



Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Ciência da Computação

**Caixa Preta para Carros: Comparação de métodos  
de estimativa de inclinação usando acelerômetro,  
giroscópio e magnetômetro**

José Luiz G. Nogueira

Monografia apresentada como requisito parcial  
para conclusão do Curso de Engenharia da Computação

Orientador  
Prof. Dr. Ricardo Zelenovsky

Brasília  
2021



# Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Ciência da Computação

## **Caixa Preta para Carros: Comparação de métodos de estimativa de inclinação usando acelerômetro, giroscópio e magnetômetro**

José Luiz G. Nogueira

Monografia apresentada como requisito parcial  
para conclusão do Curso de Engenharia da Computação

Prof. Dr. Ricardo Zelenovsky (Orientador)  
ENE/UnB

Prof. Dr. Alexandre Ricardo Soares Romariz Ms. Vinícius Lima  
ENE/UnB Externo

Hudson Pereira Ramos  
Externo

Prof.a Dr.a Ada Lovelace  
Coordenadora do Curso de Engenharia da Computação

Brasília, 19 de maio de 2021

# Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, Maria Ferreira e José Nogueira.

# Agradecimentos

Toda jornada nesta vida tem começo meio e fim, inclusive a própria jornada que chamamos de vida. Durante qualquer jornada conhecemos novos aventureiros, com objetivos e trilhas diferentes, mas que em algum momento, trilham caminho em conjunto com o nosso. Esses aventureiros nos apoiam, nos ensinam e nos ajudam a completar nossa jornada.

Com este trabalho pretendo finalizar uma jornada, e iniciar uma nova. Mas assim como qualquer jornada, eu não teria chegado aqui sem esses aventureiros, eles são colegas, amigos, familiares, professores e professoras. É para esses aventureiros que deixo aqui registrado meus agradecimentos.

Gostaria de agradecer aos meus pais, Maria Ferreira e José Nogueira, por simplesmente tudo, pois não há como descrever o quanto eles tiveram que entregar de si para que eu estivesse aqui. À minha família, por todo o apoio em absolutamente todos os momentos (adoraria citar todos, mas a família é grande). Meus amigos, e à minha namorada, que assim como a minha família me apoiaram incondicionalmente.

Gostaria de agradecer especialmente aos meus professores e professoras que literalmente me guiaram nesta jornada, e aos meus amigos que estiveram diretamente comigo nela.

Dedico este parágrafo ao professor Ricard Zelenovsky, que além de meu orientador neste projeto, foi também meu professor em algumas matérias, e ao qual tenho muito respeito, gratidão e admiração.

Muitos desses aventureiros irão seguir trilhas diferente da minha a partir deste momento, mas espero em algum momento, poder mais uma vez, desfrutar de suas companhias e sabedorias em uma nova jornada.

Por fim, gostaria de agradecer as empresas que prestaram serviços, ou permitiram o uso de ferramentas, que possibilitaram meu aprendizado e o desenvolvimento deste projeto. Em especial a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES), por meio do Acesso ao Portal de Periódicos.

# Resumo

Neste projeto foi construída uma plataforma modular para visualizar e agregar diferentes métodos de estimativa de inclinação. Por meio do painel, foram testados métodos que estimam inclinações e fazem uso do giroscópio, acelerômetro e magnetômetro. O comparativo tem como objetivo indicar o melhor método, bem como suas configurações para o contexto do projeto Caixa Preta. O projeto Caixa Preta consiste em um dispositivo para armazenar dados importantes para a análise da perícia em acidentes veiculares terrestres. Após implementação e testes dos métodos, foi possível perceber que para o escopo deste projeto, em que os dados armazenados possuem janela de observação pequena, os melhores filtros são o de Madgwick e o complementar. Os melhores parâmetros para estes filtros irão variar de dispositivo para dispositivo, mas devido a janela pequena, o ideal é utilizar valores baixos para aproveitar a boa estimativa entregue pelo giroscópio no curto prazo.

**Palavras-chave:** IMU, perícia, acidentes de trânsito, simulação 3D, filtro de fusão, comparativo de métodos, painel para visualização

# Abstract

In this project, a modular platform was built to visualize and aggregate different methods of slope estimation. Through the panel, methods were used to estimate slopes and make use of the gyroscope, accelerometer and magnetometer. The comparison aims to indicate the best method, as well as its settings for the context of the Caixa Preta project. The Caixa Preta project consists in a device to store important data for the forensic analysis in land vehicle accidents. After implementing and testing the methods, it was possible to observe that for the scope of this project, in which the data stored had a small observation window, the best filters were Madgwick and the complementary one. The best parameters for these filters will vary from device to device, but due to the small window, the ideal is to use low values to take advantage of the good estimate delivered by the gyroscope in the short term.

**Keywords:** IMU, forensic analysis, traffic accidents, 3D simulation, orientation filter, comparative methods, display panel

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação . . . . .	1
1.2	Objetivos . . . . .	2
1.3	Metodologia . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>4</b>
2.1	Origem dos dados . . . . .	4
2.1.1	Unidade de medida inercial - IMU . . . . .	5
2.1.2	Sensores . . . . .	5
2.1.3	Formato e fonte dos dados . . . . .	7
2.2	Filtros de entrada . . . . .	8
2.3	Matriz de rotação . . . . .	9
2.4	Quatérnios . . . . .	11
2.5	Estimativas de inclinação . . . . .	12
2.5.1	Usando velocidade de rotação . . . . .	12
2.5.2	Usando aceleração . . . . .	13
2.5.3	Usando magnetômetro . . . . .	14
2.6	Fusão de dados . . . . .	15
2.6.1	Filtro complementar . . . . .	16
2.6.2	Filtro de Kalman . . . . .	16
2.6.3	Filtro de Madgwick . . . . .	18
2.7	Comparação de dados . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Painel de dados</b>	<b>23</b>
3.1	Funcionalidades . . . . .	23
3.2	Funcionamento básico . . . . .	25
3.3	Estrutura . . . . .	25
3.4	Gerador de dados . . . . .	26
3.5	Ordem de execução . . . . .	27

3.6 Performance do Painel . . . . .	27
<b>4 Análise de Dados e Comparação de Métodos</b>	<b>29</b>
4.1 Peculiaridades de cada método . . . . .	31
4.1.1 Estimativa por integral . . . . .	31
4.1.2 Filtro complementar e de Kalman . . . . .	32
4.2 Seleção de parâmetros de cada método . . . . .	34
4.2.1 Filtro complementar . . . . .	34
4.2.2 Filtro de Kalman . . . . .	35
4.2.3 Filtro de Madgwick . . . . .	36
4.2.4 Média móvel . . . . .	36
4.3 Comparação de métodos . . . . .	37
4.3.1 Precisão, acurácia e tempo de execução . . . . .	38
4.3.2 Tempo de estabilização . . . . .	44
4.4 Conclusão parcial . . . . .	49
<b>5 Conclusão</b>	<b>50</b>
5.1 Resultados obtidos . . . . .	50
5.2 Trabalhos futuros . . . . .	51
<b>Referências</b>	<b>53</b>
<b>Apêndice</b>	<b>54</b>
<b>A Fundamentação teórica estendida</b>	<b>55</b>
A.1 Origem dos dados . . . . .	55
A.1.1 Unidade de medida inercial - IMU . . . . .	55
A.1.2 Acelerômetro . . . . .	56
A.1.3 Giroscópio . . . . .	58
A.1.4 Magnetômetro . . . . .	60
A.1.5 Formato e fonte dos dados . . . . .	63
A.2 Filtros de entrada . . . . .	64
A.2.1 Média móvel . . . . .	64
A.3 Matriz de rotação . . . . .	65
A.3.1 Rotação 2D . . . . .	65
A.3.2 Rotação 3D . . . . .	67
A.3.3 Gimbal Lock . . . . .	70
A.4 Quaternions . . . . .	71

A.5	Estimativas de inclinação . . . . .	72
A.5.1	Usando velocidade de rotação . . . . .	73
A.5.2	Usando aceleração . . . . .	74
A.5.3	Usando magnetômetro . . . . .	75
A.6	Fusão de dados . . . . .	77
A.6.1	Filtro complementar . . . . .	78
A.6.2	Filtro de Kalman . . . . .	78
A.6.3	Filtro de Madgwick . . . . .	80
A.7	Comparação de dados . . . . .	83

# Listas de Figuras

2.1	Dispositivo do projeto Caixa Preta. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	4
2.2	Orientação do sensor giroscópio e acelerômetro. . . . .	6
2.3	Ilustração da orientação dos eixos do magnetômetro. . . . .	6
2.4	Exemplo de formato de dado de entrada. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	9
2.5	Ilustração de plano 3D e rotações em cada um dos eixos. . . . .	10
2.6	Esquemático do filtro de madgwick. . . . .	21
2.7	Esquemático do filtro de madgwick com compensação. . . . .	22
3.1	Painel com um layout 3x3, onde as todas as posições são ocupadas por um gráficos diferentes. . . . .	24
3.2	Painel com um layout 4x3, onde alguns gráficos ocupam mais de uma posição. . . . .	24
4.1	Dados gerados pelo MPU (primeira linha), e dados gerados pelo simulador (segunda linha), para o movimento de <i>roll</i> , <i>pitch</i> e <i>yaw</i> de 90° individualmente. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	29
4.2	Ângulos relativos e absolutos. Cenário: rpr_seq_89. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	31
4.3	Estimativas com giroscópio, acelerômetro e magnetômetro. Cenário: rpr_seq_89. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	32
4.4	Estimativas com filtro complementar e de Kalman com ângulos relativos. Cenário: rpr_seq_89. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	33
4.5	Estimativas com filtro complementar e de kalman com ângulos absolutos. Cenário: rpr_seq_89. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	34
4.6	Erro da estimativa usando filtro complementar, para diferentes valores de $\mu$ . Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	35
4.7	Entradas do filtro de Kalman nas etapas de predição e atualização respectivamente. Cenário: drift. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	36
4.8	Erro da estimativa usando filtro de Madgwick, para diferentes valores de $\beta$ . Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	37

4.9	Comparativo de <i>roll</i> entre 3 métodos de estimativa com média móveis diferentes. Cenário: rpr_seq_89. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	38
4.10	Variação do erro da estimativa usando acelerômetro e magnetômetro, para diferentes janelas de filtro de média móvel. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	38
4.11	Erro das estimativas por amostra computada. Cenário: drift. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	40
4.12	Erro das estimativas por amostra computada. Cenário: move_40. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	40
4.13	Erro das estimativas por amostra computada. Cenário: move_square_40. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	41
4.14	Erro das estimativas por amostra computada. Cenário: py_seq_89. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	42
4.15	Erro das estimativas por amostra computada. Cenário: rpr_seq_89. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	42
4.16	Erro das estimativas por amostra computada. Cenário: rpy_seq_89. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	43
4.17	Erro das estimativas por amostra computada. Cenário: rpy_single_45. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	43
4.18	Erro das estimativas por amostra computada. Cenário: rpy_single_89. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	44
4.19	Erro das estimativas por amostra computada. Cenário: rpy_single_360. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	44
4.20	Estimativas de inclinação usando somente acelerômetro e magnetômetro, e usando somente giroscópio. Cenário: drift modificado. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	46
4.21	Erro das estimativas, mostrando tempo para convergência. Cenário: drift modificado. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	46
4.22	Erro das estimativas, mostrando tempo para convergência com parâmetros ponderando ao máximo acelerômetro e magnetômetro. Cenário: drift modificado. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	47
4.23	Erro das estimativas, mostrando convergência inicial após correção. Cenário: drift modificado. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	47
4.24	Erro das estimativas, após correção de convergência, sem aceleração inicial. Cenário: move_square_40 modificado. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	48
4.25	Erro das estimativas, após correção de convergência, com aceleração inicial. Cenário: move_square_40 modificado. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	48
A.1	Dispositivo do projeto Caixa Preta. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . . . .	56

A.2	Esquema de um MEMS do acelerômetro.. . . . .	57
A.3	Orientação do sensor giroscópio e acelerômetro. . . . .	57
A.4	Ilustração do efeito coriolis.. . . . .	58
A.5	Esquema do MEMs do giroscópio.. . . . .	58
A.6	Ilustração do efeito hall. . . . .	60
A.7	Ilustração da orientação dos eixos do magnetômetro. . . . .	61
A.8	Várias leituras dos eixos x e y do magnetômetro, sem ruído ou distorções, durante rotação no eixo Z. . . . .	61
A.9	Exemplo de formato de dado de entrada. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.	65
A.10	Rotação do ângulo $\theta$ de um plano 2D. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. . .	66
A.11	Ilustração de plano 3D e rotações em cada um dos eixos. . . . .	67
A.12	Rotação anti-orária do plano 3D, no eixo z. . . . .	68
A.13	Ilustração de eixos do carro e rotação. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021. .	73
A.14	Esquemático do filtro de madgwick. . . . .	84
A.15	Esquemático do filtro de madgwick com compensação. . . . .	84

# **Lista de Tabelas**

4.1 Cenários simulados. . . . .	30
4.2 Tempo médio de execução de 1 amostra, e erro médio, para cada método de estimativa em todos os cenários. . . . .	39

# **Lista de Abreviaturas e Siglas**

**ADC** Analog to Digital Converter.

**AHRS** Attitude and heading reference system.

**GPS** Global Positioning System.

**IMU** Inertial measurement unit.

**MEMS** Microelectricalmechanical Systems.

# **Capítulo 1**

## **Introdução**

### **1.1 Motivação**

Em acidentes de trânsito que necessitam de laudo pericial, reconstituir o ocorrido é essencial. Por meio de fragmentos desprendidos, avarias, posição final dos veículos e marcas de frenagem, os peritos determinam a velocidade e a orientação dos veículos envolvidos na colisão. Entretanto nem sempre os vestígios de interesse da perícia estão presentes no local do acidente.

Com o objetivo de fornecer dados importantes para a perícia de forma padronizada, foi criado um projeto de graduação conjunta, orientado pelo Professor Ricardo Zelenovsky, tendo como base o proposto por Vinícius Lima em sua dissertação de mestrado [1]. O projeto consiste na construção de um dispositivo de baixo custo, que realize o armazenamento de forma não volátil de dados úteis para a perícia. Dados esses que são mensurados por meio de sensores embarcados no próprio dispositivo. A este projeto foi dado o nome Caixa Preta, por se assemelhar a funcionalidade de uma caixa preta de avião, entretanto com foco direcionado a carros.

Foi selecionado para este dispositivo, por meio de trabalhos de graduação anteriores, um conjunto de sensores composto por aceleração, giroscópio, magnetômetro e GPS, sendo assim possível entregar aos peritos dados como posição, velocidade, aceleração e inclinação do veículo. O dispositivo funciona de tal forma que é possível identificar o momento da colisão e armazenar os dados antes, durante e após o evento de impacto.

Devido a natureza dos dados capturados pelos sensores do dispositivo é de extrema importância uma boa estimativa de inclinação, pois além de ser muito útil para a perícia, com ele é possível estimar posição em curtos períodos, onde o GPS não está disponível. Entretanto existem diversas formas de estimar inclinação de um corpo usando os dados do dispositivo, cada método possui seus pontos positivos e negativos. Neste projeto foram

analisados, testados e configurados alguns destes métodos, para determinar aquele que melhor se encaixa no escopo do projeto Caixa Preta.

Por fim, durante o decorrer da pesquisa surgiu a necessidade de criar uma plataforma para visualização dos dados. Ela deve possibilitar uma melhor exploração do funcionamento de cada método de estimativa, e também salvar os diferentes métodos de forma organizada. Podendo este *dashboard* ser uma porta de entrada para demais membros que venham a agregar ao projeto Caixa Preta, em que o indivíduo poderá além de visualizar e explorar os dados, entender seu funcionamento e cálculos de estimativas.

## 1.2 Objetivos

O presente trabalho tem por finalidade geral agregar ao projeto Caixa Preta indicando um método para estimativa de inclinação a partir de dados de sensores. Sendo 2 os objetivos específicos, criar um painel em Matlab para cálculo, visualização e comparação de dados de inclinação utilizando de sensores de giroscópio, acelerômetro e magnetômetro e a seleção de um método de estimativa de inclinação por meio da comparação dos métodos com dados em situações diversas.

O painel para visualização dos dados deve ser de fácil uso, manutenção e expansão, contando com documentação do código e manual de uso. A comparação de métodos deve ser realizada com dados de diversas situações, gerados de forma simulada para maior controle do ambiente, onde possa ser exposto a acurácia, o tempo de convergência e tempo de execução de cada método.

E por fim realizar a indicação de um método de estimativa de inclinação e seus parâmetros de configuração para aplicação no software de uso geral, tendo como principal métrica a acurácia.

## 1.3 Metodologia

Tendo em vista o objetivo exploratório deste trabalho, foi utilizada metodologia de pesquisa de caráter experimental e bibliográfico, e de natureza aplicada [2, 3]. No contexto do projeto isto significa que, levantamos por meio de artigos métodos de estimativa de inclinação que façam uso dos mesmos dados capturados pela Caixa Preta. Para cada método encontrado e compreendido, foi implementado sua versão no Matlab, construindo assim um *dashboard* com diversas visualizações. Durante a construção do painel, foi levado em conta a facilidade de uso do *dashboard* para alternar e comparar os métodos, permitindo selecionar os métodos e parâmetros que se deseja utilizar na simulação.

Uma vez construído o *dashboard* e compreendido os nuances de cada método, o projeto seguiu para uma segunda etapa na qual foram gerados dados de entrada. Eles foram gerados de forma simulada, por meio de um software construído junto ao *dashboard*, entregando dados com e sem ruídos para comparação dos métodos.

Na terceira etapa foi realizado o ajuste dos parâmetros dos métodos de forma empírica, objetivando se aproximar ao máximo dos valores base utilizados na geração dos dados. Na quarta e última etapa, realizamos a comparação dos métodos de forma quantitativa. Tendo como principais métricas o tempo de execução, tempo de convergência e acurácia.

Para a comparação de métodos utilizamos como base, o dado sem ruído retornado pelo gerador de dados. O tempo de execução foi computado por meio de módulos fornecidos pelo Matlab (plataforma utilizada).

Para o tempo de convergência, utilizamos de um cenário onde o corpo inicia com inclinações, que são captados pelo magnetômetro e acelerômetro, mas não pelo giroscópio. Verificando assim quantas amostras serão necessárias para convergir os dados dos diferentes sensores.

Com o objetivo de verificar a acurácia, comparamos os dados base com a estimativa. Para isso não utilizamos de métodos estatísticos convencionais como desvio padrão, variância ou erro médio, e sim da diferenças entre as matrizes de rotação geradas pelos ângulos de inclinação. Uma vez que dois trios de ângulos podem se apresentar distintos, mas a inclinação que eles representam serem próximas. Este método será apresentado mais detalhadamente na seção de fundamentação teórica.

# Capítulo 2

## Fundamentação Teórica

### 2.1 Origem dos dados

Os dados utilizados neste projeto são de aceleração, velocidade angular e campo magnético, mensurados por meio do módulo IMU (*Inertial measurement unit*) MPU9250 inserido no dispositivo da Caixa Preta. O dispositivo utiliza do Arduíno Mega 2560, e realiza a leitura, armazenamento e transmissão dos dados para o computador via porta serial USB, ou bluetooth.

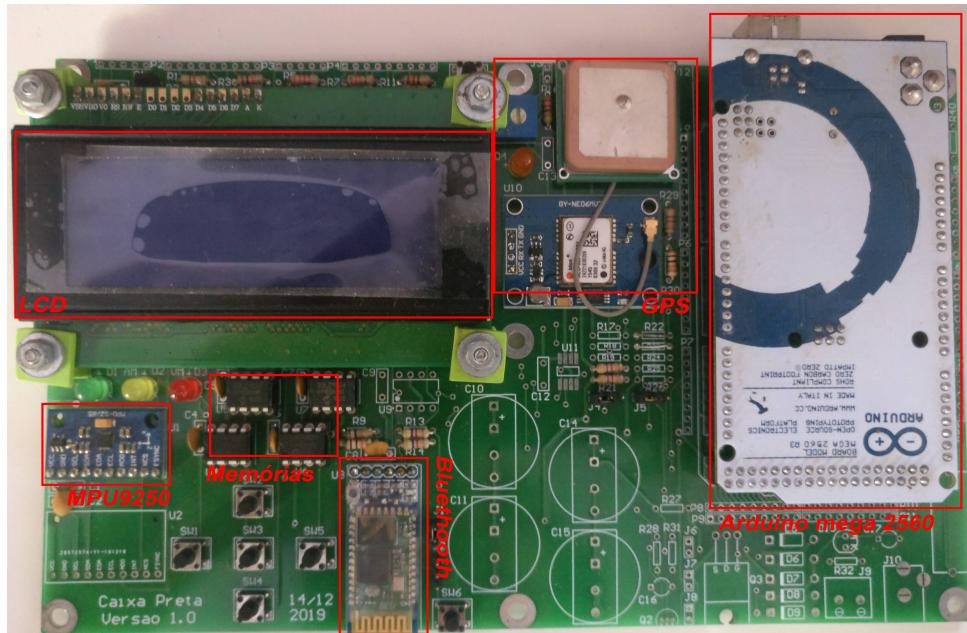


Figura 2.1: Dispositivo do projeto Caixa Preta. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

A taxa de amostragem dos dados é configurável, mas para este projeto foi selecionada a taxa de  $100Hz$ , pois devido o limite de memória do dispositivo, essa taxa escolhida

permite que a janela de dados abranja um período maior.

Juntamente com a aquisição e transmissão dos dados brutos dos sensores, o dispositivo da Caixa Preta também é responsável por realizar calibrações, autotestes, armazenar e transmitir dados de ajustes necessários para o correto uso dos sensores.

### 2.1.1 Unidade de medida inercial - IMU

IMU (*Inertial measurement unit*) é um módulo eletrônico que agrupa dois ou mais sensores para capturar o movimento de um corpo, estes sensores podem ser acelerômetro, giroscópio, bússola, altímetro, barômetro e outros [4], como por exemplo o AltIMU-10, que estende as capacidades do MPU9250 com a adição de um sensor de altitude. O MPU9250 é um IMU que possui os sensores de acelerômetro, giroscópio e magnetômetro, todos de 3 eixos.

Cada sensor neste IMU é um micro-sistema eletrônico, conhecido como MEMS (*Micro-electricalmechanical Systems*), que é uma miniaturização para escala micro de um sistema eletromecânico. Estes mesmos podem ser construídos de diversas formas para mensurar um mesmo dado, como por exemplo a aceleração. Devido a essa diversidade é interessante conhecer mais a fundo o funcionamento desses mecanismos no MPU9250 [5]. Este funcionamento foi apresentado no apêndice de fundamentação teórica estendida (Capítulo A).

### 2.1.2 Sensores

Os sensores entregam os dados em 16bits, relativos a uma escala. Para a aceleração podemos configurar a escala como  $\pm 2$ ,  $\pm 4$ ,  $\pm 8$ , ou  $\pm 16$ , medidos em g (escala relativa à gravidade). Para o giroscópio  $\pm 250$ ,  $\pm 500$ ,  $\pm 1000$ , ou  $\pm 2000$  medidos em graus por segundo. Já o magnetômetro é por padrão  $\pm 4912$  medido em microtesla [6]. Para este projeto utilizaremos as escalas menores, pois nenhum movimento realizado à mão irá extrapolar, e permitem ter maior representação numérica. Porém se serão ou não suficientes para uma situação real, há carência de estudos.

Os eixos dos sensores não são todos iguais, a Figura 2.2 apresenta os eixos do acelerômetro e giroscópio, e a Figura 2.3, os eixos do magnetômetro. Para os cálculos a frente, é necessário ajustar os eixos do magnetômetro para que se alinhe aos demais.

Estando os sensores em repouso sobre um plano, e com seus eixos alinhados, o acelerômetro deveria ler  $+1g$  no eixo z, referente ao vetor gravitacional, o giroscópio deveria ter leituras igual a 0, e o magnetômetro deveria realizar sempre uma leitura constante, referente ao campo magnético da terra na região onde se encontra o corpo.

Entretanto, essas leituras não ocorrem devido a ruídos, erros de leitura, *offset* (também chamado de *bias*) e escalas. Para corrigir o *bias* e escalas, deve-se realizar uma calibração

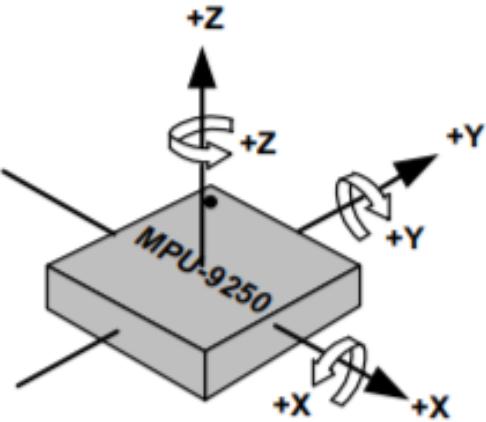


Figura 2.2: Orientação do sensor giroscópio e acelerômetro (Fonte: [6]).

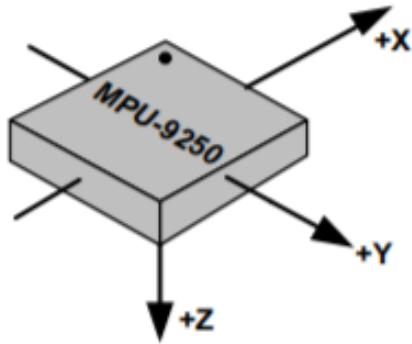


Figura 2.3: Ilustração da orientação dos eixos do magnetômetro (Fonte: [6]).

dos sensores. Existem alguns métodos para se calibrar cada sensor. Esta parte do projeto foi realizada pelo Paulo Teixeira (membro do projeto Caixa Preta), em seu projeto de graduação à defender (intitulado Caixa Preta para carros: "proposta para calibração, coleta e fusão de dados").

As leituras do magnetômetro e acelerômetro possuem muito ruído. Mas devido ao *hard-iron* (presença de outros campos magnéticos que não o da terra) e *soft-iron* (materiais metálicos próximos) [7], o magnetômetro é ainda mais sensível, sendo necessário uma calibração diferente. Porém, como citado anteriormente, os métodos e dados de calibração são externos a este projeto.

Com os parâmetros para calibração em mãos, podemos obter o valor da aceleração de uma leitura do sensor em  $m/s^2$ , utilizando a equação

$$A_x = \frac{a_x * 2 * 9,8}{32767} - \text{off}_{Ax}, \quad (2.1)$$

em que  $A_x$  é a aceleração no eixo  $x$  em  $m/s^2$ ,  $a_x$  é o inteiro de 16bits em complemento de 2 retornado pelo ADC e  $\text{off}_{Ax}$  é o offset calculado para o eixo  $x$ . Na equação foi utilizado 2 como fator de escala, conforme intervalo configurado, e 9.8 como valor da gravidade em  $m/s^2$ . O mesmo pode ser feito para os demais eixos.

Para o giroscópio a ideia é semelhante. Podemos obter o valor em graus por segundo de uma leitura do sensor utilizando a equação

$$G_x = \frac{g_x * 250}{32767} - \text{off}_{Gx}, \quad (2.2)$$

em que  $G_x$  é a taxa de rotação no eixo x em graus por segundo,  $g_x$  é o inteiro de 16bits em complemento de 2 retornado pelo ADC e  $\text{off}_{Gx}$  é o offset calculado para o eixo x. Na equação foi utilizado 250 graus por segundo como fator de escala, conforme intervalo configurado. O mesmo pode ser feito para os demais eixos.

Para o magnetômetro podemos obter o valor em miligauss por meio das equações:

$$h_{xa} = (h_x - Hx_{\text{Offset}}) * Hx_{\text{Scale}} \quad (2.3)$$

$$H_x = \frac{4912 * h_{xa}}{32767} * 10, \quad (2.4)$$

onde a primeira equação realiza a calibração, e a segunda realiza a conversão para a escala utilizada e a conversão de microtesla para miligauss. A unidade de medida é trocada somente para melhor visualização nos gráficos.

Na equação (2.3),  $h_{xa}$  é o dado no eixo x corrigido,  $h_x$  é o dado sem correção,  $Hx_{\text{Offset}}$  é o valor aditivo que representa a distorção causada por *hard-iron* e  $Hx_{\text{Scale}}$  é o valor multiplicativo, causado por *soft-iron* [8]. Na equação Equação 2.4,  $H_x$  é o dado em miligauss,  $h_{xa}$  é o dado corrigido de *hard-iron* e *soft-iron*. A fração realiza a conversão do ADC para microtesla, e a multiplicação externa converte para miligauss. O mesmo pode ser feito para os outros eixos.

### 2.1.3 Formato e fonte dos dados

Os dados utilizados neste trabalho são providos pelo dispositivo da Caixa Preta, e contém informações sobre dados de calibração de todos os sensores, dados da colisão (como

aceleração no momento da colisão, data, hora e local), dados de leitura de cada um dos sensores, dados de GPS dentre outros.

Estes dados podem chegar por meio de um arquivo de texto, via bluethooth, ou via porta serial, porém o conjunto de dados possui sempre a mesma formatação, mesmo que sejam *placeholders* (como por exemplo os dados de colisão em modos de teste, onde não existem colisões). Essa formatação tem como objetivo padronizar como os dados salvos são transmitidos, e possibilitar uma rápida leitura por um humano.

