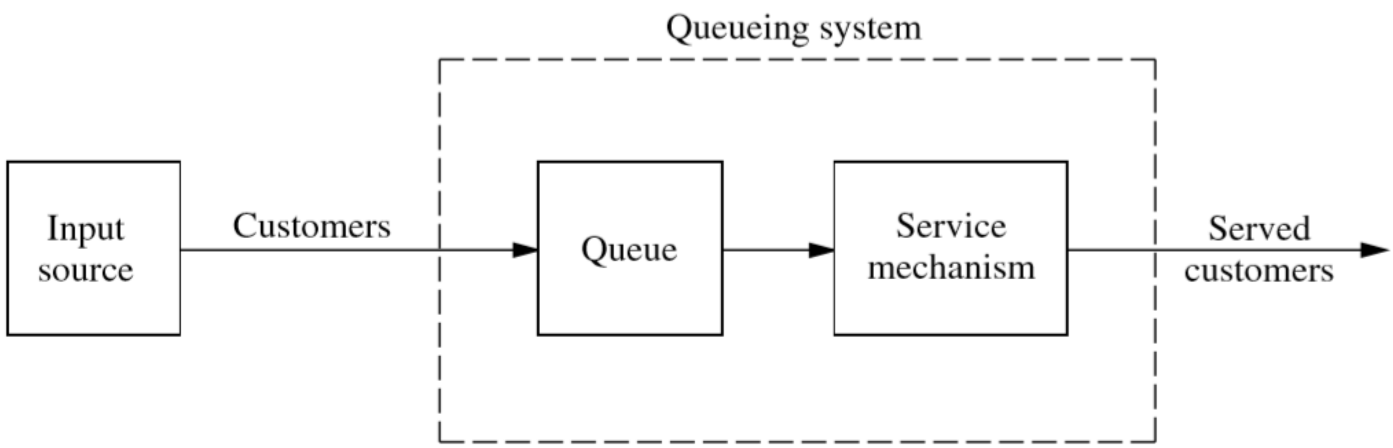
Single-Server-Queueing-System-With-Limited-Capacity



Математическая модель $M/M/1/N$

N - размер очереди,

λ - интенсивность входного потока,

μ - интенсивность обслуживания

Вероятностное пространство

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}(\bullet))$, *где*

$$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$$

$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots)\}$, *где*

$\omega_i \in \{0, 1, 2, \cdots, N\}$ *- состояние системы (кол-во требований в системе)*

в i-тый момент изменения системы

$$P(\omega_{i+1} = \xi_{i+1} | \omega_i = \xi_i, \omega_{i-1} = \xi_{i-1}, \ldots, \omega_1 = \xi_1) = P(\omega_{i+1} = \xi_{i+1} | \omega_i = \xi_i)$$

$$P(\omega_{i+1} = 1 | \omega_i = 0) = 1$$

$$P(\omega_{i+1} = N - 1 | \omega_i = N) = 1$$

$$P(\omega_{i+1} = a + 1 | \omega_i = a) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu},\ 0 < a < N$$

$$P(\omega_{i+1} = a - 1 | \omega_i = a) = \frac{\mu}{\lambda+\mu},\ 0 < a < N$$

Так как:

Пусть $X \sim exp(\lambda)$, $Y \sim exp(\mu)$

Тогда $P(X < Y) = \int_0^\infty P(X < y) f_y(y) dy =$

$$= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda y}) \mu e^{-\mu y} dy =$$

$$= \mu \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda y}) dy - \mu \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)y} dy =$$

$$= - \int_0^\infty (1 - e^{-\mu y}) d(-\mu y) - \frac{\mu}{\mu+\lambda} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)y} dy =$$

$$= 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Зададим случайные величины

$$X_0 = 0 \qquad X_i(\omega) = \omega_i$$

$$P(X_{i+1} = x_{i+1} | X_i = x_i, X_{i-1} = x_{i-1}, \ldots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) = P(X_{i+1} = x_{i+1} | X_i = x_i)$$

$$P_0(X_0 = 0) = 1$$

$$\mathbb{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & N-1 & N \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ N-1 \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Схема состояний

Уравнения баланса (RateIn = RateOut)

$0 : p_1\mu = p_0\lambda$
$1 : p_0\lambda + p_2\mu = p_1\lambda + p_1\mu$
$2 : p_1\mu = p_0\lambda$
$\ldots$
$N-1 : p_{N-2}\lambda + p_N\mu = p_{N-1}(\lambda + \mu)$
$N : p_{N-1}\lambda = p_N\mu$

$$p_i = (\frac{\lambda}{\mu})^i p_0$$

$$\Sigma_{i=0}^{N} p_i = 1$$

$$\Sigma_{i=0}^{N} (\frac{\lambda}{\mu})^i p_0 = 1$$

Получаем

При $\lambda \neq \mu$***:***

$$p_0 = \frac{1}{\Sigma_{i=0}^{N}(\frac{\lambda}{\mu})^i} = \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}^{N+1}}$$

$$p_i = (\frac{\lambda}{\mu})^i \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-(\frac{\lambda}{\mu})^{N+1}}, \quad \forall i = \overline{0, N}$$

