу нижню оцінку на ймовірність успіху. Ми можемо зрозуміти, що наша конверсія більша за . А інформація з двостороннього інтервалу про те, що ймовірність менша за не додає нам користі.

Навіщо ж ми тоді взагалі використовуємо двосторонній інтервал? Щоб це зрозуміти, подивимося, як виглядають візуально межі для одностороннього інтервалу.

fig, axes = plt.subplots(3, 2, figsize=(8, 7))  
  
for mu\_h0, ax in zip(mus\_h0, axes.flatten()):  
 binom\_h0 = binom(n=30, p=mu\_h0)  
 probs = binom\_h0.pmf(x\_grid)  
  
 ax.bar(x\_grid, probs, color=turquoise, label=f'PMF, $Binom({mu\_h0}, 30)$')  
 c = make\_binom\_criterion(30, mu\_h0, alpha=0.05)  
 crit\_reg = (x\_grid >= c)  
 ax.bar(x\_grid[crit\_reg], probs[crit\_reg],  
 color=red\_pink, label='Критична область')  
  
 is\_rejection = success\_cnt >= c  
 ax.axvline(success\_cnt, ls='--',  
 label=f'Q = {success\_cnt} ' + ('відхилено' if is\_rejection else 'не відхилено'),  
 color='gray', alpha=0.4)  
  
 rejection\_prob = probs[crit\_reg].sum()  
 ax.set\_title(f'$\mu = {mu\_h0}$', fontsize=8)  
 ax.legend()

Рядок 3

Сітка для

Рядок 4

Розподіл нульової гіпотези

Рядок 5

Обчислюємо ймовірності

Рядок 7

Будуємо гістограму

Рядок 8

Обчислюємо критичні значення

Рядок 9

Критична область

Рядки 10-11

Підсвічуємо критичну область

Рядок 13

Чи потрапляє у критичну область

Рядки 14-16

Вертикальна лінія для успіхів

Рядок 18

Ймовірність потрапляння в критичну область

|  |
| --- |
| Рисунок 2.6: Односторонній довірчий інтервал для успіхів |

Порівняно з [Рисунок 2.5](#fig-binom-ci) ми бачимо, що права критична область стала більшою через те, що там тепер знаходиться не , а від усіх значень. При цьому лівої критичної області просто не існує, тому за великих не відбувається потрапляння до неї, а значить ми не відкидаємо гіпотезу.

Зауважимо, що якби ми будували двосторонній інтервал, але з удвічі більшою , потрапляння в праву критичну область траплялися б за тих самих , що й в односторонньому критерії. Тому часто для пошуку односторонньої межі будують двосторонній довірчий інтервал із більшою , ігноруючи при цьому праву межу. Це зручно, оскільки можна користуватися тільки однією функцією для критерію.

Перевіримо, що вийде за .

success\_cnt = 19  
mu\_grid = np.arange(0, 1, 0.001)  
mu\_no\_rejection = []  
  
for mu\_h0 in mu\_grid:  
 c1, c2 = two\_sided\_criterion\_nonsym(30, mu\_h0, alpha=0.1)  
 if success\_cnt > c1 and success\_cnt < c2:  
 mu\_no\_rejection.append(mu\_h0)  
  
print(f'95% ДІ: [{min(mu\_no\_rejection):.3f} - {max(mu\_no\_rejection):.3f}]')

95% ДІ: [0.467 - 0.778]

Бачимо, що отримали таку саму ліву межу, як і в односторонньому інтервалі.

## 2.6 Властивості довірчих інтервалів

Згадаймо визначення довірчого інтервалу.

Нехай є критерій рівня значущості для перевірки гіпотези , — статистика критерію, а — її реалізація на конкретній вибірці . Тоді **довірчим інтервалом** називається множина таких , на яких критерій не відкидає гіпотезу .

Процедура підрахунку інтервалу — це довгий перебір значень із деяким кроком. Але це все ще залишається деякою функцією від вибірки, тобто *статистикою* й випадковою величиною, причому її розподіл залежить від статистики , а отже, і від початкової вибірки, та від параметра у генеральній сукупності.

Позначимо межі інтервалу за — статистики критерію, які відповідають лівій та правій межі інтервалу.

### 2.6.1 Ймовірність попадання в інтервал

Яким би не було істинне значення , ймовірність того, що воно перебуває між та , не нижча, ніж . Значення називається **рівнем довіри** довірчого інтервалу.

Важливо, що випадковість тут прихована саме в і , а не в . Параметр невідомий, але ми припускаємо його константним і не випадковим.

Перевіримо справедливість цієї властивості. Для цього зафіксуємо й проведемо множину експериментів:

* Генеруємо вибірку з розподілу з параметром .
* Обчислюємо статистику .
* Рахуємо довірчий інтервал для .

Перевіряємо, що частка випадків, коли параметр опинився всередині інтервалу, хоча б .

import time  
  
start\_time = time.time()  
  
def my\_binomial\_confint(n, alpha, q):  
 """  
 Функція, що обчислює довірчий інтервал для біноміального розподілу  
  
 n: розмір вибірки  
 alpha: рівень значущості  
 q: кількість успіхів  
 """  
 mu\_grid = np.arange(0, 1.1, 0.1) # np.arange(0, 1.001, 0.001)  
 mu\_no\_rejection = []  
  
 for mu\_h0 in mu\_grid:  
 c1, c2 = two\_sided\_criterion\_nonsym(30, mu\_h0, alpha=0.05)  
 if q > c1 and q < c2:  
 mu\_no\_rejection.append(mu\_h0)  
  
 return min(mu\_no\_rejection), max(mu\_no\_rejection)

Рядок 1

Імпортуємо бібліотеку для вимірювання часу

Рядок 3

Запускаємо таймер

Рядок 5

Функція, що обчислює довірчий інтервал

Рядок 13

Сітка для

Рядок 14

Список для значень , для яких не відкидається

Рядок 16

Перебираємо значення та осі

Рядок 17

Обчислюємо критичні значення

Рядок 18

Чи потрапляє у критичну область

Рядок 19

Додаємо значення , для яких не відкидається

Рядок 21

Повертаємо межі довірчого інтервалу

Тепер запустимо експеримент. Для цього зафіксуємо й проведемо експериментів. У кожному з них будемо генерувати успіхів, а потім перевіряти, чи потрапила у довірчий інтервал.

N\_EXPERIMENTS = 1000  
SAMPLE\_SIZE = 30  
latent\_mu = 0.5  
binom\_true = binom(n=SAMPLE\_SIZE, p=latent\_mu)  
  
confint\_fail\_cases = 0  
  
for i in range(N\_EXPERIMENTS):  
 q = binom\_true.rvs()  
 L, R = my\_binomial\_confint(n=SAMPLE\_SIZE, alpha=0.05, q=q)  
 if L < latent\_mu < R:  
 pass  
 else:  
 confint\_fail\_cases += 1  
  
success\_cases = 100 \* (N\_EXPERIMENTS - confint\_fail\_cases) / N\_EXPERIMENTS  
end\_time = time.time()  
  
print(f"Відсоток успішних випадків: {success\_cases:.2f}%")  
print(f"Час виконання: {end\_time - start\_time:.4f} секунди")

Рядок 1

Кількість експериментів

Рядок 2

Розмір вибірки

Рядок 3

Істинне значення ймовірності успіху

Рядок 4

Розподіл нульової гіпотези

Рядок 6

Лічильник невдалих випадків

Рядок 8

Перебираємо експерименти

Рядок 9

Генеруємо вибірку

Рядок 10

Обчислюємо довірчий інтервал

Рядки 11-14

Перевіряємо, чи потрапила у довірчий інтервал

Рядок 16

Обчислюємо частку успішних випадків

Рядок 17

Вимірюємо час виконання

Відсоток успішних випадків: 61.40%  
Час виконання: 3.6504 секунди

Зазначимо, що цей код працював понад 5 хвилин. Це через те, що під час кожного експерименту потрібно побудувати довірчий інтервал, а значить перевірити 1000 можливих параметрів .

Бачимо, що властивість виконалася. Ми очікували хоча б влучень, отримали навіть . Насправді це значно більше, ніж ми очікували. Це відбувається через дискретність розподілу. З тієї ж причини під час пошуку критичної області ми не могли вибрати стовпці із сумарною висотою рівно .

#### 2.6.1.1 Доведення

Під час формулювання властивості ми припускаємо, що є деяка — ймовірність успіху в генеральній сукупності. Коли ми проводимо штучний експеримент, ми фіксуємо її й можемо вважати істинною .

Щоразу ми генеруємо й перевіряємо, чи потрапила у довірчий інтервал. Намалюємо розподіл статистики , який уже нам знайомий. Намалюємо й область ймовірності , як ми робили це раніше.

mu0 = 0.5  
binom\_mu0 = binom(n=30, p=mu0)  
probs = binom\_mu0.pmf(x\_grid)  
  
plt.bar(x\_grid, probs, color=turquoise, label=f'PMF, $Binom({mu0}, 30)$')  
c1, c2 = two\_sided\_criterion\_nonsym(30, mu0, alpha=0.05)  
crit\_reg = (x\_grid >= c2) | (x\_grid <= c1)  
plt.bar(x\_grid[crit\_reg], probs[crit\_reg],  
 color=red\_pink, label='Критична область')  
plt.legend()  
plt.show()

Рядок 1

Істинне значення ймовірності успіху

Рядок 2

Розподіл нульової гіпотези

Рядок 3

Обчислюємо ймовірності

Рядок 5

Будуємо гістограму

Рядок 6

Обчислюємо критичні значення

Рядок 7

Критична область

Рядки 8-9

Підсвічуємо критичну область

|  |
| --- |
| Рисунок 2.7: Розподіл статистики при істинній ймовірності успіху |

Нехай реалізувалося значення статистики . За такою вибіркою можна побудувати довірчий інтервал на . Він буде якось розташований, але зараз нас цікавить, чи потрапить у нього . За визначенням потрапляння в інтервал відбудеться, якщо не відкидається гіпотеза . Але тоді за справедливості статистика має той розподіл, що і на малюнку. І гіпотеза відкидається тільки в разі потрапляння в критичну область, а це трапляється з ймовірністю .

Отже, з ймовірністю хоча б перебуватиме в довірчому інтервалі.

Часто так й вводять визначення довірчого інтервалу. Для вибірки — це така пара статистик і , що хоч яким би не було ,

де і — статистики, що залежать від вибірки. Знову звертаємо увагу, що випадковість тут прихована не в параметрі , а в статистиках від вибірки.

### 2.6.2 Довірчий інтервал Вілсона

Розглянутий зараз алгоритм побудови довірчого інтервалу працює занадто довго. У Python є функції, які дозволяють швидше розрахувати інтервал. Наприклад, можна скористатися методом Вілсона і функцією proportion\_confint (Wilson (1927), Statsmodels development team (2023)).

Повторимо експерименти з новим типом довірчого інтервалу, тут можемо дозволити більше реалізацій вибірки, оскільки інтервал рахується недовго.

from statsmodels.stats.proportion import proportion\_confint  
  
start\_time = time.time()  
  
N\_EXPERIMENTS = 1000  
SAMPLE\_SIZE = 30  
latent\_mu = 0.5  
binom\_true = binom(n=SAMPLE\_SIZE, p=latent\_mu)  
  
confint\_fail\_cases = 0  
  
for i in range(N\_EXPERIMENTS):  
 q = binom\_true.rvs()   
 L, R = proportion\_confint(  
 count=q,  
 nobs=SAMPLE\_SIZE,  
 alpha=0.05,  
 method='wilson'  
 )  
 if L < latent\_mu < R:  
 pass  
 else:  
 confint\_fail\_cases += 1  
  
success\_cases = 100 \* (N\_EXPERIMENTS - confint\_fail\_cases) / N\_EXPERIMENTS  
end\_time = time.time()  
  
print(f"Відсоток успішних випадків: {success\_cases:.2f}%")  
print(f"Час виконання: {end\_time - start\_time:.4f} секунди")

Відсоток успішних випадків: 96.60%  
Час виконання: 0.0701 секунди

Зауважимо, що наше може знаходитись в довірчому інтервалі менше, ніж у випадків. Це відбувається через те, що швидкі методи працюють наближено, оцінюючи розподіл статистики при збільшенні розміру вибірки. Чим розмір вибірки більший, тим ближчим буде інтервал до -ного.

Залежність частки успішних влучень у довірчий інтервал від розміру вибірки зобразимо на [Рисунок 2.8](#fig-binom-ci-2).

n\_grid = np.arange(1, 1000, 25).tolist()  
interval\_success\_rate = []  
  
for n in n\_grid:  
 confint\_fail\_cases = 0  
 for i in range(N\_EXPERIMENTS):  
 binom\_true = binom(n=n, p=latent\_mu)  
 q = binom\_true.rvs()  
 L, R = proportion\_confint(  
 count=q,  
 nobs=n,  
 alpha=0.05,  
 method='wilson'  
 )  
 if L < latent\_mu < R:  
 pass  
 else:  
 confint\_fail\_cases += 1  
 interval\_success\_rate.append(1 - confint\_fail\_cases / N\_EXPERIMENTS)

Рядок 1

Сітка для розміру вибірки

Рядок 2

Список для частки успішних влучень

Рядок 4

Перебираємо розміри вибірки

Рядок 5

Лічильник невдалих випадків

Рядок 6

Перебираємо експерименти

Рядок 7

Генеруємо вибірку

Рядок 8

Генеруємо з розподілу

Рядки 9-14

Обчислюємо довірчий інтервал

Рядки 15-18

Перевіряємо, чи потрапила у довірчий інтервал

Рядок 19

Обчислюємо частку успішних випадків

Тепер побудуємо графік.

fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 2.5))  
plt.plot(n\_grid, interval\_success\_rate,  
 label='Частка успішних влучень', color=turquoise)  
plt.axhline(0.95, ls='--',  
 label='Желаемая успешность', color=red\_pink)  
  
plt.xlabel('Розмір вибірки $n$')  
plt.ylabel('Частка успішних влучень')  
plt.legend()  
plt.show()

Рядки 2-3

Графік частки успішних влучень

Рядки 4-5

Лінія бажаної частки успішних влучень

|  |
| --- |
| Рисунок 2.8: Залежність частки успішних влучень у довірчий інтервал від розміру вибірки |

Видно, що на будь-якому розмірі вибірки під час використання інтервалу Вілсона можна отримати менше влучень, але що більший розмір вибірки, то менше графік відхиляється від .

## 2.7 Питання для самоперевірки

**Загальні поняття та Помилки**

1. Які два основні типи помилок можна зробити при перевірці статистичних гіпотез? Назвіть їх (FPR та FNR) та поясніть, що кожна з них означає.
2. Як рівень значущості () пов’язаний з одним із типів помилок?
3. Поясніть на прикладі “критерію пори року”, чому критерій з низьким рівнем значущості () не обов’язково є хорошим чи корисним.

**Статистична Потужність**

1. Що таке статистична потужність критерію? Як вона пов’язана з хибно негативною помилкою (FNR)?
2. Чому в статистиці часто фокусуються на максимізації потужності (або мінімізації FNR) при фіксованому рівні значущості ?
3. Від яких основних факторів залежить потужність статистичного критерію? Як кожен з них (розмір вибірки, величина ефекту, рівень значущості) впливає на потужність?
4. Як змінюється потужність критерію для біноміального розподілу при збільшенні розміру вибірки (N)? Наведіть приклад з тексту.
5. Як змінюється потужність критерію для біноміального розподілу при збільшенні різниці між параметром нульової гіпотези () та параметром альтернативної гіпотези ()? Наведіть приклад з тексту.
6. Яке значення потужності часто вважається прийнятним мінімальним рівнем у практичних дослідженнях?