O formato padronizado consiste em seções de dados, cada uma possuindo seus delimitadores únicos de início e fim. O que estiver fora destes limitadores deve ser ignorado e a ordem das seções não deve ser considerada. O arquivo possui 4 seções, uma contendo dados do GPS, outra com dados de calibração realizadas ao ligar, outra com dados de calibração de fábrica. Por fim, temos a seção que utilizaremos neste trabalho, contendo dados e metadados do MPU (delimitado pelos marcadores de início  $\#[m \text{ e fim } m]\#$ ). Alguns dos dados presentes na seção que utilizaremos também estão presentes nas demais, a seção do MPU somente delimita que neste espaço contém tudo que é necessário para análise utilizando o MPU.

A seção do MPU inicia com 9 linhas de metadados, e logo em seguida uma linha para cada amostra lida. O cabeçalho traz informações como quantidade de amostras lidas, dados de calibração para correção das leituras, escalas configuradas, frequência de amostragem, e outros. Já as linhas relativas a amostra em si, estão ordenadas em função do tempo e trazem informações de posição da memória do dado, e o trio XYZ de dados do acelerômetro, giroscópio e magnetômetro retornados pelos ADCs de 16bits em formato decimal sem sinal. A Figura 2.4 apresenta um exemplo de arquivo neste formato.

## 2.2 Filtros de entrada

Todos os sensores apresentados, presentes no MPU, estão sujeitos a leituras incorretas e ruídos. No geral espera-se que seja um ruído Gaussiano (de média 0). Com o objetivo de minimizar o ruído, foi utilizado o filtro de média móvel nos dados de entrada.

A média móvel pode ser utilizada como um filtro iterativo, com o objetivo de suavizar os ruídos nos dados. Ela é da forma

$$\bar{x}_i = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^k x_{i-n}, \quad (2.5)$$

em que  $\bar{x}_i$  é a média da amostra  $i$ ,  $k$  é o tamanho da janela de média móvel e  $x_n$  é o enésimo dado lido.

```

#[m
041020
145330
6525
49878
233088
-1 -1 -1 -1 0 0 0.04 -1.05 0.2 -0.52
-1 -1 0 0 -70 228 10 1.020833 0.940048 1.045333
20046 21331 2 250 100 5 1 2 3 4 5

2414

Amostras
0 0 65278 65195 17440 13196 65467 65476 65527 200 65506
1 0 65232 65511 16925 5882 65447 10 65535 180 65513
2 0 65267 659 16548 5836 65480 65451 65522 184 65513
...
2412 0 1722 64513 16896 21 86 65390 65523 193 65522
2413 0 183 64950 17108 65515 65303 65532 65516 168 65531
m]#

```

Figura 2.4: Exemplo de formato de dado de entrada. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

Note que na equação (2.5) são utilizados dados anteriores para calcular o valor filtrado da amostra atual, sendo assim, para as primeiras  $k$  amostras são inseridos zeros para substituir as amostras ausentes.

## 2.3 Matriz de rotação

Uma matriz de rotação  $R$  é uma matriz de transformação linear que representa uma rotação em um ou mais eixos. Por convenção iremos utilizar que o ângulo positivo é a rotação anti-horária. Ela é um recurso matemático que possibilita rotacionar um ou mais vetores com uma simples multiplicação matricial. Por exemplo, se queremos rotacionar um vetor na posição  $a$  para a posição  $b$  a matriz de rotação nos permite fazer  $V_b = R * V_a$ . Basta construir essa matriz de modo que realize a rotação no ângulo e eixos desejados.

Antes de seguir, é importante definirmos a convenção dos eixos. Assim como  $+X$  sempre aponta para direita e  $+Y$  aponta para cima em um plano 2D, no plano 3D faz-se valer a regra da mão direita, onde o indicador é o eixo X, o médio é o eixo Y, e o polegar o eixo Z.

Na Figura 2.5 podemos identificar o sentido dos eixos e a rotação em cada um deles. Iremos chamar o ângulo de rotação no eixo x de *roll*, representado pela letra  $\phi$ . No eixo Y de *pitch*, representado pela letra  $\theta$  e, no eixo z de *yaw*, representado pela letra  $\psi$ .

Uma matriz de rotação que consiga representar todas as inclinações, precisa ser composta por 3 ângulos de Euler [9]. Por exemplo uma matriz que rotaciona usando os eixos

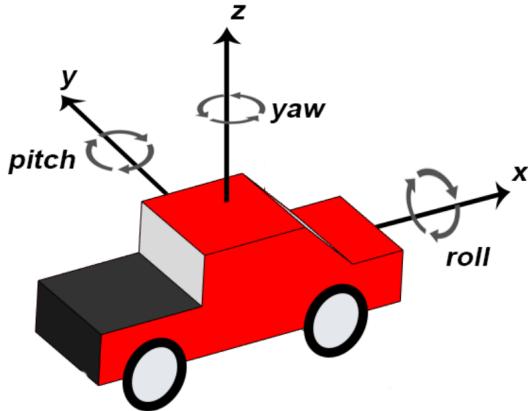


Figura 2.5: Ilustração de plano 3D e rotações em cada um dos eixos (Fonte: [7]).

XYX (rotaciona primeiro no eixo x, depois no y e por fim no eixo X novamente). Alterar a ordem, ou os eixos utilizados altera completamente a matriz de rotação.

Para este projeto iremos utilizar a ordem de rotação Z, Y, X. Mais a frente será explicado o porquê. Para nossa ordem escolhida, a matriz de rotação é definida por[10]

$$R(\psi, \theta, \phi) = R_z(\psi) * R_y(\theta) * R_x(\phi) = \begin{pmatrix} c_y c_z & c_z s_x s_y - c_x s_z & c_x c_z s_y + s_x s_z \\ c_y s_z & c_x c_z + s_x s_y s_z & -c_z s_x + c_x s_y s_z \\ -s_y & c_y s_x & c_x c_y \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

em que  $c$  é cos,  $s$  é sin, e  $x, y, z$  são os ângulos  $\phi, \theta$  e  $\psi$  respectivamente.

A inversa da matriz de rotação e sua transposta, são equivalentes a rotação contrária descrita pela matriz, conforme ilustra a equação abaixo:

$$R_{ba} = R_{ab}^{-1} = R_{ab}^t, \quad (2.7)$$

em que  $R_{ba}$  é a matriz que descreve a rotação contrária a matriz  $R_{ab}$ .

Tendo uma matriz de rotação, também podemos dizer quais ângulos a formaram. Considere uma matriz genérica, representada por

$$R = \begin{pmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

em que ela é construída pela ordem de rotação ZYX, a mesma descrita em (2.6), podemos extrair os ângulos conforme equações abaixo [10]:

$$\phi = \text{atan}2(r_{21}, r_{22}) \quad (2.9)$$

$$\theta = \arcsin(-r_{20}) \quad (2.10)$$

$$\psi = \text{atan}2(r_{10}, r_{00}). \quad (2.11)$$

Entretanto, nem sempre a extração desses ângulos é possível. Quando isso ocorre temos um *gimbal lock*. *Gimbal lock* é, matematicamente, a impossibilidade de extrair corretamente os ângulos que formaram uma matriz de rotação, devido a perda de um grau de liberdade. Ele somente ocorre no eixo do meio da ordem de rotação, e quando o ângulo é igual a  $\pm 90^\circ$  [9].

O fato de não conseguirmos extrair os ângulos da matriz não significa que ela irá rotacionar errado. Porém, muitas das contas realizadas necessitam da extração de ângulos da matriz. Pensando nisto, foi selecionada a ordem de rotação ZYX. Desta forma como Y é o movimento mais difícil de ocorrer em acidentes, que seria o capotamento frontal, as chances de se observar um *gimbal lock* serão menores. Além disso o uso dessa ordem facilita a realização de algumas contas.

## 2.4 Quatérnios

Quatérnios são a representação dos complexos com três dimensões imaginárias. Geralmente são representados por

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, \quad (2.12)$$

em que  $q$  é um quatérnio,  $q_0$  a parte real que o compõe, e  $ijk$  os eixos imaginários.

Um vetor 3D pode ser representado por um quatérnio, onde a componente  $q_0$  deve ser igual a 0 [11].

A rotação utilizando quatérnios faz uso do produto, conforme apresenta a equação abaixo [12]:

$$q'_v = q \times q_v \times \bar{q}, \quad (2.13)$$

em que  $q$  é o quatérnio que descreve a rotação,  $\bar{q}$  seu conjugado, e  $q_v$  o quatérnio que representa o vetor que será rotacionado. Como resultado teremos  $q'_v$  um quatérnio que representa o vetor rotacionado, sendo assim, sem componente real ( $q_0 = 0$ ).

Para obter a rotação contrária dada por um quatérnio  $q$  basta utilizar seu conjugado, assim a equação (2.13) fica representada por

$$q_v = \bar{q} \times q'_v \times q. \quad (2.14)$$

Rotações utilizando quatérnios requerem que o quatérnio esteja normalizado. Assim como em matrizes de rotação, o produto entre quatérnios não é comutativo  $q_a q_b \neq q_b q_a$ , e os quatérnios podem ser compostos, isto é, dado a rotação de A para B  $q_{ab}$  e de B para C  $q_{bc}$ , podemos obter  $q_{ac} = q_{ab} \times q_{bc}$ .

## 2.5 Estimativas de inclinação

Nesta seção serão apresentadas estimativas de inclinação, também chamadas de orientação ou AHRS (*Attitude and heading reference system*). No decorrer deste projeto iremos adotar os eixos utilizados na seção de matrizes de rotação, seguindo a regra da mão direita, em que a inclinação em graus no eixo x é *roll* (símbolo  $\phi$ ), no eixo y é *pitch* ( $\theta$ ) e no eixo z é *yaw* ( $\psi$ ), sendo elas positivas no sentido anti-horário, conforme ilustrado na Figura 2.5. Os sensores devem se alinhar a estes eixos. O giroscópio e acelerômetro já possuem essa orientação, conforme ilustra a Figura 2.2, já o magnetômetro conforme Figura 2.3 deve ter seus eixos alterados.

Com base na Figura 2.5 iremos definir três tipos de eixos. O primeiro são os eixos fixos no quadro do veículo, isto é, que rotacionam junto com ele, rotações nestes eixos são chamados de relativos. Em segundo os eixos da terra, que seguem a mesma orientação da Figura 2.5, onde x aponta para o norte magnético, y para o oeste e z para cima, entretanto não rotacionam com o veículo, rotações nestes eixos são chamados de absolutos, pois possuem um referencial externo. Por fim, os eixos fixos na inclinação inicial do veículo, eles não rotacionam com o veículo, rotações nesses eixos também são chamadas de absolutos, mas podem ser diferentes dos eixos da terra a depender da inclinação inicial do veículo. São absolutos pois possuem um referencial externo a menos de uma constante (a inclinação inicial).

Existem diversas formas de se estimar a inclinação de um corpo, neste trabalho iremos nos atentar a algumas destas formas, que utilizam como entrada os mesmos dados que o MPU9250 fornece.

### 2.5.1 Usando velocidade de rotação

A forma mais simples e lógica de se obter uma estimativa de inclinação é por meio da integral numérica dos dados do giroscópio. Para este projeto foi selecionada a integral

trapezoidal, pois entrega melhor acurácia que o método dos quadrados, e pode ser utilizada em tempo real. Assim a estimativa de inclinação da uma amostra  $i$ , por meio da integral trapezoidal pode ser representado pela equação

$$rt(i) = rt(i - 1) + \frac{\Delta t * (G(i) + G(i - 1))}{2}, \quad (2.15)$$

em que  $rt(i)$  é a inclinação (*tilt*) do corpo na amostra  $i$ ,  $\Delta t$  é o período da amostragem,  $G(i)$  é o giro por segundo (já corrigido com dados de calibração) e  $G(i - 1)$  o giro por segundo da amostra anterior.

A este método demos o nome de giro relativo (*relative tilt*), pois ele considera os eixos do carro e não um eixo global.

Derivado deste método surge um segundo, onde a cada interação obtém-se a diferença entre os ângulos estimados  $rt(i) - rt(i - 1)$  e gera-se uma matriz de rotação de ordem ZYX para esta diferença. Podemos interpretar essa matriz como a rotação que irá levar o corpo da amostra  $i - 1$  para a amostra  $i$ . Assim podemos multiplicar ela pela matriz gerada na iteração anterior, obtendo uma matriz que leva o corpo da posição inicial para a posição em  $i$ , e por fim extraindo os ângulos de Euler desta nova matriz. A este método demos o nome de giro absoluto (*absolute tilt*), uma vez que cada inclinação obtida diz como o corpo está em relação aos eixos iniciais.

### 2.5.2 Usando aceleração

Supondo que o corpo não tem aceleração linear, somente teremos a presença da gravidade. Logo, a leitura do acelerômetro deverá ser igual ao vetor gravitacional rotacionado por alguma matriz de rotação  $R$ , como ilustrado pela equação

$$A = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = Rg = R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Esta matriz de rotação pode ser de nossa escolha, aqui utilizaremos a matriz na ordem ZYX. Entretanto ela não deve rotacionar o vetor no mesmo sentido de inclinação do corpo, e sim no sentido de inclinação contrário [13] conforme as equações abaixo:

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = R_{zyx}^{-1} * g = \begin{pmatrix} c_y c_z & c_y s_z & -s_y \\ c_z s_x s_y - c_x s_z & c_x c_z + s_x s_y s_z & c_y s_x \\ c_x c_z s_y + s_x s_z & -c_z s_x + c_x s_y s_z & c_x c_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_y \\ c_y s_x \\ c_x c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Por meio da equação (2.18), podemos extrair os ângulos de Euler, conforme as equações abaixo:

$$\theta = \arcsin(-A_x) \quad (2.19)$$

$$\phi = \text{atan2}(A_y, A_z). \quad (2.20)$$

Como o corpo não está livre de aceleração linear, conforme suposto, é interessante normalizar a entrada antes de realizar os cálculos. A aceleração linear continuará interferindo na estimativa, porém isso garante que as equações apresentadas mantenham as equivalências.

O uso de  $\arcsin$  em (2.19), e  $\text{atan2}$  em (2.20), permite limitar os ângulos removendo duplicidades [13]. Sendo assim,  $\arcsin$  mantém  $\theta$  entre  $[-90^\circ, 90^\circ]$ , e  $\text{atan2}$  mantém  $\phi$  entre  $[-180^\circ, 180^\circ]$ . Além disso, o uso de  $\text{atan2}$  no lugar de arco tangente permite que a própria função lide com o caso em que ambos são 0.

Não é possível obter por meio dessa estimativa o ângulo  $\psi$ . Se alterarmos essa ordem de rotação de ZYX para ZXY, continuaremos a ter somente  $\theta$  e  $\phi$ . Se alterarmos essa ordem de rotação para qualquer outra, que faz uso dos três eixos, teremos uma equação mais complexa que depende dos 3 ângulos, isso porque não é possível encontrar uma solução única para eles [13].

### 2.5.3 Usando magnetômetro

O campo magnético da terra possui duas componentes, uma vertical e outra horizontal, isso se deve ao efeito de inclinação. A horizontal sempre aponta para o norte magnético, e a vertical para o centro da terra [14].

Estando o corpo sem inclinações e os eixos do sensor já corrigidos para se alinhar com os eixos do carro, conforme Figura 2.5, a leitura do magnetômetro deve ser  $-B \sin \delta$  no eixo z, 0 no eixo y, e  $B \cos \delta$  no eixo x. Onde B é a intensidade do campo magnético da terra, e  $\delta$  a inclinação do campo no ponto da terra que se encontra o objeto.

Supondo que não existe nenhum material que possa criar ou distorcer o campo magnético próximo ao corpo, a leitura do magnetômetro deverá ser igual ao vetor campo magnético rotacionado, como ilustrado pela equação abaixo:

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = [R_z * R_y * R_x]^{-1} \begin{pmatrix} B \cos \delta \\ 0 \\ -B \sin \delta \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Movendo os termos na igualdade teremos a equação

$$R_y R_x \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = R_z^{-1} \begin{pmatrix} B \cos \delta \\ 0 \\ -B \sin \delta \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

em que  $H_x$ ,  $H_y$  e  $H_z$  são as leituras do magnetômetro, já corrigidas com dados da calibração e com os eixos trocados para alinhar com os do carro.

Resolvendo a equação (2.22) obtemos a equação

$$\begin{pmatrix} H_x \cos \theta + H_y \sin \theta \sin \phi + H_z \sin \theta \cos \phi \\ H_y \cos \phi - H_z \sin \phi \\ -H_x \sin \theta + H_y \cos \theta \sin \phi + H_z \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi B \cos \delta \\ -\sin \psi B \cos \delta \\ -B \sin \delta \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

por meio dela podemos obter um ângulo de Euler, conforme as equações abaixo:

$$\psi = \text{atan2}(-H'_y, H'_x) \quad (2.24)$$

$$H'_x = H_x \cos \theta + H_y \sin \theta \sin \phi + H_z \sin \theta \cos \phi \quad (2.25)$$

$$H'_y = H_y \cos \phi - H_z \sin \phi. \quad (2.26)$$

Note que na equação (2.24), assim como na estimativa com acelerômetro é utilizado *atan2* para limitar o intervalo em  $[-180^\circ, 180^\circ]$ .

## 2.6 Fusão de dados

O uso do giroscópio para obter a inclinação é bastante preciso no curto prazo, mas não no longo prazo, pois possui *drift*. O uso do acelerômetro entrega inclinação relativo à terra, e não possui *drift*, mas possui alto ruído, não consegue estimar rotação em Z e estima incorretamente quando o corpo possui aceleração linear [15]. O uso do magnetômetro entrega inclinação relativo à terra, não possui *drift*, mas é sensível a ações externas e possui alto ruído [7].

O objetivo da fusão de dados, é juntar o melhor de ambos e tentar minimizar os pontos negativos. Em geral todos os métodos irão utilizar o giroscópio para estimativas no curto prazo, e a junção de acelerômetro e magnetômetro para estimativa a longo prazo, corrigindo assim o *drift*.

### 2.6.1 Filtro complementar

O filtro complementar é o mais simples desses filtros, ele consiste em filtrar a estimativa do giroscópio com uma passa alta, para obter os termos de curto prazo, e filtrar o magnetômetro e acelerômetro com uma passa baixa, para obter os termos de longo prazo, ao final, juntando as estimativas por meio da soma [15].

É importante que os filtros sejam complementares, pois, a lacuna deixada pela passa baixa será preenchida pela passa alta. Em amostras discretas isso se traduz em uma média ponderada de dois ângulos, em que o primeiro ângulo é a estimativa anterior do filtro, adicionado da variação da estimativa utilizando o giroscópio. Já o segundo ângulo é dado pela estimativa utilizando o magnetômetro e acelerômetro [16, 17], conforme equação

$$\theta'_k = (1 - \mu)(\theta'_{k-1} + \Delta\theta_{Gk}) + \mu\theta_{AHk}, \quad (2.27)$$

em que  $\theta'_k$  é a estimativa do filtro complementar para a amostra  $k$ ,  $\theta'_{k-1}$  a estimativa anterior,  $\mu$  é o fator de ponderação,  $\Delta\theta_{Gk}$  é a variação de inclinação estimada utilizando o giroscópio, e  $\theta_{AHk}$  a estimativa utilizando acelerômetro e magnetômetro para a amostra  $k$ .

### 2.6.2 Filtro de Kalman

O filtro de Kalman é um filtro preditivo e interativo para otimização. Pode ser utilizado para juntar medidas sujeitas a ruídos, otimizando o resultado [18]. Ele é bastante flexível, e pode ser utilizado de diversas formas. Até mesmo para a aplicação deste trabalho (onde deseja-se fundir dados do IMU para obter uma melhor estimativa), existe mais de uma forma de utilizá-lo. Por tanto iremos iniciar com uma apresentação geral de seu funcionamento e depois apresentar como foi utilizado.

O filtro pode ser dividido em duas etapas, uma de predição e outra de atualização [18, 19]. Cada uma delas possui suas entradas e saídas. Na etapa de predição, temos as equações

$$x_k^- = Ax_{k-1} + Bu_k \quad (2.28)$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q. \quad (2.29)$$

A equação (2.28) entrega uma estimativa  $x_k^-$ , com base na estimativa anterior  $x_{k-1}$  e em alguma medida de entrada  $u_k$ , onde A e B são matrizes que modelam a dinâmica da estimativa.

Já a equação (2.29) entrega a incerteza associada ao dado estimado, com base na incerteza anterior  $P_{k-1}$  e na incerteza da medida de entrada  $Q$ .

Na etapa de atualização, é feita a correção do dado estimado, com base em alguma medida que tenha correlação com a estimativa, ou no nosso caso, uma outra estimativa de inclinação, sendo assim, a correlação é direta. Nesta etapa temos as equações

$$x_k = x_k^- + K_k(y_k - Cx_k^-) \quad (2.30)$$

$$K_k = \frac{P_k^- C^T}{C P_k^- C^T + R} \quad (2.31)$$

$$P_k = (I - K_k C) P_k^- . \quad (2.32)$$

A equação (2.30) entrega a estimativa corrigida  $x_k$ . Realizando uma adição à estimativa anterior  $x_k^-$ , de um valor ponderado por  $K_k$ . Este valor é dado pela da diferença entre a estimativa realizada na etapa de predição  $x_k^-$ , e o dado de entrada medido  $y_k$ . Onde  $C$  é uma matriz que modela a correlação entre a medida de entrada e a estimativa.

Assim como na predição temos a estimativa de uma incerteza associada a  $x_k^-$ , na etapa de atualizações essa incerteza é corrigida, conforme apresenta equação (2.32), em que  $R$  é a incerteza associada a entrada  $y_k$ .

Dado o funcionamento do filtro de Kalman, temos de definir os parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  para modelar o problema, e imputar as covariâncias associadas às incertezas de entrada  $Q$  e  $R$ , que levem a uma rápida convergência e permitam uma boa ponderação na etapa de atualização.

Para este projeto tem-se dois estados, assim a entrada na etapa de predição  $u_k$  é composta pela velocidade angular e *bias*. Como entrada para a etapa de correção  $y_k$  temos a inclinação estimada utilizando o acelerômetro e magnetômetro. Como saída temos a inclinação e *bias*  $x_k$  [20]. Sendo assim, temos os parâmetros A, B e C conforme as equações abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

$$B = \begin{pmatrix} \Delta t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

em que  $\Delta t$  é o período da taxa de amostragem.

As covariâncias serão determinadas na seção de análise de dados. Com os parâmetros acima temos 2 modelos, o primeiro é uma integral da velocidade angular corrigido de *bias*,

e o segundo o *bias*, conforme ilustra a equação

$$\begin{pmatrix} x_k^- \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ b_{k-1} - b_k \Delta t + u_k \Delta t \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

em que  $a_k$  é a estimativa de inclinação da amostra  $k$  e  $b_k$  o *bias*. Note que o *bias* não é atualizado dinamicamente, somente é inserido no modelo para corrigir diretamente o dado da estimativa.

### 2.6.3 Filtro de Madgwick

O filtro de madgwick foi proposto por Sebastian Madgwick em 2010 [21], e tem como foco implementar um método que seja computacionalmente barato e preciso, que possa ser utilizado de forma embarcada em dados obtidos em tempo real. Para isso, o filtro faz uso não de matrizes de rotação e sim de operações matemáticas com quatérnions.

O filtro tem como entrada dados dos sensores já devidamente convertidos e tratados e tem como saída um quatérnion que representa a inclinação do corpo para aquela amostra.

Para os cálculos abaixo será adotado a notação  ${}^S_E \mathbf{q}$ , onde  $q$  é um quatérnion que leva do quadro  $E$  (eixos da terra) para o quadro  $S$  (eixos do sensor), e  $\hat{q}$  ( $q$  chapéu) para um quatérnion normalizado.

O algoritmo do filtro inicia obtendo o quatérnio derivativo, rotacionando uma amostra lida do giroscópio para os quadros da terra, utilizando a equação

$${}^S_E \dot{\mathbf{q}}_{\omega,t} = \frac{1}{2} {}^S_E \hat{\mathbf{q}}_{\text{est},t-1} \times {}^S \omega_t, \quad (2.37)$$

em que  ${}^S_E \hat{\mathbf{q}}_{\text{est},t-1}$  é o quatérnio da estimativa anterior do filtro, e  ${}^S \omega_t$  é o quatérnio da amostra do giroscópio.

Em seguida se obtém a estimativa de inclinação que leva de  $t-1$  para  $t$  deslocado para ter como referencial o eixo da terra, por meio da integral numérica conforme equação

$${}^S_E \mathbf{q}_{\omega,t} = {}^S_E \hat{\mathbf{q}}_{\text{est},t-1} + {}^S_E \dot{\mathbf{q}}_{\omega,t} \Delta t, \quad (2.38)$$

baseada em uma estimativa inicial  ${}^S_E \hat{\mathbf{q}}_{\text{est},0}$ , em que  $\Delta t$  é o período da taxa de amostragem.

Na próxima parte do algoritmo é obtida a contribuição do acelerômetro e do magnetômetro. Para isso se faz uso, assim como nos demais filtros, dos vetores em relação a terra que são conhecidos, gravidade e campo magnético.

A contribuição de cada sensor pode ser obtida individualmente encontrando  ${}^S_E\hat{\mathbf{q}}$  que minimize a função  $f$ , conforme ilustra as equações abaixo:

$$\min_{\forall {}^S_E\hat{\mathbf{q}} \in R^4} f({}^S_E\hat{\mathbf{q}}, {}^E\hat{\mathbf{d}}, {}^S\hat{\mathbf{s}}) \quad (2.39)$$

$$f({}^S_E\hat{\mathbf{q}}, {}^E\hat{\mathbf{d}}, {}^S\hat{\mathbf{s}}) = {}^S_E\hat{\mathbf{q}}^* \times {}^E\hat{\mathbf{d}} \times {}^S_E\hat{\mathbf{q}} - {}^S\hat{\mathbf{s}}, \quad (2.40)$$

em que  ${}^S_E\hat{\mathbf{q}}$  é o quatérnio que descreve a rotação do corpo,  ${}^E\hat{\mathbf{d}}$  o vetor conhecido (gravidade ou campo magnético), e a operação de rotação realizada é de tal forma que,  ${}^E\hat{\mathbf{d}}$  corresponda a amostra lida pelo sensor  ${}^S\hat{\mathbf{s}}$ .

Utilizando  ${}^S\hat{\mathbf{s}}$  na equação (2.40) como dados do acelerômetro, e  ${}^E\hat{\mathbf{d}}$  como o quatérnio que representa o vetor da gravidade nos eixos da terra  $[0, 0, 0, 1]$ , ao resolver o mínimo obteremos a parcela de contribuição do acelerômetro  ${}^S_E\hat{\mathbf{q}}$ . Isto é, um quatérnio que descreve *pitch* e *roll*.

Utilizando  ${}^S\hat{\mathbf{s}}$  na equação (2.40) como dados do magnetômetro, e  ${}^E\hat{\mathbf{d}}$  como o quatérnio que representa o vetor do campo magnético nos eixos da terra  $[0, B_x, 0, B_z]$ , ao resolver o mínimo obteremos a parcela de contribuição do magnetômetro  ${}^S_E\hat{\mathbf{q}}$ . Isto é, um quatérnio que descreve somente *yaw*.

Entretanto as contribuições individuais levam a soluções não únicas para  ${}^S_E\hat{\mathbf{q}}$ , uma vez que um quatérnio contempla todos os 3 ângulos de Euler, e as soluções individuais não entregam os 3. Assim a função  $f$ , pode ser definida pela equação

$$f_{g,b}({}^S_E\hat{\mathbf{q}}, {}^S\hat{\mathbf{a}_t}, {}^E\hat{\mathbf{b}}, {}^S\hat{\mathbf{m}_t}) = \begin{pmatrix} f_g({}^S_E\hat{\mathbf{q}}, {}^S\hat{\mathbf{a}_t},) \\ f_b({}^S_E\hat{\mathbf{q}}, {}^E\hat{\mathbf{b}}, {}^S\hat{\mathbf{m}_t}) \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

para contemplar uma solução de  ${}^S_E\hat{\mathbf{q}}$  única que resolva tanto o caso do magnetômetro quanto do acelerômetro.

Note que na equação (2.41) não temos o equivalente a  ${}^E\hat{\mathbf{d}}$  que seria o vetor da gravidade, pois ele é um vetor numérico bem definido diferente do equivalente para o magnetômetro  ${}^E\hat{\mathbf{b}}$ , que possui as variáveis não definidas  $B_x$  e  $B_z$ . Estas serão definidas por meio do módulo de compensação de distorção tratado mais à frente.

Para resolver a equação (2.39), encontrando o mínimo, o filtro de Madgwick utiliza o algoritmo de descida do gradiente. Entretanto esse algoritmo utilizaria de diversas interações para obter um valor ótimo de  ${}^S_E\hat{\mathbf{q}}$  que minimize a equação, aumentando consideravelmente a carga computacional.

O uso da descida do gradiente para estimativa de inclinação não precisa de tantas interações para cada amostra, basta computar uma iteração por amostra, pois, a taxa de rotação angular é baixa o suficiente para que o algoritmo converja. Isto é, o veículo ficará

mais ou menos na mesma inclinação por tempo o suficiente para convergir a estimativa, sendo assim é o mesmo que computar várias iterações do algoritmo de descida do gradiente por amostra. Dito isso, o algoritmo se reduz ao apresentado pelas equações

$$\nabla f_{g,b}({}_E^S\hat{\mathbf{q}}, {}_E^S\hat{\mathbf{a}}_t, {}^E\hat{\mathbf{b}}, {}^S\hat{\mathbf{m}}_t) = J_{g,b}^T({}_E^S\hat{\mathbf{q}}_{est,t-1}, {}^E\hat{\mathbf{b}}) f_{g,b}({}_E^S\hat{\mathbf{q}}, {}_E^S\hat{\mathbf{a}}_t, {}^E\hat{\mathbf{b}}, {}^S\hat{\mathbf{m}}_t) \quad (2.42)$$

$${}_E^S\mathbf{q}_{\nabla,t} = {}_E^S\hat{\mathbf{q}}_{est,t-1} - \mu_t \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}, \quad (2.43)$$

baseada em uma estimativa inicial  ${}_E^S\hat{\mathbf{q}}_{est,0}$  e em um passo de tamanho  $\mu$ .

