

بسم الله الرحمن الرحيم

تکلیف سری سوم
درس الگوریتم‌های پیشرفته
دکتر فلسفین

مهلت تحویل بخش تئوری: ساعت ۲۳:۵۵ روز ۱۰ دی
مهلت تحویل بخش عملی: ساعت ۲۳:۵۵ روز ۱۷ دی

لطفا پیش از حل سوالات به موارد زیر دقت نمایید:

- تکلیف شامل شش سوال می‌باشد. سوالات یک تا پنج، سوالات تئوری می‌باشند و مهلت پاسخ‌دهی به آن‌ها تا ساعت ۲۳:۵۵ روز ۱۰ دی ماه است. سوال ششم یک سوال پیاده‌سازی است که در آن باید یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی خطی صحیح را با استفاده از solver مختص به خود پیاده‌سازی نمایید و مهلت ارسال کد و توضیحات تا ساعت ۲۳:۵۵ روز ۱۷ دی ماه می‌باشد.
- در سوالاتی که از شما خواسته شده یک مسئله برنامه‌ریزی خطی یا برنامه‌ریزی خطی صحیح را حل نمایید، تنها مجاز هستید از solver مختص خود که قبلا در این [فایل](#) انتخاب کرده‌اید، استفاده نمایید.
- پس از تصحیح و ارزیابی کدها ممکن است از شما درخواست شود در یک جلسه‌ی آنلاین در رابطه با کد خود توضیح دهید. لذا لازم است به تمام قسمت‌های کد مسلط باشید.
- پاسخ سوالات تئوری را به فرمت pdf آماده و در سامانه‌ی دورس در قسمت مربوط تکلیف سری سوم – بخش تئوری بارگذاری نمایید. پاسخ سوال عملی را نیز در قسمت تکلیف سری سوم – بخش عملی آپلود کنید.
- در تحویل تکلیف به زمان مجاز تعیین شده در سامانه برای آپلود پاسخ‌ها دقت فرمایید. پس از این زمان به هیچ طریقی تکلیف دریافت نشده و مورد بررسی قرار نمی‌گیرد.
- پاسخ تکالیف خود را حتما در سامانه آپلود نمایید و از ارسال فایل پاسخ به ایمیل یا تلگرام خودداری کنید.
- در صورت بروز هرگونه ابهام در سوالات می‌توانید از طریق آدرس ایمیل زیر با TA درس در ارتباط باشید.

arashmarioriyad@gmail.com

سوال اول

در سوال اول از تکلیف سری دوم با مسئله‌ی تصمیم‌گیری Hitting Set آشنا شدیم. حال قصد داریم به معرفی مدل بهینه‌سازی از این مسئله بپردازیم.

مجموعه‌ی $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ در اختیار شما قرار گرفته است به گونه‌ای که به هر عضو a_i یک وزن مثبت w_i نسبت داده شده است. همچنین تعداد m زیرمجموعه‌ی ناتهی از A با نام‌های B_1 تا B_m نیز به شما داده شده است. هدف یافتن مجموعه‌ی $H \subseteq A$ است به گونه‌ای که H با تمام B_i ها اشتراک ناتهی داشته باشد و مجموع وزن اعضای H کمینه باشد.

برای مسئله‌ی فوق یک الگوریتم چندجمله‌ای تقریبی ارائه دهید که یک Hitting Set بیابد به گونه‌ای که مجموع وزن اعضای آن حداکثر b برابر مجموع وزن اعضای Hitting Set بهینه باشد که در آن $b = \max \{|B_1|, \dots, |B_m|\}$ است (یعنی b برابر با بزرگترین اندازه‌ی زیرمجموعه‌های B_i است).

