بسم الله الرحمن الرحیم

تکلیف سری دوم
درس الگوریتم‌های پیشرفته
دکتر فلسفین

مهلت تحویل بخش تئوری: ساعت ۱۴ روز ۲۴ آذر

مهلت تحویل بخش عملی: ساعت ۲۳:۵۵ روز ۳۰ آذر

لطفا پیش از حل سوالات به موارد زیر دقت نمایید:

- تکلیف شامل هفت سوال می‌باشد. سوالات یک تا شش، سوالات تئوری می‌باشند و مهلت پاسخ‌دهی به آن‌ها تا ساعت ۱۴ روز ۲۴ آذر ماه است. سوال هفتم یک سوال پیاده‌سازی است که در آن باید یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی صحیح را با استفاده از Solver مختص به خود پیاده‌سازی نمایید و مهلت ارسال کد تا ساعت ۲۳:۵۵ روز ۳۰ آذر ماه می‌باشد.
- در سوالاتی که از شما خواسته شده یک مسئله برنامه‌ریزی خطی صحیح را حل نمایید، تنها مجاز هستید از solver مختص خود که قبلا در این فایل انتخاب کرده‌اید، استفاده نمایید.
- پس از تصحیح و ارزیابی کدها ممکن است از شما درخواست شود در یک جلسه‌ی آنلاین در رابطه با کد خود توضیح دهید. لذا لازم است به تمام قسمت‌های کد مسلط باشید.
- پاسخ سوالات تئوری را به فرمت pdf آماده و در سامانه‌ی دورس در قسمت مربوط تکلیف سری دوم – بخش تئوری بارگذاری نمایید. پاسخ سوال عملی را نیز در قسمت تکلیف سری دوم – بخش عملی آپلود کنید.
- در تحویل تکلیف به زمان مجاز تعیین شده در سامانه برای آپلود پاسخ‌ها دقت فرمایید. پس از این زمان به هیچ طریقی تکلیف دریافت نشده و مورد بررسی قرار نمی‌گیرد.
- پاسخ تکالیف خود را حتما در سامانه آپلود نمایید و از ارسال فایل پاسخ به ایمیل یا تلگرام خودداری کنید.
- در صورت بروز هرگونه ابهام در سوالات می‌توانید از طریق آدرس ایمیل زیر با TA درس در ارتباط باشید.
arashmarioriyad@gmail.com

سوال اول)

مسئله‌ی زیر را در نظر بگیرید.
مجموعه‌ی $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ به همراه تعداد m زیرمجموعه از A با نام‌های B_1 تا B_m (یعنی برای هر i داریم $B_i \subseteq A$) به همراه عدد k به عنوان ورودی به شما داده شده است.
می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا مجموعه‌ی $H \subseteq A$ به گونه‌ای وجود دارد که برای هر i داشته باشیم $H \cap B_i \neq \emptyset$ و سایز H حداکثر برابر با k باشد.
اثبات کنید که مسئله‌ی تصمیم‌گیری فوق NP-Complete است.
راهنمایی: برای اثبات می‌توانید از سختی و پیچیدگی مسئله‌ی Vertex Cover استفاده کنید.

سوال دوم)

دو مسئله‌ی P_1 و P_2 را به صورت زیر در نظر بگیرید:

مسئله‌ی P_1) به عنوان ورودی تعداد $N \geq ۳$ عدد صحیح متمایز به شما داده می‌شود. می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا سه عدد صحیح از میان آن‌ها وجود دارد به گونه‌ای که جمعشان برابر با صفر شود یا خیر.

مسئله‌ی P_2) به عنوان ورودی مختصات $N \geq ۳$ نقطه‌ی تمایز در صفحه‌ی دو بعدی به شما داده می‌شود. می‌خواهیم بررسی نماییم که آیا سه نقطه از میان آن‌ها وجود دارد که بر روی یک خط راست قرار بگیرند یا خیر.

نشان دهید که $P_1 \leq P_2$ (یعنی مسئله‌ی P_1 را می‌توان در زمان چند جمله‌ای به مسئله‌ی P_2 کاهش داد).

سوال سوم)

یک نمونه از مسئله‌ی Satisfiability در فرم CNF را در نظر بگیرید که شامل کلاوزهای C_1 تا C_k و متغیرهای دودویی x_1 تا x_n می‌باشد. به این نمونه Monotone گوییم اگر لیترال‌های نقیض در هیچ کلاوزی استفاده نشده باشند (یعنی در هیچ کلاوزی عبارت $\overline{x_i}$ را برای هر $1 \le i \le n$ نداشته باشیم).

مثلا نمونه‌ی $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$ یک نمونه‌ی Monotone از مسئله می‌باشد در حالی که نمونه‌ی $(\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$ یک نمونه‌ی Monotone نیست زیرا شامل $\overline{x_1}$ است.