O valor ótimo de  $\mu$  na equação (2.43) deve ser de tal forma que garanta uma convergência mais rápida que a taxa de rotação [21].

Tendo em mãos as duas estimativas,  ${}_E^S\mathbf{q}_{\omega,t}$  advinda do giroscópio, e  ${}_E^S\mathbf{q}_{\nabla,t}$  advinda do acelerômetro e magnetômetro, podemos fundi-las assim como no filtro complementar, conforme equação

$${}_E^S\mathbf{q}_{est,t} = \lambda_t {}_E^S\mathbf{q}_{\nabla,t} + (1 - \lambda_t) {}_E^S\mathbf{q}_{\omega,t}, \quad (2.44)$$

em que  $\lambda_t$  é o parâmetro de ponderação.

O valor ótimo de  $\lambda_t$  na equação (2.44) deve ser aquela que garanta que a divergência de  ${}_E^S\mathbf{q}_{\omega,t}$ , devido ao seu drift, seja igual a convergência data em  ${}_E^S\mathbf{q}_{\nabla,t}$ . Isto é, o giroscópio irá ditar a inclinação enquanto a estimativa com acelerômetro e magnetômetro não converge. A representação dessa igualdade é dada pela equação

$$(1 - \lambda_t)\beta = \lambda_t \frac{\mu_t}{\Delta t}, \quad (2.45)$$

em que  $\frac{\mu_t}{\Delta t}$  é a taxa de convergência de  ${}_E^S\mathbf{q}_{\nabla,t}$  e  $\beta$  é a taxa de divergência de  ${}_E^S\mathbf{q}_{\omega,t}$ .

No filtro proposto por Sebastian Madgwick, ele realiza uma serie de suposições e otimizações dos parâmetros que irão ditar a convergência, chegando assim em uma versão simplificada da equação (2.44), em que todos os parâmetros, incluindo o  $\mu$ , que governa a convergência da descida do gradiente, são unificados no parâmetro  $\beta$ . Essa versão simplificada é ilustrada por

$${}_E^S\mathbf{q}_{est,t} = {}_E^S\mathbf{q}_{est,t-1} + {}_E^S\dot{\mathbf{q}}_{\omega,t}\Delta t - \beta \Delta t \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}. \quad (2.46)$$

Rearranjando os termos, o filtro de Madgwick fica conforme apresentado no diagrama de blocos da Figura 2.6, em que o único parâmetro de ajuste é  $\beta$ , indicando a taxa de divergência do giroscópio. Altos valores desse parâmetro irão utilizar de mais parcelas do acelerômetro e magnetômetro, e possuir uma convergência rápida. Baixos valores desse parâmetro irão utilizar de mais parcelas do giroscópio, e atrasará a convergência da saída do filtro.

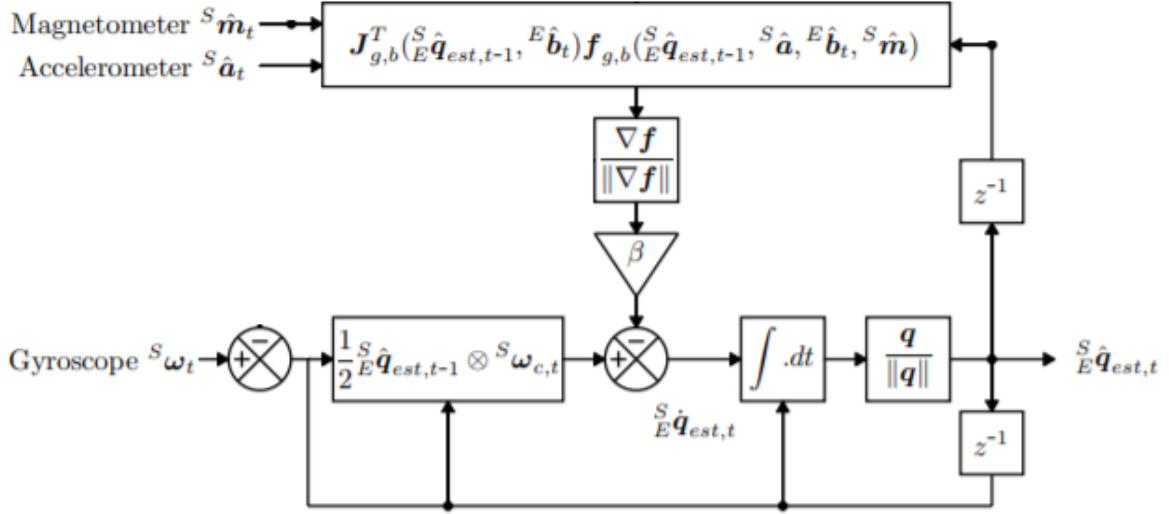


Figura 2.6: Esquemático do filtro de madgwick (Fonte: [21]).

Além do ilustrado na Figura 2.6, o filtro possui como ilustrado na Figura 2.7, um módulo para compensação da distorção do magnetômetro (grupo 1) e um módulo para compensação de *drift* (grupo 2). Que objetivam remover as distorções de baixa frequência ainda mais, a parte da fusão dos dados.

## 2.7 Comparação de dados

Para a etapa em que serão comparados os dados, no lugar de métodos estatísticos convencionais, como desvio padrão, variância, ou erro médio, será utilizada a diferença entre as matrizes de rotação geradas.

Esta abordagem visa cobrir casos em que dois trios distintos de ângulos de Euler na ordem ZYX, apresentam rotações semelhantes, como por exemplo (0, 89, -69) e (70, 89, 0). Se comparado cada ângulo individualmente, eles estão longe de serem o mesmo ângulo, entretanto na prática são bem próximos.

Dado os três ângulos de Euler, o método consiste em criar uma matriz de rotação de ordem ZYX para a estimativa  $R_{est}$  e uma matriz para o caso base  $R_b$ . Computando assim a diferença absoluta entre elas, conforme equação

$$R_e = \text{abs}(R_b - R_{est}). \quad (2.47)$$

Por fim, realizando a soma dos termos de  $R_e$  para obter um número único, que possa ser comparado entre as diversas estimativas.

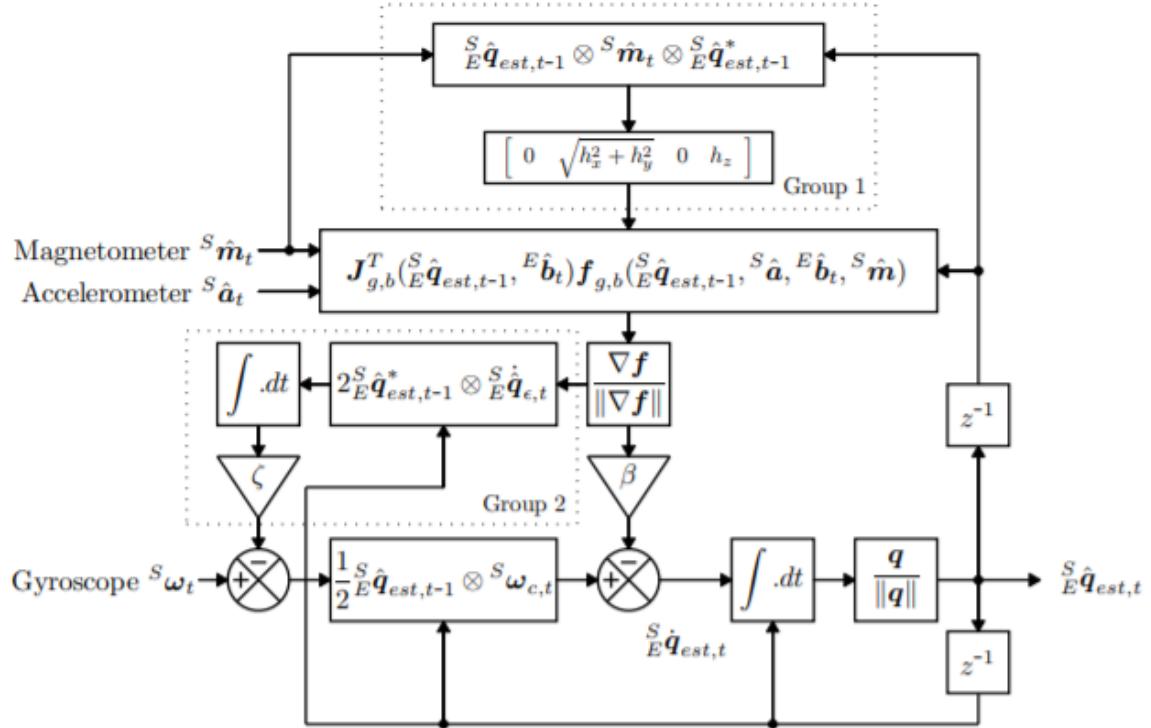


Figura 2.7: Esquemático do filtro de madgwick com compensação (Fonte: [21]).

Por meio desse método não ficará claro quão grande ou pequeno é um erro, se olhado isoladamente. Mas será suficiente para verificar qual método consegue entregar o dado mais próximo do esperado.

# Capítulo 3

## Painel de dados

O painel é um software para visualização de dados computados. Foi construído utilizando o Matlab versão 2016a, fazendo uso de classes, funções e scripts, todos na linguagem "m".

De forma breve, o painel recebe como entrada dados do MPU (aceleração, giro, campo magnético), seguindo a formatação descrita no capítulo 2, e dados de parâmetros configuráveis, e tem como saída gráficos na tela, após os cálculos.

A construção deste painel objetiva agregar métodos de estimativas de inclinação e outros, relativos ao projeto Caixa Preta. A estrutura foi adotada objetivando ser extensível, manutenível, de fácil leitura e compreensão, e de fácil migração para qualquer outra linguagem.

Abaixo será descrito somente a estrutura deste painel. Por possuir diversos módulos e arquivos, o código completo está disponibilizado em [github.com/rzele/TCC-Caixa-Preta](https://github.com/rzele/TCC-Caixa-Preta), juntamente com instruções de uso e extensão.

### 3.1 Funcionalidades

O painel tem como fonte de dados o dispositivo da Caixa Preta ou dados simulados. Tendo como fonte a Caixa Preta é possível selecionar o modo de leitura para USB, arquivo ou bluetooth. Ele permite ainda ajustar parâmetros dos cálculos de forma fácil e realizar a exibição do gráfico amostra a amostra, dando a sensação de tempo real.

Por meio dele também é possível selecionar qual(is) método(s) de estimativa deseja-se visualizar, ajustar rapidamente o layout na tela (conforme Figura 3.1 e Figura 3.2), usar dados de um gráfico como *input* em outro. Pode-se computar o tempo de execução de cada método e comparar métodos à um *baseline* obtendo estatísticas, como por exemplo erro médio de cada método.

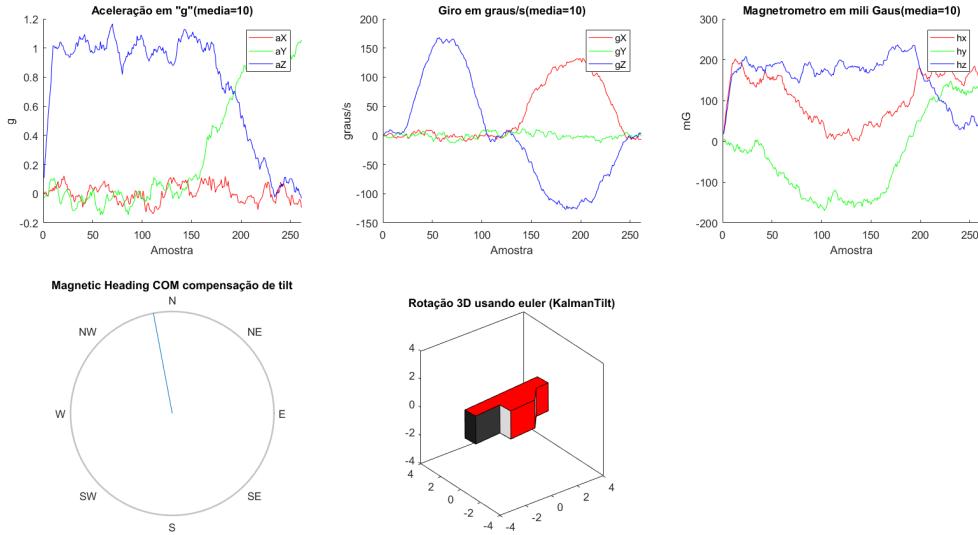


Figura 3.1: Painel com um layout 3x3, onde todas as posições são ocupadas por um gráficos diferentes.

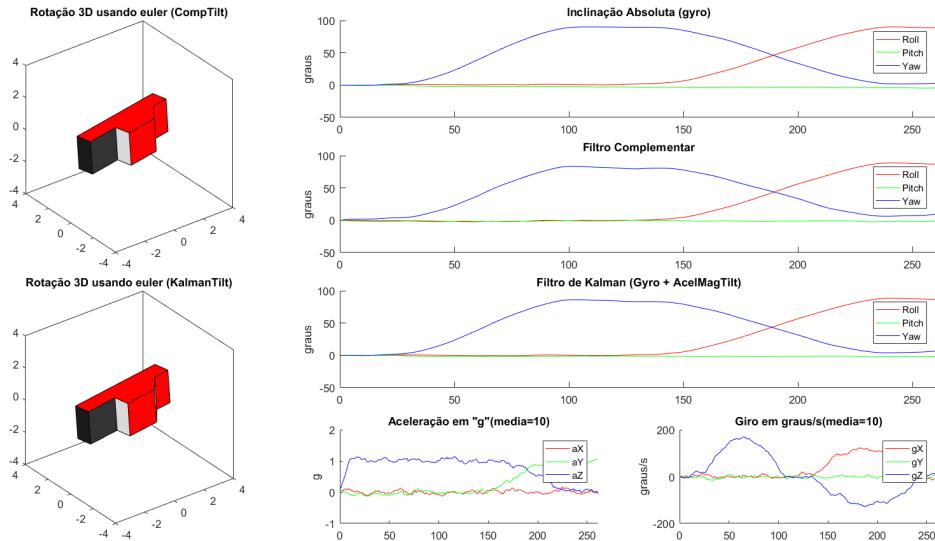


Figura 3.2: Painel com um layout 4x3, onde alguns gráficos ocupam mais de uma posição.

O painel também permite utilizar como entrada dados simulados, sendo necessário somente descrever em 7 parâmetros o movimento do corpo no decorrer do tempo, sendo assim possível testar os métodos em ambiente controlado.

## 3.2 Funcionamento básico

O painel não possui interface gráfica para manipulação, é necessário assim o mínimo de noção de programação orientada a objetos, como chamada de funções, instanciação de objetos, e declaração de atributos.

Para o usuário que possui esses conhecimentos, o uso da ferramenta se faz por meio de um único arquivo de configuração. Este arquivo é uma classe em Matlab dividida em três partes, onde se configura parâmetros estáticos (e.x.: fonte de leitura, taxa de renderização, habilitar filtro de média móvel), parâmetros dinâmicos, que dependem de metadados advindos do MPU, e por fim, o layout, definindo quais métodos serão computados e exibidos e qual a disposição deles na tela.

Para o usuário que quiser ir um pouco além existe um segundo arquivo, onde é possível instanciar os gráficos, assim pode-se alterar as injecções de dependências dos gráficos. Desta forma, o usuário estará livre para modificar os gráficos, como por exemplo trocar os gráficos que serão comparados com o *baseline*, ou criar dez instâncias de um gráfico, trocando apenas um parâmetro e comparar todos eles para saber qual se aproxima mais de um *baseline*.

## 3.3 Estrutura

Inicialmente o programa foi dividido em quatro grandes módulos, nomeados como Reader, Plot, Calc e Render. O Reader fica responsável por ler da fonte de dados. O Render, responsável por organizar os Plots no layout e realizar atualizações deles de tempo em tempo. Os módulos de Plot, responsáveis por definir um tipo de gráfico, por exemplo gráfico em linha, ou um carrinho 3D. São úteis pois a criação de um gráfico com *labels*, cores, legendas e títulos em Matlab é verboso, assim ela entrega reusabilidade em poucas linhas.

Os módulos de Calc são responsáveis por realizar algum tipo de cálculo, como por exemplo computar os dados de entrada e entregá-los ajustados com dados de calibração. Eles também podem ter dependências de outros módulos de cálculo, tornando-os reutilizáveis. Por exemplo, um módulo que recebe os dados de entrada, entrega ao módulo que ajusta os dados com base na calibração, e com os dados já ajustados calcula uma estimativa de inclinação usando o filtro de Madgwick. Ao final entrega o dado para algum Plot exibir na tela.

Além dos quatro grandes módulos, também existe a classe 'Configs', que inicializa e detém todas as configurações. A classe 'Charts', que instancia vários Plots (definindo os títulos, *labels* e outros), instancia todos os módulos de cálculo e diz a cada um em que

instância de Plot ele deve injetar seus dados, além de passar referência para os módulos ao qual ele é dependente. Por fim, temos a 'main', que orquestra todos eles em conjunto, nela ocorre o loop principal, onde é realizado a leitura de uma amostra do MPU e chamado cada módulo de cálculo para computar o dado. Repare que por possuir dependência os módulos de cálculo podem ser chamados várias vezes para computar o mesmo dado, sendo assim eles possuem um mecanismo para evitar recálculo.

Uma vez que, para todo módulo de Calc era criado um módulo de Plot para que fosse exibido a saída na tela, foi criado uma classe chamada de 'Chart'. Ela é uma classe híbrida que junta Plot e Calc, assim ele é do tipo Calc, mas também é do tipo Plot. Imagine como, todo gráfico presente na tela é um Chart. Dentro dessas classes é diretamente definido os atributos do Plot (título, *labels*, cores, ...), e realizado os cálculos. Desta maneira o arquivo Chart que instanciava Plots e Calcs e os conectavam, passa a instanciar somente módulos do tipo Chart.

## 3.4 Gerador de dados

À parte de todo o mecanismo apresentado, existe um módulo que realiza a geração de dados simulados. Ele recebe como entrada um arquivo que descreve a posição global (relativo aos eixos da terra) e inclinação relativa de um objeto (em relação a eixos do próprio carro) ao longo do tempo, e parâmetros para simular a leitura do MPU, como frequência de amostragem e escala dos sensores utilizada. Assim ele interpola o arquivo de entrada na frequência de amostragem dada, e gera como saída um arquivo seguindo o formato padrão utilizado (descrito na seção 2), contendo dados de aceleração, giro e campo magnético, adicionados de ruídos e *bias*.

Para gerar estes dados de saída, o módulo se utiliza da lógica inversa daqueles que estimam inclinação, posição e velocidade. Por meio de derivadas da posição global é possível encontrar a aceleração, adicionando ruído, *bias*, o vetor da gravidade e rotacionando o dado gerado para corresponder aos eixos do corpo, temos o que seria uma leitura de aceleração do MPU. Por meio da derivada da inclinação relativa podemos encontrar o giro por segundo do corpo. Assim, adicionando ruído e *bias* temos o que seria um dado de leitura do giroscópio do MPU.

Para o dado do magnetômetro, basta inventar o que seria uma leitura do campo magnético da terra, seguindo o modelo de campo magnético da terra, com inclinação. A magnitude deste campo é indiferente, o importante é que irá sofrer alterações com o movimento de *yaw* do corpo, então basta rotacionar esse dado para corresponder aos eixos do MPU. Por fim adicionando ruído, offset e alterando a escala temos o que seria uma leitura do magnetômetro do MPU.

Ao final o módulo realiza a conversão dos dados gerados em float para uint16, utilizando as escalas definidas, e salvando em um arquivo conforme o formato de entrada do programa principal.

## 3.5 Ordem de execução

Para obtermos uma visão da execução como um todo, segue uma lista do passo a passo que é executado.

1. Obtém configurações estáticas.
2. Se configurado para utilizar o gerador, gera os dados simulados a partir do arquivo dado, e o utiliza como *input* no programa o arquivo gerado.
3. Chama o Reader para configurar a leitura, seja ela qual for.
4. Faz leitura dos metadados e obtém as configurações dinâmicas.
5. Instância todos os gráficos por meio do arquivo Charts.
6. Chama o Render para criar uma janela com o layout e a frequência de atualização definidos nas configurações.
7. Entra no loop principal.
8. Realiza a leitura de uma amostra do MPU e uma amostra dos dados simulados, se definido para utilizar como entrada dados gerados.
9. Chama todos os gráficos inseridos na tela para calcular.
10. Passa a vez para o Render, que irá verificar se deve ou não Renderizar agora, conforme frequência definida.
11. Se não leu todas as amostras, retorna para o item 8.
12. Ao terminar o loop, deleta tudo, dando oportunidade aos módulos para escrever dados no console, como por exemplo tempo de execução.

## 3.6 Performance do Painel

Conforme a quantidade de módulos de cálculos foram sendo criados, e exibidos simultaneamente na tela, foi possível perceber lentidões na execução.

Foi notado que o uso de muitos Plots com o modo tempo real ativo, deixava o painel extremamente lento. Por mais potente que a máquina fosse, aumentar a frequência não aumentava a velocidade de renderização, que continuava a apresentar lentidão.

Após alguns estudos, foi percebido que a função utilizada do Matlab para renderizar possui um limite de frequência, sendo assim o aumento da taxa de renderização somente fazia que o painel perdesse mais tempo tentando renderizar, causando lentidão na visualização. Também foi notado que se removido o uso de *labels*, legendas e títulos dos gráficos, a performance do painel aumentava exageradamente.

É preciso estar atento ao utilizar o painel no modo de tempo real, pois uma alta frequência pode trazer lentidões e causar erro na leitura via USB. Isso pode ocorrer quando a escrita do MPU no buffer serial for mais rápida que a leitura do programa, fazendo com que informações no buffer sejam sobreescritas.

# Capítulo 4

## Análise de Dados e Comparação de Métodos

Para a análise de dados foram gerados dados simulados, adicionados de ruídos e *bias*, ajustados para se parecerem com os dados gerados pelo MPU. O bias adicionado tem como objetivo simular o resto que não foi corrigido após a calibração. Na Figura 4.1 temos um exemplo de dados gerados pelo MPU na primeira linha, e na segunda linha dados gerados pelo simulador para um mesmo movimento.

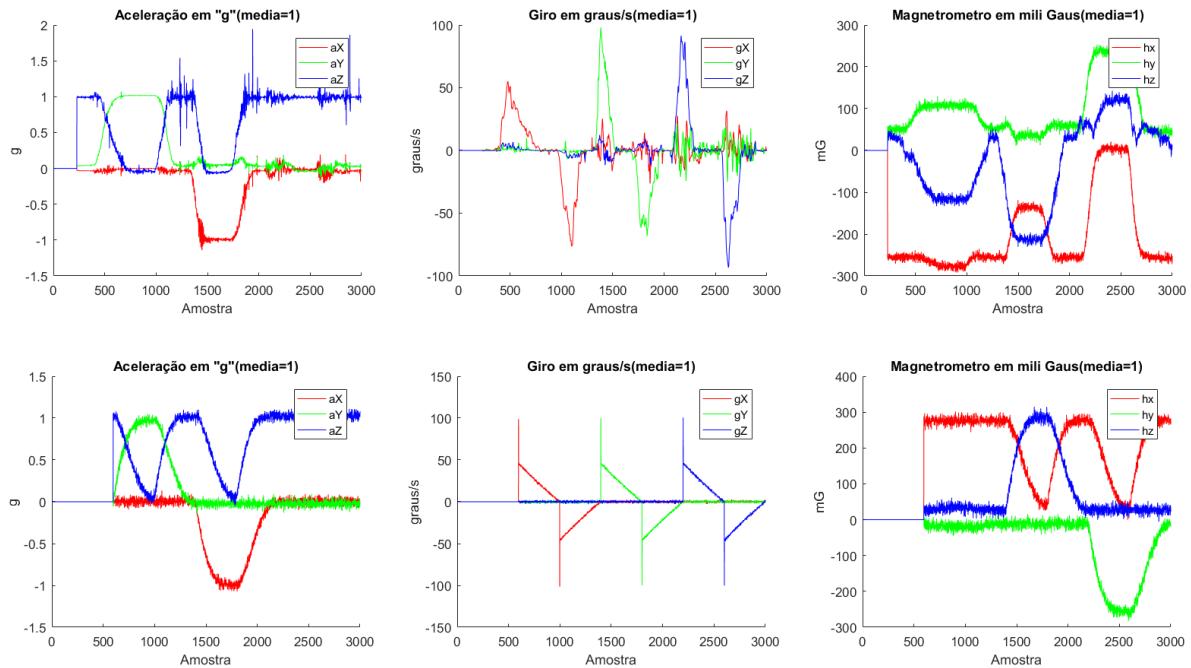


Figura 4.1: Dados gerados pelo MPU (primeira linha), e dados gerados pelo simulador (segunda linha), para o movimento de *roll*, *pitch* e *yaw* de 90° individualmente. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

Tabela 4.1: Cenários simulados.

Nome do cenário	Descrição	Duração
move_40	Movimento linear no eixo x, simulando velocidade média de 40km/h	8s
move_square_40	O corpo realiza um quadrado, como dar a volta na quadra. Com velocidade média de 40km\h	24s
p_90	<i>pitch</i> de 90 graus e depois aumenta para um <i>pitch</i> de 95 graus	6s
pr_seq_90	<i>pitch</i> seguido de <i>roll</i> de 90 graus	16s
py_seq_89	<i>pitch</i> seguido de um <i>yaw</i> de 89 graus	16s
rpr_seq_89	<i>roll</i> seguido de <i>pitch</i> seguido de - <i>roll</i> de 89 graus	24s
rpy_seq_89	<i>roll</i> seguido de <i>pitch</i> seguido de <i>yaw</i> de 89 graus	24s
rpy_single_45	<i>roll</i> , <i>pitch</i> e <i>yaw</i> de 45 graus individualmente	24s
rpy_single_89	<i>roll</i> , <i>pitch</i> e <i>yaw</i> de 90 graus individualmente	24s
rpy_single_360	<i>roll</i> , <i>pitch</i> e <i>yaw</i> de 360 graus individualmente	24s
drift	Mantem o corpo imóvel	35s

Podemos observar na Figura 4.1, que os dados simulados para o giroscópio possuem picos e são lineares. A linearidade se deve a nossa interpolação de ângulos, que liga dois pontos por meio de uma função de segunda ordem, o que gera na derivada essa linearidade. Algumas amostras descrevem o movimento com mais riqueza de pontos, para remover um pouco dessa linearidade. Já os picos são devidos a forma como foi descrito o cenário no arquivo de entrada, tendo uma busca mudança de ângulo em pouco tempo.

Comparando ainda a fonte real e simulada, podemos perceber que o dado do magnetômetro está bem diferente do real. Isso porque o objeto simulado inicia alinhado com o norte magnético, e o objeto real não.

Conforme apresentado na seção do *dashboard*, o simulador permite criar diversas situações, portanto iremos fazer uso delas para observar o comportamento dos métodos em cenários distintos.

Todos os cenários criados iniciam com os eixos do veículo alinhados ao da terra (sem inclinação), parados e localizados na origem. Os parâmetros utilizados foram a frequência de 100Hz, escala do acelerômetro de 2g e do giroscópio de 250 graus/s. A maioria dos cenários criados possuem cerca de 25 segundos de duração, o que na frequência de 100Hz são 2500 amostras, equivalente a 20% da capacidade máxima de armazenamento do dispositivo da Caixa Preta, que consegue armazenar 127 segundos. Os bias utilizado pelo simulador foram exagerados, se comparado ao obtido após a calibração, para visualizar melhor os efeitos dos testes na janela de 25 segundos. Os movimentos de inclinação descritos são no eixo do veículo.

## 4.1 Peculiaridades de cada método

Antes de iniciarmos a seleção dos melhores parâmetros, precisamos primeiro tratar de algumas peculiaridades de cada método. Pois algumas dessas peculiaridades permitem que descartemos o método de nossa lista de comparação, ou dão indicativos de que o método precisa de modificações na implementação.

### 4.1.1 Estimativa por integral

Conforme apresentado na fundamentação teórica, a estimativa por meio da simples integral da velocidade angular, não nos dá os três ângulos de Euler. O que descarta esse método de nosso comparativo.

Para ilustrar o problema, vamos utilizar o cenário rpr\_seq\_89 apresentado na Tabela 4.1. Com esse conjunto de inclinações teremos, se olhando somente o estado final, que o veículo está inclinado de *yaw* +89°.

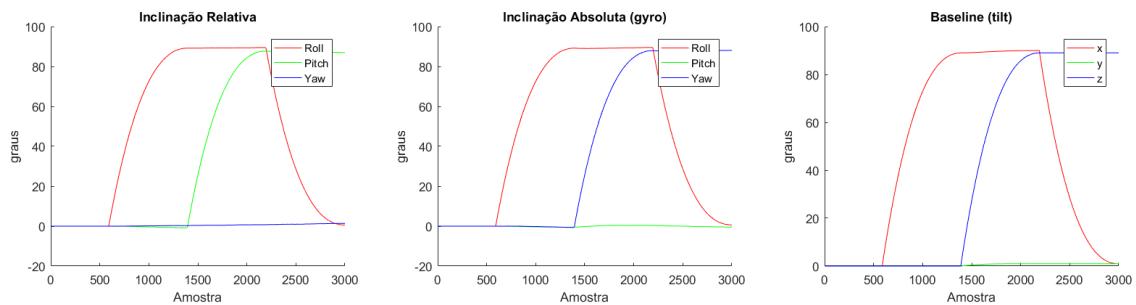


Figura 4.2: Ângulos relativos e absolutos. Cenário: rpr\_seq\_89. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

A Figura 4.2 ilustra o movimento. O *baseline* é dado em termos dos ângulos de Euler, indicando como o veículo se encontra em relação aos eixos da terra em cada amostra. Repare que em nenhum momento surge um movimento de *pitch*, pois na ordem ZYX, não é possível representá-lo desta forma. Imagine como tentar rotacionar um *pitch* (Y) depois de um *roll* (X). Não é possível pois *pitch* deve vir primeiro. Os ângulos absolutos obtidos por meio das matrizes de rotação, conforme apresentado na seção de fundamentação teórica, entrega os ângulos esperados pelo *baseline*. Já os ângulos obtidos pela simples integral, entregam um dado incorreto, pois contém o *pitch*.

