

به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

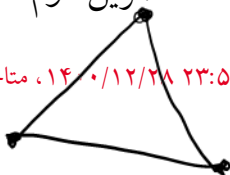
حمیدرضا ربیعی، مریم رضایی
بهار ۱۴۰۱

$$ip \quad n_1 = 0$$

$$\Rightarrow 2n_2 + 3n_3 = 9$$

تمرین دوم: عملگرهای برداری

مهلت تحویل: ۱۴۰۱/۱۲/۲۱ ۲۳:۵۹، متاخر: ۱۴۰۱/۰۱/۰۲ ۲۳:۵۹



پرسش‌های تئوری (۱۵۰ نمره)

پرسش ۰ (۱ نمره)

(آ) (۰.۵ نمره) نام کامل و شماره دانشجویی خود را در صفحه اول تمرین بنویسید.

(ب) (۰.۵ نمره) فایل خود را با نام LA-HW2-STID در سامانه کوثر بارگذاری کنید. دقت بفرمایید که STID باید با شماره دانشجویی شما جایگزین شود.

پرسش ۱ (۳۵ نمره) در رابطه با ترکیب‌های خطی، افاین^۱ و محدب^۲ به سوالات زیر پاسخ دهید.(آ) (۱۰ نمره) صفحه $9 = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ در فضای \mathbb{R}^3 داده شده است. مجموعه S با چهار نقطه در این فضا را طوری تعریف کنید که افاین S در صفحه قرار بگیرد.(ب) (۱۰ نمره) مجموعه $V = \{[x \ x^2]^T : -1 < x < 1\} \cup [0 \ 1]^T$ را در \mathbb{R}^2 تعریف کرده‌ایم. مجموعه محدب^۳ V را به صورت هندسی نمایش دهید.(ج) (۱۰ نمره) اگر $y = [1 \ -1 \ 2]^T$ باشد آنگاه صرفاً مشخص کنید y کدام یک از ترکیب‌های خطی، افاین و محدب چهار بردار $v_1 = [100 \ -100 \ 400]^T$ ، $v_2 = [2 \ 2 \ -4]^T$ ، $v_3 = [0 \ -99 \ 33]^T$ و $v_4 = [2 \ 6 \ -8]^T$ می‌تواند باشد؟(د) (۵ نمره) اگر $y = [4 \ 1]^T$ و $v_i = [1 \ i]^T$ $\forall i \in N$ باشد آنگاه آیا می‌توان y را به صورت ترکیب خطی هر دو زوج بردار دلخواه از v_i نوشت؟ توضیح دهید.پرسش ۲ (۱۵ نمره) اگر $S \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه محدب باشد آنگاه نشان دهید برای هر نقطه $a \in \mathbb{R}^n$ حداکثر یک نقطه $b \in S$ وجود دارد که

$$\forall x \in S : \|a - b\| \leq \|a - x\|$$

پرسش ۳ (۲۵ نمره) دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z &= 0 \\ 4x + 8y + 12z &= -4 \\ 6x + 2y + \alpha z &= 4 \end{aligned}$$

(آ) (۵ نمره) به ازای چه مقادیری از α دستگاه سازگار است؟(ب) (۱۰ نمره) به ازای چه مقادیری از α دستگاه جواب یکتا دارد؟ جواب دستگاه را به ازای آن مقدار(ها) به دست آورید.(ج) (۱۰ نمره) به ازای چه مقادیری از α دستگاه بی‌نهایت جواب دارد؟ جواب عمومی دستگاه به ازای آن مقدار(ها) را به دست آورید.پرسش ۴ (۱۴ نمره) بردار x در فضای \mathbb{R}^n و دو عدد حقیقی α و β مفروض‌اند.(آ) (۴ نمره) اگر $\overline{\text{avg}}(v)$ میانگین حسابی درایه‌های بردار v باشد، ثابت کنید $\overline{\text{avg}}(\alpha x + \beta 1) = \alpha \overline{\text{avg}}(x) + \beta$.(ب) (۵ نمره) اگر $\text{std}(v)$ انحراف از معیار درایه‌های بردار v باشد، ثابت کنید $\text{std}(\alpha x + \beta 1) = |\alpha| \text{std}(x)$.(ج) (۵ نمره) ثابت کنید که حداقل قدرمطلق یک درایه از بردار x بزرگتر یا مساوی rms این بردار است.پرسش ۵ (۲۰ نمره) مجموعه داده‌های جدول زیر حاصل یک آزمایش هستند. ادعا می‌شود این داده‌ها را می‌توان با تابع $y = f(x, n)$ که به صورت

$$f(x, n) = ax^n + bx - c$$

تعریف می‌شود، مدل‌سازی کرد. با استفاده از روش RREF^۴ پارامترهای این تابع را در صورت وجود به دست آورید یا نشان دهید چنین تابعی وجود ندارد.^۱affine^۲convex^۳convex-hull^۴Reduced Row Echelon Form

y	x	n
۵	-۲	۲
۲	-۱	۳
۰	۱	۵
۳	۳	۰

پرسش ۶ (۳۰ نمره) بردار x در فضای \mathbb{R}^n مفروض است. اگر Y یک مجموعه از بردارهای یکه در فضای \mathbb{R}^n باشد