**Мінімальна Величина Ефекту (MDE)**

1. Що таке Мінімальна величина ефекту, яку можна задетектувати (MDE)?
2. Як MDE пов’язаний з потужністю, розміром вибірки та рівнем значущості?
3. Чому важливо розраховувати MDE перед початком експерименту?
4. Поясніть різницю між *статистичною* значущістю та *практичною* значущістю ефекту. Чому ця різниця важлива?

**Довірчі Інтервали (ДІ)**

1. Дайте визначення довірчого інтервалу рівня . Як він пов’язаний з перевіркою гіпотез?
2. Опишіть основний принцип побудови довірчого інтервалу, який використовувався в тексті для біноміального розподілу (через перебір значень ).
3. Чим відрізняються двосторонні та односторонні довірчі інтервали? В якій ситуації може бути доцільніше використовувати односторонній ДІ?
4. Як межа одностороннього довірчого інтервалу пов’язана з межами двостороннього довірчого інтервалу, побудованого з подвоєним рівнем значущості (наприклад, для 95% одностороннього інтервалу)?
5. Поясніть ключову властивість довірчого інтервалу: . Що є випадковим у цій нерівності (параметр чи межі інтервалу )?
6. Чому при використанні точних методів побудови ДІ для дискретних розподілів (як біноміальний) фактична ймовірність покриття істинного параметра може бути *більшою* за ?
7. Які переваги та недоліки використання наближених методів побудови ДІ, таких як метод Вілсона? Коли їх використання виправдане?

## 2.8 Рекомендована література

Концепції статистичної потужності, величини ефекту та довірчих інтервалів є ключовими для планування та інтерпретації експериментів. Для їх детального вивчення варто опрацювати:

1. **Cohen, J. (1988). Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences.** Класична і найвпливовіша праця з аналізу статистичної потужності. Є вичерпним довідником для розуміння зв’язку між розміром ефекту, розміром вибірки, рівнем значущості та потужністю.
2. **Newcombe, R. G. (2012). Confidence Intervals for Proportions and Related Measures of Effect Size.** Спеціалізована книга, що детально розглядає методи побудови довірчих інтервалів для біноміальних пропорцій, включно з методом Вілсона, згаданим у посібнику.
3. **Bruce, P., Bruce, A., & Gedeck, P. (2020). Practical Statistics for Data Scientists.** Сучасний посібник, що пояснює концепції потужності, p-значення та довірчих інтервалів з точки зору практичного застосування в A/B-тестуванні та аналізі даних.
4. **Жлуктенко, В. І., & Наконечний, С. І. (2001). Теорія ймовірностей і математична статистика… Ч. II.** Український навчальний посібник, який допоможе розібратися з теоретичними основами довірчого оцінювання та перевірки гіпотез у вітчизняній термінології.

# 3. -критерій Фішера

У цьому розділі ми розглянемо -критерій Фішера, який використовується для перевірки гіпотез про середнє значення генеральної сукупності з відомою дисперсією.

Далі, для виведення критеріїв нам потрібен нормальний розподіл. *Потому що саме цьому розподілу підпорядковується середнє вибірок*. Тож давайте подивимося, що це взагалі таке, як з ним працювати в Python й які в нього є властивості.

## 3.1 Нормальний розподіл

Нормальний розподіл — неперервний розподіл, у якому щільність спадає зі збільшенням відстані від математичного сподівання за швидкістю, пропорційною квадрату відстані (див. [формулу 3.1](#eq-normal-density)).

де — випадкова величина, — математичне сподівання, — дисперсія.

На графіку нижче показано, як виглядає нормальний розподіл з різними параметрами та .

x = np.linspace(-5, 5, 1000)  
params = [(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)]  
colors = [turquoise, orange, red, blue, slate, purple]  
  
for (mu, sigma), color in zip(params, colors):  
 plt.plot(x, norm.pdf(x, mu, sigma), label=f'μ={mu}, σ={sigma}', color=color)  
  
plt.xlabel('x')  
plt.ylabel('f(x)')  
plt.legend()  
plt.show()

Рядок 1

Генерація значень для побудови графіка.

Рядок 2

Параметри та .

Рядок 3

Кольори для графіків.

Рядки 5-6

Побудова графіка нормального розподілу з різними параметрами та .

|  |
| --- |
| Рисунок 3.1: Нормальний розподіл з різними параметрами |

## 3.2 Нормальний розподіл у Python

Нехай ми хочемо задати розподіл . Для цього є клас norm[[6]](#footnote-188).

Параметри класу:

* loc — це
* scale — це , або **стандартне відхилення**. Не дисперсія!

Методи класу:

* rvs() — згенерувати випадкові числа з розподілу
* cdf(x) — кумулятивна функція розподілу (cumulative distribution function, CDF) в точці , ймовірність того, що випадкова величина менша або дорівнює .
* ppf(q) — квантиль функції розподілу (percent-point function, PPF) для ймовірності , ймовірність того, що випадкова величина менша або дорівнює .
* pdf(x) — щільність ймовірності (probability density function, PDF) в точці , ймовірність того, що випадкова величина дорівнює .

CDF та PPF — це функції, які пов’язані між собою. CDF визначає ймовірність того, що випадкова величина менша або дорівнює , а PPF визначає значення , для якого ймовірність менша або дорівнює .

Ініціалізуємо клас norm з параметрами та (стандартний нормальний розподіл). Далі, згенеруємо випадкову вибірку з 50 спостережень, а також обчислимо PDF, CDF та PPF для .

std\_norm = norm(loc=0, scale=1)  
  
rnorm = std\_norm.rvs(size=50, random\_state=42)  
  
CDF = std\_norm.cdf(1.5)  
PDF = std\_norm.pdf(1.5)  
PPF = std\_norm.ppf(0.933)  
  
display(  
 Markdown(f"$P(X \\leq 1.5) = {CDF:.3f}$"),  
 Markdown(f"$f(1.5) = {PDF:.3f}$"),  
 Markdown(f"$z\_{{0.933}} = \Phi^{{-1}}(0.933) = {PPF:.3f}$")  
)

Рядок 1

Ініціалізація класу norm з параметрами та .

Рядок 3

Генерація випадкової вибірки з 50 спостережень.

Рядок 5

Обчислення PDF для .

Рядок 6

Обчислення CDF для .

Рядок 7

Обчислення PPF для .

Рядки 9-13

Виведення результатів.

Візуалізація методів класу norm показана на [рисунку 3.2](#fig-normal-distribution-2).

|  |
| --- |
| Рисунок 3.2: Демонстрація методів класу norm |

## 3.3 Властивості нормального розподілу

Нормальний розподіл має кілька важливих властивостей[[7]](#footnote-196):

1. **Сума двох незалежних нормально розподілених випадкових величин також має нормальний розподіл**:

де та — незалежні нормально розподілені випадкові величини з параметрами , та , відповідно.

1. **Множення нормально розподіленої випадкової величини на константу також дає нормально розподілену величину**:

де — константа, — нормально розподілена випадкова величина з параметрами , .

### 3.3.1 Перевірка властивостей в Python

За допомогою мови Python ми можемо перевірити ці властивості. Почнемо з [Рівняння 3.2](#eq-normal-sum). Для цього ми згенеруємо дві нормально розподілені випадкові величини та з параметрами , та , . Потім, ми обчислимо їхню суму та перевіримо, чи має вона нормальний розподіл з параметрами та .

mean\_one, mean\_two = 3, -1  
var\_one, var\_two = 4, 2  
  
n = 10000  
  
x1 = norm.rvs(loc=mean\_one, scale=np.sqrt(var\_one), size=n)  
x2 = norm.rvs(loc=mean\_two, scale=np.sqrt(var\_two), size=n)  
  
x\_sum = x1 + x2  
check\_sum = norm(loc=mean\_one + mean\_two, scale=np.sqrt(var\_one + var\_two))  
  
x\_grid = np.linspace(-8, 12, 1000)  
  
fig, ax = plt.subplots()  
sns.histplot(x\_sum, kde=True, stat='density', color=turquoise,  
 label='Емпіричний розподіл', ax=ax)  
plt.plot(x\_grid, check\_sum.pdf(x\_grid), color=red\_pink,  
 label='Теоретичний розподіл', alpha=0.8)  
plt.xlabel('x')  
plt.ylabel('Щільність')  
plt.legend()  
plt.show()

Рядок 1

Параметри та .

Рядок 2

Параметри та .

Рядок 4

Кількість спостережень.

Рядки 6-7

Генерація нормально розподілених випадкових величин та .

Рядок 9

Сума двох нормально розподілених випадкових величин.

Рядок 10

Параметри суми .

Рядок 12

Стандартне відхилення суми .

Рядки 15-16

Емпіричний розподіл суми .

Рядки 17-18

Теоретичний розподіл суми .

|  |
| --- |
| Рисунок 3.3: Перевірка властивостей нормального розподілу |

Видно, що розподіли приблизно збіглися! А значить ми переконалися, що формула правильна.

Другу властивість [Рівняння 3.3](#eq-normal-multiply) можна перевірити аналогічно. Для цього ми згенеруємо нормально розподілену випадкову величину з параметрами , та помножимо її на константу . Потім, ми перевіримо, чи має вона нормальний розподіл з параметрами та .

mean\_one = 0  
var\_one = 1  
a = 2  
n = 10000  
x1 = norm.rvs(loc=mean\_one, scale=np.sqrt(var\_one), size=n)  
x\_mult = a \* x1  
check\_mult = norm(loc=a \* mean\_one, scale=np.sqrt(a\*\*2 \* var\_one))  
x\_grid = np.linspace(-8, 8, 1000)  
  
fig, ax = plt.subplots()  
sns.histplot(x\_mult, kde=True, stat='density', color=turquoise,  
 label='Емпіричний розподіл', ax=ax)  
plt.plot(x\_grid, check\_mult.pdf(x\_grid), color=red\_pink,  
 label='Теоретичний розподіл', alpha=0.8)  
plt.xlabel('x')  
plt.ylabel('Щільність')  
plt.legend()  
plt.show()

Рядок 1

Параметри та .

Рядок 2

Параметри .

Рядок 3

Константа .

Рядок 4

Кількість спостережень.

Рядок 5

Генерація нормально розподіленої випадкової величини .

Рядок 6

Множення нормально розподіленої випадкової величини на константу .

Рядок 7

Параметри множення на константу .

Рядки 8,11-12

Стандартне відхилення множення на константу .

Рядки 13-14

Емпіричний та теоретичний розподіл множення на константу .

|  |
| --- |
| Рисунок 3.4: Перевірка властивостей нормального розподілу |

Цього разу розподіли також збіглися. А значить ми переконалися, що формула правильна.

## 3.4 Центральна гранична теорема

Для початку пригадаємо теорему, яка є основоположною теоремою для всіх критеріїв, які ми розглянемо найближчим часом.

**Теорема 3.1 (Центральна гранична теорема, ЦГТ)** Нехай — **незалежно** однаково розподілені випадкові величини, в яких існують математичне сподівання та дисперсія: і , тоді збігається за розподілом[[8]](#footnote-211) до (Gnedenko and Kolmogorov (2021)).

Це означає, що якщо випадкові величини в експерименті **незалежні й однаково розподілені** й ваша вибірка **досить велика**, то можна вважати, що

де — середнє арифметичне вибірки, — кількість спостережень, — математичне сподівання генеральної сукупності, — дисперсія генеральної сукупності.

|  |
| --- |
| Примітка |
| Випадкові величини можуть бути слабко залежні одна від одної й злегка по-різному розподілені. Центральна гранична теорема все ще буде правильною, Gnedenko and Kolmogorov (2021). |

### 3.4.1 Візуалізація ЦГТ

Щоб краще розуміти, як працює ЦГТ, я пропоную візуалізувати теорему: подивимося на розподіл середніх значень у різних вибірках. Як ми це зробимо?

* Щоб подивитися, що деяка випадкова величина з нормального розподілу, нам потрібна вибірка цих випадкових величин.
* У цьому випадку нам потрібна вибірка статистик із ЦГТ. Тому нам потрібно згенерувати вибірок по елементів у кожній.
  + По кожній вибірці треба порахувати середнє за елементами.
  + У підсумку ми отримаємо вибірку з елементів.
  + Вона і має бути з нормального розподілу.

def visualize\_CLT(sample\_generator, expected\_value, variance):  
 """  
 Візуалізація ЦГТ  
   
 sample\_generator: функція, яка генерує вибірку  
 expected\_value: математичне сподівання  
 variance: дисперсія  
 """  
 np.random.seed(42)  
 N = 5000  
 clt\_sample = []  
 for \_ in range(N):  
 sample = sample\_generator()  
 sample\_size = len(sample)  
 statistic = (  
 np.sqrt(sample\_size)  
 \* (np.mean(sample) - expected\_value)  
 / np.sqrt(variance)  
 )  
 clt\_sample.append(statistic)  
  
 x = np.linspace(-4, 4, 1000)  
 fig, ax = plt.subplots()  
 sns.histplot(clt\_sample, kde=True, stat='density', color=turquoise,  
 label='Емпіричний розподіл', ax=ax)  
 ax.plot(x, norm().pdf(x), color=red\_pink,  
 label='$\mathcal{N}(0, 1)$', alpha=0.8)  
 plt.legend()  
 plt.xlabel('X')  
 plt.ylabel('Щільність')  
 plt.show()

Рядок 10

Кількість вибірок.

Рядок 11

Пустий масив для зберігання статистик.

Рядок 13

Генерація вибірки з елементами.

Рядок 14

Кількість елементів у вибірці.

Рядки 15-19

Обчислення статистики.

Рядок 20

Додавання статистики до масиву.

Рядки 22,24-31

Візуалізація емпіричного розподілу та теоретичного розподілу.

Тепер, давайте подивимося на біноміальний розподіл. Для цього ми згенеруємо вибірку з елементів з біноміального розподілу з параметрами та . Потім, ми обчислимо середнє за елементами.

p = 0.01  
n = 20  
size = 5000  
  
visualize\_CLT(lambda: np.random.binomial(n, p, size),  
 expected\_value = p \* n,  
 variance = n \* p \* (1 - p)  
)

Рядок 5

Генерація вибірки з біноміального розподілу.

Рядок 6

Математичне сподівання біноміального розподілу.

Рядок 7

Дисперсія біноміального розподілу.

|  |
| --- |
| Рисунок 3.5: Візуалізація ЦГТ при великій вибірці з біноміального розподілу. |

Емпірична щільність достатньо близько збігається з теоретичним розподілом.

А що якщо зменшити вибірку, за якою рахується середнє? Для цього ми зменшимо до 20, а до 0.05. Тепер, ми згенеруємо вибірку з елементів з біноміального розподілу з параметрами та . Потім, ми обчислимо середнє за елементами.

p = 0.05  
n = 20  
size = 10  
  
visualize\_CLT(  
 lambda: np.random.binomial(n, p, size),  
 expected\_value = p \* n,  
 variance = n \* p \* (1 - p)  
)

|  |
| --- |
| Рисунок 3.6: Візуалізація ЦГТ при маленькій вибірці з біноміального розподілу. |

Стало значно гірше: з’явилися прогалини в розподілі, та й сама емпірична функція розподілу зміщена. Тож наш експеримент підтвердив важливість розміру вибірки для коректної роботи ЦГТ. Це означає, що якщо ми хочемо використовувати ЦГТ, то вибірка має бути досить великою. В іншому випадку, результати можуть бути ненадійними.

Тепер подивимось на експоненціальний розподіл. Для цього ми згенеруємо вибірку з елементів з експоненціального розподілу з параметром . Потім, ми обчислимо середнє за елементами.

p = 5  
size = 400  
  
visualize\_CLT(  
 lambda: np.random.exponential(scale=1/p, size=size),  
 expected\_value = 1/p,  
 variance = 1/(p\*\*2)  
)

Рядок 1

Параметр експоненціального розподілу.

Рядок 2

Розмір вибірки.