### 4.1.2 Filtro complementar e de Kalman

O filtro complementar e o modelo de Kalman implementados possuem dois problemas em comum. O primeiro é que ambos tentam fundir ângulos diretamente. A simples soma, subtração e média que esses filtros realizam geram erros em casos específicos, uma vez que os ângulos estão no intervalo  $[-180^\circ, +180^\circ]$ . Por exemplo, a diferença entre  $180^\circ$  e  $-180^\circ$ , deveria ser 0, entretanto pela simples subtração dará  $360^\circ$ , o que resultará em uma correção incorreta da estimativa.

Já o segundo problema, podemos enxergá-lo claramente por meio das equações (2.27), e (2.36), se ponderarmos a fusão para utilizar somente o giroscópio teremos que o dado resultante será uma simples integral da velocidade angular. Como já apresentado anteriormente este dado está incorreto, pois não são ângulos de Euler. Sendo assim, independente da ponderação, em casos como o apresentado na seção anterior, são fundidos ângulos de Euler com ângulos da integral.

Para ilustrar o segundo problema iremos considerar o cenário da seção anterior, onde foi simulado um movimento de *yaw* (relativo à terra), utilizando um *roll*, *pitch* e *roll* nos eixos do veículo, conforme a figura Figura 4.3.

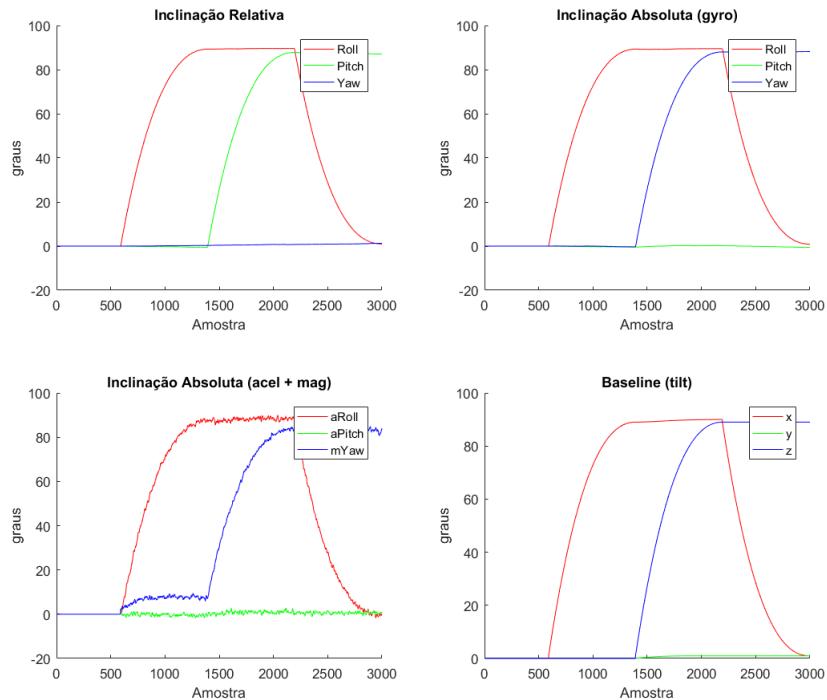


Figura 4.3: Estimativas com giroscópio, acelerômetro e magnetômetro. Cenário: rpr\_seq\_89. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

Comparando os gráficos na figura Figura 4.3 e Figura 4.4, podemos observar que o *yaw* obtido se distancia um pouco do esperado pelo *baseline*, e se aproxima bastante do

obtido pela estimativa com acelerômetro e magnetômetro, o que é esperado, devido a convergência da fusão de dados. O mesmo ocorre com o *pitch*, porém não é esperado, pois a única estimativa que possui o *pitch* é a obtida por meio da integral da velocidade angular.

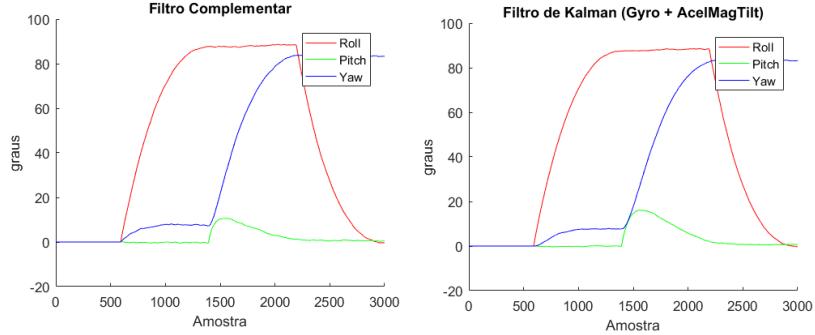


Figura 4.4: Estimativas com filtro complementar e de Kalman com ângulos relativos. Cenário: rpr\_seq\_89. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

Corrigir as duas questões apresentadas implica em alterar diretamente a implementação dos métodos. Para o primeiro problema podemos em ambos os filtros somente realizar as somas, subtrações e multiplicações dos ângulos na representação de números complexos. Assim, além de elas ocorrerem corretamente já estarão limitadas no intervalo  $[-180^\circ, 180^\circ]$  esperado.

Para a correção do segundo problema devemos fundir a estimativa de ângulo absoluto obtido com o giroscópio e não a relativa. No filtro complementar isso é algo simples de se resolver, uma vez que ele recebe como entrada um trio de ângulos, podemos somente trocar essa entrada de ângulos relativos para os ângulos absolutos. Para o filtro de Kalman, como a entrada da estimativa são dados de velocidade angular, teremos de implementar dentro do filtro um meio para extrair os ângulos de Euler.

O meio utilizado para extrair os ângulos foi usando matrizes de rotação, conforme apresenta as equações abaixo:

$$x_k^- = \text{rot2ang}(R_k) \quad (4.1)$$

$$R_k = R_{k-1} * R_\Delta \quad (4.2)$$

$$R_\Delta = \text{ang2rot}(Bu_k), \quad (4.3)$$

em que *ang2rot* converte ângulos para matriz de rotação na ordem ZYX, *rot2ang* converte matriz de rotação para ângulos e  $R_\Delta$  é a matriz que leva o corpo da inclinação em  $k - 1$  para  $k$ .

Após as modificações do filtro de Kalman, não podemos mais utilizar os mesmos parâmetros A, B e C. Sendo assim eles passam a ser conforme as equações abaixo:

$$A = C = I \quad (4.4)$$

$$B = I * \Delta t, \quad (4.5)$$

em que  $I$  é a matriz identidade, e  $\Delta t$  o período da taxa de amostragem. A entrada da etapa de predição passa a ser um vetor com os três valores da velocidade angular, e a etapa de atualização, um vetor com a estimativa utilizando acelerômetro e magnetômetro.

A Figura 4.5 apresenta resultado obtido para as mesmas amostras utilizadas na Figura 4.4. Podemos observar que a interferência do *pitch* não aparece mais.

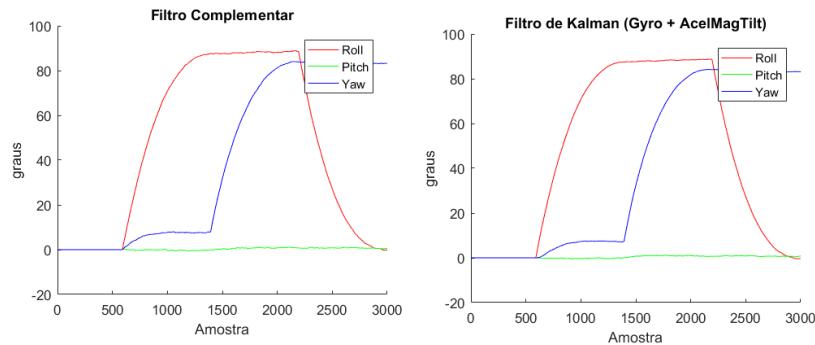


Figura 4.5: Estimativas com filtro complementar e de kalman com ângulos absolutos. Cenário: rpr\_seq\_89. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

## 4.2 Seleção de parâmetros de cada método

### 4.2.1 Filtro complementar

Para o filtro complementar o único parâmetro é o  $\mu$ , que dita a velocidade de convergência e quanto de uma estimativa irá interferir na outra,  $\mu = 0$  equivale ao uso somente do giroscópio, e  $\mu = 1$  equivale ao uso somente do acelerômetro e magnetômetro.

Com objetivo de verificar empiricamente o melhor valor de  $\mu$ , que gere a melhor estimativa nas escalas e frequências utilizadas, iremos testar valores de  $\mu$  entre 0 e 1. Isso será feito para todos os cenários (Tabela 4.1) criados, com exceção daqueles que geram *gimbal lock*.

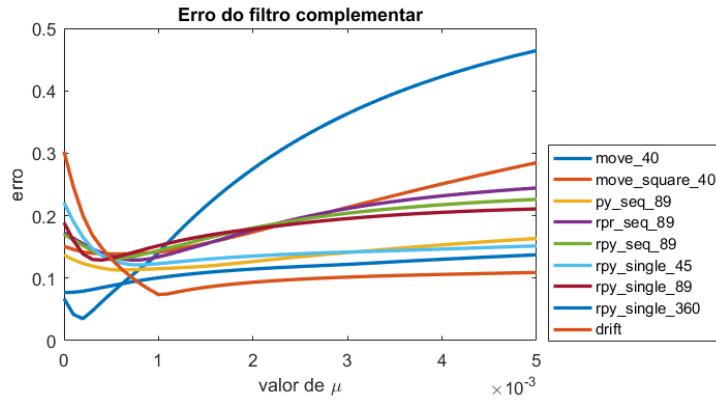


Figura 4.6: Erro da estimativa usando filtro complementar, para diferentes valores de  $\mu$ .  
Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

Por meio da Figura 4.6 podemos observar que em média o melhor valor de  $\mu$  é 0.0006. Podemos observar também que para os cenários que possuem aceleração linear, o erro aumenta rapidamente conforme o acelerômetro ganha maior participação.

Aumentando o ruído ou *bias* do giroscópio o valor ideal de  $\mu$  tende a aumentar, permitindo que acelerômetro e magnetômetro tenham maior participação. O contrário também é verdade, se o *bias* ou ruído do acelerômetro ou magnetômetro aumentar  $\mu$  tende a diminuir, conforme esperado pela fundamentação teórica.

#### 4.2.2 Filtro de Kalman

Para o filtro de Kalman os parâmetros são Q e R, eles indicam as incertezas associadas às entradas na etapa de predição e atualização, respectivamente, no formato de matrizes de covariância. Se Q é uma matriz de zeros, a saída do filtro será equivalente ao estimado somente com o giroscópio. Se R é uma matriz de zeros, então a saída do filtro será equivalente ao estimado com magnetômetro e acelerômetro.

Objetivando obter os melhores valores de Q e R utilizamos o cenário de *drift*, onde o corpo permanece imóvel, para calcular a covariância do giroscópio (entrada da etapa de predição), e a covariância do ângulo estimado utilizando magnetômetro e acelerômetro (entrada da etapa de atualização). A figura Figura 4.7 apresenta o valor das entradas, para o cenário de drift. Assim, por meio deste cenário, calculamos os valores de Q e R, que são apresentados pelas equações abaixo:

$$Q = 1^{-3} \begin{pmatrix} 0.1070 & -0.0014 & -0.0038 \\ -0.0014 & 0.1072 & 0.0041 \\ -0.0038 & 0.0041 & 0.1110 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$$R = \begin{pmatrix} 3.4441 & -0.0968 & 0.3581 \\ -0.0968 & 3.5426 & -0.0649 \\ 0.3581 & -0.0649 & 3.4761 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

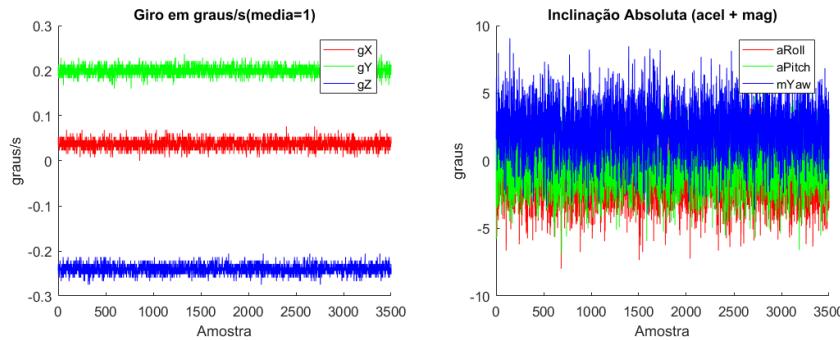


Figura 4.7: Entradas do filtro de Kalman nas etapas de predição e atualização respectivamente. Cenário: drift. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

Conforme aumentamos o *bias* ou ruído do giroscópio, a matriz Q indica que o dado é menos correlacionado, conforme esperado. Também é válido para a matriz R com os dados da estimativa utilizando acelerômetro e magnetômetro.

### 4.2.3 Filtro de Madgwick

No filtro de Madgwick o único parâmetro é  $\beta$  que dita a velocidade de convergência e quanto de uma estimativa irá interferir na outra,  $\beta = 0$  pondera a saída para mais próximo da estimativa que utiliza somente o giroscópio, e  $\beta = 1$  pondera a saída para maior uso do acelerômetro e magnetômetro.

Para obter o melhor valor de  $\beta$  utilizaremos a mesma abordagem usada para o filtro complementar. Por meio da Figura 4.8 podemos observar que em média o melhor valor de  $\beta$  é 0.004. Observamos também os mesmos comportamentos que apresentam o filtro complementar, para casos em que existe aceleração linear e para casos de maior e menor ruídos e *bias*.

### 4.2.4 Média móvel

Os dados base (acelerômetro, magnetômetro e giroscópio) possuem bastante ruído. Agora que temos os melhores parâmetros de cada filtro, podemos verificar se aplicando um filtro de média móvel nesses dados base, obtemos uma estimativa melhor, e caso positivo, qual o melhor valor de janela para o filtro.

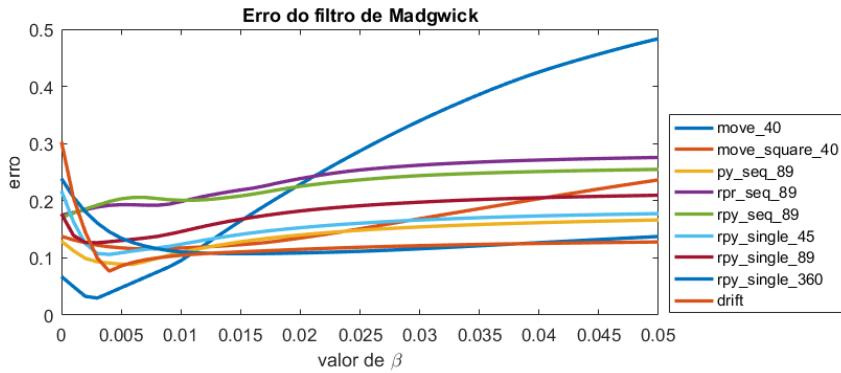


Figura 4.8: Erro da estimativa usando filtro de Madgwick, para diferentes valores de  $\beta$ .  
Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

Para verificar isso foram testados todos os métodos de estimativas, em todo os cenários com exceção daqueles que possuem *gimbal lock*, para os valores de janela entre 1 e 100.

Após as execuções foi possível perceber que na maioria dos casos o filtro de média móvel somente é útil para a estimativa que utiliza somente acelerômetro e magnetômetro. Para os demais, em alguns cenários não surtiu efeito, em outros teve melhora pouco significativa, e na maioria aumentou o erro. A Figura 4.9, que utiliza o cenário rpr\_seq\_89, ilustra brevemente o que ocorre. Podemos perceber comparando os gráficos das duas primeiras colunas que o aumento na janela de 1 para 10 não traz melhora visual significativa para a estimativa do Madgwick nem do giroscópio. Podemos perceber também, comparando os gráficos da segunda e terceira coluna, que a resposta vai ficando atrasada conforme aumentamos o tamanho da janela, consequentemente mais incorreta.

Testando o filtro de média móvel unicamente no acelerômetro e magnetômetro, também obtivemos o mesmo resultado. Sendo assim, ele será utilizado somente para filtrar os dados da base para fins de visualização e para o método que utiliza acelerômetro e magnetômetro sem fusão de dados.

A Figura 4.10 traz a variação do erro conforme aumentamos o valor da janela. Para alguns cenários o melhor valor seria  $k=3$ , para outros  $k=5$ , mas para a maioria seria algo entre 8 e 16. Portanto iremos utilizar um meio termo para a maioria dos casos  $k=10$ .

### 4.3 Comparação de métodos

Uma vez selecionados os parâmetros de cada método, podemos compará-los com cada um configurado para as condições de melhor desempenho.

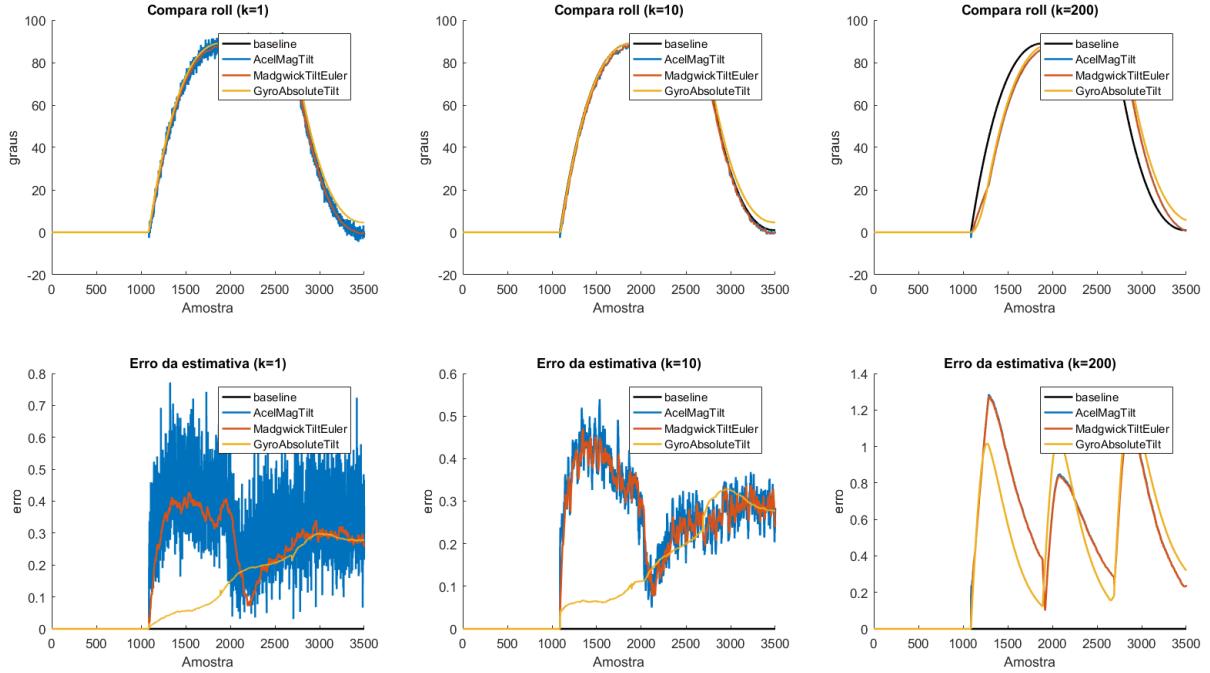


Figura 4.9: Comparativo de *roll* entre 3 métodos de estimativa com média móveis diferentes. Cenário: rpr\_seq\_89. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

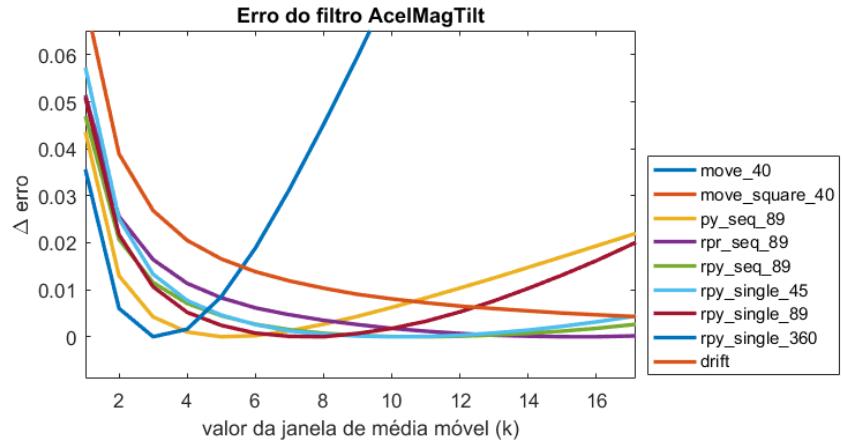


Figura 4.10: Variação do erro da estimativa usando acelerômetro e magnetômetro, para diferentes janelas de filtro de média móvel. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

### 4.3.1 Precisão, acurácia e tempo de execução

Para verificar a acurácia de cada método foi utilizado a soma das diferenças absolutas, das componentes que formam a matriz de rotação de cada estimativa, comparado com o *baseline* gerado pelo simulador. Conforme apresentado na seção de fundamentação teórica.

Tabela 4.2: Tempo médio de execução de 1 amostra, e erro médio, para cada método de estimativa em todos os cenários.

		<b>AcelMag</b>	<b>Gyro</b>	<b>Comp</b>	<b>Kalman</b>	<b>Madgwick</b>
<b>drift</b>	<b><math>\Delta t</math></b>	0.000075s	0.000066s	0.000112s	0.000178s	0.000164s
	<b>erro</b>	0.14692	0.30307	0.11414	0.10860	0.07492
<b>move_40</b>	<b><math>\Delta t</math></b>	0.000087s	0.000077s	0.000127s	0.000188s	0.000174s
	<b>erro</b>	0.83171	0.06733	0.08825	0.40880	0.03856
<b>move_square_40</b>	<b><math>\Delta t</math></b>	0.000067s	0.000064s	0.000107s	0.000164s	0.000159s
	<b>erro</b>	1.01312	0.13644	0.13541	0.33458	0.14133
<b>py_seq_89</b>	<b><math>\Delta t</math></b>	0.000071s	0.000066s	0.000111s	0.000170s	0.000158s
	<b>erro</b>	0.21637	0.13833	0.12902	0.14348	0.11936
<b>rpr_seq_89</b>	<b><math>\Delta t</math></b>	0.000061s	0.000058s	0.000098s	0.000151s	0.000142s
	<b>erro</b>	0.29175	0.17119	0.13230	0.24150	0.19763
<b>rpy_seq_89</b>	<b><math>\Delta t</math></b>	0.000080s	0.000074s	0.000127s	0.000200s	0.000180s
	<b>erro</b>	0.27648	0.16954	0.13334	0.22189	0.19890
<b>rpy_single_45</b>	<b><math>\Delta t</math></b>	0.000074s	0.000073s	0.000122s	0.000185s	0.000172s
	<b>erro</b>	0.19310	0.19893	0.11358	0.14448	0.10345
<b>rpy_single_89</b>	<b><math>\Delta t</math></b>	0.000072s	0.000070s	0.000119s	0.000181s	0.000164s
	<b>erro</b>	0.23866	0.18007	0.15261	0.18646	0.13760
<b>rpy_single_360</b>	<b><math>\Delta t</math></b>	0.000061s	0.000060s	0.000099s	0.000153s	0.000142s
	<b>erro</b>	0.32429	0.11541	0.11485	0.11528	0.19530
<b>Média dos tempos</b>		0.000072s	0.000068s	0.000114s	0.000174s	0.000162s
<b>Soma dos erros</b>		3.532400	1.480310	1.113500	1.905070	1.207050

O tempo de execução é mensurado por meio de bibliotecas nativas do Matlab versão 2016a. Este tempo foi medido a cada iteração, obtendo ao final uma média de tempo de cálculo por amostra.

Os parâmetros e configurações utilizadas são conforme apresentados em seções anteriores.

De antemão podemos afirmar que os filtros de Madgwick e complementar apresentaram nos testes melhor performance de tempo, precisão e acurácia. A Tabela 4.2 traz informações dos testes realizados. No decorrer desta seção iremos apresentar com mais detalhes os resultados de precisão e acurácia dos testes para cada cenário.

A Figura 4.11 traz um cenário onde podemos analisar o comportamento das estimativas quanto ao *drift*. Observamos que a estimativa com o giroscópio (*GyroAbsoluteTilt*) é ineficaz neste caso, pois em pouco tempo seu erro aumenta muito. Já a estimativa *AcelMagTilt*, que utiliza somente do acelerômetro e magnetômetro, se mantém constante, mas oscila muito. A melhor saída tanto de precisão quanto acurácia, se consegue com os filtros de fusões de dados, onde o filtro de Madgwick (*MadgwickTiltEuler*) se sai melhor, seguido pelo filtro de Kalman (*KalmanTilt*) e complementar (*CompTilt*).

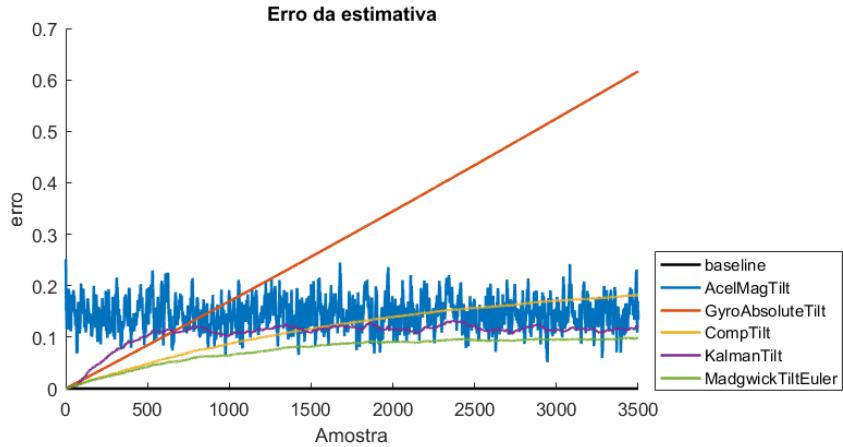


Figura 4.11: Erro das estimativas por amostra computada. Cenário: drift. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

O cenário da Figura 4.12, traz um caso em que temos aceleração linear, sem presença de rotações. Podemos observar que a estimativa *AcelMagTilt* não é confiável neste caso. O filtro de Kalman também não obteve bons resultados. Os filtros que se sobressaem são os de Madgwick e complementar. Podemos observar também que a estimativa com giroscópio é eficaz uma vez que este sensor não leu nenhum movimento, o erro que ele apresenta é devido ao *drift*.

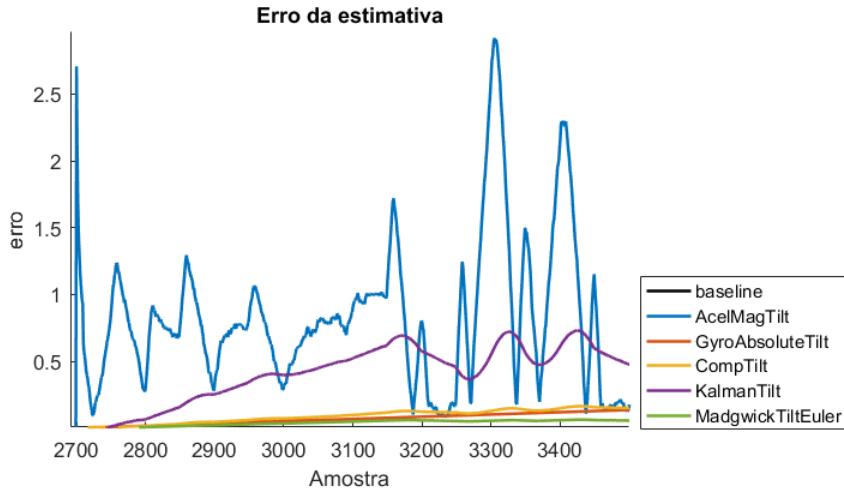


Figura 4.12: Erro das estimativas por amostra computada. Cenário: move\_40. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

Para verificar como os métodos irão se comportar no caso em que há aceleração linear e angular, utilizamos o cenário *move\_square\_40*, que descreve um veículo se movendo em linha reta e fazendo conversões para a esquerda, como se estivesse dando uma volta

na quadra. A Figura 4.13 apresenta os resultados, onde podemos notar novamente que os dados de *AcelMagTilt* não são confiáveis, e novamente os filtros que se saem melhor são o complementar, e filtro de Madgwick.