سوال دوم)

فرض کنید یک سیستم شامل m ماشین (machine) کند و k ماشین سریع داریم به طوری که ماشین‌های سریع می‌توانند دو برابر ماشین‌های کند در واحد زمان کار کنند. حال به شما تعداد n کار (task) داده می‌شود به گونه‌ای که اتمام کار i ام با استفاده از یک ماشین کند t_i و با استفاده از یک ماشین سریع $\frac{1}{2} t_i$ طول می‌کشد. هدف اختصاص کارها به ماشین‌هاست به گونه‌ای که مقدار makespan کمینه گردد. (برای آشنایی با makespan و کمینه‌سازی آن می‌توانید به اسلایدهای شماره ۱۰ مراجعه نمایید).

برای مسئله‌ی فوق یک الگوریتم چندجمله‌ای تقریبی ارائه دهید به گونه‌ای که makespan به دست آمده از آن حداکثر سه برابر makespan حاصل از تخصیص بهینه باشد.

سوال سوم)

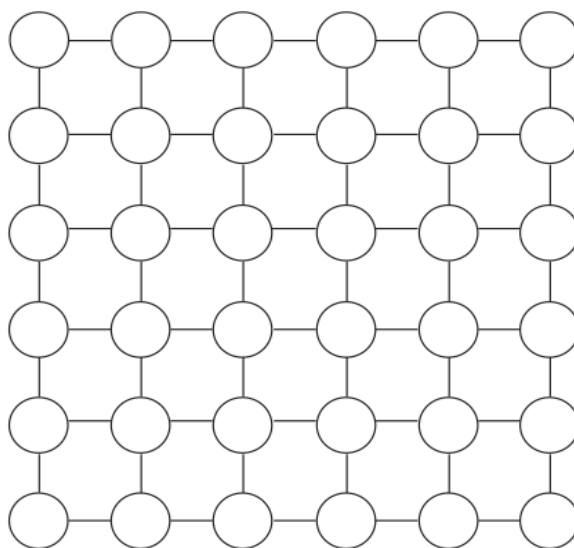
سه مجموعه‌ی ناتهی، هم‌اندازه و متمایز X و Y و Z به همراه یک مجموعه $T \subseteq X \times Y \times Z$ (مجموعه‌ای از سه‌تایی‌های مرتب که المان اول آن‌ها از مجموعه‌ی X ، المان دوم آن‌ها از مجموعه‌ی Y و المان سوم آن‌ها از مجموعه‌ی Z انتخاب شده است) در اختیار شما قرار گرفته است. هدف یافتن یک مجموعه‌ی $M \subseteq T$ است به گونه‌ای که هر عضو $X \cup Y \cup Z$ حداکثر در یکی از سه‌تایی‌های مرتب موجود در M ظاهر شده باشد و در عین حال اندازه‌ی مجموعه‌ی M بیشینه باشد. برای این مسئله یک الگوریتم چند جمله‌ای تقریبی ارائه دهید به گونه‌ای که اندازه‌ی مجموعه‌ی M حاصل از الگوریتم شما حداقل $\frac{1}{3}$ اندازه‌ی مجموعه‌ی M بهینه باشد.

سوال چهارم)

یک گرید $n \times n$ مطابق شکل شماره ۱ در اختیار شما قرار میگیرد و هر نود v در این گرید دارای یک وزن مثبت متمایز $w(v)$ می باشد. هدف یافتن یک مجموعه‌ی مستقل (Independent Set) از نود هاست (مجموعه‌ای از نودها که یالی میان آنها وجود نداشته باشد) به گونه‌ای که مجموع وزن نودهای انتخاب شده بیشینه شود. برای مسئله‌ی فوق یک الگوریتم حریصانه ارائه شده است که به صورت زیر می باشد:

- گام ۱) مجموعه‌ی S را تهی در نظر بگیر.
- گام ۲) تا زمانی که نودی در گرید باقی مانده است، دستورات زیر را اجرا کن:
 - از میان نودهای باقی مانده در گرید، نودی که بیشترین وزن را دارد انتخاب کن و آن را v بنام.
 - نود v را به S اضافه کن.
 - نود v و تمام همسایه‌های آن را از گرید حذف کن (یالهای متناظر نیز حذف شوند).
- گام ۳) مجموعه‌ی S را به عنوان جواب برگردان.