Рядок 5

Генерація вибірки з експоненціального розподілу.

Рядок 6

Математичне сподівання експоненціального розподілу задається як .

Рядок 7

Дисперсія експоненціального розподілу задається як .

|  |
| --- |
| Рисунок 3.7: Візуалізація ЦГТ при великій вибірці з експоненціального розподілу. |

Бачимо, що і тут усе добре працює!

### 3.4.2 Інші формулювання ЦГТ

Наступні формулювання є еквівалентними, тому що ми можемо перетворити одне в інше за допомогою простих алгебраїчних перетворень. Вони можуть бути корисними в різних ситуаціях, залежно від того, що ми хочемо перевірити.

## 3.5 Нормальна апроксимація й застосування -критерію

### 3.5.1 Апроксимація нормальним розподілом

Згадайте задачу на самому початку [розділу 1.1](#sec-population). У нас є вибірка користувачів з параметром , й ми хочемо перевірити гіпотезу:

де — гіпотетичне значення параметра .

Раніше, ми вирішували цю задачу через біноміальний розподіл:

* Нехай реалізація . Тоді

Згадаємо, як вирішити цю задачу за допомогою Python.

А тепер подивимося, що нам говорить ЦГТ:

* За досить великого розміру вибірки ,
* .

При цьому цього разу ми дивимося статистику не в точці , як робили раніше, а в точці , **оскільки у нас неперервний розподіл, то нам не потрібно віднімати 1**:

* у разі нормального розподілу: ;
* у разі біноміального розподілу: .

Подивимось, як це виглядає в Python. Для цього створимо функцію get\_pvalue\_by\_normal\_approx, яка буде приймати на вхід параметри , , та повертати -значення. Порівняємо результати за точним біноміальним тестом та нашим наближенням.

def get\_pvalue\_by\_normal\_approx(t, n, mu\_0):  
 """  
 Функція для обчислення p-значення за нормальною апроксимацією  
  
 t: реалізація статистики  
 n: кількість спостережень  
 mu\_0: гіпотетичне значення параметра mu  
 """  
 mu = n \* mu\_0  
 sigma = np.sqrt(n \* mu\_0 \* (1 - mu\_0))  
 return 1 - norm(loc=mu, scale=sigma).cdf(t)  
  
n = 30  
mu\_0 = 0.5  
t = 19  
  
p\_value = get\_pvalue\_by\_normal\_approx(t, n, mu\_0)  
p\_value = binomtest(t, n, mu\_0, alternative='greater').pvalue  
  
print(f"p-значення за нормальною апроксимацією = {p\_value:.4f}")  
print(f"p-значення за точним біноміальним тестом = {p\_value:.4f}")

Рядок 9

Математичне сподівання біноміального розподілу.

Рядок 10

Стандартне відхилення.

Рядок 11

Обчислення -значення.

Рядок 13

Кількість спостережень.

Рядок 14

Гіпотетичне значення параметра .

Рядок 15

Реалізація статистики.

Рядки 17-18

Обчислення -значення.

Рядок 20

Виведення -значення.

Рядок 21

Виведення точного -значення.

p-значення за нормальною апроксимацією = 0.1002  
p-значення за точним біноміальним тестом = 0.1002

Ми бачимо, що значення не дуже-то й збіглися. Але, як ми пам’ятаємо, нормальна апроксимація працює тільки з деякого великого . Тому давайте спробуємо повторити експеримент із більшаимо кількість спостережень.

n = 3000  
mu\_0 = 0.5  
t = 1544  
  
p\_value = get\_pvalue\_by\_normal\_approx(t, n, mu\_0)  
p\_value = binomtest(t, n, mu\_0, alternative='greater').pvalue  
  
print(f"p-значення за нормальною апроксимацією = {p\_value:.4f}")  
print(f"p-значення за точним біноміальним тестом = {p\_value:.4f}")

p-значення за нормальною апроксимацією = 0.0561  
p-значення за точним біноміальним тестом = 0.0561

Ми бачимо, що відмінність тепер тільки в 3 знаку після коми, а не в другому, як раніше. Що більше ми братимемо вибірку, то меншою буде помилка про що говорить ЦГТ.

### 3.5.2 -критерій Фішера

-критерій Фішера використовується для перевірки гіпотез про математичне сподівання випадкової величини з відомою дисперсією (Fisher (1922)). Він є одним із найпоширеніших критеріїв у статистиці, оскільки дозволяє оцінити, чи є різниця між середніми значеннями двох груп статистично значущою.

Для **двостороннього** критерію ми можемо використовувати -критерій Фішера, але з урахуванням того, що ми перевіряємо гіпотезу про те, що не дорівнює . Тобто, ми хочемо перевірити, чи є різниця між середніми значеннями двох груп статистично значущою в обидва боки.

Нульова та альтернативна гіпотези для двостороннього -критерію Фішера мають вигляд:

де — гіпотетичне значення параметра .

Статистика -критерію Фішера має вигляд:

де — середнє арифметичне вибірки, — відома дисперсія генеральної сукупності, — кількість спостережень.

При достатньо великій вибірці згідно ЦГТ -критерій Фішера має нормальний розподіл:

Двосторонній критерій набуває вигляду:

де — рівень значущості.

А -значення для двостороннього критерію розраховується за формулою:

**Односторонній** критерій перевіряє гіпотезу про те, що більше або менше . Нульова та альтернативна гіпотези для одностороннього -критерію Фішера мають вигляд:

Тоді односторонній -критерій Фішера має вигляд:

де — функція розподілу стандартного нормального розподілу, — рівень значущості, — реалізація статистики -критерію Фішера.

## 3.6 -критерій Фішера в Python

Напишемо функцію z\_test\_pvalue, яка буде приймати на вхід параметри sample\_mean (середнє арифметичне вибірки), sample\_size (кількість спостережень), population\_mean (гіпотетичне значення параметра ), population\_variance (дисперсія генеральної сукупності) та alternative (альтернативна гіпотеза). Функція буде повертати -значення для двостороннього або одностороннього -критерію Фішера.

def z\_test\_pvalue(  
 sample\_mean,  
 sample\_size,  
 population\_mean,  
 population\_variance,  
 alternative='two-sided'  
):  
 """  
 Функція для обчислення p-значення за Z-критерієм Фішера  
  
 sample\_mean: середнє арифметичне вибірки  
 sample\_size: кількість спостережень  
 population\_mean: гіпотетичне значення параметра mu  
 population\_variance: дисперсія генеральної сукупності  
 alternative: альтернативна гіпотеза  
 """  
 standard\_error = np.sqrt(population\_variance) / np.sqrt(sample\_size)  
 z = (sample\_mean - population\_mean) / standard\_error  
  
 if alternative == 'two-sided':  
 p\_value = 2 \* min(norm.cdf(z), 1 - norm.cdf(z))  
 elif alternative == 'greater':  
 p\_value = 1 - norm.cdf(z)  
 elif alternative == 'less':  
 p\_value = norm.cdf(z)  
 else:  
 raise ValueError("Оберіть одну з альтернатив: ['two-sided', 'greater', 'less']")  
  
 return p\_value

Рядок 18

Обчислення статистики -критерію Фішера.

Рядок 20

Перевірка двосторонньої гіпотези.

Рядок 21

Обчислення -значення для двостороннього -критерію Фішера.

Рядок 22

Перевірка правосторонньої гіпотези.

Рядок 23

Обчислення -значення для правостороннього -критерію Фішера.

Рядок 24

Перевірка лівосторонньої гіпотези.

Рядок 25

Обчислення -значення для лівостороннього -критерію Фішера.

Рядок 27

Виклик помилки, якщо альтернативна гіпотеза не відповідає жодній з можливих.

Рядок 29

Повернення -значення.

Тепер ми можемо перевірити гіпотезу про те, що не дорівнює , за допомогою -критерію Фішера. Для цього ми можемо використати функцію z\_test\_pvalue та порівняємо з результатами, які ми отримали раніше за допомогою біноміального тесту та нормальної апроксимації.

n = 30  
mu\_0 = 0.5  
t = 19  
sample\_mean = t / n  
population\_variance = mu\_0 \* (1 - mu\_0)  
  
p\_value = z\_test\_pvalue(sample\_mean, n, mu\_0, population\_variance, alternative='greater')  
print(f"p-значення за Z-критерієм Фішера = {p\_value:.4f}")  
print(f"p-значення за нормальною апроксимацією = {get\_pvalue\_by\_normal\_approx(t, n, mu\_0):.4f}")  
print(f"p-значення за точним біноміальним тестом = {binomtest(t, n, mu\_0, alternative='greater').pvalue:.4f}")

Рядок 4

Обчислення математичного сподівання вибірки.

Рядок 5

Дисперсія генеральної сукупності.

p-значення за Z-критерієм Фішера = 0.0721  
p-значення за нормальною апроксимацією = 0.0721  
p-значення за точним біноміальним тестом = 0.1002

Ми бачимо, що -значення за -критерієм Фішера та нормальною апроксимацією збігаються, а точний біноміальний тест дає трохи інше значення. Залишається питання: чи можна уточнити результати -тесту при малих вибірках? Відповідь: так, можна. Для цього існує поправка на неперервність, яка дозволяє покращити точність апроксимації і її ми розглянемо далі.

## 3.7 Поправка на неперервність

Задля кращого розуміння, давайте спочатку візуалізуємо -значення в залежності від величини успіхів експерименту для біноміального тесту та -критерію Фішера. Для цього побудуємо три варіанти:

* -значення *за нормальною апроксимацією*.
  + Розрахунок в Python: 1 - norm.cdf(t).
* -значення *біноміального тесту за умови, що — неціле число*.
  + Розглянемо на прикладі , тоді -значення буде дорівнювати
  + Розрахунок в Python: 1 - binom.cdf(t, n, mu\_0).
* -значення *біноміального тесту за умови, що — ціле число*.
  + Розглянемо на прикладі , тоді -значення буде дорівнювати
  + Розрахунок в Python: 1 - binom.cdf(t - 1, n, mu\_0).

def cmp\_pvalue\_binom\_and\_norm(n, mu0, t, add\_to\_x=0):  
 """  
 Функція для порівняння p-значення біноміального та нормального розподілів  
  
 n: кількість спостережень  
 mu0: гіпотетичне значення параметра mu  
 t: реалізація статистики  
 add\_to\_x: додатковий доданок до x-координати  
 """  
 x\_axis = np.linspace(0, n, 1000)  
 dots\_to\_show = np.arange(0, n + 1, 1)  
  
 add\_str = "" if add\_to\_x == 0 else f"{add\_to\_x}"  
  
 sum\_mu = n \* mu0  
 sum\_variance = n \* mu0 \* (1 - mu0)  
 sum\_std = np.sqrt(sum\_variance) # 2>  
  
 binom\_dist = binom(n=n, p=mu0)  
 norm\_dist = norm(loc=sum\_mu, scale=sum\_std)  
  
 plt.hlines(1 - binom\_dist.cdf(x\_axis[:-1]), x\_axis[:-1], x\_axis[1:],  
 color=turquoise, linestyle='-',linewidth=1)  
 plt.vlines(x\_axis[:-1], 1 - binom\_dist.cdf(x\_axis[:-1]),   
 1 - binom\_dist.cdf(x\_axis[1:]),  
 color=turquoise, linestyle=':', linewidth=1)  
   
 plt.scatter(dots\_to\_show, 1 - binom\_dist.cdf(dots\_to\_show-1), color=turquoise,  
 alpha=1, linewidths=0.5, s=25,  
 label=f'Binom pvalue = 1-binom.cdf(x-1)')  
  
 plt.scatter(t, 1 - norm\_dist.cdf(t + add\_to\_x), color=red\_pink,  
 alpha=1, marker='o', s=50, label=f'norm p-value({t})')  
  
 plt.scatter(t, 1 - binom\_dist.cdf(t - 1), color=turquoise, marker='o',  
 alpha=1, s=50, label=f'binom p-value({t})')  
  
 plt.plot(x\_axis, 1 - norm\_dist.cdf(x\_axis + add\_to\_x), color=red\_pink,  
 alpha=0.5, label=f'Normal pvalue = 1-norm.cdf(x{add\_str})')  
  
   
  
 plt.legend()  
 plt.xlabel('t')  
 plt.ylabel('$p$-значення')  
 plt.show()

Рядок 13

Додатковий доданок до -координати (про нього ми поговоримо пізніше).

Рядки 15-16

Параметри нормального розподілу.

Рядки 19-20

Створення біноміального та нормального розподілів.

Рядки 28-30

-значення біноміального розподілу.

Рядки 32-33

-значення нормального розподілу.

Рядки 35-36

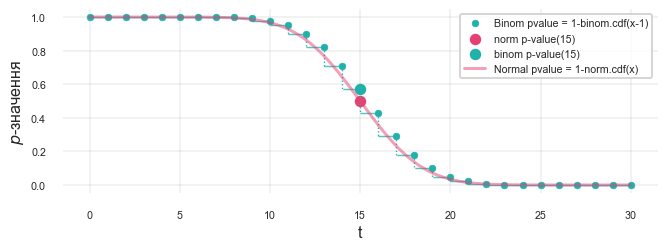
-значення біноміального розподілу у точці .

Рядки 38-39

-значення нормального розподілу у точці .

Тепер ми можемо порівняти -значення біноміального та нормального розподілів. Для цього викличемо функцію cmp\_pvalue\_binom\_and\_norm з параметрами , , .

n = 30  
mu\_0 = 0.5  
t = 15  
  
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 2.5))  
cmp\_pvalue\_binom\_and\_norm(n, mu\_0, t)



Порівняння p-значення біноміального та нормального розподілів

Якщо порівняти різницю між -значеннями біноміального та нормального розподілів, то ми отримаємо, що -значення біноміального розподілу завжди більше за -значення нормального розподілу. При цьому із збільшенням вибірки ця різниця зменшується. Давайте подивимось на ці різниці для різних значень .

Для початку візьмемо та .

n = 20  
t = 10  
mu\_0 = 0.5  
  
binom\_pvalue = 1 - binom(n, mu\_0).cdf(t - 1)  
norm\_pvalue = 1 - norm(loc=n \* mu\_0, scale=np.sqrt(n \* mu\_0 \* (1 - mu\_0))).cdf(t)  
diff = binom\_pvalue - norm\_pvalue  
  
print(f"p-значення біноміального розподілу = {binom\_pvalue:.4f}")  
print(f"p-значення нормального розподілу = {norm\_pvalue:.4f}")  
print(f"Різниця між p-значеннями = {diff:.4f}")

Рядок 5

-значення біноміального розподілу.

Рядок 6

-значення нормального розподілу.