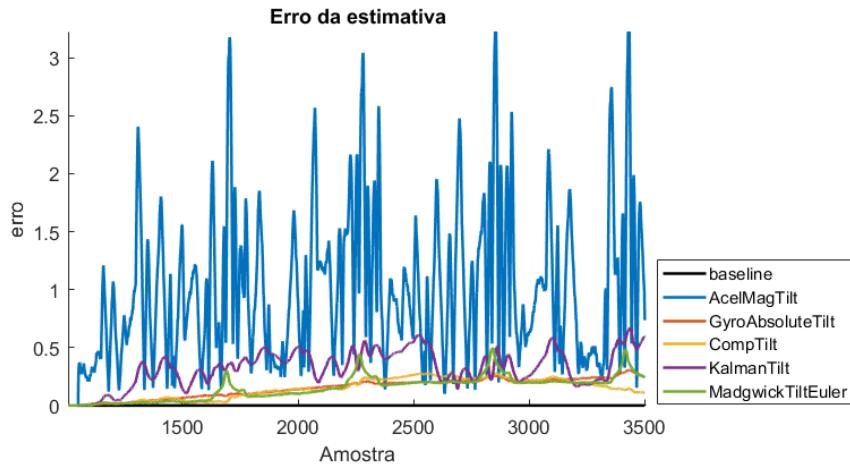


Figura 4.13: Erro das estimativas por amostra computada. Cenário: move\_square\_40. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

O cenário comp\_py\_seq\_89 é dado pela Figura 4.14. Nele temos uma situação em que os movimentos de *pitch* e *yaw* realizados sobre o eixo do veículo se tornam *yaw* e *roll* em ângulos de Euler. Podemos observar que os erros dos métodos que fazem uso do acelerômetro e magnetômetro possuem certa oscilação. Após testar com outros valores de ângulo que não  $89^\circ$ , com e sem ruídos e *bias*, acreditamos que isso se deva simplesmente ao ruído e *bias*, pois, como são erros aleatórios, não seguem a hipótese de que há somente o vetor gravitacional e campo magnético. Assim, as estimativas tendem a ter erros maiores para certas inclinações, entretanto sempre são maiores quando próximos de  $90^\circ$ , conforme veremos mais abaixo.

Para o cenário py\_seq\_89 verificamos que as estimativas utilizando o filtro de Madgwick e complementar possuem melhores resultados.

Em rpr\_seq\_89, apresentado pela Figura 4.15, temos uma situação semelhante à py\_seq\_89. O cenário realiza um *roll* seguido de *pitch* e de um *roll* negativo, o que em ângulos de Euler gera somente um *yaw*. Os resultados também são semelhantes ao cenário anterior, onde os filtros de Madgwick e complementar possuem melhores resultados, entretanto o complementar tem um desempenho melhor após melhora na estimativa do *AcelMagTilt*. Isto se deve a velocidade de convergência do método, que será tratado mais à frente.

Os resultados para os cenários rpy\_seq\_89, rpy\_single\_45, rpy\_single\_89, apresentados pelas Figuras 4.16 a 4.18, são semelhantes. Podemos perceber que o filtro de Kalman,

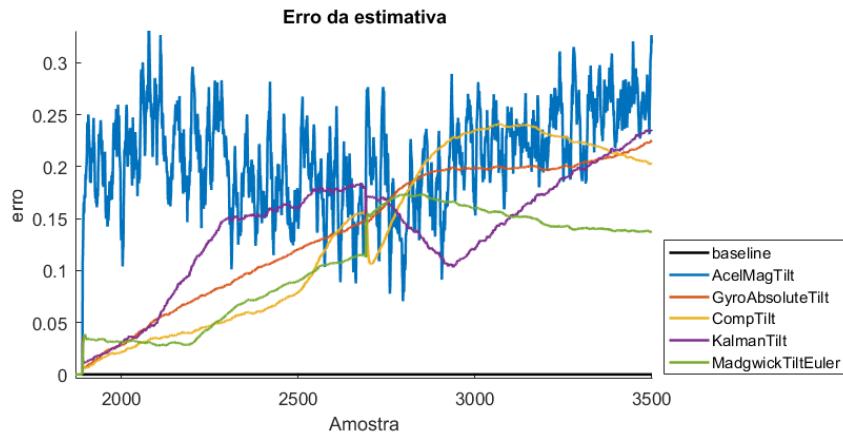


Figura 4.14: Erro das estimativas por amostra computada. Cenário: py\_seq\_89. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

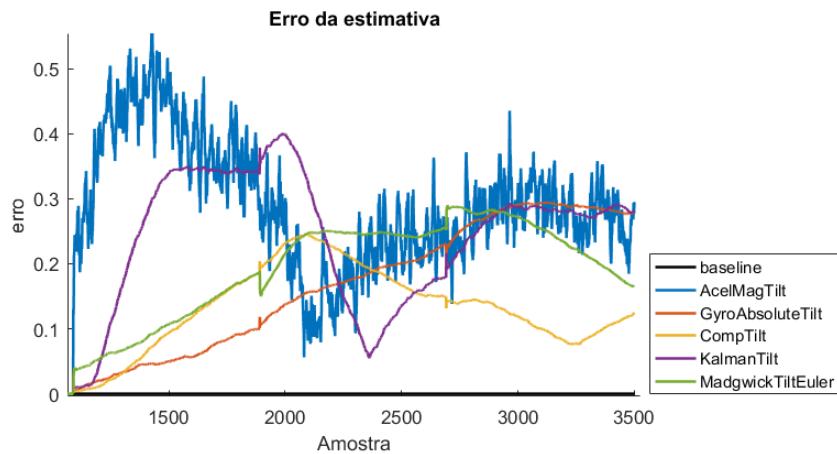


Figura 4.15: Erro das estimativas por amostra computada. Cenário: rpr\_seq\_89. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

com os parâmetros configurados, tendem muito mais a seguir o movimento de *AcelMagTilt*, o que pode indicar uma má escolha de matrizes de covariância. As estimativas com acelerômetro e magnetômetro, entregam resultados piores para o movimento de *roll*. Os filtros de Madgwick e complementar apresentam melhores resultados e com erros mais constantes, indicando melhor precisão.

Por fim, temos o cenário rpy\_single\_360, cujos resultados são apresentados na Figura 4.19. Este movimento é diferente dos outros, pois além de extrapolarmos o intervalo definidos para os ângulos de Euler, ele ocorre no mesmo intervalo de tempo, ou seja, a rotação é mais rápida. Por meio deste cenário observamos novamente que *roll* (o movimento inicial), possui maior erro na estimativa *AcelMagTilt*.

Ainda na figura Figura 4.19, observamos que a linha de *AcelMagTilt* apresenta quatro

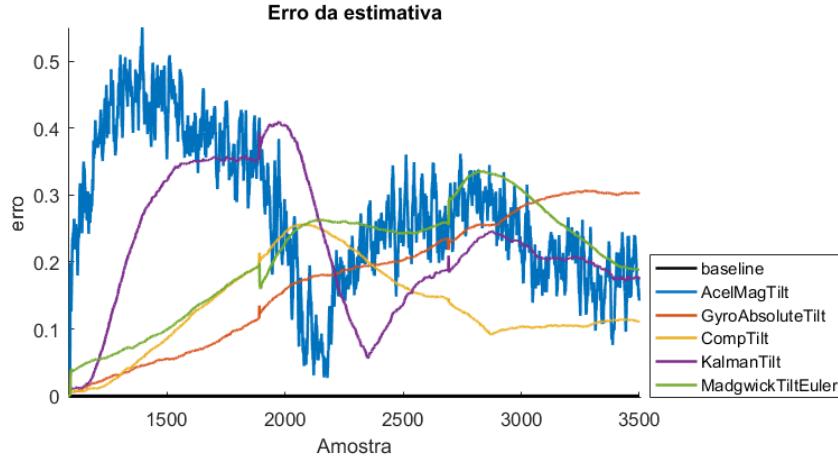


Figura 4.16: Erro das estimativas por amostra computada. Cenário: rpy\_seq\_89. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

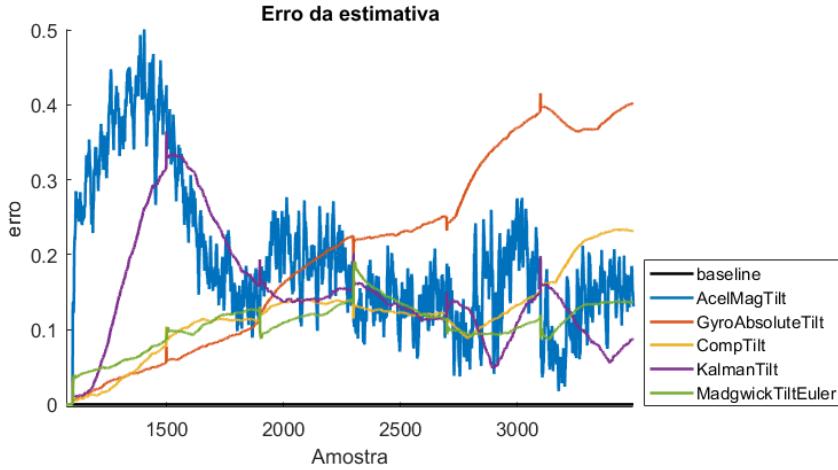


Figura 4.17: Erro das estimativas por amostra computada. Cenário: rpy\_single\_45. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

picos até a amostra de número 1800. Eles correspondem aos pontos onde *roll* está próximo a 90, 180, -90 e -180 graus respectivamente. No trecho seguinte entre as amostras 1800 e 2800, temos dois picos, correspondentes à *pitch* 90 e -90 graus. No restante do intervalo temos novamente quatro picos, onde *yaw* está próximo a 90, 180, -90 e -180 graus respectivamente. Podemos observar aqui que a estimativa do acelerômetro se torna mais instável em pontos extremos.

Para o cenário de rotações em  $360^\circ$ , os filtros que deram maior ponderação para a estimava com acelerômetro e magnetômetro, tiveram pior desempenho. O filtro que apresentou melhor resultado foi o complementar. Já o filtro de Madgwick, que vinha com ótimo desempenho, apresentou grande taxa de erro neste cenário. Testando com outros

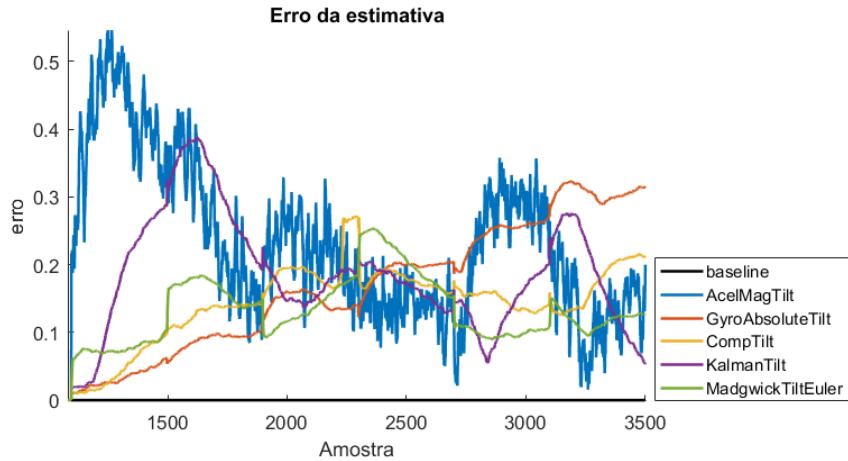


Figura 4.18: Erro das estimativas por amostra computada. Cenário: rpy\_single\_89.  
Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

cenários, alterando a velocidade de rotação, foi possível perceber que o filtro fica instável conforme a velocidade angular aumenta.

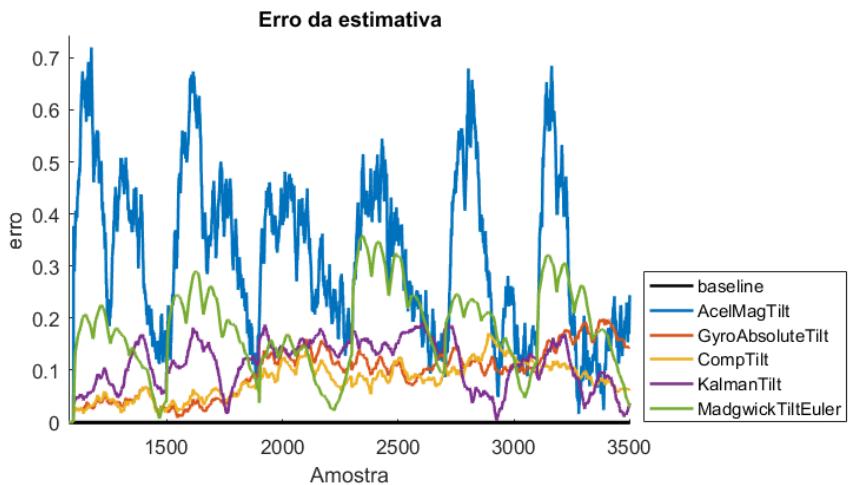


Figura 4.19: Erro das estimativas por amostra computada. Cenário: rpy\_single\_360.  
Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

### 4.3.2 Tempo de estabilização

Entendemos como convergência em uma fusão de dados, o momento em que a variação da estimativa entregue pela fusão é menor do que um certo limite. Por exemplo no filtro complementar, se a estimativa com o giroscópio indica um *roll* de  $50^\circ$  e a estimativa com acelerômetro e magnetômetro indicam um *roll* de  $70^\circ$ , a saída de uma fusão de dados

pode ser qualquer valor. Após um período com o corpo imóvel, esse valor irá convergir para algum ângulo no intervalo  $[50^\circ, 70^\circ]$ .

Entendemos como velocidade de convergência ou tempo de estabilização, a quantidade de amostras necessárias para que a estimativa dada pela fusão tenha variação menor que um certo limite. Essa velocidade é ditada pelos parâmetros de ponderação do método,  $\beta$  no Madgwick,  $\mu$  no filtro complementar e  $Q$  e  $R$  no filtro de Kalman. Nesta seção iremos analisar a velocidade que cada método de fusão de dados converge.

Existem dois casos em que queremos uma alta velocidade de convergência. O primeiro deles é no início das amostras, porque a estimativa com giroscópio sempre parte do 0. Mas dificilmente em uma situação real o veículo estará alinhado com os eixos da terra, sendo assim as estimativas divergem. Para um robô isso não é um problema, pois mesmo que percamos 10 segundos para que esse dado inicial converja, quando ele começar a se movimentar após ligado, a convergência já terá sido alcançada, isto é podemos descartar 10 segundos de dados, pois são insignificantes. Entretanto para a análise do dispositivo da Caixa Preta, 10 segundos é uma janela expressiva de dados para ser descartada, pois temos ao todo uma janela de 127 segundos.

O segundo caso que precisamos de uma grande velocidade de convergência é quando estimativas divergem devido a ruídos e *bias*. O ideal seria que a fusão convergisse o mais rápido possível para a estimativa que está mais correta, entretanto não é possível saber qual é a correta. Por isso para este caso a rápida convergência pode atrapalhar em alguns casos e ajudar em outros. O filtro de Kalman tenta atingir esse objetivo, com seu valor de ponderação variável.

Nesta seção iremos analisar somente o primeiro caso. Para isso iremos criar um cenário onde o corpo inicie inclinado para o sul magnético, com *yaw* próximo de  $-170^\circ$ . A Figura 4.20 apresenta a estimativa utilizando o acelerômetro e magnetômetro, e a estimativa utilizando o giroscópio. Podemos observar que elas divergem uma vez que o giroscópio sempre iniciará sem conhecer a inclinação inicial do corpo.

Verificando o erro das estimativas para este cenário criado, Figura 4.21, podemos ver que o filtro de Kalman é o que mais rapidamente se ajusta, seguido pelo complementar e por último o de Madgwick. Pela imagem podemos identificar que o filtro que possui estabilização mais lenta, consome 40 mil amostras, isso equivale a 400 segundos na frequência de  $100Hz$ . Podemos modificar os parâmetros de entrada para acelerar a convergência. Utilizando o caso extremo onde ponderamos para utilizar ao máximo o acelerômetro e magnetômetro ( $\beta = 1$ ,  $\mu = 1$ , e  $R_{3x3} = 0$ ), temos, conforme Figura 4.22, uma convergência inicial extremamente rápida. Mas ainda assim podemos observar que o filtro de Madgwick ainda consome cerca de 200 amostras para convergir, uma vez que a estimativa utilizando acelerômetro e magnetômetro é dada pelo algoritmo do gradiente descendente,

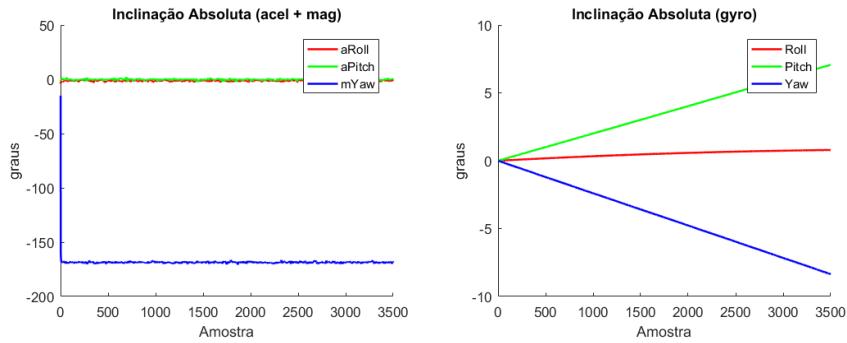


Figura 4.20: Estimativas de inclinação usando somente acelerômetro e magnetômetro, e usando somente giroscópio. Cenário: drift modificado. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

que é iterativo, sendo assim leva algum tempo para convergir. De todo modo, o aumento exacerbado da participação do acelerômetro e magnetômetro na fusão, acaba que por inutilizar a fusão de dados, e diminuir a precisão nos demais cenários.

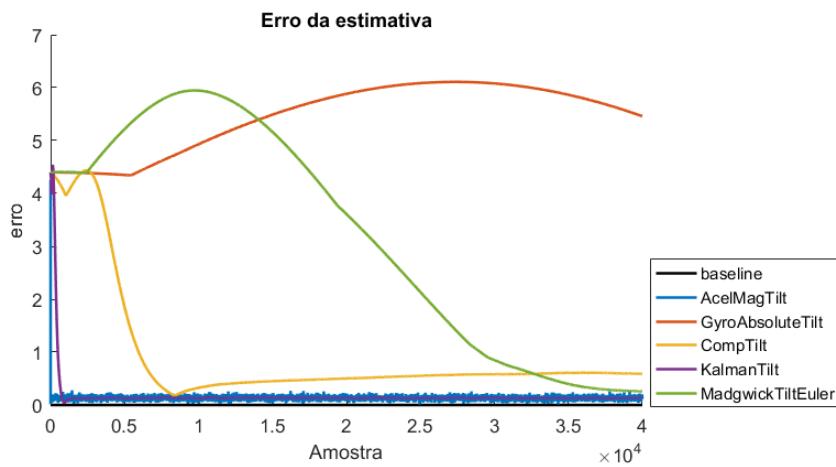


Figura 4.21: Erro das estimativas, mostrando tempo para convergência. Cenário: drift modificado. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

Uma solução simples, e aceita por todos os métodos de fusão, é definir uma inclinação inicial para o filtro. Para isso nos utilizamos da estimativa com base somente no acelerômetro e magnetômetro. Isso por um pequeno intervalo, para evitar as estimativas incorretas que surgem nas primeiras amostras, e depois retornamos para a ponderação ótima. Utilizamos como intervalo dez amostras. Sendo assim teremos os erros conforme apresentado na Figura 4.23, onde podemos observar que o filtro de Madgwick e complementar ainda demoram para convergir de fato, mas estão muito mais próximos desse valor.

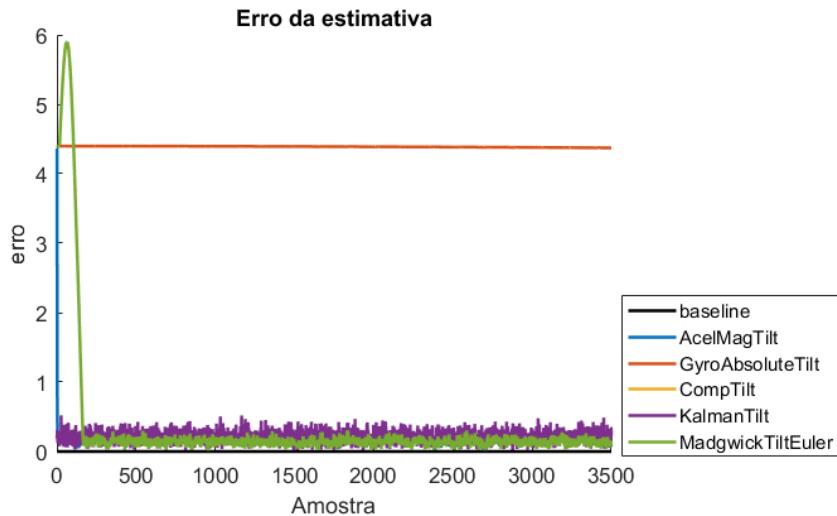


Figura 4.22: Erro das estimativas, mostrando tempo para convergência com parâmetros ponderando ao máximo acelerômetro e magnetômetro. Cenário: drift modificado. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

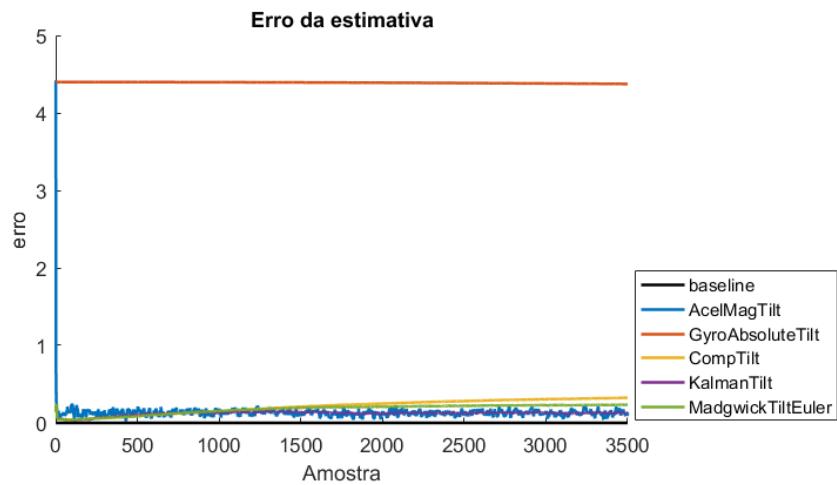


Figura 4.23: Erro das estimativas, mostrando convergência inicial após correção. Cenário: drift modificado. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

Em um cenário onde o corpo possui aceleração linear como em move\_square\_40, e inicia com alguma inclinação, mas parte do repouso, o comportamento é semelhante ao já observado, conforme Figura 4.24. Já em um cenário semelhante, mas onde o corpo já inicia com alguma aceleração linear, temos uma estimativa inicial incorreta, devido a solução utilizada, e que aos poucos irá convergir, em velocidade ditada pelos parâmetros configurados, conforme Figura 4.25.

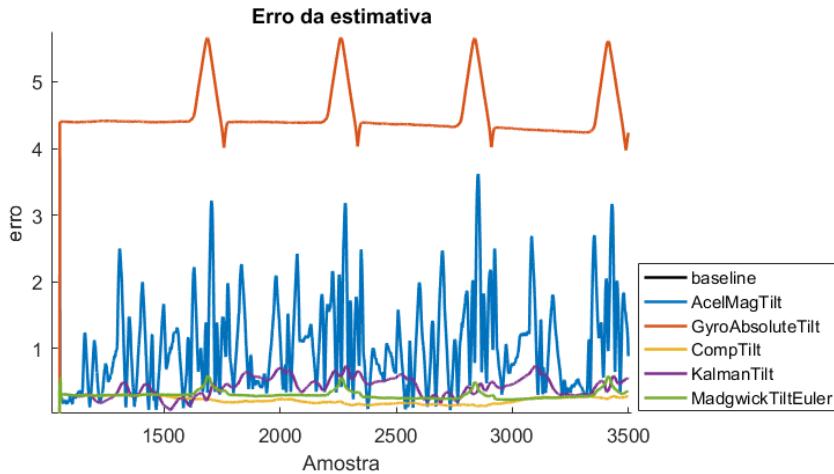


Figura 4.24: Erro das estimativas, após correção de convergência, sem aceleração inicial. Cenário: move\_square\_40 modificado. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

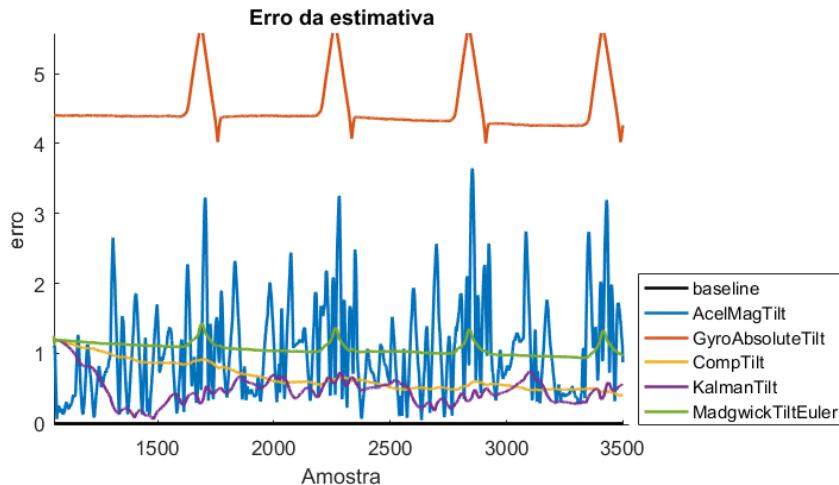


Figura 4.25: Erro das estimativas, após correção de convergência, com aceleração inicial. Cenário: move\_square\_40 modificado. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

Uma vez feita essa modificação para forçar uma convergência inicial, estamos introduzindo mais erros nas estimativas para os cenários ótimos, analisados anteriormente, em que todos os eixos iniciavam alinhados. Os parâmetros selecionados eram baixos para tirar vantagem da boa precisão do giroscópio nas primeiras amostras, em que o *drift* ainda não superava o erro do magnetômetro e acelerômetro. Para o filtro de Kalman não faz efeito, pois ele se autoajusta com base nas matrizes de covariância, que não necessitam de alterações após as modificações feitas.

Observando novamente o comportamento dos filtros, após as modificações, temos que para os cenários ótimos os melhores valores de  $\beta$  e  $\mu$  ficaram em 0.018 e 0.0015 respectivamente.

mente. Para os cenários com ângulo inicial, mas sem aceleração inicial, ficaram  $\beta = 0.012$  e  $\mu = 0.0012$ . E para os cenários com aceleração inicial ficaram  $\beta = 0.05$  e  $\mu = 0.005$ .

Por meio dos resultados tanto em cenários ótimos, quanto em cenários onde temos inclinação inicial e aceleração inicial, foi possível observar que os parâmetros ótimos dos filtros de Madgwick e complementar passam a utilizar parcelas maiores do magnetômetro e acelerômetro. Assim, eles se aproximam mais dos resultados obtidos com o filtro de Kalman. Entretanto os testes ainda apontaram os filtros de Madgwick e complementar, como entregando melhores resultados de precisão e acurácia.

## 4.4 Conclusão parcial

Com os testes realizados podemos verificar que cada estimador possui cenários em que apresentam melhores resultados se comparados aos demais. Isto é, nenhum filtro possui supremacia em relação aos outros. Porém os estimadores que em maior parte do tempo apresentaram melhores resultados, foram o de Madgwick e complementar.

O filtro de Kalman além de ser mais complexo e lento, apresentou resultados de acurácia e precisão inferiores. Porém isso pode ser devido à dificuldade de selecionar bons valores de parâmetros para ele.

Para o escopo dos testes, em que a janela de amostras é finita e de curto período (25 segundos de dados), os valores de parâmetros para os filtros de Madgwick e complementar mais vantajosos, são aqueles que permitem parcelas maiores do giroscópio. Isto é, valores mais baixos como por exemplo  $\beta = 0.012$  e  $\mu = 0.0012$ , pois irão tirar vantagem do momento em que o drift ainda é baixo, mesmo com os bias maiores do que o esperado na prática. Conforme aumentamos o tamanho da janela, ou analisamos cenários onde não podemos confiar tanto no giroscópio, como com inclinação inicial ou com ruído do giroscópio maior, os valores ótimos dos parâmetros tendem a aumentar. Para o escopo do projeto Caixa Preta, em que a janela é finita, pequena (127 segundos), e o bias após calibração é menor do que o testado, o uso de baixos valores ainda é vantajoso.

# Capítulo 5

## Conclusão

### 5.1 Resultados obtidos

Após todo o período utilizando da plataforma criada para testar e compreender as estimativas, foi possível ver sua eficácia e flexibilidade. Os dados simulados e a possibilidade de ajustar rapidamente a maioria dos parâmetros foi de grande ajuda no desenvolvimento da análise de dados deste projeto. Entretanto para constatar se seu uso é realmente fácil, extensível e útil, é necessário que os futuros membros que venham a participar do projeto façam uso dela, e a avaliem.

Conforme tratado na seção de peculiaridades de cada método, foi possível perceber que utilizar de ângulos de Euler para a fusão de dados não é o ideal, pois, foi necessário modificar alguns métodos para realizar a correta soma, subtração e média entre os ângulos, além de modificações para utilizar ângulos absolutos e limitar os intervalos. O ideal seria utilizar de quatérnios pois as operações além de mais rápidas, não apresentam esses casos.

Com os testes realizados, podemos constatar que os filtros complementar e Madgwick utilizados possuem melhor precisão e acurácia comparado aos demais. Tendo o filtro complementar o menor tempo de execução, seguido do Madgwick e Kalman.

