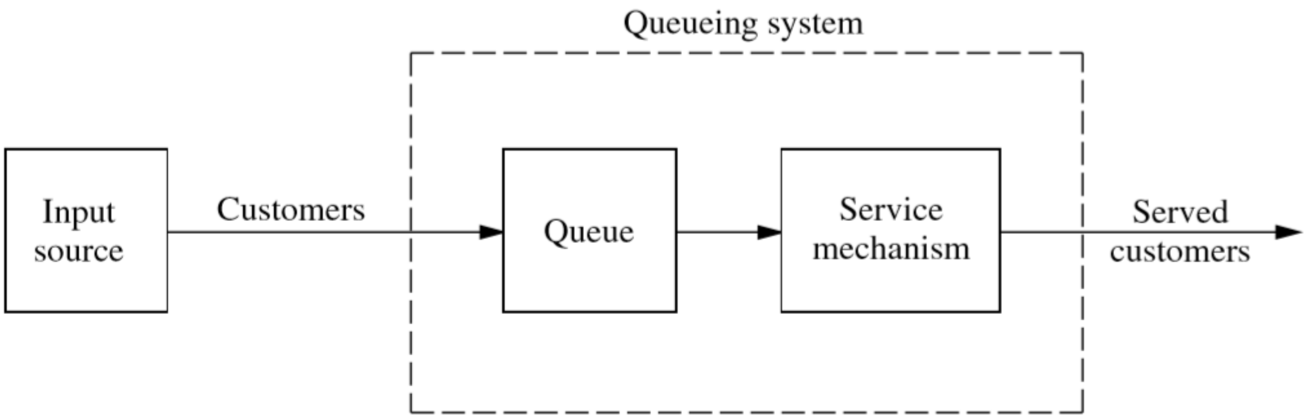
Single-Server-Queueing-System-With-Limited-Capacity



Математическая модель $M/M/1/N$

N - размер очереди
λ - интенсивность входного потока
μ - интенсивность обслуживания

Вероятностное пространство

$(\Omega, \mathcal{F}, p(\bullet))$, *где*

$$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$$
$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots)\},$$

где $\omega_i \in \{0, 1, 2, \cdots, N\}$ *- размер очереди*

Пусть $X \sim exp(\lambda)$, $Y \sim exp(\mu)$

Тогда $P(X < Y) = \int_0^\infty P(X < y) f_y(y) dy =$

$$= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda y}) \mu e^{-\mu y} dy =$$

$$= \mu \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda y}) dy - \mu \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)y} dy =$$

$$= -\int_0^\infty (1 - e^{-\mu y}) d(-\mu y) - \frac{\mu}{\mu+\lambda} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)y} dy =$$

$$= 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Следовательно,

$$
\begin{gathered}
P(\omega_{i+1} = a+1|\omega_i = a) = \tfrac{\lambda}{\lambda+\mu},\ 0 \le a < N \\
P(\omega_{i+1} = a|\omega_i = a+1) = \tfrac{\mu}{\lambda+\mu},\ 0 \le a < N \\
P(\omega_{i+1} = N-1|\omega_i = N) = 1 \\
P(\omega_{i+1} = 1|\omega_i = 0) = 1
\end{gathered}
$$

Зададим случайные величины

$$X_0 = 0 \quad P_0(X_0 = 0) = 1$$

$$X_i(\omega) = \omega_i$$

$$
\mathbb{P} = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & N-1 & N \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ N-1 \\ N \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Схема состояний

Уравнения баланса *(RateIn = Rateout)*

$$
\begin{aligned}
&0 : p_1\mu = p_0\lambda \\
&1 : p_0\lambda + p_2\mu = p_1\lambda + p_1\mu \\
&2 : p_1\mu = p_0\lambda \\
&\dots \\
&N-1 : p_{N-2}\lambda + p_N\mu = p_{N-1}(\lambda+\mu) \\
&N : p_{N-1}\lambda = p_N\mu
\end{aligned}
$$

$$\Sigma_{i=0}^{N} p_i = 1$$

$$\Sigma_{i=0}^{N} (\tfrac{\lambda}{\mu})^i p_0 = 1$$

Получаем

$$p_0 = \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}^N}$$

$$p_i = (\frac{\lambda}{\mu})^i \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-(\frac{\lambda}{\mu})^N}, \forall i$$

