

بسم الله الرحمن الرحيم

تکلیف سری چهارم – بخش تئوری
درس الگوریتم‌های پیشرفته
دکتر فلسفین

مهلت تحویل بخش تئوری: ساعت ۱۲ روز ۲۹ دی

لطفا پیش از حل سوالات به موارد زیر دقت نمایید:

- این فایل بخش تئوری از تکلیف سری چهارم است که شامل شش سوال می‌باشد.
- بخش عملی تکلیف سری چهارم به زودی در سامانه‌ی دروس بازگذاری خواهد شد.
- پاسخ سوالات را به فرمت pdf آماده و در سامانه‌ی دروس در قسمت مربوط به تکلیف سری چهارم – بخش تئوری بارگذاری نمایید.
- در تحویل تکلیف به زمان مجاز تعیین شده در سامانه برای آپلود پاسخ‌ها دقت فرمایید. پس از این زمان به هیچ طریقی تکلیف دریافت نشده و مورد بررسی قرار نمی‌گیرد.
- پاسخ تکالیف خود را حتما در سامانه آپلود نمایید و از ارسال فایل پاسخ به ایمیل یا تلگرام خودداری کنید.
- در صورت بروز هرگونه ابهام در سوالات می‌توانید از طریق آدرس ایمیل زیر با TA درس در ارتباط باشید.

arashmarioriyad@gmail.com

سوال اول

با توجه به مطالبی که در کلاس درس خوانده‌اید، به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) مسئله برنامه‌ریزی خطی (Linear Programming) زیر را در فرم استاندارد (Standard Form) بنویسید.

$$\min 2x_1 + 7x_2 + x_3$$

$$\text{s.t } x_1 - x_3 = 7$$

$$3x_1 + x_2 \geq 24$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \leq 0.$$

ب) مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در فرم اسلک (Slack Form) بنویسید.

$$\max 2x_1 - 6x_3$$

$$\text{s.t } x_1 + x_2 - x_3 \leq 7$$

$$3x_1 - x_2 \geq 8$$

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 0$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

ج) مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را با استفاده از روش سیمپلکس دو فازی (Two Phase Simplex Method) حل نمایید.

$$\begin{array}{llllll} \text{minimize} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 \\ \text{subject to} & & & & & \\ & 2x_1 & + & 7.5x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10000 \\ & 20x_1 & + & 5x_2 & + & 10x_3 & \geq & 30000 \\ & x_1, x_2, x_3 & & & & & \geq & 0 \end{array}$$

د) دوگان (Dual) مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی بیان شده در قسمت الف را بنویسید.

سوال دوم)

مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را با روش گرافیکی (ترسیم شکل و نمودار) حل نمایید.

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t } 2x_1 + 4x_2 &\geq 14 \\ x_1 + x_2 &\geq 7 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 5 \\ 6x_1 - x_2 &\geq 14 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

سوال سوم

مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را با استفاده از Bland's Rule و بحث Degeneracy حل نمایید.

$$\begin{aligned} \max \quad & 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 \\ \text{s.t} \quad & 0.5x_1 - 5.5x_2 - 2.5x_3 + 9x_4 \leq 0 \\ & 0.5x_1 - 1.5x_2 - 0.5x_3 + x_4 \leq 0 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

سوال چهارم)

به مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر توجه فرمایید.

$$\begin{array}{ll}\text{maximize} & 3x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} & \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -2x_1 - 2x_2 \leq -10 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

الف) با استفاده از روش گرافیکی (ترسیم نمودار و شکل) نشان دهید که مسئله‌ی فوق Infeasible است.

ب) با استفاده از فاز اول روش سیمپلکس دو فاز نشان دهید که مسئله‌ی فوق Infeasible است.

سوال پنجم)

به مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر توجه فرمایید.

$$\begin{array}{ll}\text{maximize} & x_1 - x_2 \\ \text{subject to} & \\ & -2x_1 + x_2 \leq -1 \\ & -x_1 - 2x_2 \leq -2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

الف) با استفاده از روش گرافیکی (ترسیم نمودار و شکل) نشان دهید که مسئله‌ی فوق Unbounded است.

ب) با استفاده از فاز اول روش سیمپلکس دو فاز‌ی نشان دهید که مسئله‌ی فوق Unbounded است.

سوال ششم)

به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) فرض کنید یک مسئله برنامه‌ریزی خطی دلخواه با تعداد n متغیر تصمیم و m قید در اختیار شما قرار گرفته است و از شما خواسته می‌شود آن را به فرم استاندارد درآورید. حداکثر تعداد متغیرها و قیود در فرم استاندارد بر حسب n و m چند خواهد بود؟

ب) یک مسئله برنامه‌ریزی خطی بنویسید که ناحیه‌ی ممکن (Feasible Region) در آن نامحدود (Unbounded) است ولی تابع هدف (جواب مسئله) دارای مقداری متناهی (Finite) است.

پ) در کلاس درس با مسئله‌ی شار بیشینه (Maximum Flow) و مدل‌سازی آن در قالب یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی آشنا شدیم. دوگان آن مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی را بنویسید و توضیح دهید که چگونه این مسئله‌ی دوگان می‌تواند بیان‌کننده‌ی مسئله‌ی برش کمینه (Minimum Cut) باشد (لازم نیست اثبات کنید. فقط به صورت شهودی و کلی توضیح دهید).

ت) می‌دانیم که قیود در یک مسئله برنامه‌ریزی خطی معتبر (Valid)، به صورت تساوی ($=$)، بزرگتر مساوی (\geq) یا کوچک‌تر مساوی (\leq) می‌باشند. توضیح دهید در صورت وجود قیود نامساوی اکید ($>$ یا $<$) و عدم تساوی (\neq)، چگونه می‌توان این قیود را به فرم معتبر تبدیل نمود.