Рядок 7

Різниця між -значеннями.

p-значення біноміального розподілу = 0.5881  
p-значення нормального розподілу = 0.5000  
Різниця між p-значеннями = 0.0881

Тепер візьмемо та .

n = 20  
t = 16  
mu\_0 = 0.5  
  
binom\_pvalue = 1 - binom(n, mu\_0).cdf(t - 1)  
norm\_pvalue = 1 - norm(loc=n \* mu\_0, scale=np.sqrt(n \* mu\_0 \* (1 - mu\_0))).cdf(t)  
diff = binom\_pvalue - norm\_pvalue  
  
print(f"p-значення біноміального розподілу = {binom\_pvalue:.4f}")  
print(f"p-значення нормального розподілу = {norm\_pvalue:.4f}")  
print(f"Різниця між p-значеннями = {diff:.4f}")

p-значення біноміального розподілу = 0.0059  
p-значення нормального розподілу = 0.0036  
Різниця між p-значеннями = 0.0023

І накінці візьмемо та .

n = 200  
t = 100  
mu\_0 = 0.5  
  
binom\_pvalue = 1 - binom(n, mu\_0).cdf(t - 1)  
norm\_pvalue = 1 - norm(loc=n \* mu\_0, scale=np.sqrt(n \* mu\_0 \* (1 - mu\_0))).cdf(t)  
diff = binom\_pvalue - norm\_pvalue  
  
print(f"p-значення біноміального розподілу = {binom\_pvalue:.4f}")  
print(f"p-значення нормального розподілу = {norm\_pvalue:.4f}")  
print(f"Різниця між p-значеннями = {diff:.4f}")

p-значення біноміального розподілу = 0.5282  
p-значення нормального розподілу = 0.5000  
Різниця між p-значеннями = 0.0282

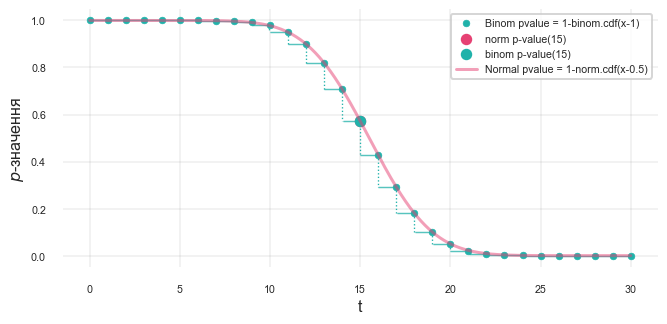
Ми бачимо, що з ростом вибірки різниця між -значеннями біноміального та нормального розподілів зменшується. Але як зробити так, щоб два -значення збіглися? Для цього слід звернути увагу на точки перетину двох ліній: біноміального та нормального розподілів. Зауважимо, що вони перетинаються приблизно на середині відрізка: між та . Тому спробуємо “змістити” графік нормального розподілу на праворуч.

Це означає, що ми повинні відняти від -координати точки перетину. Тобто, ми можемо використовувати поправку на неперервність, яка дозволяє покращити точність апроксимації. Тоді -значення для біноміального розподілу буде дорівнювати:

де — функція розподілу стандартного нормального розподілу.

Подивимось на графік з поправкою на неперервність.

cmp\_pvalue\_binom\_and\_norm(30, 0.5, 15, add\_to\_x=-0.5)



Ми бачимо, що -значення біноміального та нормального розподілів тепер збігаються.

Порівняємо -значення біноміального та нормального розподілів з поправкою на неперервність.

n = 30  
t = 19  
mu\_0 = 0.5  
  
mu = n \* mu\_0  
sigma = np.sqrt(mu \* (1 - mu\_0))  
normal = norm(loc=mu, scale=sigma)  
  
binom\_pvalue = 1 - binom(n, mu\_0).cdf(t - 1)  
norm\_pvalue = 1 - normal.cdf(t)  
norm\_pvalue\_correct = 1 - normal.cdf(t - 0.5)  
  
print(f"p (біном) = {binom\_pvalue:.4f}")  
print(f"p (нормальне наближення) = {norm\_pvalue:.4f}")  
print(f"p (з поправкою на неперервність) = {norm\_pvalue\_correct:.4f}")

Рядок 9

-значення біноміального розподілу.

Рядок 10

-значення нормального розподілу.

Рядок 11

-значення нормального розподілу з поправкою на неперервність.

p (біном) = 0.1002  
p (нормальне наближення) = 0.0721  
p (з поправкою на неперервність) = 0.1006

Ми бачимо, що -значення біноміального та нормального розподілів з поправкою на неперервність тепер збігаються.

Додамо поправку на неперервність до нашої функції z\_test\_pvalue.

def z\_test\_pvalue(  
 sample\_mean,   
 sample\_size,   
 population\_mean,   
 population\_variance,   
 alternative='two-sided',   
 continuity\_correction=False  
):  
 """  
 Функція для обчислення p-значення за Z-критерієм Фішера з поправкою на неперервність  
  
 sample\_mean: середнє арифметичне вибірки  
 sample\_size: кількість спостережень  
 population\_mean: гіпотетичне значення параметра mu  
 population\_variance: дисперсія генеральної сукупності  
 alternative: альтернативна гіпотеза  
 continuity\_correction: поправка на неперервність  
 """  
 if continuity\_correction:  
 sample\_mean = (sample\_mean \* sample\_size - 0.5) / sample\_size  
  
 se = np.sqrt(population\_variance) / np.sqrt(sample\_size)  
 z = (sample\_mean - population\_mean) / se  
  
 match alternative:  
 case 'two-sided':  
 p\_value = 2 \* min(norm.cdf(z), 1 - norm.cdf(z))  
 case 'greater':  
 p\_value = 1 - norm.cdf(z)  
 case 'less':  
 p\_value = norm.cdf(z)  
 case \_:  
 raise ValueError("Оберіть альтернативу: ['two-sided', 'greater', 'less']")  
  
 return p\_value

1. Перевірка наявності поправки на неперервність.

Тепер ми можемо використовувати функцію z\_test\_pvalue з параметром continuity\_correction=True, щоб отримати -значення з поправкою на неперервність.

n = 30  
t = 19  
mu0 = 0.5  
variance = mu0 \* (1 - mu0)  
  
p = z\_test\_pvalue(  
 t / n,  
 n,  
 mu0,  
 variance,  
 alternative='greater',  
 continuity\_correction=True  
)  
  
print(f"p-значення (Z-критерій з поправкою) = {p:.4f}")

p-значення (Z-критерій з поправкою) = 0.1006

Чудово, тепер ми можемо використовувати -критерій Фішера з поправкою на неперервність для перевірки гіпотез про математичне сподівання випадкової величини *з відомою дисперсією*. Але що робити, якщо дисперсія невідома? Для цього існує -критерій Стьюдента, який ми розглянемо далі.

## 3.8 Питання для самоперевірки

**Загальне розуміння та Z-критерій**

1. Яка основна мета використання -критерію Фішера? Для перевірки яких гіпотез він призначений?
2. Яка ключова вимога (припущення) щодо дисперсії генеральної сукупності для застосування -критерію?
3. Чому знання про нормальний розподіл є необхідним для розуміння та застосування -критерію?

**Нормальний розподіл**

1. Якими двома параметрами характеризується нормальний розподіл ? Що кожен з них означає?
2. Напишіть формулу щільності ймовірності (PDF) для нормального розподілу.
3. У бібліотеці scipy.stats для класу norm, що означають параметри loc та scale? Як scale пов’язаний з дисперсією ?
4. Поясніть своїми словами, що обчислюють методи .pdf(x), .cdf(x) та .ppf(q) для об’єкта norm?
5. Якщо та є незалежними, який розподіл матиме їх сума ? Вкажіть параметри.
6. Якщо і — константа, який розподіл матиме величина ? Вкажіть параметри.

**Центральна гранична теорема (ЦГТ)**

1. Сформулюйте Центральну граничну теорему. Про розподіл якої величини вона говорить?
2. Які основні умови повинні виконуватися для випадкових величин , щоб до них можна було застосувати ЦГТ?
3. Запишіть формулу статистики з ЦГТ, яка збігається до стандартного нормального розподілу .
4. Чому ЦГТ є такою важливою в статистиці, особливо для перевірки гіпотез?
5. Чи обов’язково початкові дані мають бути нормально розподілені, щоб вибіркове середнє (при великому ) було приблизно нормально розподіленим? Поясніть.
6. Як розмір вибірки () впливає на якість апроксимації розподілу вибіркового середнього нормальним розподілом згідно з ЦГТ?

**Нормальна апроксимація та застосування Z-критерію**

1. Як ЦГТ дозволяє використовувати нормальний розподіл для наближеного обчислення ймовірностей для біноміального розподілу при великому ?
2. Яка формула для тестової статистики у -критерії Фішера? Поясніть кожну складову формули.
3. Який теоретичний розподіл має статистика за умови істинності нульової гіпотези ?
4. Як обчислити -значення для **двостороннього** -критерію (), знаючи реалізацію статистики ?
5. Як обчислити -значення для **правостороннього** -критерію (), знаючи реалізацію статистики ?
6. Порівняйте -критерій (де статистика базується на ) та нормальну апроксимацію біноміального розподілу (де статистика базується на сумі ). Чи є вони по суті еквівалентними? Чому?

**Поправка на неперервність**

1. У яких ситуаціях виникає потреба у поправці на неперервність? Яку проблему вона допомагає вирішити?
2. Як зазвичай застосовується поправка на неперервність при обчисленні за допомогою нормального розподілу, де — дискретна випадкова величина (наприклад, біноміальна)? (Наприклад, як змінюється значення у формулі?)
3. Як функція z\_test\_pvalue (у її покращеній версії) враховує поправку на неперервність?

**Підсумкові питання**

1. За яких умов ви б віддали перевагу точному біноміальному тесту перед Z-критерієм (з або без поправки) для аналізу даних типу успіх/невдача (Bernoulli)?
2. Яке основне обмеження -критерію, згадане наприкінці розділу, мотивує перехід до -критерію Стьюдента?

## 3.9 Рекомендована література

Розуміння нормального розподілу та Центральної граничної теореми є передумовою для засвоєння Z-критерію. Рекомендовані джерела для цього розділу:

1. **Casella, G., & Berger, R. L. (2002). Statistical Inference.** Фундаментальний підручник, що надає строге математичне обґрунтування властивостей нормального розподілу та Центральної граничної теореми.
2. **Freedman, D., Pisani, R., & Purves, R. (2007). Statistics.** Класичний текст, відомий своїми інтуїтивними та наочними поясненнями складних концепцій, зокрема Центральної граничної теореми, без надмірного заглиблення в математику.
3. **Agresti, A. (2018). An Introduction to Categorical Data Analysis.** Ця книга містить чіткі пояснення щодо застосування Z-критерію для аналізу пропорцій та різниці пропорцій, що є одним із найпоширеніших випадків використання цього тесту.

# 4. -критерій Стьюдента

## 4.1 Основні положення

Спробуємо розв’язати таке завдання.

**Приклад 4.1**

Менеджмент компанії розглядає новий підхід до планування щотижневих нарад, щоб зменшити втрати часу співробітників. Раніше середня тривалість таких нарад складала 70 хвилин. Ідея полягає в тому, щоб перейти до нової структури нарад, яка, за задумом, дозволить зменшити тривалість нарад до 60 хвилин.

Протягом одного тижня провели 7 нарад у новому форматі й зафіксували їх тривалість. Якщо з’ясується, що нові наради тривають довше, ніж у середньому 70 хвилин, новий формат вважатимуть неефективним.

Ваше завдання — перевірити, чи новий формат нарад дійсно ефективніший.

Вийшла вибірка середньої тривалості нарад (в хвилинах): [50, 55, 70, 45, 40, 70, 80].

Для початку переформулюємо умову мовою математики. Є вибірка:

* — значення середньої тривалості нарад у новому форматі;
* Будемо вважати, що з нормального розподілу, тобто .

meeting\_time = np.array([50, 55, 70, 45, 40, 70, 80])  
print(f"Середнє значення: {np.mean(meeting\_time):.2f} хвилин")

Середнє значення: 58.57 хвилин

Наша гіпотеза звучить так:

Здається, що ми таке вже вміємо вирішувати: згадаємо про -критерій:

* Статистика
* За досить великого розміру вибірки (за ЦГТ)
* Односторонній критерій:
  + -значення = , де — реалізація статистики , — функція розподілу
* Двосторонній критерій:
  + -значення = , де — реалізація статистики

Тоді треба лише порахувати таку статистику: .

Але є суттєва проблема: **ми не знаємо** ! Тому ми не можемо використовувати -критерій.

Давайте спробуємо оцінити за допомогою вибірки. Для цього скористаємося формулою:

Вона називається **вибірковою дисперсією**. Вибіркова дисперсія є *незміщеною* та *консистентною* оцінкою дисперсії генеральної сукупності.

Вибіркова дисперсія є **незміщеною**, оскільки ми ділимо на , а не на . Це робиться для того, щоб уникнути систематичної помилки в оцінці дисперсії. **Консистентність** пояснюється тим, що з ростом вибірки ми все ближче підходимо до істинної дисперсії генеральної сукупності.

Для розрахунку вибіркової дисперсії в Python можна скористатися функцією np.var з параметром ddof=1, що означає, що ми ділимо на .

meeting\_time\_var = np.var(meeting\_time, ddof=1)  
print(f"Вибіркова дисперсія: {meeting\_time\_var:.2f} хвилин")

Вибіркова дисперсія: 222.62 хвилин

Давайте введемо новий критерій -тест, у якому ми підставимо:

Залишилося перевірити: **Чи правда, що при розподіл -статистики — стандартний нормальний?**

Для цього пропонується подивитися, як насправді буде розподілена статистика у завданні, яке було поставлено від початку.

Для цього будемо вважати, що вибірка складається з 7 елементів й .

* Ми раз згенеруємо вибірку та порахуємо щоразу статистику .
* У підсумку ми отримаємо вибірку розміру для й зможемо побудувати гістограму розподілу. Окремо побудуємо розподіл . Якщо емпіричний розподіл візуально збіжиться з теоретичним нормальним, значить, усе добре. А якщо ні, то так просто ми не можемо замінити на .
  + Додатково подивимося, що буде, якщо замінити на . Добре, що на штучному прикладі ми знаємо дисперсію.

Для цього ми напишемо функцію sample\_statistics, яка зможе побудувати розподіл для будь-якої статистики, а не тільки для . Вона приймає на вхід:

* number\_of\_experiments — кількість експериментів, які ми хочемо провести;
* statistic\_function — функція, яка обчислює статистику;
* sample\_size — розмір вибірки;
* sample\_distr — розподіл, з якого ми генеруємо вибірку.

def sample\_statistics(  
 number\_of\_experiments,  
 statistic\_function,   
 sample\_size,   
 sample\_distr  
):  
 """  
 Генерує вибірку з розподілу та обчислює статистику для кожної вибірки.  
   
 number\_of\_experiments: кількість експериментів  
 statistic\_function: функція, яка обчислює статистику  
 sample\_size: розмір вибірки  
 sample\_distr: розподіл, з якого генеруємо вибірку  
 """  
 statistic\_sample = []  
 for \_ in range(number\_of\_experiments):  
 sample = sample\_distr.rvs(sample\_size)  
 statistic = statistic\_function(sample)  
 statistic\_sample.append(statistic)  
 return statistic\_sample

Тепер перевіримо, чи дійсно розподілена нормально. Для цього скористаємося функцією sample\_statistics та побудуємо гістограму для . Генерувати вибірку будемо з нормального розподілу .

sample\_size = 7  
M = 100000  
sample\_distr = norm(loc=5, scale=3)  
  
T\_X = lambda x: (  
 np.sqrt(sample\_size) \* (np.mean(x) - sample\_distr.mean()) /  
 np.sqrt(np.var(x, ddof=1))  
)  
  
Z\_X = lambda x: (  
 np.sqrt(sample\_size) \* (np.mean(x) - sample\_distr.mean()) /  
 sample\_distr.std()  
)  
  
samples = {  
 "T(X)": sample\_statistics(  
 number\_of\_experiments=M, statistic\_function=T\_X,  
 sample\_size=sample\_size, sample\_distr=sample\_distr),  
  
 "Z(X)": sample\_statistics(  
 number\_of\_experiments=M, statistic\_function=Z\_X,  
 sample\_size=sample\_size, sample\_distr=sample\_distr)  
}  
  
for i, name in enumerate(["T(X)", "Z(X)"]):  
 plt.subplot(1, 2, i + 1)  
 current\_sample = samples[name]  
 l\_bound, r\_bound = np.quantile(current\_sample, [0.001, 0.999])  
  
 x = np.linspace(l\_bound, r\_bound, 1000)  
 sns.distplot(current\_sample, label='Емпіричний розподіл', color=turquoise)  
 plt.plot(x, norm(0, 1).pdf(x), label='$\mathcal{N}(0, 1)$', color=red\_pink)  
 plt.legend(loc='upper left')  
 plt.xlabel(f'{name}')  
 plt.xlim((l\_bound, r\_bound))  
 plt.ylabel('Щільність')  
 plt.grid(linewidth=0.2)  
  
plt.show()

Рядки 1-3

Формування параметрів.

