

پاسخ سوال پنجم)

وزن یال میان دو رأس u و v ، $w(u, v)$

مجموع وزن یال‌های میان رأس u و رؤس موجود در مجموعه V_i ، $w(u, V_i) = \sum_{v \in V_i} w(u, v)$

الگوریتم تقریبی:

تمام رأس‌ها را به‌طور دلخواه به k زیرمجموعه‌ی V_1, V_2, \dots, V_k افراز می‌کنیم. به‌طوری که تمام k زیرمجموعه ناتهی باشند.

حال بررسی می‌کنیم که آیا جفت رأس $u \in V_i$ و $v \in V_j$ وجود دارد با گونای $k (i \neq j)$:

$$|V_i| w(u, V_i) + |V_j| w(v, V_j) > |V_i| w(u, V_j) + |V_j| w(v, V_i)$$

اگر چنین جفت رأسی وجود داشت، جای آن‌ها را در مجموعه‌ها عوض می‌کنیم به‌طوری که $u \in V_j$ و $v \in V_i$ شود.

این کار را آن قدر ادامه می‌دهیم تا برای هر جفت رأس دلخواه $u \in V_i$ و $v \in V_j$ و $i \neq j$ رابطه‌ی زیر برقرار شود.

$$\textcircled{1} |V_i| w(u, V_i) + |V_j| w(v, V_j) \leq |V_i| w(u, V_j) + |V_j| w(v, V_i)$$

الگوریتم فوق بیان پذیراست (چرا؟)

اثبات: نسبت تقریب $1/k - 1$:

ابتدا طرفین رابطه‌ی $\textcircled{1}$ را روی همای $u \in V_i$ ها جمع می‌کنیم:

$$|V_i| \sum_{u \in V_i} w(u, V_i) + |V_i| |V_j| w(v, V_j) \leq$$

$\textcircled{2}$

$$|V_i| \sum_{u \in V_i} w(u, V_j) + |V_i| |V_j| w(v, V_i)$$

سپس طرفین رابطه‌ی (2) را روی هم می‌ریزیم و جمع می‌کنیم:

$$|V_i| |V_j| \sum_{u \in V_i} w(u, V_j) + |V_i| |V_j| \sum_{v \in V_j} w(v, V_i) \leq \quad (3)$$

$$|V_i| |V_j| \sum_{u \in V_i} w(u, V_j) + |V_i| |V_j| \sum_{v \in V_j} w(v, V_i)$$

W_{ii} = مجموع وزن تمام یال‌هایی که دو سر آن‌ها V_i است

W_{ij} = مجموع وزن تمام یال‌هایی که یک سر آن V_i و سر دیگر V_j است.

$$(3) \Rightarrow 2W_{ii} + 2W_{jj} \leq W_{ij} + W_{ji}$$

$$\xrightarrow{W_{ij} = W_{ji}} W_{ii} + W_{jj} \leq W_{ij} \quad (4)$$

حال طرفین رابطه‌ی (4) را روی تمام i ها و j ها جمع می‌کنیم:

$$(5) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1, j \neq i}^k (W_{ii} + W_{jj}) \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1, j \neq i}^k W_{ij} = 2 \text{ALG}$$

که ALG جواب الگوریتم تقریبی باشد.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1, j \neq i}^k (W_{ii} + W_{jj}) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1, j \neq i}^k W_{ii} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1, j \neq i}^k W_{jj} \\ &= (k-1) \sum_{i=1}^k W_{ii} + (k-1) \sum_{j=1}^k W_{jj} = 2(k-1) \sum_{i=1}^k W_{ii} \end{aligned}$$

$$(5) \Rightarrow (k-1) \sum_{i=1}^k W_{ii} \leq \text{ALG}$$

$$\text{OPT} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^k W_{ii}}_{\text{مجموع وزن تمام یال‌ها}} + \text{ALG} \leq \frac{\text{ALG}}{(k-1)} + \text{ALG} \Rightarrow \text{ALG} \geq (1 - \frac{1}{k}) \text{OPT}$$