1. Вероятность отказа требованию

Вероятность отказа равна вероятности системы пребывании в состоянии N

$$P_n = (\frac{\lambda}{\mu})^N \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-(\frac{\lambda}{\mu})^N}$$

2.Среднее количество требований в системе

$$E(X) = \Sigma_{i=0}^{N} i P_i =$$

$$\textbf{\textit{пусть}}\ \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \Sigma_{i=0}^{N} i \frac{1-\rho}{1-\rho^N} \rho^i =$$

$$= \frac{1-\rho}{1-\rho^N} \rho \Sigma_{i=0}^{N} \frac{d}{d\rho} (\rho^i) =$$

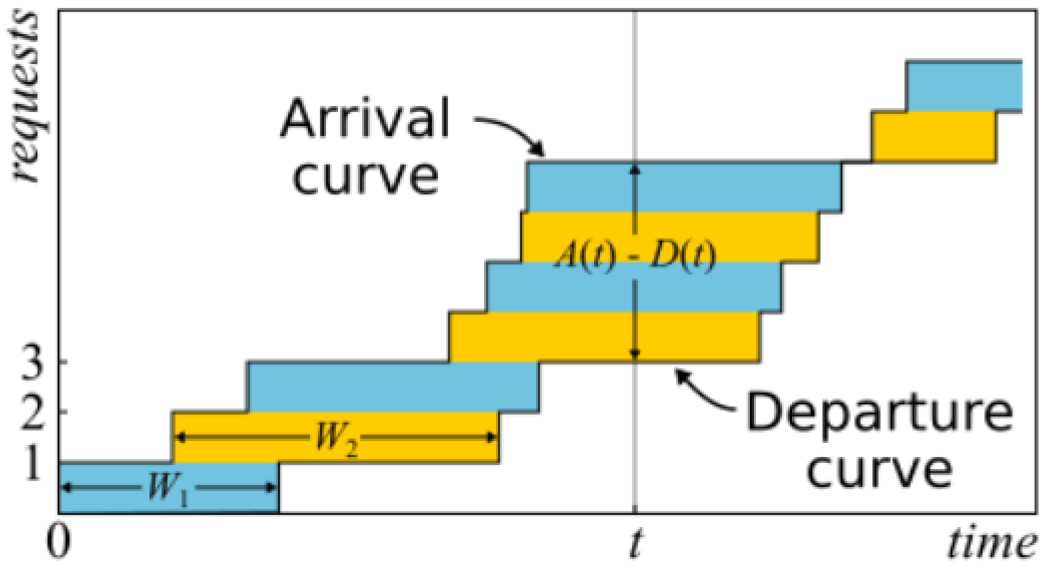
$$= \frac{1-\rho}{1-\rho^N} \rho \frac{d}{d\rho} \Sigma_{i=0}^{N} (\rho^i) =$$

$$= \frac{1-\rho}{1-\rho^N} \rho \frac{d}{d\rho} \frac{1-\rho^N}{1-\rho} =$$

$$= \frac{1-\rho}{1-\rho^N} \rho \frac{-N\rho^{N-1}+N\rho^N-\rho^N+1}{(1-\rho)^2} =$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{N\rho^N}{1-\rho^N}.$$

3. Среднее время пребывания одного требования в системе



$$\frac{\Sigma W_i}{\Delta t} = \frac{N_t}{\Delta t}\frac{\Sigma W_i}{N_t} \Rightarrow E(X) = \bar{\lambda} E(T)$$, ***где***

$\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_n)$, ***т.к. очередь ограниченной длины***

Получаем, что среднее время пребывания в системе = среднее кол-во требований в системе X интенсивность входного потока (Закон Литтла)

Следовательно, $E(T) = \frac{1}{\lambda} E(X) = \frac{1}{\lambda(1-P_n)}(\frac{\rho}{1-\rho} - \frac{N\rho^N}{1-\rho^N})$.

4. Вероятность ожидания требования

Вероятность ожидания требования равна тому, что в системе находится как минимум 1 требование

$$P_{wait} = 1 - P_0 = 1 - \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-(\frac{\lambda}{\mu})^N}$$