Рядки 5-8,10-13

Статистика та .

Рядки 15-18,20-23

Генерація вибірки та обчислення статистики.

Рядки 25-28

Візуалізація результатів.

|  |
| --- |
| Рисунок 4.1: Симуляція розподілу та |

Ми бачимо, що:

* -тест тут працює: .
* Але ось для це не так! Вони відрізняються, а значить -критерій не підходить для початкової задачі!

Для того щоб стало зрозуміло, чому так сталося, розглянемо у деталях. При створенні критерію є два кроки:

1. Придумати статистику для критерію
   * Із цим ми успішно впоралися, придумавши .
2. Зрозуміти розподіл статистики.
   * І ось це найскладніший крок, який не дозволяє використовувати будь-яку придуману статистику. Потрібно також розуміти її розподіл.
   * І з цим, як ми побачили, ми провалилися для . Нормальний розподіл не підійшов.

Але чому не розподілена нормально, хоча $? Чому при заміні на усе зіпсувалося?

**Справа в тому, що — це випадкова величина!** Згадаймо, як ми виводили -критерій:

1. Ми порахували, що . З ЦГТ або, у випадку вище, з властивостей нормального розподілу.
2. Далі, все також із властивостей цього розподілу випливає, що якщо ми віднімемо константу або поділимо на константу, то нормальний розподіл не перетвориться на інший: тому .

**Але ми нічого не знаємо про** , де , де невідомо. Ми не знаємо поки що жодних теорем, які б хоч якось доводили, що тут також залишиться нормальний розподіл.

Давайте подивимося на розподіл на все тому ж нормальному розподілі.

S2 = lambda sample: np.std(sample, ddof=1)  
S2\_sample = sample\_statistics(  
 number\_of\_experiments=M, statistic\_function=S2,  
 sample\_size=sample\_size, sample\_distr=sample\_distr  
)  
  
sns.distplot(S2\_sample, label='Емпіричний розподіл', color=turquoise)  
plt.legend()  
plt.xlabel('$\sqrt{S^2}$')  
plt.ylabel('Щільність')  
plt.grid(linewidth=0.2)  
plt.show()

Рядок 1

Статистика .

Рядки 2-5

Генерація вибірки та обчислення статистики.

|  |
| --- |
| Рисунок 4.2: Розподіл |

Розподіл несиметричний й незрозуміло як розподілений. Тому, коли ми якусь величину з нормального розподілу ділимо на несиметричний незрозумілий розподіл, ми й отримуємо, що наша статистика не з нормального розподілу.

Тож давайте виведемо критерій, який допоможе розв’язати початкову задачу (Student (1908))!

## 4.2 -тест Стьюдента

Для того щоб вивести -тест, нам потрібно зрозуміти, як розподіляється статистика . Для того, щоб це дізнатися, нам знадобиться кілька фактів:

1. Нехай
2. Нехай . Тоді [[9]](#footnote-279).
   * Тоді [[10]](#footnote-280).
   * . Тоді
   * А значить
3. Нехай і з незалежні. Тоді статистика — з розподілу Стьюдента[[11]](#footnote-281) з ступенями свободи.
   * и незалежні[[12]](#footnote-282).
   * Тоді

У підсумку, статистика — взята з розподілу Стьюдента з ступенем свободи. **Але тільки в разі, якщо початкова вибірка з нормального розподілу!**

Тепер нам достатньо даних, щоб побудувати -тест:

Статистика буде виглядати так:

Тоді односторонній критерій набуває вигляду:

А -значення для одностороннього критерію можна обчислити так:

де z — реалізація статистики , — функція розподілу

Двосторонній критерій буде виглядати так:

При цьому -значення для двостороннього критерію можна обчислити так:

де — реалізація статистики , — функція розподілу .

## 4.3 -тест у Python

Давайте тепер протестуємо всі наші теоретичні дослідження на практиці. Для цього нам знадобляться наступні бібліотеки функції:

* scipy.stats.chii2 — для розподілу ;
* scipy.stats.t — для розподілу Стюдента;
* scipy.stats.ttest\_1samp — для -тесту.

Подивимось на розподіл та розподіл .

sample\_size = 7  
sample\_distr = norm(loc=5, scale=3)  
sample = sample\_distr.rvs(sample\_size)  
M = 10000  
  
eta\_stat = lambda x: (  
 np.var(x, ddof=1) \* (sample\_size - 1) / sample\_distr.var()  
)  
  
eta\_sample = sample\_statistics(  
 number\_of\_experiments=M,  
 statistic\_function=eta\_stat,  
 sample\_size=sample\_size,  
 sample\_distr=sample\_distr  
)  
  
chi2\_dist = chi2(df=sample\_size - 1)  
l, r = np.quantile(eta\_sample, [0.001, 0.999])  
  
x = np.linspace(l, r, 1000)  
sns.distplot(eta\_sample, label='Емпіричний розподіл', color=turquoise)  
plt.plot(x, chi2\_dist.pdf(x), label='$\chi^2$', color=red\_pink)  
  
plt.legend()  
plt.xlabel('$\eta$')  
plt.ylabel('Щільність')  
plt.grid(linewidth=0.2)  
plt.show()

Рядки 1-4

Формування параметрів.

Рядки 6-8

Статистика .

Рядки 10-15

Генерація вибірки та обчислення статистики.

Рядок 17

Розподіл .

Рядок 18

Візуалізація результатів.

|  |
| --- |
| Рисунок 4.3: Розподіл емпіричного та теоретичного . |

Ми бачимо, що емпіричний розподіл та теоретичний збігаються. Це означає, що ми можемо використовувати -тест для перевірки гіпотези.

Тепер перевіримо, чи дійсно описується розподілом Стьюдента. Для цього скористаємося функцією sample\_statistics та побудуємо гістограму для . Генерувати вибірку будемо з нормального розподілу .

sample\_size = 7  
sample\_distr = norm(loc=5, scale=3)  
sample = sample\_distr.rvs(sample\_size)  
M = 10\_000  
  
T\_X = lambda x: (  
 np.sqrt(sample\_size) \* (np.mean(x) - sample\_distr.mean()) /  
 np.std(x, ddof=1)  
)  
  
T\_sample = sample\_statistics(  
 number\_of\_experiments=M,  
 statistic\_function=T\_X,  
 sample\_size=sample\_size,  
 sample\_distr=sample\_distr  
)  
  
T\_dist = t(df=sample\_size - 1)  
l, r = np.quantile(T\_sample, [0.001, 0.999])  
x = np.linspace(l, r, 1000)  
  
sns.distplot(T\_sample, color=turquoise, label='Емпіричний розподіл')  
plt.plot(x, T\_dist.pdf(x), c=red\_pink, label='$t\_{n-1}$')  
plt.plot(x, norm(0, 1).pdf(x), c=slate, ls='--', label='$\mathcal{N}(0, 1)$')  
  
plt.legend()  
plt.xlabel('$t(X)$')  
plt.ylabel('Щільність')  
plt.xlim(l, r)  
plt.grid(linewidth=0.2)  
plt.show()

|  |
| --- |
| Рисунок 4.4: Розподіл |

Розподіл Стьюдента практично ідеально описує дані, тоді як нормальний розподіл більш “центрований”.

Тепер, як викликати вбудований -тест у Python? Для цього скористаємося функцією scipy.stats.ttest\_1samp. Вона приймає на вхід:

* a — вибірка;
* popmean — середнє значення генеральної сукупності, яке ми хочемо перевірити;
* axis — вздовж якої осі обчислювати тест. За замовчуванням 0;
* nan\_policy — як обробляти NaN. Може приймати значення propagate, raise, omit. За замовчуванням propagate;
* alternative — альтернативна гіпотеза. Може приймати значення two-sided, less, greater. За замовчуванням two-sided.

meeting\_time = np.array([50, 55, 70, 45, 40, 70, 80])  
  
ttest\_result = ttest\_1samp(meeting\_time, 70, alternative='less')  
print(f"Статистика: {ttest\_result.statistic:.2f}")  
print(f"p-значення: {ttest\_result.pvalue:.2f}")

Статистика: -2.03  
p-значення: 0.04

Оскільки -значення менше 0.05, то ми відхиляємо нульову гіпотезу. Це означає, що середня тривалість нарад у новому форматі триває менше 70 хвилин. Відповідно до -тесту, ми можемо стверджувати, що новий формат нарад дійсно скорочує їх тривалість.

## 4.4 Довірчі інтервали

Давайте тепер розглянемо, як можна оцінити параметри генеральної сукупності за допомогою -тесту. Розглянемо два виведення довірчого інтервалу.

### 4.4.1 Перший метод

Нехай є статистика та критерій для перевірки гіпотези рівня значущості .

Тоді довірчий інтервал для рівня довіри : множина таких , що критерій не відкидає для них .

Нехай — істинне середнє вибірки. Ми також знаємо, що за .

Нас цікавлять такі , що: , у цьому разі критерій не відкинеться.

Розпишемо, щоб у центрі залишилося тільки : . А отже, наш довірчий інтервал:

де

### 4.4.2 Другий метод

Довірчим інтервалом для параметра рівня довіри є пара статистик , таких, що .

Це класичне визначення довірчого інтервалу. Тобто, ми повинні знайти такі та , що .

Тоді

Цей довірчий інтервал збігається з попереднім. Тобто, ми можемо використовувати обидва методи для побудови довірчого інтервалу.

## 4.5 Довірчі інтервали у Python

Давайте тепер побудуємо довірчий інтервал для середнього значення тривалості нарад у новому форматі. Для цього скористаємося функцією scipy.stats.t.interval. Вона приймає на вхід:

* confidence — рівень значущості;
* df — кількість ступенів свободи;
* loc — середнє значення, за замовчуванням 0;
* scale — стандартна девіація, за замовчуванням 1.

Для побудови лівостороннього довірчого інтервалу візьмемо confidence на рівні 90%, оскільки ми хочемо перевірити, чи тривалість нарад у новому форматі *менша* 70 хвилин.

meeting\_time = np.array([50, 55, 70, 45, 40, 70, 80])  
  
confidence = 0.90  
df = len(meeting\_time) - 1  
loc = np.mean(meeting\_time)  
scale = np.std(meeting\_time, ddof=1) / np.sqrt(len(meeting\_time))  
  
interval = t.interval(confidence, df, loc, scale)  
print(f"Довірчий інтервал: {np.round(interval, 2)}")

Рядок 3

Рівень значущості.

Рядок 4

Кількість ступенів свободи.

Рядок 5

Середнє значення.

Рядок 6

Стандартна девіація.

Рядок 8

Виклик функції scipy.stats.t.interval.

Довірчий інтервал: [47.61 69.53]

## 4.6 -тест та вимога нормальності

Ми навчилися розв’язувати задачу оцінки середнього вибірки, коли дисперсія невідома, але вибірка з нормального розподілу. Тепер розглянемо, що буде, якщо вибірка не з нормального розподілу.

**Приклад 4.2**

Ви запускаєте онлайн-платформу з курсами програмування. Ви плануєте надавати доступ до курсів за фіксовану плату, але також інвестуєте в маркетинг та підтримку студентів. У середньому, прибуток від одного користувача (після вирахування витрат на платформу, рекламу тощо) становить грн., але витрати на залучення кожного нового студента — 1000 грн.

Студенти можуть скористатися гарантією повернення грошей протягом 14 днів. Ви хочете перевірити, чи є прибуток від нових користувачів більшим за 0 грн. (тобто, чи є прибуток від нових користувачів більшим за витрати на залучення нових студентів). Тому іноді прибуток від користувача — позитивне число, а іноді — негативне.

Інвестори готові профінансувати вашу платформу, якщо ви доведете, що вона буде прибутковою. У вас є дані про чистий прибуток або збиток від кожного користувача, який вже зареєструвався.

Згенеруємо штучні дані для цієї задачі. Для цього змішаємо логнормальний розподіл для позитивних значень (прибуток) та від’ємний для від’ємних значень (збиток).

n = 5000  
p\_positive = 0.6  
  
n\_pos = int(n \* p\_positive)  
profits = np.random.lognormal(mean=2, sigma=0.8, size=n\_pos) \* 100  
  
n\_neg = n - n\_pos  
losses = -np.random.chisquare(df=2, size=n\_neg) \* 100  
  
profits = np.concatenate([profits, losses])  
np.random.shuffle(profits)  
  
sns.histplot(profits, bins=100, kde=True, color=turquoise)  
  
plt.xlabel('Прибуток або збиток')  
plt.ylabel('Кількість користувачів')  
plt.grid(True)  
plt.show()

|  |
| --- |
| Рисунок 4.5: Візуалізація штучних до задачі. |

Порахуємо середній прибуток.

print(f"Середній прибуток: {profits.mean():.2f}")

Середній прибуток: 547.45

На відміну від попереднього завдання тут 2 відмінності:

* Початкова вибірка не з нормального розподілу
* Вибірка досить велика: не 7 елементів, а вже 5000.

### 4.6.1 -тест

Згадаймо, що в нас від початку була ідея в -тесті замість статистики , у якій дисперсія відома, використовувати критерій , де дисперсія оцінена на даних. І використовувати нормальний розподіл. Тільки в першому завданні цей критерій нам не допоміг. Але що, якби вибірка була великою? Чи могли б ми використовувати нормальний розподіл для наближення?

1. Будемо розглядати ту саму статистику
2. . За ЦГТ збіжність є тільки за розподілом.
3. тоді . Позначимо
   * Пам’ятаєте, раніше було сказано, що — найкраща оцінка для дисперсії? Річ у тім, що вона є [консистентною](https://en.wikipedia.org/wiki/Consistent_estimator) оцінкою для . Тобто [збігається за ймовірністю](https://en.wikipedia.org/wiki/Convergence_of_random_variables#Convergence_in_probability) до . Тобто .
   * А в цьому випадку існує [теорема](https://en.wikipedia.org/wiki/Continuous_mapping_theorem), яка стверджує, що .
4. .
   * І тут набуває чинності ще одна [теорема](https://en.wikipedia.org/wiki/Slutsky%27s_theorem): . Та сама збіжність, що й у ЦПТ!
   * Тобто статистика так само буде з нормального розподілу.

Отже, якщо вибірка велика, то ми можемо вважати, що .

|  |
| --- |
| Примітка |
| Зауважимо, що у випадку “нормальний розподіл, велика вибірка” працюють одразу 2 критерії: -тест та -тест. Це означає, що якщо та , то .  Формально ж, якщо ступінь свободи в -розподілі дорівнює нескінченності, то це нормальний розподіл!  А якщо , то ми замість -критерію ми можемо використовувати -критерій! |

В такому випадку критерій -тесту буде виглядати так:

Статистика буде виглядати так:

При достатньо великій вибірці .

Тоді односторонній критерій набуває вигляду:

А -значення для одностороннього критерію можна обчислити так:

де — реалізація статистики , — функція розподілу .

Двосторонній критерій буде виглядати так:

При цьому -значення для двостороннього критерію можна обчислити так:

де — реалізація статистики , — функція розподілу .