(آ) (۱۵ نمره) فرض کنید کنید که y^* برداری از Y است که کمترین فاصله را با x دارد. نشان دهید که زاویه x و y^* از زاویه x و هر بردار دیگری در Y کمتر است.

(ب) (۱۵ نمره) فرض کنید کنید که y^* برداری از Y است که کوچکترین زاویه را با x دارد. نشان دهید که فاصله x و y^* از فاصله x و هر بردار دیگری در Y کمتر است.

پرسش ۷ (۱۵ نمره) بردار x در فضای \mathbb{R}^n مفروض است. فرض کنید که \tilde{Y} مجموعه‌ای از بردارهای با درایه‌های نامثبت در فضای \mathbb{R}^n باشد. اگر y^* عضوی از \tilde{Y} باشد که کمترین فاصله را تا x دارد، ثابت کنید که ضرب داخلی بردار $y^* - x$ و y^* برابر صفر است.

پرسش ۸ (غیر تحویلی) اگر $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ و $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ باشد، نشان دهید برای هر زیرمجموعه $C \subset S$ مجموعه $B \cup C$ محدب است.

پرسش ۹ (غیر تحویلی) یک تعریف معادل برای توابع محدب به صورت زیر است:

به تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ محدب می‌گویند اگر:

$$\forall t \in [0, 1] : f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

(آ) ثابت کنید برای هر تابع پیوسته و محدب $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ داریم:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), (y-x) \rangle$$

حال شرط تحدب قوی برای توابع پیوسته را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\exists m > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), (y-x) \rangle + \frac{m}{2} \|y-x\|^2$$

(ب) ثابت کنید برای یک تابع محدب پیوسته $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، اگر x^* نقطه‌ای با f مینیمم باشد، داریم: $\nabla f(x^*) = 0$.

(ج) ثابت کنید برای توابع پیوسته و محدب قوی داریم:

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2m} \|\nabla f(x)\|^2$$

پرسش ۱۰ (غیر تحویلی) جواب عمومی دستگاه معادلات

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 0$$

$$x_1 + x_2 + 3x_4 + x_5 = 0$$

را به دست آورید. پاسخ شما باید به صورت یک دسته‌جواب یا یک جواب در صورت یکتایی باشد.

پرسش ۱۱ (غیر تحویلی) کدام یک از توابع زیر یک تابع خطی است؟

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ 1+y \end{bmatrix} \quad (\text{آ})$$

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ xy \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ \sin(y) \end{bmatrix} \quad (\text{ه})$$

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} \quad (9)$$

پرسش ۱۲ (غیر تحویلی) فرض کنید برای $p, q \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. نرم- q یک تابع خطی $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ و متناظر با نرم- p بردار $x \in \mathbb{R}^n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_q := \sup_{\|x\|_p=1} |f(x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_p}$$

و داریم:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

اگر e_1, e_2, \dots, e_n بردارهای پایه استاندارد یک \mathbb{R}^n باشند، ثابت کنید:

$$\|f\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |f(e_i)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

راهنمایی: برای حل این سوال می‌توانید از صورت نامساوی هولدر^۵ کمک بگیرید.

پرسش ۱۳ (غیر تحویلی) اگر در یک مثلث اندازه اضلاع a, b و c باشد و اندازه میانه وارد c برابر m باشد، نشان دهید

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2m^2$$

پرسش ۱۴ (غیر تحویلی) در فضای برداری V که یک زیرفضای n -بعدی از \mathbb{R}^n است، بزرگترین اندازه زیرمجموعه‌ای متناهی از بردارهای V که ضرب داخلی دو به دو آنها منفی است را بدست بیاورید.