نشان دهید که خروجی الگوریتم حریصانه‌ی فوق یک مجموعه‌ی مستقل از نودهاست به گونه‌ای که مجموع وزن نودهای انتخاب شده حداقل $\frac{1}{4}$ مجموع وزن نودهای مجموعه‌ی مستقل بهینه است.



شکل ۱ - گرید 6×6

سوال پنجم)

گراف وزن دار و بدون جهت $G = (V, E)$ به همراه یک عدد طبیعی k در اختیار شما قرار گرفته است (وزن هر یال e برابر با یک عدد مثبت w_e می باشد). می خواهیم رئوس گراف را به k زیرمجموعه به گونه ای افراز کنیم که مجموع وزن یال های میان زیرمجموعه ها بیشینه شود (یک یال میان دو زیرمجموعه است اگر و تنها اگر یک سر آن در یک زیرمجموعه و سر دیگر آن در زیرمجموعه ی دیگر قرار داشته باشد).

برای مسئله ی فوق یک الگوریتم تقریبی چندجمله ای ارائه دهید به گونه ای که مجموع وزن یال های میان زیرمجموعه های حاصل از الگوریتم شما حداقل $1 - \frac{1}{k}$ جواب بهینه باشد.

سوال ششم)

در کلاس درس با مسئله‌ی weighted vertex cover یا به اختصار WCV آشنا شدیم و برای آن یک الگوریتم تقریبی مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی با نسبت تقریب ۲ ارائه کردیم (اسلاید ۱۱).

در این سوال برای هر یک از شما دانشجویان یک نمونه گراف ورودی برای مسئله‌ی WVC مهیا شده است که می‌توانید شماره‌ی نمونه‌ی خود را از جدول ۱ به دست آورید (نمونه‌ها در پوشه‌ای با نام WVC Samples در کنار فایل pdf سوالات قرار گرفته است).

هر فایل نمونه بدین شکل است که خط اول آن شامل دو عدد طبیعی n و m است که به ترتیب نشانگر تعداد رئوس و تعداد یال‌های گراف می‌باشند. سپس در n خط بعدی هر خط شامل دو عدد است که عدد اول همان شماره‌ی راس و عدد دوم وزن آن راس می‌باشد (شماره‌ی رئوس از ۱ آغاز می‌شود). در نهایت نیز m خط وجود دارد که در هر خط شماره‌ی رئوس دو سر یال‌ها قرار گرفته است.

الف) این مسئله را به یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی صحیح (Integer Linear Programming) مدل کرده و نمونه‌ی خود را با استفاده از solver مختص خود حل نمایید.

ب) مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی صحیح قسمت الف را relaxed کنید و حال این مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی relaxed شده را با solver مختص خود حل کنید. در نهایت نیز مطابق آنچه در کلاس درس خواندید، جواب تقریبی حاصل از rounding (رند کردن متغیرهای تصمیم با آستانه‌ی $\frac{1}{2}$) را برای نمونه‌ی خود گزارش کنید.

پ) آیا جواب ب قسمت حداکثر ۲ برابر جواب قسمت الف است؟ چرا؟

شماره‌ی نمونه‌ی گراف	شماره‌ی دانشجویی
۱	۹۹۰۵۳۶۴
۲	۴۰۰۲۱۱۲۴
۳	۴۰۰۲۳۷۷۴
۴	۴۰۰۰۷۰۵
۵	۹۶۲۸۹۰۳
۶	۹۹۱۲۱۳۴
۷	۹۹۱۲۵۵۴
۸	۴۰۰۳۳۳۸۴
۹	۴۰۰۲۰۷۲۴

جدول ۱