Os filtros complementares e Madgwick, apresentam melhores resultados principalmente em cenário ótimos, onde iniciamos sem aceleração inicial e sem inclinação inicial. Para estes cenários, os melhores parâmetros são aqueles próximos de zero, para tirar proveito da boa acurácia e precisão do giroscópio enquanto o erro causado por *drift* não se torna maior que o erro do acelerômetro e magnetômetro.

Para os cenários que possuem aceleração inicial e inclinação inicial, os melhores valores de parâmetros tendem a ser maiores, dando um pouco mais de importância as estimativas com acelerômetro e magnetômetro.

Conforme a janela de observação é aumentada, isto é, passamos a computar mais amostras, os melhores parâmetros para os dois filtros passam a ser maiores também, pois

o *drift* leva mais tempo para ser corrigido pela convergência.

Os parâmetros ótimos do filtro de madwick e complementar, assim como os de Kalman, irão variar conforme as imperfeições dos dados, calibração dos sensores, cenários e tamanho da janela observável. Desta forma propomos que seja definido, junto as configurações de fábrica, um bom valor para eles.

Para este projeto, bons valores de parâmetros são baixos, próximos de zero, pois os veículos possivelmente terão grande velocidade linear, mas não grande aceleração, e a janela de amostras é pequena. Sendo assim, valores baixos poderão tirar proveito da boa precisão do giroscópio no início da análise.

Para uso no painel que o perito fará acesso, propomos que seja deixado como opcional selecionar o filtro de Madgwick ou complementar, uma vez que eles entregaram ótimos resultados, e próximos em muitas situações. Quanto a seus parâmetros, propomos que sejam utilizados os pré-definidos nas configurações de fábrica, mas que o perito tenha liberdade para alterá-lo. Como cada filtro possui somente um parâmetro, diferente do filtro de Kalman que possui duas matrizes 3x3, será de fácil uso ajustar na interface seu valor e verificar o que se encaixa melhor na situação.

## 5.2 Trabalhos futuros

Abaixo levantamos alguns pontos que podem ser explorados e melhorados neste projeto:

- Aumentar a velocidade de execução dos cálculos, utilizando programação dinâmica, evitando recálculos e utilizando paralelismo.
- Aumentar a velocidade de plotagem, utilizando módulos de plotagem de mais baixo nível do Matlab, ou outra biblioteca gráfica se possível.
- Permitir que os parâmetros de ajustes dos filtros e demais cálculos sejam alterados em tempo de execução por meio da própria interface.
- Permitir seleção da porta COM, e do tipo de leitura por meio da interface gráfica.
- Adicionar outros métodos de fusão de dados, outros usos do filtro de Kalman, para comparação.
- Adicionar modulo que permita fundir dados do GPS para estimativa de posição e velocidade instantânea.
- Adicionar modulo que permita fundir múltiplos sensores de inercia, como 2 MPUs ou mais.

- Comparar os dados de estimativa de inclinação, com dados reais, tendo como base um sensor de inclinação preciso.
- Testar melhores parâmetros e acurácia com os sensores configurados em outras escaras.

# Referências

- [1] Lima, Vinícius de Oliveira: *PROPOSTA DE PLATAFORMA INERCIAL PARA AUXILIAR NA PERÍCIA DE ACIDENTES DE TRÂNSITO.* 1
- [2] Tumelero, Naína: *Metodologia de pesquisa: guia rápido de possibilidades.* <https://blog.mettzer.com/metodologia-de-pesquisa/>, acesso em 2021-01-30. 2
- [3] Garcia, Fabíola Silva: *METODOLOGIA DA PESQUISA CIENTÍFICA: ORGANIZAÇÃO ESTRUTURAL e OS DESAFIOS PARA REDIGIR o TRABALHO DE CONCLUSÃO.* 2
- [4] Suhanko, Djames: *Acelerômetro, giroscópio, bússola, altímetro, barômetro - IMU.* <https://www.dobitaobyte.com.br/accelerometro-giroscopio-bussola-altimetro-barometro-imu/>, acesso em 2021-04-19. 5, 55
- [5] Nedelkovski, Dejan: *MEMS accelerometer gyroscope magnetometer e arduino.* <https://howtomechatronics.com/how-it-works/electrical-engineering/mems-accelerometer-gyroscope-magnetometer-arduino/>, acesso em 2021-01-11. 5, 57, 58, 59, 60
- [6] Invensense: *MPU-9250 product specification.* 5, 6, 57, 60, 61
- [7] *Learn more about magnetometer models and HSI calibration.* <https://www.vectornav.com/resources/magnetometer-errors-calibration>, acesso em 2021-03-20. 6, 10, 15, 61, 62, 67, 68
- [8] Winer, Kris: *Simple and effective magnetometer calibration.* <https://github.com/kriswiner/MPU6050>, acesso em 2020-11-23. 7
- [9] Woolfrey, Jon: *Rotations in 3d.* <https://www.youtube.com/watch?v=wg9bI8-Qx2Q>, acesso em 2020-11-23. 9, 11, 70
- [10] Eberly, David: *Euler angle formulas.* 10, 11, 69, 70
- [11] Ben-Ari, Moti: *A tutorial on euler angles and quaternions.* 11, 71
- [12] Mathoma: *3d rotations in general: Rodrigues rotation formula and quaternion exponentials.* <https://www.youtube.com/watch?v=q-ESzg03mQc>, acesso em 2020-11-23. 11, 71, 72
- [13] Pedley, Mark: *Tilt sensing using a three-axis accelerometer.* 13, 14, 74, 75

- [14] *Magnetic dip - SKYbrary aviation safety.* [https://www.skybrary.aero/index.php/Magnetic\\_Dip](https://www.skybrary.aero/index.php/Magnetic_Dip), acesso em 2021-04-19. 14, 76
- [15] Euston, M., P. Coote, R. Mahony, Jonghyuk Kim e T. Hamel: *A complementary filter for attitude estimation of a fixed-wing UAV.* Em *2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, páginas 340–345. IEEE, ISBN 978-1-4244-2057-5 978-1-4244-2058-2. <http://ieeexplore.ieee.org/document/4650766/>, acesso em 2021-04-21. 15, 16, 78
- [16] Kelly, Don: *Kalman filter for 6dof IMU implementation.* <https://www.youtube.com/watch?v=0s6V1lnUPZo>, acesso em 2020-11-23. 16
- [17] Brian Douglas: *Drone control and the complementary filter.* <https://www.youtube.com/watch?v=whSw42XddsU>, acesso em 2020-11-23. 16, 78
- [18] MATLAB: *Understanding kalman filters, part 1: Why use kalman filters?* <https://www.youtube.com/watch?v=mwn8xhgNpFY>, acesso em 2020-11-23. 16, 78, 80
- [19] Aguirre, Luis: *Filtro de kalman 1: Combinando medições.* <https://www.youtube.com/watch?v=urhaoECmCQk>, acesso em 2020-11-23. 16, 78
- [20] Ferdinando, Hany, Handry Khoswanto e Djoko Purwanto: *Embedded kalman filter for inertial measurement unit (IMU) on the ATMega8535.* ISBN 978-1-4673-1446-6. 17, 80
- [21] Madgwick, Sebastian O H: *An efficient orientation filter for inertial and inertial/magnetic sensor arrays.* 18, 20, 21, 22, 80, 82, 84
- [22] *What is an inertial measurement unit.* <https://www.vectornav.com/resources/what-is-an-imu>, acesso em 2021-04-19. 56
- [23] Woolfrey, Jon: *Rotation matrices 2d.* <https://www.youtube.com/watch?v=4srS0s1d9Yw>, acesso em 2020-11-23. 67
- [24] Ozyagcilar, Talat: *Implementing a tilt-compensated eCompass using accelerometer and magnetometer sensors.* 76

# Apêndice A

## Fundamentação teórica estendida

A fundamentação teórica estendida contém tudo que foi apresentado na fundamentação teórica normal, entretanto, com mais detalhes no desenvolvimento das equações, com apresentação de mais propriedades úteis, e algumas curiosidades.

### A.1 Origem dos dados

Os dados utilizados neste projeto são de aceleração, velocidade angular e campo magnético, mensurados por meio do módulo IMU (Inertial measurement unit) MPU9250 inserido no dispositivo da Caixa Preta. Que por sua vez, utilizando do Arduíno Mega 2560 realiza a leitura, armazenamento e transmissão dos dados para o computador via porta serial USB.

A taxa de amostragem do dado é configurável, mas para este projeto foi configurado a taxa de  $100Hz$ , pois é a maior taxa possível.

Juntamente com a aquisição e transmissão do dados brutos dos sensores, o dispositivo da Caixa Preta também é responsável por realizar calibrações, auto testes, armazenar e transmitir dados de ajustes necessários para o correto uso dos sensores.

#### A.1.1 Unidade de medida inercial - IMU

IMU (Inertial measurement unit) é um modulo eletrônico que agrupa dois ou mais sensores para capturar o movimento de um corpo, estes sensores podem ser acelerômetro, giroscópio, bússola, altímetro, barômetro e outros [4], como por exemplo o AltIMU-10, que estende as capacidades do MPU9250 com a adição de um sensor de altímetro. Por serem sensores que realizam medidas por meio de inercia (medindo a reação do corpo à forças externas), está sujeito a bastante ruído e erro de distorção (também chamado de bias ou offset), uma vez que, a medida é realizada relativo a si próprio e não a um

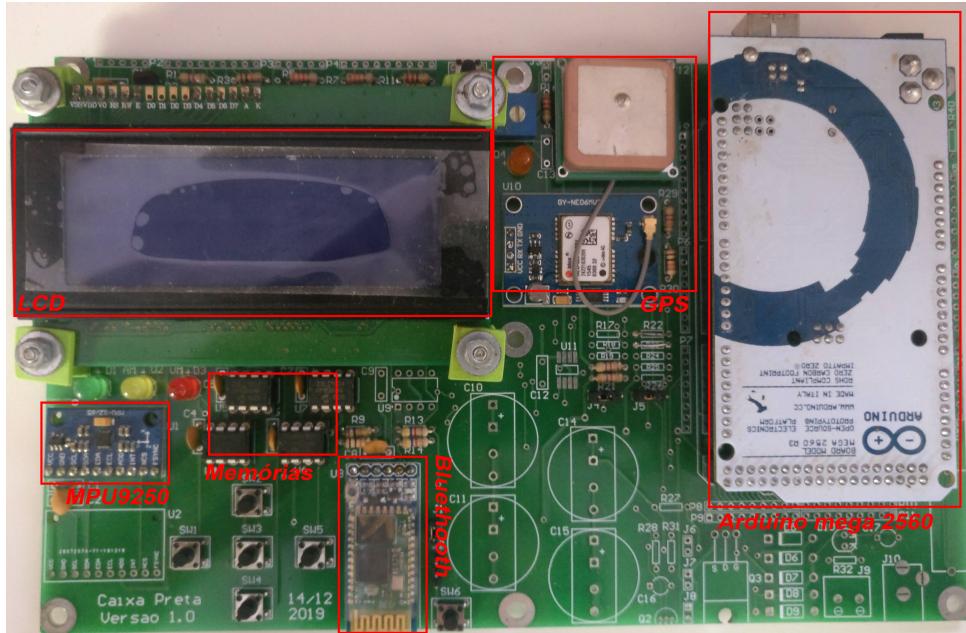


Figura A.1: Dispositivo do projeto Caixa Preta. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

referencial externo como o GPS [22]. Entretanto em um período curto de tempo possui grande acurácia. Por esse motivo os dados de um IMU são utilizados em conjunto para obtenção de um dado mais preciso no curto e longo prazo (técnica conhecida como fusão de dados).

O módulo MPU9250 é um IMU, que possui os sensores de acelerômetro e giroscópio, para medida de aceleração e velocidade angular nos 3 eixos. E também um sensor externo de magnetômetro de 3 eixos anexado ao mesmo chip.

Cada sensor neste IMU é um micro-sistema eletrônico, conhecido como MEMS (Micro-electricalmechanical Systems), que é uma miniaturização para escala micro de um sistema eletro-mecânico. Estes mesmos podem ser construídos de diversas formas para mensurar um mesmo dado, por exemplo aceleração. Devido a isso mais abaixo será detalhado um pouco mais o funcionamento de cada MEMS presente no MPU9250

### A.1.2 Acelerômetro

O MEMS do acelerômetro presente no MPU9250 é ilustrado na Figura A.2. Ele possui uma massa de prova presa por molas, que permitem que a massa se move induzida por reação a uma força imposta sobre um eixo. Preso a esta massa estão algumas placas que se aproximam e se afastam de placas fixas anexadas ao quadro do sensor, alterando assim as capacitâncias C1 e C2 que podem ser medidas. Sendo assim é possível medir a aceleração

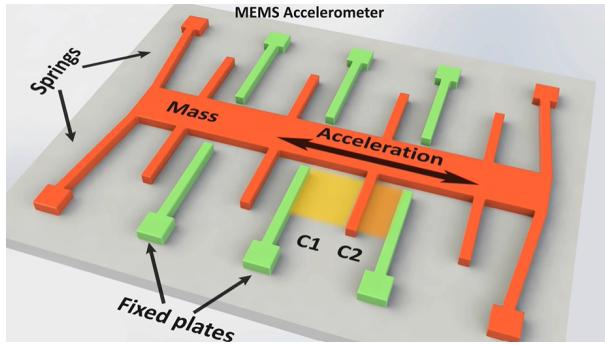


Figura A.2: Esquema de um MEMS do acelerômetro. (Fonte: [5]).

em um eixo, para os demais eixos somente é repetido o mecanismo, com uma massa de prova para cada eixo [5]. O sentido e direção dos eixos são conforme a Figura A.3.

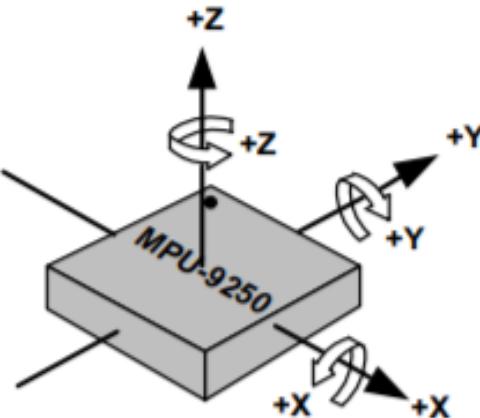


Figura A.3: Orientação do sensor giroscópio e acelerômetro (Fonte: [6]).

Cada sensor possui um sigma-delta ADC (Analog to Digital Converter) de 16bits próprio, modulando e entregando o sinal em escala relativa à gravidade, podendo ser configurado para os intervalos de  $\pm 2g$ ,  $\pm 4g$ ,  $\pm 8g$ , ou  $\pm 16g$  [6]. Para este projeto iremos utilizar o intervalo de  $\pm 2g$  por ser mais preciso e, a princípio nenhum movimento realizado manualmente irá extrapolar esse valor. Para uma colisão real é possível que até mesmo a maior escala seja extrapolada.

Estando o sensor em repouso sobre um plano, deverá ele medir  $+1g$  no eixo z, ou seja, deverá identificar somente o vetor gravitacional. Entretanto devido a ruídos e bias (ou offset) isso não ocorre, sendo necessário realizar uma rápida calibragem para remover o máximo de bias possível, obtendo assim um valor que pode ser subtraído dos valores lidos do sensor. Esta calibragem pode ser efetuada uma única vez após o módulo ser soldado no dispositivo.

Sendo assim para obter o valor da aceleração em  $m/s^2$  de uma leitura do sensor, basta converter os 16bits do ADC utilizando a escala configurada e subtrair o valor de offset calculado na calibração. Podemos fazer isso por meio da equação (A.1), onde  $A_x$  é a aceleração no eixo  $x$  em  $m/s^2$ ,  $a_x$  é o inteiro de 16bits em complemento de 2 retornado pelo ADC e  $off_{Ax}$  é o offset calculado para o eixo  $x$ . Na equação foi utilizado 2 como fator de escala, conforme intervalo configurado, e 9.8 como valor da gravidade em  $m/s^2$ .

$$A_x = \frac{a_x * 2 * 9,8}{32767} - off_{Ax} \quad (\text{A.1})$$

O mesmo pode ser feito para os demais eixos.

### A.1.3 Giroscópio

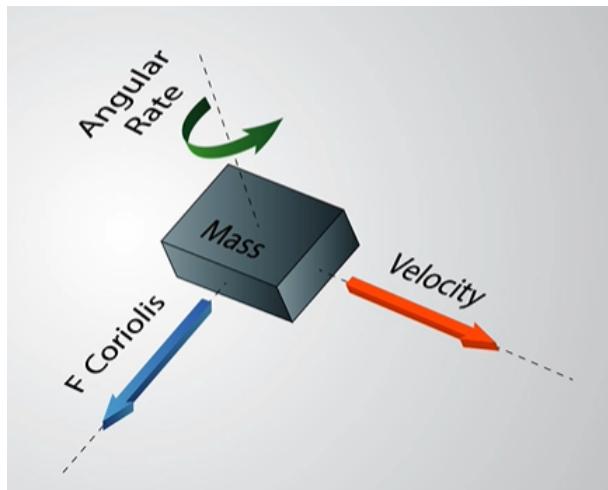


Figura A.4: Ilustração do efeito coriolis. (Fonte: [5]).

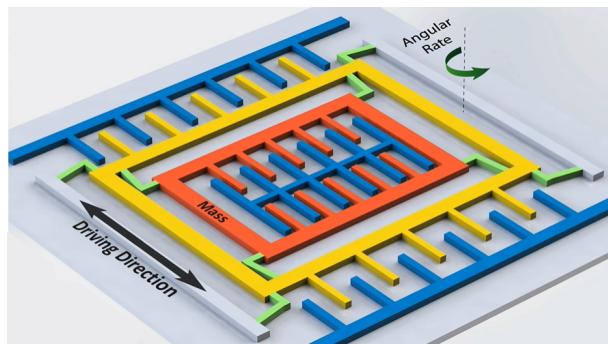


Figura A.5: Esquema do MEMs do giroscópio. (Fonte: [5]).

O MEMS do giroscópio é construído de modo a fazer uso do efeito de coriolis. Conforme ilustra a Figura A.4, o efeito é uma força que surge quando se efetua uma rotação em um corpo com massa em movimento. A força resultante é perpendicular ao plano formado pelo eixo de velocidade e rotação, e diretamente proporcional a velocidade do corpo, a sua massa e a taxa de rotação angular.

A micro estrutura do mecanismo é conforme a Figura A.5, onde o corpo de massa é posto em movimento constante, restando assim como variável a rotação angular. Que por sua vez, quando ocorre, gera uma força de coriolis deslocando o corpo perpendicularmente, sendo assim possível mensurar o deslocamento por meio da alteração das capacitâncias entre as placas fixas ao corpo (barras vermelhas na Figura A.5) e as placas fixas ao quadro do sensor (barras azuis mais ao cento na Figura A.5), semelhante ao realizado no mecanismo do acelerômetro [5].

Desta forma é possível mensurar a velocidade de rotação em um eixo, bastando replicar o mecanismo para os demais eixos. O sentido e direção dos eixos são conforme a Figura A.3.

Cada eixo possui seu próprio ADC de 16bits, assim como o acelerômetro. Entregando o dado em graus por segundo, sendo possível programar os intervalos  $\pm 250$ ,  $\pm 500$ ,  $\pm 1000$ , ou  $\pm 2000$  graus por segundo. Para este projeto iremos utilizar o intervalo de  $\pm 250$  graus por segundo por ser mais preciso e, a princípio nenhum movimento realizado manualmente irá extrapolar esse valor, talvez em uma colisão real extrapole, mas ainda carece de estudos. O sensor de giroscópio ainda conta com um filtro passa baixas configurável, assim como o acelerômetro também.

Estando o sensor em repouso, deverá medir 0 em todos os eixos, entretanto não é o que ocorre devido a ruídos e bias. Sendo necessário realizar uma rápida calibragem para remover o máximo de bias possível, obtendo assim um valor que pode ser subtraído dos valores lidos do sensor. Esta calibragem pode ser efetuada uma única vez após o módulo ser soldado no dispositivo.

Sendo assim para obter o valor em graus por segundo de uma leitura do sensor, basta converter os 16bits do ADC utilizando a escala configurada e subtraindo o valor de offset obtido na calibração. Podemos fazer isso por meio da equação (A.2), onde  $G_x$  é a taxa de rotação no eixo x em graus,  $g_x$  é o inteiro de 16bits em complemento de 2 retornado pelo ADC e  $\text{off}_{Gx}$  é o offset calculado para o eixo x. Na equação foi utilizado 250 graus por segundo como fator de escala, conforme intervalo configurado.

$$G_x = \frac{g_x * 250}{32767} - \text{off}_{Gx} \quad (\text{A.2})$$

O mesmo pode ser feito para os demais eixos.

#### A.1.4 Magnetômetro

O MEMS do magnetômetro presente no MPU9250 utiliza do efeito hall para mensurar a presença de campos eletromagnéticos. Conforme ilustrado na Figura A.6, o sistema consiste em uma chapa metálica retangular, com aplicação de uma tensão constante em extremidades opostas. Esta tensão gera uma corrente que se distribui por toda a chapa. Colocando este sistema sob efeito de um campo magnético esse fluxo se distorce, forçando os elétrons a continuarem seu fluxo deslocados para próximo de uma das extremidades perpendiculares, criando assim uma diferença de potencial entre essas extremidades que pode ser medida. Esta diferença de potencial é ditada pelo ângulo que o vetor da linha de fluxo do campo magnético faz com a chapa e sua intensidade, e o sinal é ditado por qual dos polos magnéticos está causando a distorção (distorcendo o fluxo para um ou outra extremidade) [5].

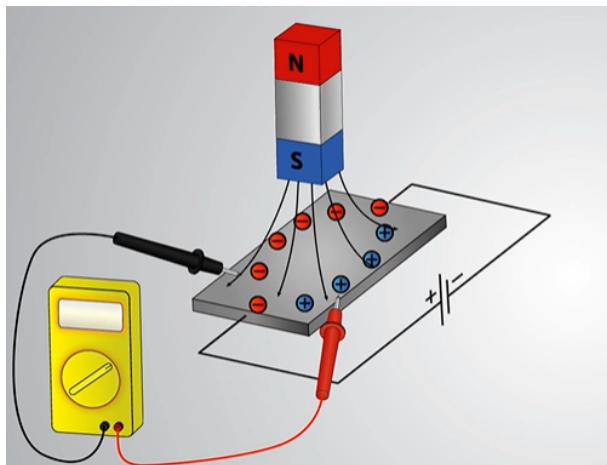


Figura A.6: Ilustração do efeito hall (Fonte: [5]).

Desta forma é possível mensurar o campo magnético que passa pelo sensor em um eixo, bastando replicar para os demais.

O módulo do magnetômetro no MPU9250 é um chip integrado, mas a parte do módulo principal, podemos dizer que ele é opcional. Sendo assim, fazer uso dele requer configurações adicionais [6], conforme apresentado por Paulo Teixeira (membro do projeto Caixa Preta), em seu projeto de graduação à defender (intitulado Caixa Preta para carros: "proposta para calibração, coleta e fusão de dados").

Outro aspecto importante deste módulo é que seus eixos são diferentes dos eixos dos demais sensores. Conforme ilustra a Figura A.7, podemos comparar com a orientação de eixos dos demais sensores (Figura A.3), e notar que o eixo X do magnetômetro corresponde ao eixo Y dos demais sensores, o eixo Y ao X e o eixo Z ao -Z.

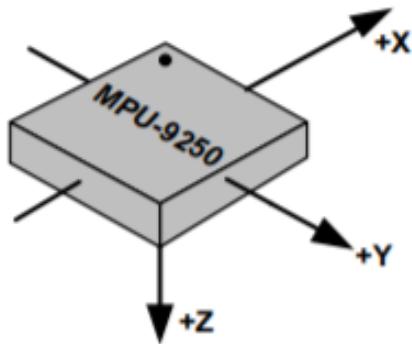


Figura A.7: Ilustração da orientação dos eixos do magnetômetro (Fonte: [6]).

Estando o sensor de 3 eixos em repouso e longe de materiais condutores ou que gerem campo magnético, deveria realizar sempre uma leitura constante (referente ao campo magnético da terra na região onde se encontra o corpo), entretanto esse valor flutua devido a erros de leitura (alterações naturais do campo da terra são muito pequenas e podem ser desconsideradas). Estando o sensor em rotação no eixo Z, onde Z aponta para o centro da terra, os demais eixos (X, Y) deveriam realizar leituras que formem um círculo perfeito, centrado na origem, conforme Figura A.8. O mesmo deveria ocorrer se trocado o eixo de rotação, isto significa que, se rotacionado o sensor em todos os eixos possíveis deveríamos obter uma esfera perfeita centrada na origem.

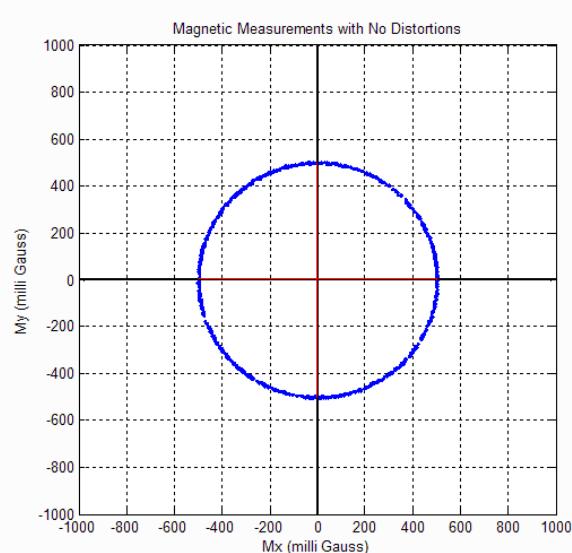


Figura A.8: Várias leituras dos eixos x e y do magnetômetro, sem ruído ou distorções, durante rotação no eixo Z (Fonte: [7]).

Entretanto, devido a erros classificados como hard-iron e soft-iron, a leitura supracitada não ocorre. *Hard-iron* são ocasionados por objetos que produzem campo magnético (por exemplo um alto falante), sendo eles presos ao quadro do equipamento causaram distorções permanentes. Essas distorções são aditivas, deslocando assim o centro de nossa esfera, ainda perfeita, da origem. Já o *soft-iron* são causados por objetos que destorcem o campo magnético presente, como por exemplo um pedaço de metal. As distorções causadas por esse tipo de perturbação são multiplicativas, distorcendo cada eixo com valores diferentes, tornando nossa esfera perfeita em uma elipsoide. Em geral, o que mais nos afasta da leitura correta são hard-irons [7].

Dito isso, assim como acelerômetro e giroscópio necessitam de algum tipo de calibração, o magnetômetro também necessita. Porém, como o modelo contém diversos tipos de erros, sua calibração requer mais atenção. Existem varia formas de se realizar tal calibração, esta calibração está fora do escopo deste trabalho. A seleção de métodos para este fim foi estudado por Paulo Teixeira (membro do projeto Caixa Preta), em seu projeto de graduação à defender (intitulado Caixa Preta para carros: "proposta para calibração, coleta e fusão de dados"), assim como a calibração do giroscópio e acelerômetro.

Sendo assim, junto aos dados advindos do dispositivo da Caixa Preta, estão dados para corrigir esses erros em cada um dos eixos. Porém como cada método utilizado para calibração modifica um pouco o modelo de correção, vale ressaltar que as equações apresentadas mais abaixo, que fazem uso dos dados de entrada para correção, são específicos para o modelo utilizado na calibração.

Neste ponto, é possível perceber o quão sensível este sensor é a ações externas. Uma tarefa simples como obter leituras corretas dentro de casa, pode ser um desafio, uma vez que existem diversos equipamentos que geram e distorcem campos magnéticos, como dispositivos eletrônicos e objetos metálicos. Isso acaba por levantar as seguintes questões, seria o magnetômetro útil para este projeto? Ele poderia atrapalhar a estimativa dos dados? Estando ele preso ao chassi do carro, esse objeto metálico causaria muita distorção no dado lido? Caso positivo, isso seria uma distorção permanente? Seria necessário calibrar ele preso ao carro? Caso positivo, como fazê-lo? Seria necessário calibrá-lo constantemente ou somente uma vez preso ao veículo?

Responder todas estas questões não são alvo deste trabalho, por isso, será considerado a sua correta calibração e funcionamento, com objetivo de apresentar a importância deste sensor e o que ele tem a agregar ao projeto.

O magnetômetro também conta com um ADC de 16 bits, retornando o dado em micro Tesla. A calibração é realizada em cima desses valores diretamente, antes de realizar qualquer conversão, logo precisamos primeiro ajustar o nosso dado, removendo hard e soft iron utilizando dados da calibração. Podemos fazer isso por meio da equação (A.3), onde

$h_{xa}$  é o dado no eixo x corrigido,  $h_x$  é o dado sem correção,  $Hx_{\text{Offset}}$  é o valor aditivo que representa a distorção causada por hard-iron e  $Hx_{\text{Scale}}$  é o valor multiplicativo, causado por soft-iron. Desta forma temos o dado corrigido para o eixo X, bastando repetir para os demais.

$$h_{xa} = (h_x - Hx_{\text{Offset}}) * Hx_{\text{Scale}} \quad (\text{A.3})$$

Com a correção realizada, é momento de alterarmos os eixos para que correspondam aos mesmos eixos dos demais sensores. Esta não é uma etapa obrigatória aqui, mas deve ser feita na parte de estimativa de inclinação, além de facilitar a compreensão. Para isso podemos utilizar das equações A.4 a A.6.

$$h_{xr} = h_{ya} \quad (\text{A.4})$$

$$h_{yr} = h_{xa} \quad (\text{A.5})$$

$$h_{zr} = -h_{za} \quad (\text{A.6})$$

Por fim, realizamos a conversão dos 16 bits do ADC para micro Tesla, e convertemos micro Tesla para mili Gaus utilizando a equação (A.7), onde  $H_x$  é o dado em mili Gaus,  $h_{xr}$  é o dado corrigido de *hard-iron* e *soft-iron* e com o eixo alterado. A fração realiza a conversão do ADC para micro Tesla, e a multiplicação externa converte para mili Gaus.

$$H_x = \frac{4912 * h_{xr}}{32767} * 10 \quad (\text{A.7})$$

O mesmo pode ser feito para os outros eixos.