مهلت تحویل: ۱۴۰۱/۰۱/۱۵ ۲۳:۵۹، متأخر: ۱۴۰۱/۰۱/۱۸ ۲۳:۵۹

پرسش‌های عملی (۴۰ نمره)

پرسش ۱ شهر فاصله‌ها (۲۰ نمره)

در یک شهر چند بعدی!! انتخاباتی با تعدادی کاندیدا در حال برگزاری است. تعدادی از افراد شهر کاندیدای موردنظر خود را انتخاب کرده‌اند ولی تعدادی دیگر هنوز موفق به این کار نشده‌اند. افرادی که تصمیم نگرفته‌اند بر اساس k نفر از همسایه‌های خود رأی دهند، به این صورت که به کاندیدایی رأی خواهند داد که بین k همسایه فرد بیشترین رأی را داشته باشد (منظور از k همسایه فرد، k فردی است که از بقیه به شخص مورد نظر نزدیک‌تر هستند و تصمیم خود را گرفته‌اند). در حالتی که چند کاندیدا در همسایگی یک فرد دارای بیشترین رأی باشند، کاندیدا با شماره کمتر انتخاب می‌شود. شما باید رأی افرادی که تصمیم نگرفته‌اند را بر اساس همسایه‌هایشان بدست آورید.

ورودی

در سطر اول به ترتیب k, m, n می‌آید که m تعداد افرادی که تصمیم گرفته‌اند و n تعداد افرادی است که تصمیم نگرفته‌اند. در m سطر بعدی مختصات خانه افرادی که تصمیم گرفته‌اند داده شده است. در سطر بعد شماره کاندیدای انتخاب شده توسط m فرد به ترتیب آمده است. سپس در n سطر بعدی مختصات خانه افرادی که تصمیم نگرفته‌اند داده شده.

خروجی

در یک سطر به ترتیب رأی افرادی که نتوانسته‌اند تصمیم بگیرند را چاپ کنید.

ورودی نمونه ۱

```
2 5 3
0 0 0
2 2 2
-1 -1 -1
8 8 8
9 9 9
0 0 1 2 2
1 1 1
0.1 0.1 0.1
8.5 8.5 8.5
```

خروجی نمونه ۱

⁵Hölder's inequality

0 0 2

ورودی نمونه ۲

3 5 3
66.7
1.7
26.0
67.0
-10.5
2 2 2 0 1
-97.1
8.4
-36.4

خروجی نمونه ۲

2 2 2

ورودی نمونه ۳

3 7 2
-18.5 -88.9
57.7 -42.5
-9.9 -39.2
5.3 24.8
55.4 37.2
96.2 20.2
62.8 41.7
0 0 0 2 2 2 1
-65.2 -10.2
34.0 91.5

خروجی نمونه ۳

0 2

پرسش ۲ هال و پذیرایی محدب کاربردی (۲۰ نمره)

در قاره ایبارا بعد از مدت‌ها کشمکش و درگیری میان کشورها در نهایت صلح برقرار شده است. حاکمان سرزمین‌ها تصمیم گرفته‌اند بر اساس یک توافقنامه شهرها و نواحی که در مدت جنگ از کشورهای اصلی خود جدا شده‌اند را به قلمرو خود اضافه کنند. ما مختصات جغرافیایی تمام شهرهای فعلی هر کشور و همچنین تمام شهرهای مستقل را در اختیار داریم. فرض کنید قلمرو هر کشور یک چندضلعی در صفحه است و رؤس آن را شهرهای مرزی آن کشور تشکیل می‌دهند. همچنین شهرهای مرزی می‌توانند روی ضلع قلمرو نیز قرار بگیرند. حال می‌خواهیم کشوری که هر کدام از این شهرهای مستقل به آن می‌پیوندند را مشخص کنیم. به گونه‌ای که از بین قلمروهایی که داریم برای هر شهر قلمرویی را انتخاب کرده که مرکز جغرافیایی آن به شهر نزدیک‌تر است. در آخر می‌خواهیم قلمرو جدید هر کشور را پیدا کردن شهرهای مرزی بعد از گسترش قلمرو مشخص کنیم.