Перевіримо наш критерій на великій вибірці. Для цього згеренуємо вибірку з експоненційного розподілу , де , . Вибірка буде згенерована з параметром . Тобто, середнє значення вибірки буде .

sample\_size = 2000  
M = 10\_000  
sample\_distr = expon(loc=5, scale=300)  
  
T\_X = lambda x: (  
 np.sqrt(sample\_size) \* (np.mean(x) - sample\_distr.mean()) /  
 np.std(x, ddof=1)  
)  
  
T\_sample = sample\_statistics(  
 number\_of\_experiments=M,  
 statistic\_function=T\_X,  
 sample\_size=sample\_size,  
 sample\_distr=sample\_distr  
)  
  
l, r = np.quantile(T\_sample, [0.001, 0.999])  
x = np.linspace(l, r, 1000)  
  
sns.distplot(T\_sample, label='Емпіричний розподіл', color=turquoise)  
plt.plot(x, norm(0, 1).pdf(x),  
 label='$\mathcal{N}(0, 1)$', color=red\_pink)  
  
plt.legend()  
plt.xlabel('$T(X)$')  
plt.ylabel('Щільність')  
plt.xlim(l, r)  
plt.grid(linewidth=0.2)  
plt.show()

|  |
| --- |
| Рисунок 4.6: Розподіл для великої вибірки. |

Ми бачимо, що емпіричний розподіл та теоретичний збігаються. Це означає, що ми можемо використовувати -тест для перевірки гіпотези. Якщо ж перевірити на великих вибірках з нормального розподілу, то -тест та -тест будуть давати доволі схожі результати.

sample\_size = 2000  
M = 30\_000  
sample\_distr = norm(loc=5, scale=300)  
  
T\_X = lambda x: (  
 np.sqrt(sample\_size) \* (np.mean(x) - sample\_distr.mean()) /  
 np.std(x, ddof=1)  
)  
  
T\_sample = sample\_statistics(  
 number\_of\_experiments=M,  
 statistic\_function=T\_X,  
 sample\_size=sample\_size,  
 sample\_distr=sample\_distr  
)  
  
l, r = np.quantile(T\_sample, [0.001, 0.999])  
x = np.linspace(l, r, 1000)  
  
sns.distplot(T\_sample, label='Емпіричний розподіл', color=turquoise)  
plt.plot(x, norm(0, 1).pdf(x),  
 label='$\mathcal{N}(0, 1)$', color=red\_pink)  
  
plt.legend()  
plt.xlabel('$T(X)$')  
plt.ylabel('Щільність')  
plt.xlim(l, r)  
plt.grid(linewidth=0.2)  
plt.show()

|  |
| --- |
| Рисунок 4.7: Розподіл для великої вибірки. |

Виходить, що статистика при великій вибірці з нормального розподілу також буде з нормального розподілу.

## 4.7 Довірчий інтервал

Довірчий інтревал виводиться аналогічно до -тесту.

Переглнемо на практиці, як це виглядає у Python.

sample = expon(scale=300).rvs(2000)  
ci = norm.interval(confidence=0.95, loc=np.mean(sample), scale=sem(sample))  
print(f"CI = {np.round(ci, 2)}")

CI = [293.89 319.75]

Тепер ми можемо повернутися до нашої задачі з прибутком.

ci\_profit = norm.interval(confidence=0.95, loc=np.mean(profits), scale=sem(profits))  
print(f"CI = {np.round(ci\_profit, 2)}")

CI = [520.19 574.72]

Це означає, що ми можемо стверджувати, що прибуток від нових користувачів більший за 0 грн.

## 4.8 Вибір критерію

Для початку визначимося, коли який критерій краще використовувати?

1. Якщо вибірка розміру 60, то вже .
   * Подивимося на розподіли Стьюдента і нормального:

df = 59  
t\_dist = t(df=df)  
z\_dist = norm(loc=0, scale=1)  
  
x = np.linspace(-3, 3, 100)  
  
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 2.5))  
plt.plot(x, z\_dist.pdf(x), label='$\mathcal{N}(0, 1)$', color=red\_pink)  
plt.plot(x, t\_dist.pdf(x), label='$t\_{59}$', color=turquoise)  
plt.legend()  
plt.grid(linewidth=0.2)  
plt.show()

|  |
| --- |
| Рисунок 4.8: Розподіл та . |

* Ми бачимо, що ці два розподіли візуально повністю збігаються, тому неважливо, як порахувати: статистика або .
* Але це не означає, що з -тест або -тест працюють коректно! Якщо вибірка не з нормального розподілу, вони обидва можуть усе ще помилятися.

1. Якщо вибірка менше 60, то безпечніше використовувати -тест, ніж -тест.
   * **У -тест FPR завжди буде меншим, ніж у -тест**.
     + На FPR впливає відсоток випадків pvalue < alpha. У -тест -значення -тест -значення.
     + pvalue = t\_distr.cdf(x) або pvalue = norm\_dist.cdf(x). Тож чим важчий хвіст у розподілу, тим більше -значення.

Подивимось на прикладі.

df\_array = [2, 5, 10, 20]  
x = np.linspace(-3, 3, 100)  
  
for df in df\_array:  
 t\_dist = t(df=df)  
 plt.plot(x, t\_dist.cdf(x), label=f't(df={df})')  
  
z\_dist = norm(loc=0, scale=1)  
plt.plot(x, z\_dist.cdf(x), c=red\_pink, label='$\mathcal{N}(0, 1)$')  
plt.legend()  
plt.xlabel('X')  
plt.grid(linewidth=0.2)  
plt.show()

|  |
| --- |
| Рисунок 4.9: Куртки розподілів та . |

Як видно на графіку, що менший ступінь свободи, то вищою є лінія на графіку (за x < 0), а отже буде більшим, ніж у нормальному розподілі. Тобто, -тест буде давати менше -значення, ніж -тест. А отже, -тест буде відкидати нульову гіпотезу частіше, ніж -тест.

|  |
| --- |
| Примітка |
| Розподіл Стьюдента з нескінченністю ступенів свободи — це нормальний розподіл: . Тому norm(0, 1).cdf(x) = t\_distr(df=infinity).cdf(x) < t\_distr(df=N).cdf(x). |

Тому, якщо вибірка невелика, безпечніше використовувати -тест. Але все ще не факт, що ваш критерій буде валідний!

Ми бачимо, що ми скрізь можемо використовувати -тест (а -тест не завжди), і в разі маленьких вибірок він безпечніший. **Тому -тест і став набагато популярнішим, ніж -тест**. Але -тест на практиці може бути теж корисний:

* Не треба думати під час реалізації про ступені свободи.
* Написати такий критерій на SQL буде набагато простіше: ви можете використовувати табличні значення в коді, щоб зрозуміти, чи відкинувся критерій.
* Робити різні теоретичні обчислення простіше.
* У ньому складніше помилитися під час реалізації.

## 4.9 Мінімальний ефект

Повернемося до завдання зі стартапом. Уявімо, що ми хочемо запустити наш стартап на новому ринку, наприклад у іншій країні. **Питання: чи можемо ми зменшити розмір вибірки?**

Що взагалі нам заважає взяти занадто маленьку вибірку? Наприклад, якщо ми перевіряємо наш стартап на 1-2 користувачів, то ми нічого не можемо сказати про наш істинний ефект, він може бути як більшим за 0, так і меншим. Буде занадто широкий довірчий інтервал (через велику дисперсію у вибірці), і нам потрібен величезний ефект, щоб його виявити.

Ще, можливо, ми не можемо використовувати критерій на такій маленькій вибірці. А якщо вибірка складалася б із нескінченної кількості користувачів, то ми могли б абсолютно точно сказати справжній прибуток від користувача, навіть якщо він дорівнює 1 копійці. При цьому обидва випадки нас не влаштовують. У першому — ми не зможемо запустити стартап через занадто великий шум, а в другому — нам потрібна вічність, щоб перевірити нашу гіпотезу.

І тут нам допоможе MDE (minimum detectable effect). Це таке істинне значення ефекту, що наш шанс його виявити дорівнює при використанні нашого критерію.

Ми можемо подивитись, який ефект ми зможемо зафіксувати під меншої кількості користувачів, і від цього вирішити, чи підходить нам така вибірка, чи ні. Наприклад:

* Ми бачимо, що MDE 100 гривень. Тобто з ймовірністю (на практиці 80%) ми його виявимо, **якщо такий ефект буде**. І з імовірністю 80% стартап запуститься на новому ринку. Чудово, це нас влаштовує, ми перевіряємо гіпотезу на меншій вибірці.
* Ми бачимо, що MDE 10000 гривень. Це, навпаки, занадто багато: у нас 99% послуг коштують менше 1000 гривень. Ми не наберемо такого прибутку, стартап невиграшний, потрібно брати вибірку більшого розміру.

Тому слід чітко визначити **від чого залежить MDE**. Це може бути:

* *Помилка першого роду*, або . Наприклад, за ми знайдемо ефект і за розміру вибірки, що дорівнює одиниці (ми просто завжди відкидатимемо ). А за ми ніколи не зафіксуємо ефект.
* *Потужність*, або . Випливає із самого визначення.
* Від *шуму в даних*, або від *дисперсії*. Що більш шумні дані, як ми знаємо, то ширший довірчий інтервал. А отже, складніше точно передбачити межі для істинного ефекту, тому й MDE буде більшим.
* Від *розміру вибірки*. Нас цікавить не просто дисперсія в даних, а дисперсія середнього значення: вона за тією самою логікою має бути якомога меншою. А що таке дисперсія середнього? Це , тому MDE також залежить від розміру вибірки.

Тепер давайте виведемо формулу виходячи з того, що ми знаємо всі ці чотири параметри. Для початку визначимося з гіпотезою, що перевіряється:

Позначимо оцінку дисперсії середнього значення:

А також стандартне відхилення середнього значення:

Тепер ми знаємо, що

Нам треба знайти , таке, що:

* якщо , то в відсотку випадків для нього відкинеться критерій. Перевіряємо потужність (ціанова площа на графіку).
* якщо , то критерій відкинеться для нього в відсотків випадків. Перевіряємо FPR (рожева площа на графіку).

|  |
| --- |
| Рисунок 4.10: Графік MDE. |

Нехай

де — межа відхилення нульової гіпотези.

Тоді

Або

Позначимо . Тоді

де — межа відхилення нульової гіпотези з урахуванням істинного ефекту.

Треба розв’язати ці 2 рівняння й ми отримаємо вираз через усі чотири параметри.

За наш критерій має такий вигляд:

Тоді

Але працювати з розподілом не дуже зручно, набагато простіше з . Для цього переходу достатньо перейти від за властивостями нормального розподілу.

Позначимо . Тоді

За умови , тоді

де — квантиль нормального розподілу.

Тепер згадаємо, що , тоді

Отже, ми отримали формулу для MDE:

де — квантиль нормального розподілу, — квантиль нормального розподілу, — оцінка дисперсії, — розмір вибірки.

Повернемося до стартапу. Припустимо, що , %, %, а як дізнатися ?

На практиці є 3 способи:

* Оцінити на історичних даних. У цьому випадку це не підходить, тому що раніше стартапу на новому ринку не було.
* Оцінити за схожими даними. Наприклад, у нашому випадку, оцінити дисперисію на початковому ринку.
* Якось теоретично оцінити. Найгірший спосіб, який працює, якщо перші два не допомагають.

Подивимося тепер MDE у нашому завданні.

N = 1000  
S2 = np.var(profits)  
alpha = 0.05  
beta = 1 - 0.8  
  
MDE = (norm().ppf(1-alpha) + norm().ppf(1 - beta)) \* np.sqrt(S2/N)  
print(f"MDE при N = {N}: {np.round(MDE, 2)}")

MDE при N = 1000: 77.33

А отже, ми можемо розраховувати на точність лише в 77.33 грн. Але дня нас це може бути занадто великий MDE: хочеться, щоб він був 50 грн, ми припускаємо, що це ймовірніший істинний ефект, виходячи з поперелднього досвіду.

Давайте тепер розв’яжемо зворотну задачу: Ми знаємо грн., %, %, , чому дорівнює ? Виведемо його з формули MDE:

S2 = np.var(profits)  
alpha = 0.05  
beta = 1 - 0.8  
mde = 50  
  
N = ((norm().ppf(1-alpha) + norm().ppf(1 - beta)) / mde)\*\*2 \* S2  
N = int(N) + 1  
print(f"Мінімальний розмір вибірки: {N}")

Мінімальний розмір вибірки: 2392

Тепер ми знаємо, що нам потрібно 2392 користувачів, щоб перевірити нашу гіпотезу з MDE 50 грн.

## 4.10 Двовибірковий -тест

**Приклад 4.3**

На нашому онлайн-сервісі з розміщення оголошень є платні послуги просування. Ми плануємо запровадити знижки на ці послуги, щоб залучити більше користувачів і збільшити дохід. Для перевірки ефективності було вирішено провести A/B тест: одній половині нових користувачів ми не надавали знижки, а другій половині — надавали знижки на просування. Потрібно визначити, чи призвело це до зростання доходу.

Для вирішення цього завдання ми не можемо використовувати одновибірковий -тест. Цього разу в нас дві вибірки — контроль, та — тест.

Наша гіпотеза звучить так:

Далі в нас може бути кілька варіантів:

1. **Обидві вибірки нормальні**.

Тоді у випадку рівних дисперсій , спільна дисперсія обчислюється за формулою:

де , — розмір контролю і тесту відповідно.

А критерій має такий вигляд:

де — ступені свободи.

У випадку, якщо дисперсії не рівні [[13]](#footnote-371), то:

де — ступені свободи, які обчислюються за формулою:

1. **Хоча б одна вибірка не нормальна**.

Тоді ми можемо використовувати нормальну апроксимація при великій вибірці:

де , — вибіркові дисперсії.

### 4.10.1 Двовибірковий -тест у Python

Для реалізації двовибіркового -тесту в Python ми можемо використовувати ttest\_ind[[14]](#footnote-375) з бібліотеки scipy.stats (SciPy community (2023)).

Подивимось на приклад з двома вибірками, перша вибірка — з експоненційного розподілу, а друга — з нормального розподілу.

X = expon(scale=1100).rvs(1000)  
Y = norm(loc=980, scale=30).rvs(1000)  
  
t\_results = ttest\_ind(X, Y, equal\_var=False, alternative='greater')  
ci\_t\_results = t\_results.confidence\_interval(confidence\_level=0.95)  
  
print(f"t-статистика = {np.round(t\_results.statistic, 2)}")  
print(f"p-значення = {np.round(t\_results.pvalue, 5)}")  
print(f"Довірчий інтервал = {np.round(ci\_t\_results, 2)}")

t-статистика = 3.62  
p-значення = 0.00015  
Довірчий інтервал = [68.38 inf]

|  |
| --- |
| Попередження |
| При використанні -тесту, як одновибіркового, так і двовибіркового, важливо пам’ятати, що:   * Елементи вибірок мають бути незалежні.   + Наприклад, ваша вибірка не може містити кілька замовлень одного користувача. Вони мають бути агреговані, інакше критерії будуть невалідні! * У двовибірковому критерії **вибірки тесту і контролю повинні бути незалежні!**.   + Інакше критерії так само будуть невалідними. |

## 4.11 Питання для самоперевірки

**Загальні питання та Мотивація**

1. У якій ситуації ми не можемо використовувати -критерій для перевірки гіпотези про середнє значення, навіть якщо припускаємо нормальність даних?
2. Яка основна проблема виникає при спробі замінити невідому дисперсію генеральної сукупності () на її оцінку у формулі -статистики?
3. Чому вибіркова дисперсія розраховується з дільником , а не ? Які властивості цієї оцінки важливі?
4. Чи є вибіркова дисперсія () константою чи випадковою величиною? Чому це важливо для розподілу статистики ?

**-статистика та -розподіл**

1. Напишіть формулу для -статистики Стьюдента для однієї вибірки.
2. Який розподіл має -статистика за нульовою гіпотезою () за умови, що вихідна вибірка взята з нормального розподілу? Вкажіть параметри цього розподілу.
3. Які два типи випадкових величин (та їх розподіли) використовуються для теоретичного визначення змінної, що має -розподіл Стьюдента? Яка умова щодо їх взаємозв’язку?
4. Як візуально відрізняється -розподіл від стандартного нормального розподілу (), особливо при малих значеннях ступенів свободи? Як він змінюється зі збільшенням ступенів свободи?