A conversão para mili Gaus não é obrigatória aqui, é utilizada somente para melhor visualização nos gráficos. Para a estimativa de inclinação poderíamos utilizar somente o dado corrigido de erros, uma vez que utilizaremos das razões entre esses números, a escala poderia ser desconsiderada.

### A.1.5 Formato e fonte dos dados

Os dados utilizados neste trabalho são provados pelo dispositivo da Caixa Preta, e contém informações sobre dados de calibração de todos os sensores, dados da colisão (como aceleração no momento da colisão, data, hora e local), dados de leitura de cada um dos sensores, dados de GPS dentre outros.

Estes dados podem chegar por meio de um arquivo de texto, via bluethooth, ou via porta serial, porém o conjunto de dados possui sempre a mesma formatação, mesmo que sejam placeholders (como por exemplo os dados de colisão em modos de teste, onde não existem colisões). Essa formatação tem como objetivo padronizar como os dados salvos são transmitidos, e possibilitar uma rápida leitura por um humano. Não iremos entrar em detalhes do formato aqui, uma vez que eles podem ser encontrado em integra junto com o código do projeto no capítulo 3, somente iremos apresentar alguns dados presente neste formato que são necessários para este trabalho.

O formato padronizado consiste em seções de dados, cada uma possuindo seus delimitadores únicos de inicio e fim. O que estiver fora destes limitadores deve ser ignorado e a ordem das seções não deve ser considerada. O arquivo possui 4 seções, uma contendo dados do GPS, outra com dados de calibração realizadas ao ligar, outra com dados de calibração de fábrica. E por fim, a que utilizaremos neste trabalho, uma seção contendo dados e metadados do MPU (delimitado pelos marcadores de início  $\#[m$  e fim  $m]\#$ ). Alguns dos dados presente na seção que utilizaremos também estão presente nas demais, a seção do MPU somente delimita que neste espaço contém tudo que é necessário para análise utilizando o MPU.

A seção do MPU inicia com 9 linhas de metadados, e logo em seguida uma linha para cada amostra lida. O cabeçalho trás informações como quantidade de amostras lidas, dados de calibração para correção das leituras, escalas configuradas, frequência de amostragem, e outros. Já as linhas relativas a amostra em si, estão ordenadas em função do tempo e trazem informações de posição da memória do dado, e o trio XYZ de dados do acelerômetro, giroscópio e magnetômetro retornados pelos ADCs de 16bits em formato decimal sem sinal. A Figura A.9 apresenta um exemplo de arquivo neste formato.

## A.2 Filtros de entrada

Todos os sensores apresentados, presentes do MPU, estão sujeitos a leituras incorretas e ruídos, no geral espera-se que seja um ruído Gaussiano (de média 0). Com o objetivo de minimizar o ruído foi utilizado alguns filtros de entrada nos dados, além dos filtros que o próprio MPU aplica antes de entregar a leitura do dado.

### A.2.1 Média móvel

A média móvel pode ser utilizada como um filtro iterativo, com o objetivo de suavizar os ruídos nos dados. Ela é da forma exibida na equação (A.8), onde  $\bar{x}_i$  é a média da amostra  $i$ ,  $k$  é o tamanho da janela de média móvel e  $x_n$  é o enésimo dado lido.

```

#[m
041020
145330
6525
49878
233088
-1 -1 -1 -1 0 0 0.04 -1.05 0.2 -0.52
-1 -1 0 0 -70 228 10 1.020833 0.940048 1.045333
20046 21331 2 250 100 5 1 2 3 4 5

2414

Amostras
0 0 65278 65195 17440 13196 65467 65476 65527 200 65506
1 0 65232 65511 16925 5882 65447 10 65535 180 65513
2 0 65267 659 16548 5836 65480 65451 65522 184 65513
...
2412 0 1722 64513 16896 21 86 65390 65523 193 65522
2413 0 183 64950 17108 65515 65303 65532 65516 168 65531
m]#

```

Figura A.9: Exemplo de formato de dado de entrada. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

$$\bar{x}_i = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^k x_{i-n} \quad (\text{A.8})$$

Note que na equação (A.8) são utilizados dados anteriores para calcular o valor filtrado da amostra atual, sendo assim para as primeiras  $k$  amostras são inseridos zeros para substituir as amostras ausentes.

## A.3 Matriz de rotação

Uma matriz de rotação  $R$  é uma matriz de transformação linear que representa uma rotação em um ou mais eixos. Por convenção iremos utilizar que o ângulo positivo é a rotação anti-horária. Ela é um recurso matemático que possibilita rotacionar um ou mais vetores com uma simples multiplicação matricial. Por exemplo, se queremos rotacionar um vetor na posição  $a$  para a posição  $b$  a matriz de rotação nos permite fazer  $V_b = R * V_a$ . Basta construir essa matriz de modo que realize a rotação no ângulo e eixos desejados.

### A.3.1 Rotação 2D

Nosso objetivo é rotacionar dois vetores unitários, perpendiculares e alinhados aos eixos do plano, no sentido anti-horário. Assim representando a rotação do próprio plano. A

transformação que realiza essa rotação pode ser utilizada para rotacionar quaisquer vetores presentes neste plano.

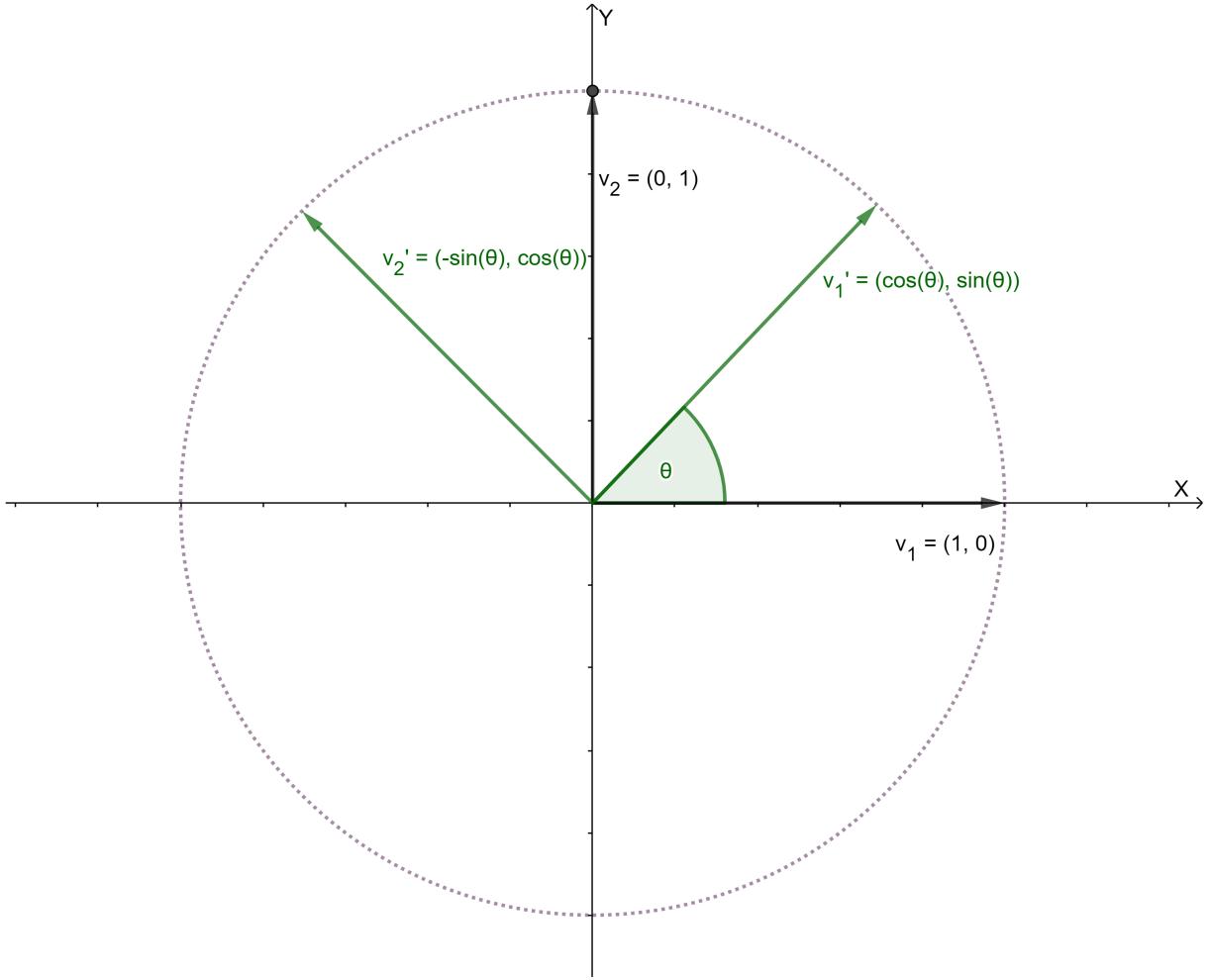


Figura A.10: Rotação do ângulo  $\theta$  de um plano 2D. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

Repare que na Figura A.10 após rotacionado, os dois vetores  $v_1$  e  $v_2$  não estão mais alinhados no eixos do plano 2D. Desta forma podemos descrevê-los em termos de suas componentes no eixo do plano, e em função do vetor original. Assim a transformada linear que rotaciona nossos dois vetores ( $v_1$  para  $v'_1$  e  $v_2$  para  $v'_2$ ) é dados pelas equações A.9 a A.10.

$$v'_1 = v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta \quad (\text{A.9})$$

$$v'_2 = -v_2 \sin \theta + v_1 \cos \theta \quad (\text{A.10})$$

Em formato matricial, temos que o vetor  $\vec{v}$  composto pelas componentes  $(x, y)$  após rotação será conforme equação (A.11).

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Esta matriz 2x2 que permite levar  $\vec{v}$  para  $\vec{v}'$  é chamada matriz de rotação.

Outro fato muito importante, é que podemos criar uma matriz de rotação por meio de rotações consecutivas. Isto é, ao rotacionar de uma posição A, para B utilizando a matriz  $R_{AB}$  e depois de B para C utilizando a matriz  $R_{BC}$  podemos obter a matriz  $R_{AC}$  pela simples multiplicação, conforme equação (A.12). A ordem é importante [23].

$$R_{AC} = R_{AB} * R_{BC} \quad (\text{A.12})$$

### A.3.2 Rotação 3D

A matriz de rotação 3D segue o mesmo princípio exibido na rotação 2D. Nossa objetivo é obter uma matriz que rotacione todos os vetores unitários presentes nos eixos do plano, entretanto, agora temos 3 eixos possíveis de rotação, no lugar de 1 único eixo como é o caso da rotação em 2D. Por isso vamos fazer uso da propriedade de rotações consecutivas, e ao invés de criar diretamente uma matriz a partir de 3 ângulos de rotação, vamos isolar cada rotação e criar uma matriz para rotacionar em torno de cada eixo.

É importante antes de mais nada definir a convenção dos eixos, assim como +X sempre aponta para direita e +Y aponta para cima em um plano 2D, no plano 3D faz-se valer a regra da mão direita, onde o indicador é o eixo X, o médio é o eixo Y, e o polegar o eixo Z. Assim, nosso objetivo é obter, para cada eixo, a transformação linear que rotaciona no sentido anti-horário.

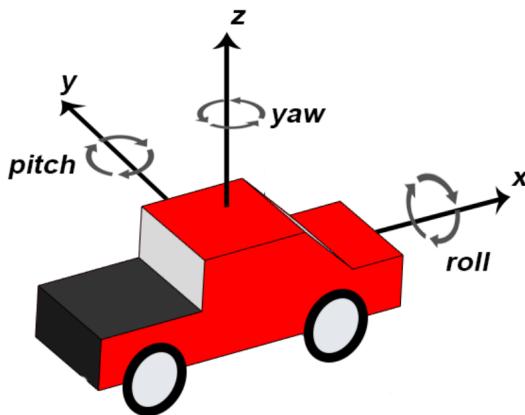


Figura A.11: Ilustração de plano 3D e rotações em cada um dos eixos (Fonte: [7]).

Na Figura A.11 podemos identificar o sentido dos eixos e a rotação em cada um deles. Iremos chamar o ângulo de rotação no eixo x de roll, representado pela letra  $\phi$ . No eixo Y de pitch, representado pela letra  $\theta$  e, no eixo z de yaw, representado pela letra  $\psi$

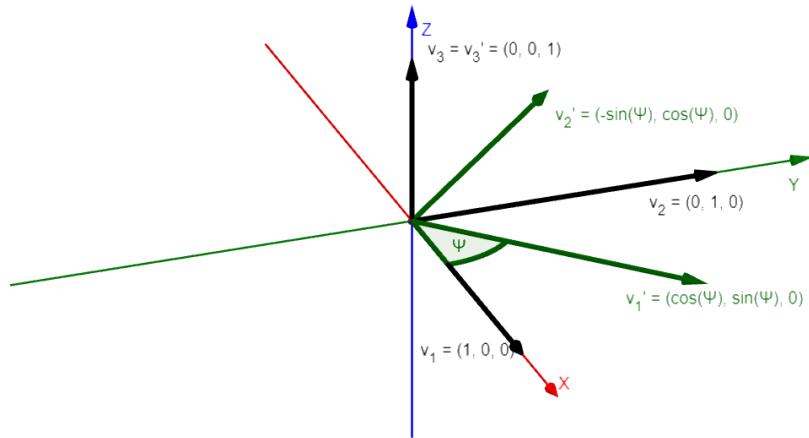


Figura A.12: Rotação anti-orária do plano 3D, no eixo z (Fonte: [7]).

Conforme a Figura A.12 temos que a transformada linear que rotaciona cada uma dos vetores ( $v_1$  para  $v'_1$ ,  $v_2$  para  $v'_2$  e  $v_3$  para  $v'_3$ ) é dado pelas equações A.13 a A.15.

$$v'_1 = v_1 \cos \psi + v_1 \sin \psi + 0 \quad (\text{A.13})$$

$$v'_2 = -v_2 \sin \psi + v_2 \sin \psi + 0 \quad (\text{A.14})$$

$$v'_3 = 0 + 0 + v_3 \quad (\text{A.15})$$

Colocando as componentes em formato matricial, temos que o vetor  $\vec{v}$  composto pelas componentes ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) após rotação será dado pela equação (A.16).

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Desta forma, temos uma matriz 3x3 que permite levar  $\vec{v}$  para  $\vec{v}'$  rotacionando no eixo Z. Repetindo a mesma ideia para os demais eixos teremos uma matriz de rotação  $R$  para cada eixo, conforme as equações A.17 a A.19.

$$R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

As propriedades descritas para rotação 2D ainda são válidas para a rotação 3D, sendo assim, para obtermos uma única matriz capaz de rotacionar nos 3 eixos, podemos realizar rotações seguidas, multiplicando as matrizes. Entretanto a multiplicação matricial não é comutativa, desta forma temos diversas combinações de multiplicações possíveis. Deveremos então escolher uma ordem que queremos rotacionar o objeto e sempre utilizar esta convenção.

Para este projeto iremos utilizar a ordem de rotação Z,Y,X. Na seção seguinte será explicado o porquê. Para nossa ordem escolhida, temos que a matriz resultante será conforme a equação (A.20) [10].

Para simplificar, iremos chamar cos de c, sin de s, e os ângulos  $\phi, \theta, \psi$  de x,y,z respectivamente.

$$R(\psi, \theta, \phi) = R_z(\psi) * R_y(\theta) * R_x(\phi) = \begin{pmatrix} c_y c_z & c_z s_x s_y - c_x s_z & c_x c_z s_y + s_x s_z \\ c_y s_z & c_x c_z + s_x s_y s_z & -c_z s_x + c_x s_y s_z \\ -s_y & c_y s_x & c_x c_y \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

A inversa da matriz de rotação, e sua transposta, são equivalentes a rotação contrária, descrita pela matriz, conforme equação (A.21). Onde  $R_{ba}$  é a matriz que descreve a rotação contrária a matriz  $R_{ab}$ .

$$R_{ba} = R_{ab}^{-1} = R_{ab}^t \quad (\text{A.21})$$

Como é possível ver na equação (A.20), nossa matriz é construída em função dos 3 ângulos de rotação. Logo, podemos também fazer o caminho inverso, tendo uma matriz de rotação, podemos dizer quais ângulos a formaram. Considere que a matriz abaixo foi construída pela ordem de rotação ZYX, a mesma descrita em (A.20):

$$\begin{pmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

Para esta ordem de rotação a extração dos ângulos da matriz pode ser expressa pelas equações A.23 a A.25 [10].

$$\phi = \text{atan2}(r_{21}, r_{22}) \quad (\text{A.23})$$

$$\theta = \arcsin -r_{20} \quad (\text{A.24})$$

$$\psi = \text{atan2}(r_{10}, r_{00}) \quad (\text{A.25})$$

Entretanto nem sempre isso é uma verdade, como será apresentando na próxima seção.

### A.3.3 Gimbal Lock

Gimbal lock é, matematicamente, a impossibilidade de extrair corretamente os ângulos que formaram uma matriz de rotação, devido a perda de um grau de liberdade [9]. Considere novamente a matriz de rotação ZYX descrita na equação (A.20).

Se  $\theta = +90^\circ$ ,  $c_y = 0$  e  $s_y = 1$ , teremos que nossa matriz será conforme equação (A.26).

$$\begin{pmatrix} 0 & c_z s_x - c_x s_z & c_x c_z + s_x s_z \\ 0 & c_x c_z + s_x s_z & -c_z s_x + c_x s_z \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Por meio desta nova matriz não é mais possível isolar os termos e obter valores únicos para  $\psi$  e  $\phi$ . Esta perda de grau de liberdade é chamada de gimbal lock, ela se apresenta também para o caso  $\theta = -90^\circ$ . O aparecimento do gimbal lock somente ocorre no termo do meio da rotação, por exemplo, na ordem ZYX, rotações no eixo Y ( $\theta$ ) estará passível de gimbal lock, já na ordem ZXY, seria no eixo X ( $\phi$ ).

O fato de não conseguirmos extrair os ângulos da matriz não significa que ela irá rotacionar errado. Porém, muitas das contas realizadas necessitam da extração de ângulos da matriz. Pensando nisto, foi selecionado a ordem de rotação ZYX. Desta forma como Y é o movimento mais difícil de ocorrer em acidentes, que seria o capotamento frontal, as chances de se observar um gimbal lock serão menores. Além disso o uso dessa ordem facilita a realização de algumas contas.

## A.4 Quaternions

Quaternios são a representação dos complexos com 3 dimensões imaginária. Geralmente são representados como na equação (A.27), onde  $q$  é um quaternion,  $q_0$  a parte real que o compõe, e  $ijk$  os eixos imaginários.

$$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \quad (\text{A.27})$$

Um vetor 3D pode ser representado por um quaternion, onde a componente  $q_0$  deve ser igual a 0 [11].

Assim como no plano complexo com 1 dimensão imaginária, onde uma das principais propriedades é  $i^2 = -1$ , nos quaternions não é diferente. As equações A.28 a A.31 apresentam essas principais propriedades.

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (\text{A.28})$$

$$ij = k, ji = -k \quad (\text{A.29})$$

$$xmk = i, kj = -i \quad (\text{A.30})$$

$$ki = j, ik = -j \quad (\text{A.31})$$

Quando desejamos realizar uma rotação de um vetor no plano 2D complexo, podemos fazer uso da fórmula de euler  $e^{i\theta}$  [11], conforme apresentado na equação (A.32), onde  $\vec{v}'$  é o vetor  $\vec{v}$  rotacionado de um ângulo  $\theta$  e  $v_x$  e  $v_y$  as componentes de  $\vec{v}$ .

$$\vec{v}' = e^{i\theta}\vec{v} = (\cos \theta + i \sin \theta)(v_x + iv_y) \quad (\text{A.32})$$

Podemos expandir a (A.32) para três dimensões [12], obtendo assim a equação (A.33), onde  $q_v$  é um quaternion que representa um vetor,  $\theta$  o ângulo que o vetor será rotacionado em torno do eixo  $n$ .  $n$  é um eixo de nossa escolha que pode ser descritos em termos dos três eixos do plano e possui módulo igual a 1. E  $q_{v1}$  e  $q_{v2}$  as componentes do vetor  $q_v$ , paralelo e perpendicular ao eixo  $n$ , respectivamente.

$$q_v = q_{v1} + e^{n\theta}q_{v2} \quad (\text{A.33})$$

Expandido a equação (A.33) com uso da fórmula de euler, temos a equação (A.34) [12].

$$e^{n\theta} = \cos \theta + \sin \theta (n_x i + n_y j + n_z k) \quad (\text{A.34})$$

Por meio da expansão da equação (A.34) é possível perceber a semelhança com a representação de quaternions. Outro modo de representar a rotação um pouco mais enxuta e a comumente utilizada é por meio da equação (A.35) [12], onde  $q$  é o quaternion que descreve a rotação,  $\bar{q}$  seu conjugado, e  $q_v$  o quaternion que representa o vetor que será rotacionado. Como resultado teremos  $q'_v$  um quaternion que representa o vetor rotacionado, sendo assim sem componente real ( $q_0 = 0$ ).

$$q'_v = e^{n\frac{\theta}{2}} \vec{v} e^{-n\frac{\theta}{2}} = q q_v \bar{q} \quad (\text{A.35})$$

Para obter a rotação contrária dada por um quaternion  $q$  basta utilizar seu conjugado, assim a equação (A.35) fica conforme em (A.36).

$$q_v = \bar{q} q'_v q \quad (\text{A.36})$$

Rotações utilizando quaternions requerem que o quaternion esteja normalizado. O produto entre quaternions não é comutativo  $q_a q_b \neq q_b q_a$ . E assim como na matriz de rotação, os quaternios podem ser compostos, isto é, dado a rotação de A para B  $q_{ab}$  e de B para C  $q_{bc}$ , podemos obter  $q_{ac} = q_{ab} q_{bc}$ .

## A.5 Estimativas de inclinação

Nesta seção serão apresentadas estimativas de inclinação, também chamadas de orientação ou AHRS (Attitude and heading reference system). No decorrer deste projeto iremos adotar os eixos seguindo a regra da mão direita, e chamar a inclinação em graus no eixo x de roll (simbolo  $\phi$ ), no eixo y de pitch ( $\theta$ ) e no eixo z de yaw ( $\psi$ ), sendo elas positivas no sentido anti-horário, conforme ilustrado na Figura A.13. Os sensores devem se alinhar a estes eixos. O giroscópio e acelerômetro já possuem essa orientação, conforme ilustra a Figura A.3, já o magnetômetro conforme Figura A.7 deve ter seus eixos alterados, seguindo as equações equações A.4 a A.6.

Com base na Figura A.13 iremos definir 3 tipos de eixos. Os eixos fixos no quadro do veículo, isto é, que rotacionam junto com ele. Rotações nestes eixos são chamados de relativos. Os eixos da terra, que seguem a mesma orientação da Figura A.13, onde x aponta para o norte magnético, y para o oeste e z para cima, entretanto não rotacionam com o veículo. Rotações nestes eixos são chamados de absolutos, pois possuem um referencial externo. E os eixos fixos na inclinação inicial do veículo, eles não rotacionam com o veículo. Rotações nesses eixos também são chamadas de absolutos, mas podem ser

diferentes dos eixos da terra a depender da inclinação inicial do veículo. São absolutos pois possuem um referencial externo a menos de uma constante (a inclinação inicial).

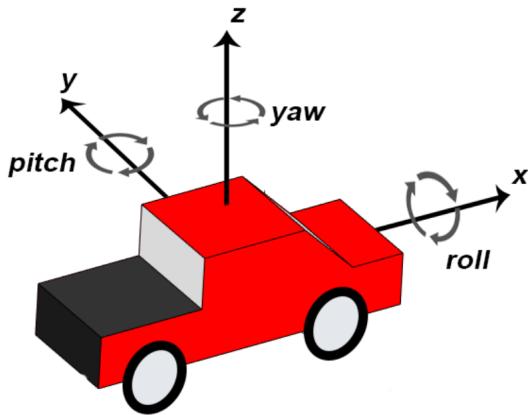


Figura A.13: Ilustração de eixos do carro e rotação. Fonte: José Luiz Nogueira, 2021.

Existem diversas formas de se estimar a inclinação de um corpo, neste trabalho iremos nos atentar a algmas destas formas, que utilizam como entrada os mesmos dados que o MPU9250 fornece, aceleração, giro e campo magnético.

### A.5.1 Usando velocidade de rotação

A forma mais simples e lógica de se obter uma estimativa de inclinação é por meio da integral numérica dos dados do giroscópio. Existem diversos meios de se realizar uma integral discreta. Algumas dessas formas são a integral pela regra dos retângulos, que pode ser dada no ponto avançado, atrasado ou médio, integral trapezoidal, integral de simpson dentre outras, e cada uma leva a uma estimativa diferente.

Para este projeto foi selecionado a integral trapezoidal, pois oferece melhor aproximação que o método dos quadrados, e necessita somente de 1 intervalo de dados. Enquanto o de simpson requer 2, dificultando realizar a integral amostra à amostra. Assim a estimativa de inclinação da uma amostra  $i$ , por meio da integral trapezoidal pode ser representado pela equação (A.37), onde  $rt(i)$  é a inclinação (*tilt*) do corpo na amostra  $i$ ,  $\Delta t$  é o período da amostragem,  $G(i)$  é o giro por segundo (já corrigido com dados de calibração) e  $G(i - 1)$  o giro por segundo da amostra anterior.

$$rt(i) = rt(i - 1) + \frac{\Delta t * (G(i) + G(i - 1))}{2} \quad (\text{A.37})$$

A este método demos o nome de giro relativo (*relative tilt*), pois ele considera os eixos do carro e não um eixo global.

Derivado deste método surge um segundo, onde a cada interação obtém-se a diferença entre os ângulos estimados  $rt(i) - rt(i - 1)$  e gera-se uma matriz de rotação de ordem ZYX para esta diferença. Podemos interpretar essa matriz como a rotação que irá levar o corpo da amostra  $i - 1$  para a amostra  $i$ . Assim podemos multiplicar ela pela matriz gerada na iteração anterior, obtendo uma matriz que leva o corpo da posição inicial para a posição em  $i$ , e por fim extraíndo os ângulos de euler desta nova matriz. A este método demos o nome de giro absoluto (absolute tilt), uma vez que cada inclinação obtida diz como o corpo está em relação aos eixos iniciais.

Como podemos observar este método depende de amostras anteriores, sendo assim, na ausência de mais dados, considera-se que o objeto inicia sem nenhuma inclinação. Isso implica que se a aquisição de dados inicia quando o corpo já possui alguma inclinação ele não irá corresponder a inclinação do objeto com relação a um referencial externo, como a terra.

### A.5.2 Usando aceleração

Outra estimativa de inclinação possível é utilizando dados de aceleração. Como a gravidade estará sempre presente (no contexto de aplicação da Caixa Preta), e sempre direcionada ao centro da terra, podemos utilizar essa informação para dizer se o corpo se inclinou.

Supondo que o corpo não tem aceleração linear, somente teremos a presença da gravidade. Logo, a leitura do acelerômetro deverá ser igual ao vetor gravitacional rotacionado por alguma matriz de rotação  $R$ , como ilustrado pela equação (A.38).

$$A = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = Rg = R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.38})$$

Esta matriz de rotação pode ser de nossa escolha, aqui utilizaremos a matriz na ordem ZYX. Entretanto ela não deve rotacionar o vetor no mesmo sentido de inclinação do corpo, e sim no sentido de inclinação contrário [13]. Isto porque os eixos que são apresentados na equação acima não são os eixos da terra, e sim os eixos do veículo, logo o vetor gravidade aponta para o  $+z$  do carro, que está rotacionado, assim devemos desrotacionar-lo para obter o que seria a leitura do acelerômetro, conforme equações A.39 a A.40.

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = R_{zyx}^{-1} * g = \begin{pmatrix} c_y c_z & c_y s_z & -s_y \\ c_z s_x s_y - c_x s_z & c_x c_z + s_x s_y s_z & c_y s_x \\ c_x c_z s_y + s_x s_z & -c_z s_x + c_x s_y s_z & c_x c_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.39})$$

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_y \\ c_y s_x \\ c_x c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (\text{A.40})$$

Por meio da equação (A.40), podemos extrair os ângulos de Euler, conforme equações A.41 a A.42.

$$\theta = \arcsin(-A_x) \quad (\text{A.41})$$

$$\phi = \text{atan2}(A_y, A_z) \quad (\text{A.42})$$

Como o corpo não está livre de aceleração linear, conforme suposto, é interessante normalizar a entrada antes de realizar os cálculos. A aceleração linear continuará interferindo na estimativa, porém isso garante que as equações apresentadas mantenham as equivalências.

Observe que é utilizado na equação (A.41) o *arcsin* para extração do ângulo, e na equação (A.42) é utilizado *atan2*, isso é feito para limitar o intervalo dos ângulos, uma vez que pode haver representações não únicas [13]. Sendo assim  $\theta = [-90^\circ, 90^\circ]$  e  $\phi = [-180^\circ, 180^\circ]$ . Além disso, o uso de *atan2* no lugar de arco tangente permite que a própria função lide com o caso onde ambos são 0.