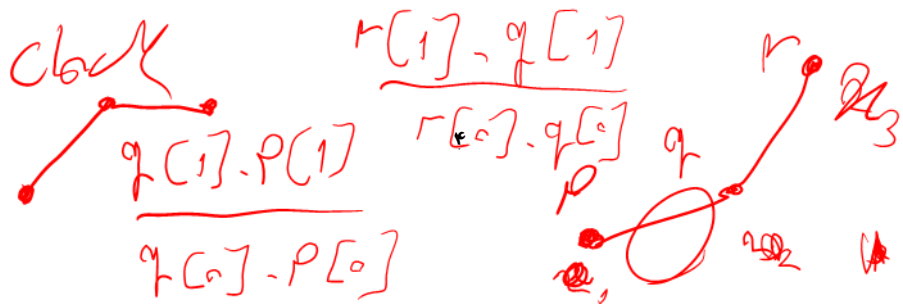
ورودی

در خط اول n و m آمده که به ترتیب بیانگر تعداد شهرهای مستقیم که مختصات جغرافیایی آن را داریم و تعداد کشورها می‌باشد. کشورها را از ۰ تا $m - 1$ شماره گذاری می‌کنیم. در n خط بعدی مختصات شهرها به همراه شماره کشورشان آمده به طوری که در هر خط ابتدا شماره کشور آن شهر و سپس طول و عرض جغرافیایی آن شهر می‌آید. سپس عدد طبیعی k در ورودی می‌آید که بیانگر تعداد شهرهای مستقلی است که باید تعیین کنیم به قلمرو کدام کشور افزوده می‌شوند. سپس در k خط بعدی مختصات این شهرها به ما داده می‌شود.

خروجی

در خط اول باید شماره کشور نسبت داده شده به k شهر مستقل را به همان ترتیبی که مختصات آن‌ها در ورودی آمده است چاپ کنید. سپس در m خط بعدی به ترتیب از ۰ تا $m - 1$ در هر خط شماره هر کشور بعد از آن در همان خط مختصات شهرهای مرزی آن به ترتیب آمده که بعد گسترش قلمرو پیدا کردیم چاپ شود. در هر خط ترتیب چاپ کردن شهرهای مرزی باید بر اساس مولفه اول و به صورت صعودی باشد. اگر مولفه اول مختصات دو شهر برابر شد بر اساس مولفه دوم به صورت صعودی چاپ شوند. همچنین توجه شود که مختصات هر شهر باید به صورت $[x, y]$ چاپ شود که x و y به ترتیب طول و عرض مختصات جغرافیایی با دو رقم اعشار هستند و مختصات شهرهای هر کشور با space از هم جدا می‌شود.

ورودی نمونه ۱



```

15 3
0 0.52 0.2
1 2.5 2.6
0 0.78 0.11
1 2.74 3
2 8 6
1 2.88 3.5
0 1 0.5
1 4.2 2.54
2 6 8
2 5.5 9.7
1 3.2 4
0 0.9 0.9
2 7.2 8.99
2 5 5.1
0 0.267 0.99
6
-0.9 2.1
3.1 3.1
5.8 6.2
4 7.9
-0.5 0.5
-0.2 5

```

خروجی نمونه ۱

```

0 1 2 2 0 1
0 [-0.90, 2.10] [-0.50, 0.50] [0.78, 0.11] [0.90, 0.90] [1.00, 0.50]
1 [-0.20, 5.00] [2.50, 2.60] [3.20, 4.00] [4.20, 2.54]
2 [4.00, 7.90] [5.00, 5.10] [5.50, 9.70] [7.20, 8.99] [8.00, 6.00]

```

ورودی نمونه ۲

```

10 3
2 -3.01 -0.00
2 -3.60 0.05
2 -2.81 0.51
2 -1.15 -0.37
1 2.84 28.01
1 0.30 24.63
1 1.63 27.08
0 14.61 8.05
0 14.81 5.55
0 14.15 5.24
5
4.58 27.06
0.84 29.79
-3.60 1.21
15.00 5.06
15.73 5.68

```

خروجی نمونه ۲

```

1 1 2 0 0
0 [14.15, 5.24] [14.61, 8.05] [15.00, 5.06] [15.73, 5.68]
1 [0.30, 24.63] [0.84, 29.79] [4.58, 27.06]
2 [-3.60, 0.05] [-3.60, 1.21] [-1.15, -0.37]

```

ورودی نمونه ۳

```

18 4
3 30.92 29.25
3 31.84 29.37
3 23.14 27.96
3 29.40 30.37
2 76.14 41.86
2 80.65 53.09
2 79.98 45.69
2 86.71 50.32
0 50.18 54.10

```

```

0 36.58 52.69
0 40.17 61.00
0 53.53 46.58
0 46.29 62.26
1 27.45 7.60
1 27.22 -3.63
1 37.81 -0.92
1 31.22 10.48
1 19.21 4.09
6
28.41 27.23
43.97 54.87
27.26 34.50
84.58 40.97
40.14 6.05
85.72 54.85

```

خروجی نمونه ۳

```

3 0 3 2 1 2
0 [36.58, 52.69] [40.17, 61.00] [46.29, 62.26] [50.18, 54.10] [53.53, 46.58]
1 [19.21, 4.09] [27.22, -3.63] [31.22, 10.48] [37.81, -0.92] [40.14, 6.05]
2 [76.14, 41.86] [80.65, 53.09] [84.58, 40.97] [85.72, 54.85] [86.71, 50.32]
3 [23.14, 27.96] [27.26, 34.50] [28.41, 27.23] [31.84, 29.37]

```