**Застосування -тесту**

1. Сформулюйте типові нульову () та альтернативну () гіпотези для одностороннього (правостороннього) -тесту.
2. Як виглядає критична область для одностороннього (лівостороннього) -тесту з рівнем значущості ?
3. Як розраховується -значення для двостороннього -тесту, якщо відоме значення -статистики () та функція розподілу ()?
4. Яку функцію в scipy.stats використовують для проведення одновибіркового -тесту? Які основні параметри вона приймає?

**Довірчі інтервали**

1. Наведіть формулу для розрахунку довірчого інтервалу для середнього значення , використовуючи -розподіл.
2. Як пов’язане поняття довірчого інтервалу з перевіркою гіпотез? (Поясніть перший метод виведення ДІ, згаданий у тексті).
3. Яку функцію в scipy.stats можна використати для побудови довірчого інтервалу на основі -розподілу?

**Припущення -тесту та великі вибірки**

1. Яке ключове припущення щодо розподілу вихідних даних лежить в основі точного -розподілу статистики ?
2. Що відбувається з розподілом -статистики, коли розмір вибірки () стає великим, навіть якщо вихідні дані не розподілені нормально? Яка теорема це пояснює?
3. Який розподіл використовується для апроксимації розподілу -статистики при великих вибірках (-тест)?
4. За яких умов результати “класичного” -тесту (з ) та “апроксимованого” -тесту (з ) будуть дуже схожими?
5. Чому -тест часто вважають “безпечнішим” або більш консервативним, ніж -тест, особливо при невеликих або помірних розмірах вибірки?

**Мінімально виявлений ефект (MDE)**

1. Що таке мінімально виявлений ефект (MDE)? У яких ситуаціях корисно його розраховувати?
2. Назвіть чотири основні фактори, від яких залежить MDE.
3. Напишіть формулу для розрахунку MDE для одностороннього тесту при заданих , , та .
4. Як можна використати формулу MDE для визначення необхідного розміру вибірки ()?

**Двовибірковий -тест**

1. Для вирішення якого типу завдань призначений двовибірковий -тест? Сформулюйте типову нульову гіпотезу.
2. Назвіть два варіанти двовибіркового -тесту залежно від припущення про дисперсії двох вибірок. Який варіант називають тестом Уелча?
3. Яку статистику та розподіл використовують для двовибіркового тесту при великих вибірках, якщо не припускати нормальність?
4. Які ключові припущення щодо незалежності повинні виконуватись при використанні двовибіркового -тесту? (Вкажіть два типи незалежності).
5. Яка функція в scipy.stats використовується для проведення двовибіркового -тесту?

## 4.12 Рекомендована література

-критерій Стьюдента є одним із найбільш уживаних статистичних інструментів. Для глибокого розуміння його теорії та застосування зверніться до:

1. **Student. (1908). The Probable Error of a Mean.** Оригінальна стаття В. С. Госсета, де вперше було введено t-розподіл. Рекомендується для ознайомлення з історичним контекстом та першоджерелом.
2. **Zar, J. H. (2010). Biostatistical Analysis.** Дуже детальний і практичний посібник, який містить вичерпні пояснення щодо одновибіркового, двовибіркового та парного t-тестів, їхніх припущень та інтерпретації результатів.
3. **Welch, B. L. (1947). The generalization of ‘Student’s’ problem…** Стаття, що представляє t-тест Велча, який використовується при нерівних дисперсіях у двовибірковому тесті та є стандартом у більшості статистичних пакетів.
4. **SciPy community. (2023). Statistical functions (scipy.stats).** Офіційна документація є незамінним довідником для практичного застосування функцій ttest\_1samp та ttest\_ind, розуміння їхніх параметрів та результатів.

# 5. Монте-Карло в задачах статистики

У цій частині ми розглянемо метод Монте-Карло, який є потужним інструментом для чисельного моделювання та статистичного аналізу. Метод Монте-Карло дозволяє оцінювати ймовірності, інтеграли та інші статистичні характеристики шляхом випадкового вибору з певного розподілу (Robert and Casella (2004)). Ключовим моментом, на котрому ми зупинимось, це пошук відповідей на питання:

* Як перевірити наш критерій?
* Чи можна використовувати критерій на практиці?
* Якщо у нас є дві або більше альтернатив, як обрати найкращу?

## 5.1 Перевірка критерію

За допомогою методу Монте-Карло ми в *загальному випадку* зможемо відповісти на запитання:

* Чи можна використовувати цей критерій для нашого завдання?
* Чи правильно взагалі реалізовано критерій?

Увесь цей розділ насамперед буде присвячено AB-тестам і як можна перевіряти критерії для них. Основним критерієм для перевірки в цьому розділі стане -тест, оскільки навколо нього обертається доволі багато міфів та непорозумінь. Ми з вами:

* Покажемо на практиці, що -тест працює для вибірок не тільки з нормального розподілу.
* Подивимося, як визначити, з якого розміру вибірки можна застосовувати -тест.

Як ми пам’ятаємо з минулої глави (див. [4](#sec-t-test)), -тест працює теоретично для вибірок з будь-якого розподілу, якщо вибірка досить велика. Але що значить, що критерій “коректний”? Давайте підемо від визначення:

* Критерій рівня значущості означає, що ймовірність невірно відкинути нульову гіпотезу .
* А це зі свого боку означає, що якщо нескінченно багато разів повторити один й той самий експеримент, у якому правильна нульова гіпотеза, генеруючи наново експеримент, то кількість хибнопозитивних спрацьовувань буде меншою за відсотків.

Ці визначення дозволяють нам визначити процедуру перевірки критерію:

1. Створюємо код критерію, який ми будемо перевіряти.
2. Генеруємо якомога більше експериментів, де вірна .
3. Досліджуємо на них придуманий критерій.
4. Перевіряємо, чи правда, що тільки в відсотків випадків критерій відкидається?

Тепер давайте розглянемо процедуру більш детально:

1. Насамперед треба вибрати розподіл, який буде описувати наші дані. Наприклад, якщо у нас метрика конверсії, то це розподіл Бернуллі, а якщо метрика — виторг, то краще використовувати експоненціальний розподіл як найпростіше наближення.
2. Завести лічильник bad\_cnt, який буде рахувати кількість разів, коли критерій помилився. Ініціалізувати його нулем.
3. Далі в циклі розміру , де — натуральне число від 1000 до нескінченності (чим воно більше, тим краще):
   * Симулюємо створення вибірки з розподілу, обраного на першому кроці. Так, щоб вірною була . У випадку AB-тесту симулювати треба не одну вибірку, а дві: для тесту і контролю.
   * Досліджуємо на згенерованих даних критерій, що перевіряється.
   * Далі перевірити, чи критерій відкинув нульову гіпотезу. Якщо так, то збільшуємо bad\_cnt на одиницю.
4. Порахувати частку помилок. Це буде ймовірність того, що критерій помиляється.
   * Якщо вона приблизно збігається з , то все добре.
   * Якщо вона менша за , то в принципі це адекватний критерій на практиці, просто він буде менш потужний, ніж критерій, що помиляється рівно у відсотку випадків. Але на практиці варто перевірити: а теоретично така ситуація можлива? Чи це помилка в коді критерію?
   * Якщо критерій помиляється більше, ніж у , то значить він некоректний і ним не можна користуватися. Використовуючи такий критерій, ви будете помилятися частіше, ніж треба, і це може призвести до серйозних помилок у бізнес-рішеннях.

Розглянемо процедуру на прикладі: перевіримо, чи можна використовувати -тест для вибірок із нормального розподілу?

np.random.seed(42)  
  
bad\_cnt = 0  
N = 10000  
alpha = 0.05  
  
sample\_dist = norm(loc=2, scale=3)  
mu0=sample\_dist.expect()  
for i in range(N):  
 test = sample\_dist.rvs(5)  
 control = sample\_dist.rvs(5)  
 pvalue = ttest\_ind(test, control, alternative='two-sided').pvalue  
 bad\_cnt += (pvalue < alpha)  
  
print(f"FPR: {bad\_cnt/N:.3f}")

FPR: 0.052

Зверніть увагу, що 0.052, хоча він мав дорівнювати 5%. Чи правда, що критерій некоректний? Ні, ми просто не врахували шум: ми навряд чи зможемо отримати на кінцевому числі експериментів точну рівність .

Тому пункт 4 процедури перевірки критерію можна уточнити:

1. Порахувати частку помилок й *побудувати довірчий інтервал для нього*. Якщо лежить у ньому, значить усе добре, а інакше розбираємося, що пішло не так.

Довірчий інтервал можна побудувати різними способами ([див. 2.4](#sec-ci)). Але можна зробити простіше: у Python є функція, яка будує довірчий інтервал Вілсона[[15]](#footnote-385): він не такий точний, як ми виводили раніше, зате він швидший й працює швидше. Давайте спробуємо його реалізувати:

ci = proportion\_confint(count = bad\_cnt, nobs = N, alpha=0.05, method='wilson')  
print(f"FPR: {bad\_cnt/N:.3f}\nДовірчий інтервал: ({ci[0]:.3f}, {ci[1]:.3f})")

FPR: 0.052  
Довірчий інтервал: (0.048, 0.056)

Як бачимо, що 5% потрапили в довірчий інтервал, а отже, ми можемо вважати, що критерій є валідним для нашого завдання.

А що, якби розподіл був складнішим?

Розглянемо приклад, коли магматичне сподівання в тесті й контролі рівні, але вибірки з різних розподілів. Тобто правильна, але розподіли різні. Для цього ми можемо взяти два експоненціальних розподіли з різними параметрами. Наприклад, раніше в середньому виручка від користувача була приблизно 10 гривень, а після введення ефекту впливу (нове ціноутворення) частина користувачів стала менше платити, але середній чек залишився таким самим: 10 гривень.

np.random.seed(42)  
  
test\_dist = expon(scale = 10)  
control\_dist = expon(loc=5, scale = 5)  
  
x = np.linspace(0, 100, 1000)  
  
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 2))  
plt.plot(x, test\_dist.pdf(x), label='Тест', color=turquoise)  
plt.plot(x, control\_dist.pdf(x), label='Контроль', color=slate)  
plt.xlabel('x')  
plt.ylabel('Щільність')  
plt.legend()  
plt.grid(linewidth=0.2)  
plt.show()

|  |
| --- |
| Рисунок 5.1: Приклад, коли правильна, але розподіли різні |

Напишемо функцію check\_criterion(), яка буде перевіряти критерій на коректність. Вона приймає на вхід розподіли для тесту й контролю, розмір вибірки, кількість експериментів, а також вміє виводити довірчий інтервал.

def check\_criterion(  
 test\_dist,  
 control\_dist,   
 sample\_size,   
 N\_exps=10000,   
 to\_print=True  
):  
 """  
 Функція перевіряє критерій на коректність.  
 test\_dist: розподіл для тесту  
 control\_dist: розподіл для контролю  
 sample\_size: розмір вибірки  
 N\_exps: кількість експериментів  
 to\_print: чи виводити довірчий інтервал  
 """  
 np.random.seed(35)  
 bad\_cnt=0  
 alpha=0.05  
  
 for i in range(N\_exps):  
 test = test\_dist.rvs(sample\_size)  
 control = control\_dist.rvs(sample\_size)  
 pvalue = ttest\_ind(test, control, equal\_var=False,  
 alternative='two-sided').pvalue  
 bad\_cnt += (pvalue < alpha)  
  
 ci = proportion\_confint(count = bad\_cnt, nobs = N\_exps,  
 alpha=0.05, method='wilson')  
  
 if to\_print:  
 print(f"FPR: {bad\_cnt/N\_exps:.3f}")  
 print(f"Довірчий інтервал: ({ci[0]:.3f}, {ci[1]:.3f})")  
 else:  
 return ci

Тепер перевіримо, чи працює -тест для вибірок з різних експоненціальних розподілів. Одразу спробуємо перевірити відомий міф про достатність вибірки 30[[16]](#footnote-390). Чи дійсно -тест працює, якщо вибірка більша за 30?

check\_criterion(test\_dist, control\_dist, sample\_size=40)

FPR: 0.061  
Довірчий інтервал: (0.057, 0.066)

Як бачимо, -тест не спрацював, хоча вибірка більша за 30. Істинне не лежить у довірчому інтервалі. Але з якого розміру вибірки -тест почне працювати правильно?

## 5.2 Визначення розміру вибірки

Визначити розмір вибірки, з якого -тест почне працювати, можна за допомогою методу Монте-Карло. Для цього ми будемо перевіряти -тест на вибірках різного розміру, поки не знайдемо такий розмір, при якому -тест почне працювати. Для цього ми будемо перевіряти -тест на вибірках від 20 до 100 з кроком 10.

scale = np.arange(20, 110, 10)  
for N in scale:  
 left, right = check\_criterion(test\_dist=test\_dist,  
 control\_dist=control\_dist,  
 sample\_size=N,   
 N\_exps=10000,   
 to\_print=False)  
 if left < alpha < right:  
 print(f"Розмір вибірки {N} достатній для t-тесту")  
 break

Розмір вибірки 60 достатній для t-тесту

Як бачимо, -тест починає працювати з вибірки розміром 60.

check\_criterion(test\_dist=test\_dist, control\_dist=control\_dist, sample\_size=60)

FPR: 0.053  
Довірчий інтервал: (0.048, 0.057)

Але це доволі умовна межа, бо якщо у цьому випадку ми візьмемо вибірку розміром 61, то -тест не спрацює.

check\_criterion(test\_dist=test\_dist, control\_dist=control\_dist, sample\_size=61)

FPR: 0.057  
Довірчий інтервал: (0.052, 0.061)

Це може бути пов’язано з тим, що ми взяли недостатню велику кількість експериментів, або з дисперсією, або з обома факторами. Тому, якщо потрібна більша точність — необхідно проводити більше експериментів.

## 5.3 Моделювання експерименту

Розберемо два сценарії моделювання експерименту:

1. Генерація тестової та контрольної групи через імітаційне моделювання. За допомогою різних розподілів можна спробувати наблизити реальний розподіл на даних. Наприклад:
   * Для генерації виручки використовувати експоненціальний розподіл. Чим більша виручка від користувача — тим менше таких людей.
   * Для генерації конверсійних вибірок (наприклад, клікне/не клінкет) використовувати бернулліївську вибірку.
   * Іноді можна брати суміш розподілів: нехай 90% користувачів нашого сайту приносять нульову виручку. Тоді можна перемножити бернуллівський розподіл на експоненціальний для моделювання виручки від користувача.
   * Також для перевірки критерію рівності середніх не обов’язково мають збігатися розподіли в тесті та в контролі. Вони можуть бути різними, але математичне сподівання має збігатися.
2. Використати історичні дані компанії. У багатьох компаній є логування подій. Тоді ми зможемо прямо на реальних даних оцінити правильність критерію! І не потрапити в пастку того, що на штучних вибірках критерій валідний, а на реальних даних ні. Наприклад, у нас є дані про транзакції користувачів за кілька років. Це вже один готовий набір даних: ви ділите всіх користувачів на тестову та контрольну групи й отримуєте один “експеримент” для перевірки вашого критерію.

Залишилося зрозуміти, як з одного великого набору даних зробити маленьких. Покажемо на прикладі сервісу з оголошень: наші користувачі розміщують оголошення, кожне оголошення відноситься тільки до однієї категорії товарів і розміщено тільки в одному регіоні. Звідси виникає нехитрий алгоритм:

* Розіб’ємо всі оголошення користувачів на чотири (або у загальному випадку) категорії: автомобілі, спецтехніка, послуги та нерухомість. Тепер наш набір даних можна розбити на ці підкатегорії: наприклад, в одному наборі даних дивитися виручку користувача тільки в цій підкатегорії.
* Поділимо набір даних за місяцями: витрат користувача за листопад, за грудень тощо.
* Ще всі метрики можна поділити за адміністративно-територіальними одиницями: місто, громада, район, область тощо.
* Об’єднаємо всі три правила в одне. Наприклад: набір даних витрат користувача в сервісі оголошень за жовтень у Києві.
* Тепер у нас є велика кількість наборів даних і в кожному з них є користувачі. Поділимо користувачів випадково на тест і контроль й отримаємо фінальні набір даних для валідації придуманих статистичних критеріїв.

