

بسم الله الرحمن الرحيم

تکلیف سری اول
درس الگوریتم‌های پیشرفته
دکتر فلسفین

مهلت تحویل: ۵۵:۲۳ روز ۵ آذر ۱۴۰۰

لطفا پیش از حل سوالات به موارد زیر دقت نمایید:

- تکلیف شامل شش سوال می باشد. در سوالات اول و سوم لازم است کد مربوط به مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی را نیز در کنار پاسخ سوالات تئوری، آپلود نمایید.
- در سوالاتی که از شما خواسته شده یک مسئله برنامه‌ریزی خطی را حل نمایید، تنها مجاز هستید از solver مختص خود که قبلا در این [فایل](#) انتخاب کرده‌اید، استفاده نمایید.
- پس از تصحیح و ارزیابی کدها ممکن است از شما درخواست شود در یک جلسه‌ی آنلاین در رابطه با کد خود توضیح دهید. لذا لازم است به تمام قسمت‌های کد مسلط باشید.
- پاسخ سوالات تئوری را به فرمت pdf آماده و به همراه فایل کدهای خود فشرده کرده و در سامانه در بخش مربوط به تکلیف اول آپلود نمایید.
- در تحویل تکلیف به زمان مجاز تعیین شده در سامانه برای آپلود پاسخ‌ها دقت فرمایید. پس از این زمان به هیچ طریقی تکلیف دریافت نشده و مورد بررسی قرار نمی‌گیرد.
- پاسخ تکالیف خود را حتما در سامانه آپلود نمایید و از ارسال فایل پاسخ به ایمیل یا تلگرام خودداری کنید.
- در صورت بروز هرگونه ابهام در سوالات می‌توانید از طریق آدرس ایمیل زیر با TA درس در ارتباط باشید.

arashmaroriyad@gmail.com

سوال اول)

الف) مطابق جدول شماره ۱، هر یک از دانشجویان باید با توجه به شماره‌ی شبکه مربوط به خود، اقدام به یافتن شار بیشینه (Maximum Flow) و برش کمینه (Minimum Cut) با استفاده از الگوریتم Ford-Fulkerson نماید. دقت شود که در رابطه با مسیر افزاینده شرط خاصی وجود ندارد. فایل‌های مربوط به شبکه‌ها در یک پوشه به نام networks در کنار فایل صورت سوالات قابل مشاهده می‌باشد.

شماره‌ی شبکه	شماره‌ی دانشجویی
۱	۹۹۰۵۳۶۴
۲	۴۰۰۲۱۱۲۴
۳	۴۰۰۲۳۷۷۴
۴	۴۰۰۰۰۷۰۵
۵	۹۶۲۸۹۰۳
۶	۹۹۱۲۱۳۴
۷	۹۹۱۲۵۵۴
۸	۴۰۰۳۲۳۸۴
۹	۴۰۰۲۰۷۲۴

جدول ۱

ب) هر یک از دانشجویان می‌بایست نمونه‌ی مسئله‌ی بیشینه‌سازی شار خود در قسمت الف را در قالب یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی مدل‌سازی نماید. لازم است که دانشجویان با توجه solver اختصاصی خود اقدام به حل مسئله روی شبکه‌ی خود کرده و نتیجه‌ی به دست آمده در این قسمت را با نتیجه‌ی قسمت قبل مقایسه نمایند. در ضمن فایل کد solver نیز باید ارسال گردد.

سوال دوم)

در رابطه با مبحث شار بیشینه، درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را بررسی نمایید. دلیل درستی یا نادرستی گزاره‌ها را نیز ذکر کنید.

الف) اگر تمام یال‌های جهت‌دار شبکه دارای ظرفیت‌های متمایز باشند، آنگاه شار بیشینه در شبکه منحصربه‌فرد خواهد بود.

ب) اگر به ازای هر یال جهت‌دار در شبکه، یک یال با جهت مخالف میان همان دو راس و با ظرفیت مشابه اضافه نماییم، مقدار شار بیشینه در شبکه‌ی جدید نسبت به شبکه‌ی اصلی تغییر نمی‌یابد.

سوال سوم)

تعداد شش کار (task) و شش کارگر (worker) در یک کارخانه موجود می‌باشند. برای هر یک از دانشجویان یک جدول شش در شش محیا شده‌است که عدد نوشته شده در سطر نام و ستون نام این جدول به معنای آن است که اگر کار نام توسط کارگر نام انجام شود، چه میزان سود از این انتساب حاصل می‌گردد. هدف اختصاص هر شغل به صورت مجزا به یک کارگر مجزاست به گونه‌ای که مجموع سود حاصل از این انتسابات بیشینه شود. برای یافتن جدول خود می‌توانید به جدول شماره ۲ رجوع نمایید. فایل‌های مربوط به جداول در یک پوشه به نام tables در کنار فایل صورت سوالات قابل مشاهده می‌باشد.

الف) با استفاده از الگوریتم مجارستانی، تخصیص بهینه را بیابید.