При $\lambda = \mu$***:***

$$p_0 = p_i = \frac{1}{N+1}$$

1. Вероятность отказа требованию

Вероятность отказа равна вероятности пребывания системы в состоянии N

При $\lambda \neq \mu$**:**

$$P_n = (\frac{\lambda}{\mu})^N \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-(\frac{\lambda}{\mu})^{N+1}}$$

При $\lambda = \mu$**:**

$$P_n = \frac{1}{N+1}$$

2.Среднее количество требований в системе

При $\lambda \neq \mu$:

пусть $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$E(X) = \Sigma_{i=0}^{N} i P_i = \Sigma_{i=0}^{N} i \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho^i =$$

$$= \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho \Sigma_{i=0}^{N} \frac{d}{d\rho}(\rho^i) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho \frac{d}{d\rho}(\Sigma_{i=0}^{N} \rho^i) =$$

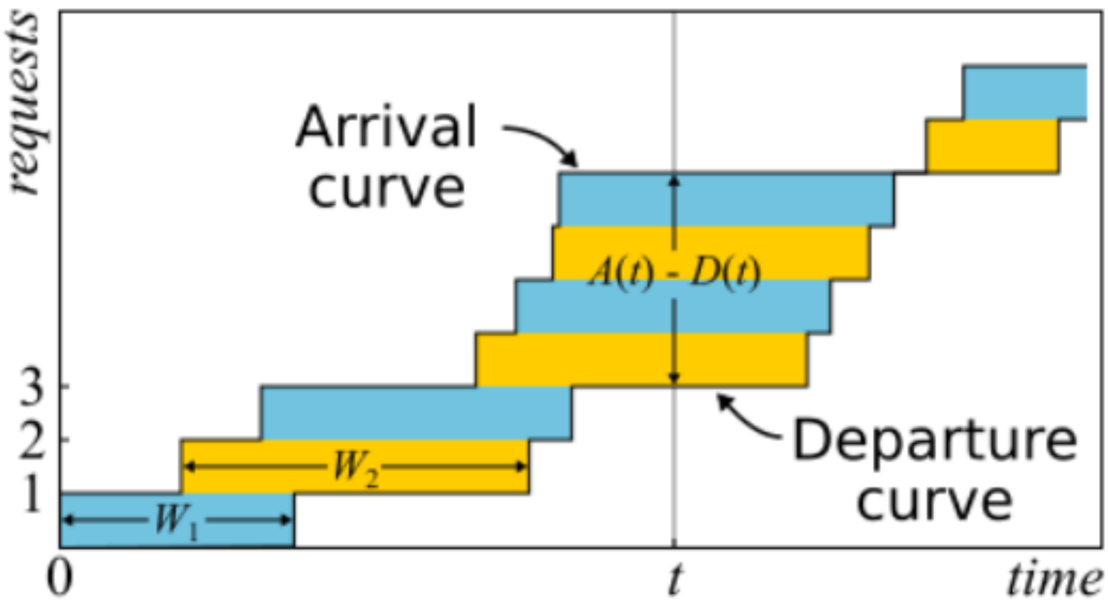
$$= \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho \frac{d}{d\rho}(\frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho \frac{-N\rho^{N-1}+N\rho^N-\rho^N+1}{(1-\rho)^2} =$$

$$= \rho \frac{-(N+1)\rho^N+N\rho^{N+1}+1}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho)} = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}.$$

При $\lambda = \mu$:

$$E(X) = \Sigma_{i=0}^{N} i P_i = \frac{1}{N+1} \Sigma_{i=0}^{N} i = \frac{1}{N+1} \frac{(N+1)N}{2} = \frac{N}{2}$$

3. Среднее время пребывания одного требования в системе



$\frac{\Sigma W_i}{\Delta t} = \frac{N_t}{\Delta t}\frac{\Sigma W_i}{N_t} \Rightarrow E(X) = \bar{\lambda}E(T)$***, где***

$\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_n)$***, т.к. очередь ограниченной длины***

Получаем, что среднее время пребывания в системе = среднее кол-во требований в системе / интенсивность входного потока (Закон Литтла)

Следовательно,

при $\lambda \neq \mu$***:***

$$E(T) = \frac{1}{\bar{\lambda}}E(X) = \frac{1}{\lambda(1-P_n)}(\frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}})$$

при $\lambda = \mu$***:***

$$E(T) = \frac{1}{\bar{\lambda}}E(X) = \frac{1}{\lambda(1-P_n)}\frac{N}{2} = \frac{1}{\lambda\frac{N}{N+1}}\frac{N}{2} = \frac{N+1}{2\lambda}$$

4. Вероятность ожидания требования

Вероятность ожидания требования равна тому, что в системе находится как минимум 1 требование

При $\lambda \neq \mu$:

$$P_{wait} = 1 - P_0 = 1 - \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-(\frac{\lambda}{\mu})^{N+1}}$$

При $\lambda = \mu$:

$$P_{wait} = 1 - P_0 = 1 - \frac{1}{N+1} = \frac{N}{N+1}$$