Якщо порівнювати два підходи, то головні переваги штучних даних у тому, що їх скільки завгодно, вони генеруються швидко, й ви повністю контролюєте розподіл. Можна створити нескінченно багато наборів даних й дуже точно оцінити помилку першого роду вашого критерію. На початкових етапах дослідження нового критерію штучні дані значно кращі за реальні. Головний мінус — ви отримали коректність вашого критерію тільки на штучних даних! На реальних же даних критерій може працювати некоректно.

У наборів даних, отриманих на справжніх даних, усе навпаки: зібрати їх велику кількість складно, та й не завжди нормально побудований процес їх збору. Але адекватна оцінка коректності критерію для перевірки гіпотез у вашій компанії можлива тільки в такий спосіб. Завжди можна реалізувати такий критерій, який буде правильно працювати на штучних даних. Але, зіткнувшись у реальності з більш шумними даними, він може почати помилятися частіше, ніж у 5% випадків. Тому важливо переконатися, що саме на справжніх даних метод працюватиме правильно.

## 5.4 Додаткові питання

### 5.4.1 -тест та мала вибірка не з нормального розподілу

У попередньому розділі ми розглянули -тест для вибірок з нормального розподілу. Розглянемо екстремальний випадок, коли вибірка мала, а розподіл не нормальний. Ми знову використаємо метод Монте-Карло, щоб перевірити, чи працює -тест у цьому випадку.

test\_dist = expon(scale=20)  
control\_dist = expon(scale=20)  
  
check\_criterion(test\_dist=test\_dist, control\_dist=control\_dist, sample\_size=10)

FPR: 0.040  
Довірчий інтервал: (0.036, 0.044)

Тут FPR статистично значущо менше 5%, а отже, використовувати -тест **можна**. Тільки треба бути готовим, що він буде не дуже потужним.

### 5.4.2 Як обрати критерій

Нехай у вас є два критерії, й обидва валідні на наших даних. Як зрозуміти на практиці, який із них кращий?

Правильна відповідь — треба порівняти потужність 2 критеріїв! Але як її дізнатися?

Пропонується повторити ту саму процедуру, що ми робили вище, тільки замість генерації експерименту, коли вірна , генерувати експеримент, коли вірна альтернатива. У разі порівняння середніх — треба додати ефект до тесту. І замість FPR рахувати TPR — частка правильно відхилених нульових гіпотез. Чим більше — тим краще.

Перевіримо на прикладі -тесту, як це працює.

rej\_cnt = 0  
N = 10000  
alpha=0.05  
  
sample\_dist = norm(loc=2, scale=3)  
mu=sample\_dist.expect()  
  
for i in range(N):  
 test = sample\_dist.rvs(15)  
 control = sample\_dist.rvs(15) \* 2  
 pvalue = ttest\_ind(test, control,  
 equal\_var=False, alternative='two-sided').pvalue  
 rej\_cnt += (pvalue < alpha)  
  
print(f"TPR: {rej\_cnt/N:.3f}")

TPR: 0.194

Бачимо, що потужність критерію в цьому випадку дорівнює 0.19. Якщо є другий критерій — треба запустити таку перевірку для 2го критерію й оцінити, який критерій кращий чи гірший, не забувши про статичну значущість.

Ще є питання: ви оцінили 2 критерії лише при додаванні одного ефекту, наприклад у випадку вище, коли . А якби була інша зміна, збереглися б результати, що цей критерій кращий? Не факт, тому треба підбирати такий ефект, який найчастіше зустрінеться на практиці. Ваше завдання ще правильно зімітувати ефект, схожий на справжній.

Логіка тут точно така сама, як і чому краще генерувати експерименти на історичних даних, а не на справжніх.

Тобто, ваше завдання для оцінки потужності критерію полягає в:

1. Створенні 1000 експериментів, на історичних даних, або на симульованих
2. Підборі ефекту, який буде найкраще імітувати істинний ефект, що перевіряється, в гіпотезі.

## 5.5 Питання для самоперевірки

**Загальні питання про метод Монте-Карло**

1. Що таке метод Монте-Карло в контексті статистики, як описано в цій главі? Яка його основна ідея?
2. Для відповіді на які три ключові питання автори пропонують використовувати метод Монте-Карло в задачах статистики (особливо AB-тестування)?

**Перевірка коректності критерію (FPR)**

1. Опишіть покрокову процедуру перевірки коректності (валідності) статистичного критерію за допомогою методу Монте-Карло, як викладено в розділі “Перевірка критерію”.
2. Що означає, що критерій є “коректним” з точки зору помилки першого роду (рівня значущості α)? Як це пов’язано з симуляціями, де нульова гіпотеза () є істинною?
3. Чому при перевірці критерію недостатньо просто порівняти отриману частку помилок (FPR - False Positive Rate) з рівнем значущості α? Яку роль відіграє довірчий інтервал і як його інтерпретувати в цьому контексті?
4. Які висновки можна зробити, якщо обчислений довірчий інтервал для FPR:
   * Містить α?
   * Повністю лежить нижче α?
   * Повністю лежить вище α?
5. Які приклади розподілів наводяться для симуляції даних для різних типів метрик (конверсії, виторг)?

**Визначення розміру вибірки та специфіка t-тесту**

1. Як за допомогою методу Монте-Карло можна визначити мінімальний розмір вибірки, за якого певний критерій (наприклад, t-тест) починає працювати коректно для заданих (можливо, ненормальних) розподілів?
2. Які поширені уявлення про t-тест (стосовно нормальності даних та розміру вибірки > 30) були перевірені та продемонстровані за допомогою Монте-Карло в цій главі? Які висновки було зроблено?
3. Чи можна використовувати t-тест, якщо дані не розподілені нормально, особливо при малих вибірках? Який результат показало моделювання для експоненціального розподілу? Який недолік може мати такий тест у цьому випадку?

**Моделювання експерименту**

1. Які два основні підходи до моделювання експериментів (генерації даних для перевірки критеріїв) розглядаються в главі?
2. Назвіть переваги та недоліки використання штучно згенерованих даних (з теоретичних розподілів) для перевірки критеріїв.
3. Назвіть переваги та недоліки використання історичних (реальних) даних компанії для перевірки критеріїв. Чому перевірка на реальних даних вважається важливою?
4. Які способи пропонуються для створення множини експериментів з одного великого набору історичних даних?

**Вибір між критеріями (Потужність/TPR)**

1. Якщо два статистичні критерії виявилися валідними (тобто коректно контролюють помилку першого роду), як метод Монте-Карло допомагає обрати кращий з них?
2. Яку характеристику критеріїв потрібно порівнювати для вибору кращого? Як вона називається і що означає? (Підказка: TPR - True Positive Rate)
3. У чому ключова відмінність процедури Монте-Карло для оцінки потужності критерію від процедури для перевірки його валідності (контролю FPR)?
4. На що важливо звернути увагу при симуляції ефекту (різниці між групами) для оцінки потужності критерію? Чому це важливо?

## 5.6 Рекомендована література

Методи комп’ютерного моделювання, такі як Монте-Карло, є потужним інструментом для перевірки властивостей статистичних критеріїв. Для поглиблення знань у цій сфері:

1. **Robert, C. P., & Casella, G. (2004). Monte Carlo Statistical Methods.** Фундаментальна праця з методів Монте-Карло, що розглядає теоретичні основи та широкий спектр їх застосувань у статистиці.
2. **Efron, B., & Tibshirani, R. J. (1993). An Introduction to the Bootstrap.** Класична книга про методи ресемплінгу (зокрема бутстреп), які ідеологічно близькі до підходів, описаних у розділі, і використовуються для оцінки точності статистик та побудови довірчих інтервалів.
3. **Grus, J. (2019). Data Science from Scratch: First Principles with Python.** Ця книга унікальна тим, що реалізує багато статистичних концепцій з нуля, що ідеально відповідає духу моделювання методом Монте-Карло для перевірки та розуміння роботи алгоритмів.
4. **Турчин, В. М. (2014). Теорія ймовірностей і математична статистика…** Підручник допоможе пригадати основні теоретичні розподіли (Бернуллі, експоненціальний), які є основою для генерації штучних даних під час моделювання експериментів.

# Рекомендована література

Agresti, Alan. 2012. *Categorical Data Analysis*. 3rd ed. Wiley.

———. 2018. *An Introduction to Categorical Data Analysis*. 3rd ed. Wiley.

Basu, D. 1955. “On Statistics Independent of a Complete Sufficient Statistic.” *Sankhya* 15: 377–80.

Bruce, Peter, Andrew Bruce, and Peter Gedeck. 2020. *Practical Statistics for Data Scientists*. 2nd ed. O’Reilly Media.

Casella, George, and Roger L. Berger. 2002. *Statistical Inference*. 2nd ed. Duxbury Press.

Cochran, William G. 1934. “The Distribution of Quadratic Forms in a Normal System, with Applications to the Analysis of Covariance.” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 30 (3): 178–91. <https://doi.org/10.1017/S0305004100016595>.

Cohen, Jacob. 1988. *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*. 2nd ed. Lawrence Erlbaum Associates.

Downey, Allen B. 2014. *Think Stats: Exploratory Data Analysis in Python*. 2nd ed. O’Reilly Media. <https://greenteapress.com/wp/think-stats-2e/>.

Efron, Bradley, and Robert J. Tibshirani. 1993. *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman; Hall/CRC.

Fisher, R. A. 1922. “On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics.” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A* 222 (594-604): 309–68. <https://doi.org/10.1098/rsta.1922.0009>.

Freedman, David, Robert Pisani, and Roger Purves. 2007. *Statistics*. 4th ed. W. W. Norton & Company.

Gnedenko, Boris V., and Alexander N. Kolmogorov. 2021. *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*. Martino Fine Books.

Grus, Joel. 2019. *Data Science from Scratch: First Principles with Python*. 2nd ed. O’Reilly Media.

Haslwanter, Thomas. 2016. *An Introduction to Statistics with Python: With Applications in the Life Sciences*. Springer.

Hogg, Robert V., Joseph W. McKean, and Allen T. Craig. 2018. *Introduction to Mathematical Statistics*. 8th ed. Pearson.

Hogg, Robert V., Elliott A. Tanis, and Dale L. Zimmerman. 2015. *Probability and Statistical Inference*. 9th ed. Pearson.

Lehmann, Erich L., and Joseph P. Romano. 2005. *Testing Statistical Hypotheses*. 3rd ed. Springer.

Lemons, Don S. 2002. *An Introduction to Stochastic Processes in Physics*. The Johns Hopkins University Press.

McKinney, Wes. 2022. *Python for Data Analysis*. 3rd ed. O’Reilly Media.

Montgomery, Douglas C. 2017. *Design and Analysis of Experiments*. 9th ed. Wiley.

Mood, Alexander M., Franklin A. Graybill, and Duane C. Boes. 1974. *Introduction to the Theory of Statistics*. 3rd ed. McGraw-Hill.

Newcombe, Robert G. 2012. *Confidence Intervals for Proportions and Related Measures of Effect Size*. Chapman; Hall/CRC.

Neyman, J., and E. S. Pearson. 1933. “On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses.” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A* 231 (694-706): 289–337. <https://doi.org/10.1098/rsta.1933.0009>.

NumPy community. 2023. *NumPy V1.25 Manual*. <https://numpy.org/doc/stable/>.

Robert, Christian P., and George Casella. 2004. *Monte Carlo Statistical Methods*. 2nd ed. Springer.

SciPy community. 2023. *SciPy V1.11.2 Manual: Statistical Functions (‘Scipy.stats‘)*. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/stats.html>.

Snedecor, George W., and William G. Cochran. 1989. *Statistical Methods*. 8th ed. Iowa State University Press.

Statsmodels development team. 2023. *Statsmodels: Statistics in Python*. <https://www.statsmodels.org/stable/index.html>.

Student. 1908. “The Probable Error of a Mean.” *Biometrika* 6 (1): 1–25. <https://doi.org/10.1093/biomet/6.1.1>.

The pandas development team. 2023. *pandas 2.1.1 Documentation*. <https://pandas.pydata.org/pandas-docs/stable/>.

VanderPlas, Jake. 2017. *Python Data Science Handbook: Essential Tools for Working with Data*. O’Reilly Media. <https://jakevdp.github.io/PythonDataScienceHandbook/>.

Wasserman, Larry. 2004. *All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference*. New York: Springer.

Welch, B. L. 1947. “The Generalization of ’Student’s’ Problem When Several Different Population Variances Are Involved.” *Biometrika* 34 (1-2): 28–35. <https://doi.org/10.1093/biomet/34.1-2.28>.

Wilson, Edwin B. 1927. “Probable Inference, the Law of Succession, and Statistical Inference.” *Journal of the American Statistical Association* 22 (158): 209–12. <https://doi.org/10.1080/01621459.1927.10502953>.

Zar, Jerrold H. 2010. *Biostatistical Analysis*. 5th ed. Pearson Prentice Hall.

Жлуктенко, В. І., and С. І. Наконечний. 2001. *Теорія Ймовірностей і Математична Статистика: Навч.-Метод. Посібник. У 2 ч. Ч. II. Математична Статистика*. Київ: КНЕУ.

Турчин, В. М. 2014. *Теорія Ймовірностей і Математична Статистика. Основні Поняття, Приклади, Задачі*. Дніпропетровськ: ІМА-прес.

1. У статистиці позначається як оцінка параметра . [↑](#footnote-ref-25)
2. Метод integers() генерує випадкові цілі числа в заданому діапазоні. Аргумент endpoint вказує, що верхня межа включається у діапазон. [↑](#footnote-ref-26)
3. Розподіл Бернуллі — це дискретний розподіл ймовірностей, який моделює випадковий експеримент з двома можливими результатами: успіхом або невдачею. [↑](#footnote-ref-32)
4. Біноміальний розподіл моделює кількість успішних випадків у послідовності незалежних випробувань. Сума незалежних випадкових величин з розподілу Бернуллі підпорядковується біноміальному розподілу. [↑](#footnote-ref-33)
5. Англ. *cyan*, від грец. κυανouς — “блакитний”, “лазуровий”. [↑](#footnote-ref-39)
6. Документація доступна за посиланням <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.norm.html>. [↑](#footnote-ref-188)
7. Доведення цих властивостей можна знайти в роботі Lemons (2002). [↑](#footnote-ref-196)
8. Послідовність випадкових величин збігається за розподілом до , позначаємо , якщо для всіх , в яких неперервна. [↑](#footnote-ref-211)
9. Розподіл — це розподіл суми квадратів незалежних нормальних випадкових величин з нульовим математичним сподіванням. Тобто, якщо , то . [↑](#footnote-ref-279)
10. Доведення Cochran (1934). [↑](#footnote-ref-280)
11. Розподіл Стьюдента — це розподіл, який виникає при нормальному розподілі з невідомою дисперсією. Якщо , то , де — вибіркове середнє, — вибіркова стандартна девіація. [↑](#footnote-ref-281)
12. Доведення Basu (1955). [↑](#footnote-ref-282)
13. Такий підхід називається -тестом Уелча (Welch (1947)). [↑](#footnote-ref-371)
14. Документація: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.ttest_ind.htm> [↑](#footnote-ref-375)
15. Wilson (1927) [↑](#footnote-ref-385)
16. Hogg, Tanis, and Zimmerman (2015) [↑](#footnote-ref-390)