بررسی کردن Satisfiability برای نمونه‌های Monotone بسیار ساده است. زیرا کافی است که تمام x_iها را برابر با True مقداردهی نماییم. اما یافتن کمترین تعداد متغیری که با مقداردهی True به آن‌ها کل عبارت ارضا می‌شود می‌تواند چالش‌برانگیز باشد.

حال مسئله‌ی زیر را در نظر بگیرید.

یک نمونه‌ی Monotone از مسئله‌ی Satisfiability در فرم CNF به همراه عدد k به شما داده می‌شود. می‌خواهیم تصمیم بگیریم آیا می‌توان با True قرار دادن مقدار حداکثر k تعداد از متغیرهای دودویی مسئله کل نمونه را True کرد یا خیر.

ثابت کنید که مسئله‌ی فوق NP-Complete است.

راهنمایی: برای اثبات می‌توانید از سختی و پیچیدگی مسئله‌ی Vertex Cover استفاده کنید.

سوال چهارم)

یک گراف ساده‌ی جهت‌دار $G = (V, E)$ در اختیار شما قرار می‌گیرد که برای هر یال $e \in E$ یک وزن w_e نیز موجود می‌باشد (دقت کنید که وزن‌ها می‌توانند مثبت یا منفی باشند). می‌خواهیم تصمیم بگیریم که آیا در گراف G یک دور ساده با مجموع وزن صفر وجود دارد یا خیر.

ثابت کنید که مسئله‌ی فوق NP-Complete است.

راهنمایی: برای اثبات می‌توانید از سختی و پیچیدگی مسئله‌ی Subset-Sum استفاده نمایید.

سوال پنجم)

مسئله‌ی زیر را در نظر بگیرید.

عدد طبیعی n به ما داده شده است. می‌خواهیم بیشترین تعداد اعداد میان ۱ تا n را انتخاب کنیم به گونه‌ای که اختلاف هیچ جفت عدد انتخاب شده، مربع کامل نباشد.

مثلا اگر $n = ۱۰$ باشد، مجموعه‌ی اعداد $\{۱,۳,۶\}$ به گونه‌ای هستند که اختلاف هیچ جفت عددی، مربع کامل نیست.

ما به دنبال چنین مجموعه‌ای با حداکثر سایز هستیم.

نشان دهید می‌توان مسئله‌ی فوق را در زمان چند جمله‌ای به مسئله‌ی Maximum Independent Set کاهش داد.

سوال ششم)

یک نمونه‌ی 2-CNF-SAT در واقع همان یک نمونه از مسئله‌ی Satisfiability به فرم CNF است که در آن هر کلاوز دقیقا شامل دو لیترال می‌باشد. نشان دهید که مسئله‌ی 2-CNF-SAT از کلاس پیچیدگی P می‌باشد.

سوال هفتم)

در کلاس درس آموختیم که چگونه می‌توان یک نمونه از مسئله‌ی رنگ‌آمیزی گراف را در قالب یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی صحیح مدل‌سازی نمود.

مطابق شماره‌ی دانشجویی هر یک از شما یک نمونه گراف ساده بدون جهت تهیه شده است که می‌توانید از طریق جدول ۱ شماره‌ی نمونه‌ی گراف مربوط به خود را بیابید..

فرمت هر فایل نمونه گراف بدین شکل است که در سطر اول دو عدد طبیعی قرار دارد که به ترتیب نشان‌دهنده‌ی تعداد رئوس و تعداد یال‌های گراف می‌باشند. سپس در خطوط بعدی (به تعداد یال‌ها) در هر خط دو عدد وجود دارد که در واقع شماره‌ی رئوس دو سر هر یال می‌باشند. دقت فرمایید که شماره‌ی رئوس از ۱ شروع می‌شود.

فایل‌های ذکر شده در پوشه‌ای به نام Graph Coloring Instances در کنار فایل سوالات در اختیار شما قرار گرفته است.

لازم است هر یک از دانشجویان با استفاده از Solver مختص خود، به حل نمونه‌ی گراف خود پرداخته و عدد رنگی را برای آن نمونه بیابد. دقت فرمایید که پاسخ شما باید حتما شامل کد برنامه‌ریزی خطی صحیح در Solver باشد.

شماره‌ی نمونه‌ی گراف	شماره‌ی دانشجویی
۱	۹۹۰۵۳۶۴
۲	۴۰۰۲۱۱۲۴
۳	۴۰۰۲۳۷۷۴
۴	۴۰۰۰۰۷۰۵
۵	۹۶۲۸۹۰۳
۶	۹۹۱۲۱۳۴
۷	۹۹۱۲۵۵۴
۸	۴۰۰۳۲۳۸۴
۹	۴۰۰۲۰۷۲۴

جدول ۱