Note que não conseguimos obter o ângulo  $\psi$ , dado pela rotação no eixo Z. Isto ocorre porque a rotação no eixo Z não altera o valor do vetor da gravidade lido, ele continuará a ser +1g. Se alterarmos essa ordem de rotação de ZYX para ZXY, continuaremos a ter somente  $\theta$  e  $\phi$  pelo mesmo motivo. Se alterarmos essa ordem de rotação para qualquer outra que faz uso dos três eixos, teremos uma equação que depende dos 3 ângulos, porém não é possível encontrar uma solução única para eles [13].

Por meio deste método conseguimos obter os ângulos de euler em relação a um plano global, o plano de eixos da terra. Isto pode ser interessante para determinar a inclinação inicial do corpo e suprir a necessidade desta informação na estimativa utilizando o giroscópio.

### A.5.3 Usando magnetômetro

Como podemos ver na seção anterior, o uso do acelerômetro consegue entregar 2 dos três ângulos de euler. Para determinar a rotação no eixo Z, podemos fazer adição de um magnetômetro.

O campo magnético da terra possui duas componentes, uma vertical e outra horizontal, isso se deve ao efeito de inclinação. A horizontal sempre aponta para o norte magnético, e a vertical para o centro da terra [14].

Estando o corpo sem inclinações e os eixos do sensor já corrigidos para se alinhar com os eixos do carro, conforme Figura A.13, a leitura do magnetômetro deve ser  $-B \sin \delta$  no eixo z, 0 no eixo y, e  $B \cos \delta$  no eixo x. Onde B é a intensidade do campo magnético da terra, e  $\delta$  a inclinação do campo no ponto da terra que se encontra o objeto.

Supondo que não existe nenhum material que possa criar ou distorcer o campo magnético próximo ao corpo, e o corpo realize rotações somente em torno de seu eixo Z, podemos dizer que a leitura do magnetômetro será igual ao vetor do campo magnético da terra rotacionado de uma matriz, conforme ilustra a equação (A.43).

$$H = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} B \cos \delta \\ 0 \\ -B \sin \delta \end{pmatrix} \quad (\text{A.43})$$

Esta matriz deve ser a matriz de rotação em torno do eixo Z. Entretanto, assim como no modelo do acelerômetro ela não deve rotacionar o vetor no mesmo sentido de inclinação do corpo, e sim no sentido de inclinação contrário [24]. Isto porque os eixos que são apresentados na equação acima não são os eixos da terra, e sim os eixos do veículo, logo a componente horizontal que deveria apontar para o norte magnético, está alinhado com o eixo x do carro, que está rotacionado, assim devemos desrotacionar-lo para obter o que seria a leitura do magnetômetro, conforme equações A.44 a A.45.

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = R_z^{-1} \begin{pmatrix} B \cos \delta \\ 0 \\ -B \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \cos \delta \\ 0 \\ -B \sin \delta \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi B \cos \delta \\ -\sin \psi B \cos \delta \\ -B \sin \delta \end{pmatrix} \quad (\text{A.45})$$

Por meio da equação (A.45), podemos extrair o ângulo de Euler, conforme equação (A.46).

$$\psi = \text{atan2}(-H_y, H_x) \quad (\text{A.46})$$

Se o corpo realizar outras rotações que não exclusivamente em torno do eixo Z, devemos primeiro compensar este movimento, desfazendo-o. Entretanto é necessário conhecer previamente os movimentos de pitch e roll, para isso se faz uso do acelerômetro. Assim

temos que a leitura do magnetômetro rotacionada de pitch e roll, é igual ao vetor do campo magnético desrotacionado no eixo Z. Note que devemos rotacionar a leitura em pitch e roll, no sentido de inclinação do corpo e não o contrário. Isso porque a leitura é dada por meio de um vetor que não seguiu o movimento do corpo. A ideia é fazer com que essa leitura siga o movimento do corpo compensando o movimento do veículo. Como utilizamos a ordem ZYX nossa equação será conforme ilustrado em (A.47), onde  $H_x$ ,  $H_y$  e  $H_z$  são as leituras do magnetômetro, já corrigidas com dados da calibração e com os eixos trocados para alinhar com o do carro, e  $H'_x$ ,  $H'_y$  e  $H'_z$  representam a leitura do magnetômetro com o plano corrigido de pitch e roll.

$$R_y R_x \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = R_z^{-1} \begin{pmatrix} B \cos \delta \\ 0 \\ -B \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H'_x \\ H'_y \\ H'_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.47})$$

Resolvendo o lado esquerdo da equação (A.47) obtemos (A.48).

$$\begin{pmatrix} H_x \cos \theta + H_y \sin \theta \sin \phi + H_z \sin \theta \cos \phi \\ H_y \cos \phi - H_z \sin \phi \\ -H_x \sin \theta + H_y \cos \theta \sin \phi + H_z \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H'_x \\ H'_y \\ H'_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.48})$$

Por meio da equação (A.48), e sabendo que  $H'_x$ ,  $H'_y$  e  $H'_z$  são equivalentes a dados que possuem rotação somente no eixo Z, podemos fazer uso da equação (A.46), para obter o ângulo de Euler, conforme equações A.49 a A.51.

$$\psi = \text{atan2}(-H'_y, H'_x) \quad (\text{A.49})$$

$$H'_x = H_x \cos \theta + H_y \sin \theta \sin \phi + H_z \sin \theta \cos \phi \quad (\text{A.50})$$

$$H'_y = H_y \cos \phi - H_z \sin \phi \quad (\text{A.51})$$

Note que na (A.49), assim como na estimativa com acelerômetro é utilizado *atan2* para limitar o intervalo em  $[-180^\circ, 180^\circ]$ .

## A.6 Fusão de dados

Conforme abordado na seção de estimativa de inclinação, todos os métodos utilizados possuem algum tipo de problema, mas ao mesmo tempo alguma vantagem sobre o outro. O uso do giroscópio é bastante preciso no curto prazo, mas não no longo prazo, pois possui drift. O uso do acelerômetro entrega inclinação relativa a terra, e não possui drift, mas

possui alto ruído, não consegue estimar rotação em Z e estima incorretamente quando o corpo possui aceleração linear. E o uso do magnetômetro entrega inclinação relativa a terra, não possui drift, mas é sensível a ações externas e possui alto ruído.

O objetivo da fusão de dados, é juntar o melhor de ambos e tentar minimizar os pontos negativos. Em geral todos os métodos iram tentar utilizar o giroscópio para estimativas no curto prazo, e a junção de acelerômetro e magnetômetro para estimativa a longo prazo, corrigindo assim o drift.

### A.6.1 Filtro complementar

O filtro complementar é o mais simples desses filtros, ele consiste em filtrar a estimativa do giroscópio com uma passa altas, para obter os termos de curto prazo, e filtrar o magnetômetro e acelerômetro com um passa baixas, para obter os termos de longo prazo, ao final, juntando as estimativas por meio da soma [15].

É importante que os filtros sejam complementares pois as lacunas deixadas pelo passa baixas serão preenchidas pelo passa altas. Em amostras discretas isso se traduz em uma média ponderada de dois ângulos. Onde o primeiro ângulo é a estimativa anterior do filtro, adicionado da variação da estimativa utilizando o giroscópio. E o segundo ângulo, aqueles estimados utilizando o magnetômetro e acelerômetro [17], conforme equação (A.52), onde  $\theta'_k$  é a estimativa do filtro complementar para a amostra  $k$ ,  $\theta'_{k-1}$  a estimativa anterior,  $\mu$  é o fator de ponderação,  $\Delta\theta_{Gk}$  é a variação de inclinação estimada utilizando o giroscópio, e  $\theta_{AHk}$  a estimativa utilizando acelerômetro e magnetômetro para a amostra k.

$$\theta'_k = (1 - \mu)(\theta'_{k-1} + \Delta\theta_{Gk}) + \mu\theta_{AHk} \quad (\text{A.52})$$

### A.6.2 Filtro de Kalman

O filtro de kalman é um filtro preditivo e interativo para otimização, pode ser utilizado para juntar medidas sujeitas a ruídos, otimizando o resultado [18]. Ele é bastante flexível, e pode ser utilizado de diversas formas, até mesmo para a aplicação deste trabalho (onde deseja-se fundir dados do IMU para obter uma melhor estimativa), existem mais de uma forma de utilizá-lo. Por tanto iremos iniciar com uma apresentação geral de seu funcionamento, e depois apresentar como foi utilizado.

Normalmente o filtro é dividido em dois estados, um de predição e outro de atualização [18, 19]. Cada um deles possui suas entradas e saídas. Na etapa de predição, com base em uma medida de entrada  $u_k$  (e.x.: aceleração) e na predição anterior  $x_{k-1}$ , obtemos uma estimativa de um dado que não temos  $x_k^-$  (e.x.: posição), conforme equação (A.53),

onde  $A$  e  $B$  são matrizes que modelam a dinâmica do problema (e.x.: modelo para o movimento linear, obtendo a posição por meio da aceleração).

$$x_k^- = Ax_{k-1} + Bu_k \quad (\text{A.53})$$

Ainda na etapa de predição, obtemos também uma matriz de covariância da estimativa realizada  $P_k^-$ , com base na covariância do dado de entrada  $Q$  e na covariância da estimativa anterior  $P_{k-1}$ , conforme equação (A.54).

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad (\text{A.54})$$

Note que na etapa de predição todas as saídas são acompanhadas de um subscrito  $-$ , eles também são chamados de a priori. Com a estimativa da posição realizada, podemos seguir para o estado de atualização, onde com outros dados que podemos medir é atualizado o dado estimado. Para fins de exemplo imagine que consigamos medir a velocidade  $y_k$ . Assim nossa estimativa atualizada  $x_k$  será dado pela equação (A.55), onde  $x_k^-$  é a estimativa realizada na etapa de predição (chamado de a priori),  $x_k$  a estimativa atualizada (chamado de a posteriori),  $y_k$  a medida utilizada para a correção (e.x.: velocidade),  $K_k$  um fator de ponderação que permitirá a correção da estimativa, e  $C$  a modelagem que leva nossa estimativa (e.x.: posição) para o dado medido (e.x.: velocidade).

$$x_k = x_k^- + K_k(y_k - Cx_k^-) \quad (\text{A.55})$$

O subscrito em  $K_k$  na equação (A.55) indica que ele é interativo. O filtro o ajusta a cada interação visando uma rápida convergência, e favorecendo as entradas que possuem menos covariância (e.x.: Se aceleração possui menor covariância, a estimativa utilizando ela se sobre-sai ao dado de entrada da velocidade).  $K_k$  é definido a cada etapa de atualização, pela equação (A.56), onde  $R$  é a covariância do erro na etapa de atualização  $y_k$  (e.x.: velocidade).

$$K_k = \frac{P_k^- C^T}{C P_k^- C^T + R} \quad (\text{A.56})$$

Ainda na etapa de atualização é também atualizado a covariância da estimativa, conforme equação (A.57), onde  $I$  é uma matriz identidade.

$$P_k = (I - K_k C) P_k^- \quad (\text{A.57})$$

As duas etapas são distintas (predição e atualização), pois não é necessário realizar uma atualização a cada predição. Por exemplo, se desejamos obter a posição e temos como instrumentos um acelerômetro com alta taxa de amostragem e um GPS com baixa

taxa de amostragem, podemos realizar predições seguidas somente com a aceleração, e quando surgir um dado do GPS atualizar a predição da amostra atual [18]. Também é possível ter mais de um dado de entrada em qualquer uma das etapas, bastando alterar as parâmetros.

Dado o funcionamento do filtro de kalman, temos de definir os parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  para modelar o problema. E imputar as covariâncias de entrada  $Q$  e  $R$  que levem a uma rápida convergência e permita uma boa ponderação na etapa de atualização.

Para este projeto tem-se dois estados, assim a entrada na etapa de predição  $u_k$  será composto pela velocidade angular e bias, como entrada para correção  $y_k$  a inclinação estimada utilizando o acelerômetro e magnetômetro, e como saída a inclinação e bias  $x_k$  [20]. Sendo assim temos os parâmetros A, B e C conforme as equações A.58 a A.60, onde  $\Delta t$  é o período de amostragem.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.58})$$

$$B = \begin{pmatrix} \Delta t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.59})$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.60})$$

As covariâncias serão determinadas na seção de análise de dados. Com os parâmetros acima temos 2 modelos, o primeiro é uma integral da velocidade angular corrigido de bias, e o segundo o bias, conforme ilustra a (A.61), onde  $a_k$  é a estimativa de inclinação da amostra  $k$  e  $b_k$  o bias. Note que o bias não é atualizado dinamicamente, somente é inserido no modelo para corrigir diretamente o dado da estimativa.

$$\bar{x}_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k-1} - b_k \Delta t + u_k \Delta t \\ b_{k-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.61})$$

### A.6.3 Filtro de Madgwick

O filtro de madgwick foi proposto por Sebastian Madgwick em 2010 [21], e tem como foco implementar um método que seja computacionalmente barato e preciso. Que possa ser utilizado de forma embarcada em dados obtidos em tempo real. Para isso, o filtro faz uso não de matrizes de rotação e sim de operações matemáticas com quatérnions.

Assim como o filtro de kalman ele é um filtro iterativo e passa pelas mesmas 3 etapas que todos os filtros apresentados, sanitização do dado, estimação e fusão. Ele possui dois modos de operação, um que utiliza de aceleração e giroscópio somente, e outro que utiliza

de ambos adicionado de um magnetômetro, dando mais precisão ao dado de yaw. Neste projeto foi feito uso do modo que lida com os 3 sensores, pois precisamos de precisão em todos os 3 ângulos de Euler.

O filtro tem como entrada dados dos sensores já devidamente convertidos e tratados e tem como saída um quatérnion que representa a inclinação do corpo para aquela amostra.

Para os cálculos abaixo será adotado a notação  ${}_E^S \mathbf{q}$ , onde  $q$  é um quatérnion que leva do quadro  $E$  (eixos da terra) para o quadro  $S$  (eixos do sensor), e  $\hat{\mathbf{a}}$  (a chapéu) para um quatérnion normalizado.

O algoritmo do filtro inicia obtendo o quatérnio derivativo, rotacionando uma amostra lida do giroscópio para os quadros da terra, utilizando a equação (A.62), onde  ${}_E^S \hat{\mathbf{q}}_{\text{est},t-1}$  é o quatérnio da estimativa anterior do filtro, e  ${}^S \omega_t$  é o quatérnio da amostra do giroscópio.

$${}_E^S \dot{\mathbf{q}}_{\omega,t} = \frac{1}{2} {}_E^S \hat{\mathbf{q}}_{\text{est},t-1} \times {}^S \omega_t \quad (\text{A.62})$$

Em seguida se obtém a estimativa de inclinação que leva de  $t - 1$  para  $t$  deslocado para ter como referencial o eixo da terra, por meio da integral numérica conforme equação (A.63), baseada em uma estimativa inicial  ${}_E^S \hat{\mathbf{q}}_{\text{est},0}$ , em que  $\Delta t$  é o período da taxa de amostragem.

$${}_E^S \mathbf{q}_{\omega,t} = {}_E^S \hat{\mathbf{q}}_{\text{est},t-1} + {}_E^S \dot{\mathbf{q}}_{\omega,t} \Delta t \quad (\text{A.63})$$

Na próxima parte do algoritmo é obtida a contribuição do acelerômetro e do magnetômetro. Para isso se faz uso, assim como nos demais filtros, dos vetores em relação a terra que são conhecidos, gravidade e campo magnético.

A contribuição de cada sensor pode ser obtida individualmente encontrando  ${}_E^S \hat{\mathbf{q}}$  que minimize a função  $f$  descrita na equação (A.64). A função  $f$  é dada na equação (A.65), onde  ${}_E^S \hat{\mathbf{q}}$  é o quatérnio que descreve a rotação do corpo,  ${}^E \hat{\mathbf{d}}$  o vetor conhecido (gravidade ou campo magnético), e a operação de rotação realizada é de tal forma que,  ${}^E \hat{\mathbf{d}}$  corresponda a amostra lida pelo sensor  ${}^S \hat{\mathbf{s}}$ .

$$\min_{\forall {}_E^S \hat{\mathbf{q}} \in R^4} f({}_E^S \hat{\mathbf{q}}, {}^E \hat{\mathbf{d}}, {}^S \hat{\mathbf{s}}) \quad (\text{A.64})$$

$$f({}_E^S \hat{\mathbf{q}}, {}^E \hat{\mathbf{d}}, {}^S \hat{\mathbf{s}}) = {}_E^S \hat{\mathbf{q}}^* \times {}^E \hat{\mathbf{d}} \times {}_E^S \hat{\mathbf{q}} - {}^S \hat{\mathbf{s}} \quad (\text{A.65})$$

Utilizando  ${}^S \hat{\mathbf{s}}$  na equação (A.65) como dados do acelerômetro, e  ${}^E \hat{\mathbf{d}}$  como o quatérnio que representa o vetor da gravidade nos eixos da terra  $[0, 0, 0, 1]$ , ao resolver o mínimo obteremos a parcela de contribuição do acelerômetro  ${}_E^S \hat{\mathbf{q}}$ . Isto é, um quatérnio que descreve *pitch* e *roll*.

Utilizando  ${}^S\hat{\mathbf{s}}$  na equação (A.65) como dados do magnetômetro, e  ${}^E\hat{\mathbf{d}}$  como o quatérnio que representa o vetor do campo magnético nos eixos da terra  $[0, B_x, 0, B_z]$ , ao resolver o mínimo obteremos a parcela de contribuição do magnetômetro  ${}^S_E\hat{\mathbf{q}}$ . Isto é, um quatérnio que descreve somente *yaw*.

Entretanto as contribuições individuais levam a soluções não únicas para  ${}^S_E\hat{\mathbf{q}}$ , uma vez que um quatérnio contempla todos os 3 ângulos de Euler, e as soluções individuais não entregam os 3. Assim a função  $f$ , pode ser definida como na equação (A.66) para contemplar uma solução de  ${}^S_E\hat{\mathbf{q}}$  única que resolva tanto o caso do magnetômetro quanto do acelerômetro.

$$f_{g,b}({}^S_E\hat{\mathbf{q}}, {}^S\hat{\mathbf{a}}_t, {}^E\hat{\mathbf{b}}, {}^S\hat{\mathbf{m}}_t) = \begin{pmatrix} f_g({}^S_E\hat{\mathbf{q}}, {}^S\hat{\mathbf{a}}_t, ) \\ f_b({}^S_E\hat{\mathbf{q}}, {}^E\hat{\mathbf{b}}, {}^S\hat{\mathbf{m}}_t) \end{pmatrix} \quad (\text{A.66})$$

Note que na equação (A.66) não temos o equivalente a  ${}^E\hat{\mathbf{b}}$  que seria o vetor da gravidade, pois ele é um vetor numérico bem definido diferente do equivalente para o magnetômetro  ${}^E\hat{\mathbf{b}}$ , que possui as variáveis não definidas  $B_x$  e  $B_z$ . Estas serão definidas por meio do módulo de compensação de distorção tratado mais à frente.

Para resolver a equação (A.64), encontrando o mínimo, o filtro de Madgwick utiliza o algoritmo de descida do gradiente. Entretanto esse algoritmo utilizaria de diversas interações para obter um valor ótimo de  ${}^S_E\hat{\mathbf{q}}$  que minimize a equação, aumentando consideravelmente a carga computacional.

O uso da descida do gradiente para estimativa de inclinação não precisa de tantas interações para cada amostra, basta computar uma iteração por amostra, pois, a taxa de rotação angular é baixa o suficiente para que o algoritmo converja. Isto é, o veículo ficará mais ou menos na mesma inclinação por tempo o suficiente para convergir a estimativa, sendo assim é o mesmo que computar várias iterações do algoritmo de descida do gradiente por amostra. Dito isso, o algoritmo se reduz ao apresentado pelas equações A.67 a A.68, baseada em uma estimativa inicial  ${}^S_E\hat{\mathbf{q}}_{\text{est},0}$  e em um passo de tamanho  $\mu$ .

$$\nabla f_{g,b}({}^S_E\hat{\mathbf{q}}, {}^S\hat{\mathbf{a}}_t, {}^E\hat{\mathbf{b}}, {}^S\hat{\mathbf{m}}_t) = J_{g,b}^T({}^S_E\hat{\mathbf{q}}_{\text{est},t-1}, {}^E\hat{\mathbf{b}}) f_{g,b}({}^S_E\hat{\mathbf{q}}, {}^S\hat{\mathbf{a}}_t, {}^E\hat{\mathbf{b}}, {}^S\hat{\mathbf{m}}_t) \quad (\text{A.67})$$

$${}^S_E\hat{\mathbf{q}}_{\nabla,t} = {}^S_E\hat{\mathbf{q}}_{\text{est},t-1} - \mu_t \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \quad (\text{A.68})$$

O valor ótimo de  $\mu$  na equação (A.68) deve ser de tal forma que garanta uma convergência mais rápida que a taxa de rotação [21].

Tendo em mãos as duas estimativas,  ${}^S_E\hat{\mathbf{q}}_{\omega,t}$  advinda do giroscópio, e  ${}^S_E\hat{\mathbf{q}}_{\nabla,t}$  advinda do acelerômetro e magnetômetro, podemos fundi-las assim como no filtro complementar, conforme equação (A.69), em que  $\lambda_t$  é o parâmetro de ponderação.

$${}^S_E \mathbf{q}_{\text{est},t} = \lambda_t {}^S_E \mathbf{q}_{\nabla,t} + (1 - \lambda_t) {}^S_E \mathbf{q}_{\omega,t} \quad (\text{A.69})$$

O valor ótimo de  $\lambda_t$  na equação (A.69) deve ser aquela que garanta que a divergência de  ${}^S_E \mathbf{q}_{\omega,t}$ , devido ao seu drift, seja igual a convergência data em  ${}^S_E \mathbf{q}_{\nabla,t}$ . Isto é, o giroscópio irá ditar a inclinação enquanto a estimativa com acelerômetro e magnetômetro não converge. A equação (A.70) apresenta essa igualdade, em que  $\frac{\mu_t}{\Delta t}$  é a taxa de convergência de  ${}^S_E \mathbf{q}_{\nabla,t}$  e  $\beta$  é a taxa de divergência de  ${}^S_E \mathbf{q}_{\omega,t}$ .

$$(1 - \lambda_t)\beta = \lambda_t \frac{\mu_t}{\Delta t} \quad (\text{A.70})$$

No filtro proposto por Sebastian Madgwick, ele realiza uma serie de suposições e otimizações dos parâmetros que irão ditar a convergência, chegando assim em uma versão simplificada da equação (A.69), em que todos os parâmetros, incluindo o  $\mu$ , que governa a convergência da descida do gradiente, são unificados no parâmetro  $\beta$ . Essa versão simplificada é ilustrada pela equação (A.71)

$${}^S_E \mathbf{q}_{\text{est},t} = {}^S_E \mathbf{q}_{\text{est},t-1} + {}^S_E \dot{\mathbf{q}}_{\omega,t} \Delta t - \beta \Delta t \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \quad (\text{A.71})$$

Rearranjando os termos, o filtro de Madgwick fica conforme apresentado no diagrama de blocos da Figura A.14, em que o único parâmetro de ajuste é  $\beta$ , indicando a taxa de divergência do giroscópio. Altos valores desse parâmetro irão utilizar de mais parcelas do acelerômetro e magnetômetro, e possuir uma convergência rápida. Baixos valores desse parâmetro irão utilizar de mais parcelas do giroscópio, e atrasará a convergência da saída do filtro.

Além do ilustrado na Figura A.14, o filtro possui como ilustrado na Figura A.15, um módulo para compensação da distorção do magnetômetro (grupo 1) e um módulo para compensação de *drift* (grupo 2). Que objetivam remover as distorções de baixa frequência ainda mais, a parte da fusão dos dados.

## A.7 Comparação de dados

Para a etapa onde será comparado os dados, no lugar de métodos estatísticos convencionais, como desvio padrão, variância, ou erro médio. Será utilizado a diferença entre as matrizes de rotação geradas.

Esta abordagem visa cobrir casos onde 2 trios distintos de ângulos de Euler na ordem ZYX, apresentam rotações semelhantes. Como por exemplo (0, 89, -69) e (70, 89, 0). Se comparado cada angulo individualmente eles estão longe de serem o mesmo ângulo, entretanto na prática são bem próximos.

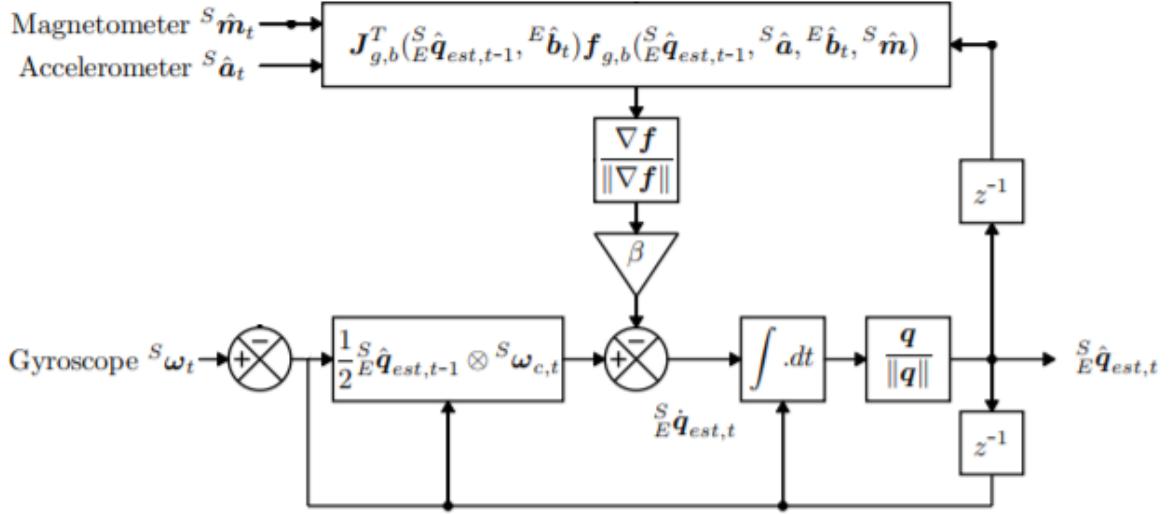


Figura A.14: Esquemático do filtro de madgwick (Fonte: [21]).

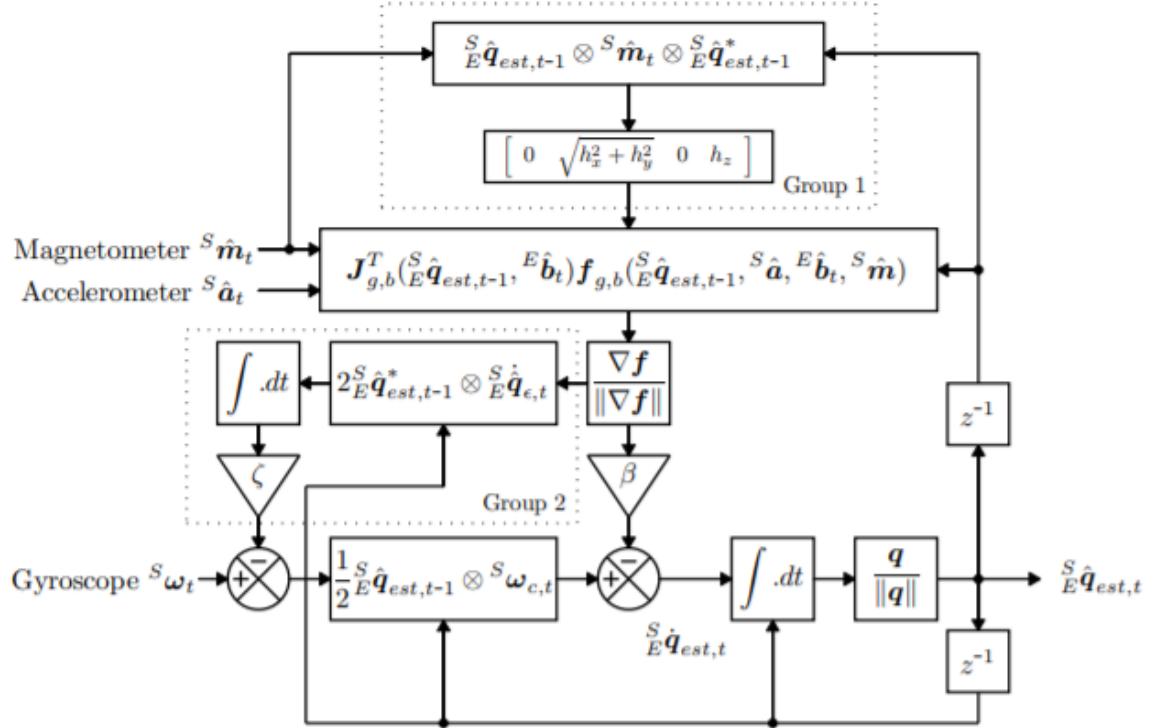


Figura A.15: Esquemático do filtro de madgwick com compensação (Fonte: [21]).

Dado os três ângulos de Euler, o método consistem em criar uma matriz de rotação de ordem ZYX para a estimativa  $R_{est}$  e uma matriz para o caso base  $R_b$ . Computando assim a diferença absoluta entre elas, conforme equação (A.72).

$$R_e = \text{abs}(R_b - R_{est}) \quad (\text{A.72})$$

Por fim, realizando a soma dos termos de  $R_e$  para obter um número único, que possa ser comparado entre as diversas estimativas.

Por meio desse método não ficará claro quão grande ou pequeno é um erro, se olhado isoladamente. Mas será o suficiente para verificar qual método consegue entregar o dado mais próximo do esperado.