ب) هر یک از دانشجویان باید نمونه‌ی مسئله‌ی تخصیص مربوط به خود را در قالب یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی مدل نموده و با استفاده از solver خود، اقدام به حل نمونه نماید. جواب به دست آمده در قسمت قبل را با جواب حاصل از حل مدل برنامه‌ریزی خطی مقایسه کنید. دقت شود که کد solver نیز به عنوان بخشی از پاسخ ارسال شود.

شماره‌ی جدول	شماره‌ی دانشجویی
۱	۹۹۰۵۳۶۴
۲	۴۰۰۲۱۱۲۴
۳	۴۰۰۲۳۷۷۴
۴	۴۰۰۰۷۰۵
۵	۹۶۲۸۹۰۳
۶	۹۹۱۲۱۳۴
۷	۹۹۱۲۵۵۴
۸	۴۰۰۳۲۳۸۴
۹	۴۰۰۲۰۷۲۴

جدول ۲

سوال چهارم)

مدل‌های مختلفی از مسئله‌ی یافتن شار بیشینه وجود دارد که چهار نمونه‌ی آن‌ها به شرح زیر است:

مدل اول: به جای وجود تنها یک منبع (source) و یک مقصد یا چاه (sink)، بیش از یک منبع و مقصد موجود باشد و هدف بیشینه کردن شار کلی از تمام منابع به تمام مقاصد می‌باشد.

مدل دوم: علاوه بر یال‌ها، هر راس نیز دارای یک ظرفیت مشخص باشد که تعیین می‌نماید چه میزان شار یا جریان می‌توان به آن وارد شود.

مدل سوم: به هر یال علاوه بر ظرفیت، یک کران پایین نیز نسبت داده شود بدان معنا که حداقل مقدار مشخصی شار باید الزاما از آن یال عبور نماید (در واقع ظرفیت هر یال یک کران بالا برای شار عبوری از آن یال است و در این مدل یک کران پایین نیز برای شار عبوری از هر یال در نظر می‌گیریم).

مدل چهارم: میزان شار ورودی به هر راس با میزان شار خروجی از آن برابر نباشد. بدان معنا که مقداری اتلاف شار در هر راس خواهیم داشت. فرض کنید این اتلاف از طریق یک فاکتور $0 < \alpha < 1$ برای هر راس به صورت جداگانه تعریف می‌شود (فاکتور اتلاف شار برای راس‌های مختلف می‌تواند متفاوت باشد).

در این تمرین می‌خواهیم نشان دهیم که تمام مدل‌های فوق از مسئله‌ی یافتن شار بیشینه را می‌توان مانند مسئله‌ی اصلی به صورت بهینه و کارا حل نمود.

الف) مدل اول و مدل دوم را با کاهش به مدل مسئله اصلی (مسئله شارهی بیشینه) به صورت بهینه حل نمایید.

ب) مدل سوم و چهارم را در قالب یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی فرمول‌بندی کنید.

سوال پنجم)

یک گراف ساده و بدون جهت را k -یال همبند گوییم اگر با حذف حداکثر $k - 1$ یال دلخواه از گراف، همچنان همبند باقی بماند. برای مثال یک دور (cycle)، یک گراف ۲-یال همبند است. در این مسئله می‌خواهیم با دریافت یک گراف بدون جهت به عنوان ورودی، حداکثر عدد k را بیابیم که گراف ورودی k -یال همبند باشد. با استفاده از مسئله‌ی یافتن شار بیشینه که در کلاس آموخته‌ایم، برای مسئله‌ی فوق یک الگوریتم ارائه دهید. دقت شود که اگر گراف ورودی دارای n راس و m یال باشد، شما تنها مجاز به اجرای الگوریتم شار بیشینه به تعداد حداکثر n بار می‌باشید به گونه‌ای که در هر اجرای الگوریتم شار بیشینه، شبکه‌ی شما دارای $O(n)$ راس و $O(m)$ یال باشد.

سوال ششم)

یک شبکه‌ی جهت‌دار $G = (V, E)$ به همراه ظرفیت یال‌ها در اختیار شما قرار می‌گیرد. همچنین به جای یک منبع (source) و یک چاه (sink)، تعداد k جفت منبع و مقصد متمایز نیز به صورت s^i و t^i برای $1 \leq i \leq k$ نیز به همراه k عدد d^1 الی d^k به عنوان ورودی داده می‌شود. هدف یافتن k شار f^1 تا f^k به گونه‌ای است که چهار ویژگی زیر برقرار باشد:

- هر جریان f^i یک جریان معتبر (valid) از s^i به t^i باشد.
- در هر یال مجموع شاری که از آن عبور می‌کند از ظرفیت یال بیشتر نباشد.
- برای هر جریان داشته باشیم: $f^i \geq d^i$
- مجموع تمام جریان‌ها بیشینه باشد.

بررسی نماید آیا می‌توان به وسیله‌ی تغییر در گراف ورودی، مسئله‌ی فوق را به با تبدیل به یک مسئله‌ی شار بیشینه‌ی معمولی حل نمود؟ آیا می‌توان مسئله‌ی فوق را در قالب یک برنامه‌ریزی خطی مدل کرد؟ در صورت امکان، جواب خود را کامل شرح دهید.