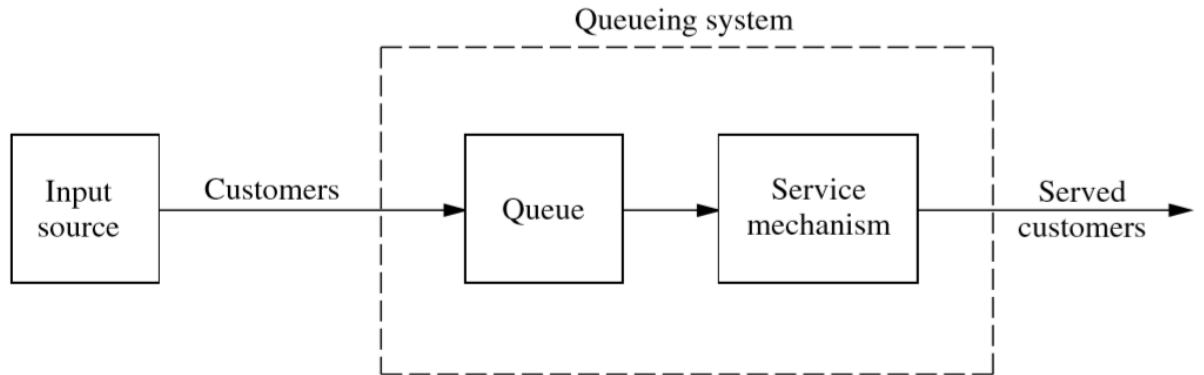


Single-Server-Queueing-System-With-Limited-Capacity



Математическая модель $M/M/1/N$

N - размер очереди,

λ - интенсивность входного потока,

μ - интенсивность обслуживания

Вероятностное пространство

$(\Omega, \mathcal{F}, P(\bullet))$, где

$$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$$

$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots)\}$, где

$\omega_i \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$ - состояние системы (кол-во требований в системе)
в i -тый момент изменения системы

$$P(\omega_{i+1} = \xi_{i+1} | \omega_i = \xi_i, \omega_{i-1} = \xi_{i-1}, \dots, \omega_1 = \xi_1) = P(\omega_{i+1} = \xi_{i+1} | \omega_i = \xi_i)$$

$$P(\omega_{i+1} = 1 | \omega_i = 0) = 1$$

$$P(\omega_{i+1} = N - 1 | \omega_i = N) = 1$$

$$P(\omega_{i+1} = a + 1 | \omega_i = a) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad 0 < a < N$$

$$P(\omega_{i+1} = a - 1 | \omega_i = a) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad 0 < a < N$$

Так как:

$$\text{Пусть } X \sim \exp(\lambda), Y \sim \exp(\mu)$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } P(X < Y) &= \int_0^\infty P(X < y) f_Y(y) dy = \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda y}) \mu e^{-\mu y} dy = \\ &= \mu \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda y}) dy - \mu \int_0^\infty e^{-(\lambda + \mu)y} dy = \\ &= - \int_0^\infty (1 - e^{-\mu y}) d(-\mu y) - \frac{\mu}{\mu + \lambda} \int_0^\infty e^{-(\lambda + \mu)y} dy = \\ &= 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \end{aligned}$$

Зададим случайные величины

$$X_0 = 0 \quad X_i(\omega) = \omega_i$$

$$P(X_{i+1} = x_{i+1} | X_i = x_i, X_{i-1} = x_{i-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) = P(X_{i+1} = x_{i+1} | X_i = x_i)$$

$$P_0(X_0 = 0) = 1$$

$$\mathbb{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & N-1 & N \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ N-1 \\ N \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{\lambda + \mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \frac{\mu}{\lambda + \mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Схема состояний



Уравнения баланса ($RateIn = RateOut$)

$$0 : p_1 \mu = p_0 \lambda$$

$$1 : p_0 \lambda + p_2 \mu = p_1 \lambda + p_1 \mu$$

$$2 : p_1 \mu = p_0 \lambda$$

...

$$N-1 : p_{N-2} \lambda + p_N \mu = p_{N-1} (\lambda + \mu)$$

$$N : p_{N-1} \lambda = p_N \mu$$

$$p_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0$$

$$\sum_{i=0}^N p_i = 1$$

$$\sum_{i=0}^N \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0 = 1$$

Получаем

При $\lambda \neq \mu$:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^N (\frac{\lambda}{\mu})^i} = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - (\frac{\lambda}{\mu})^{N+1}}$$

$$p_i = (\frac{\lambda}{\mu})^i \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - (\frac{\lambda}{\mu})^{N+1}}, \quad \forall i = \overline{0, N}$$

При $\lambda = \mu$:

$$p_0 = p_i = \frac{1}{N+1}$$

1. Вероятность отказа требованию

Вероятность отказа равна вероятности пребывания системы в состоянии N

При $\lambda \neq \mu$:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}$$

При $\lambda = \mu$:

$$P_n = \frac{1}{N+1}$$

2. Среднее количество требований в системе

При $\lambda \neq \mu$:

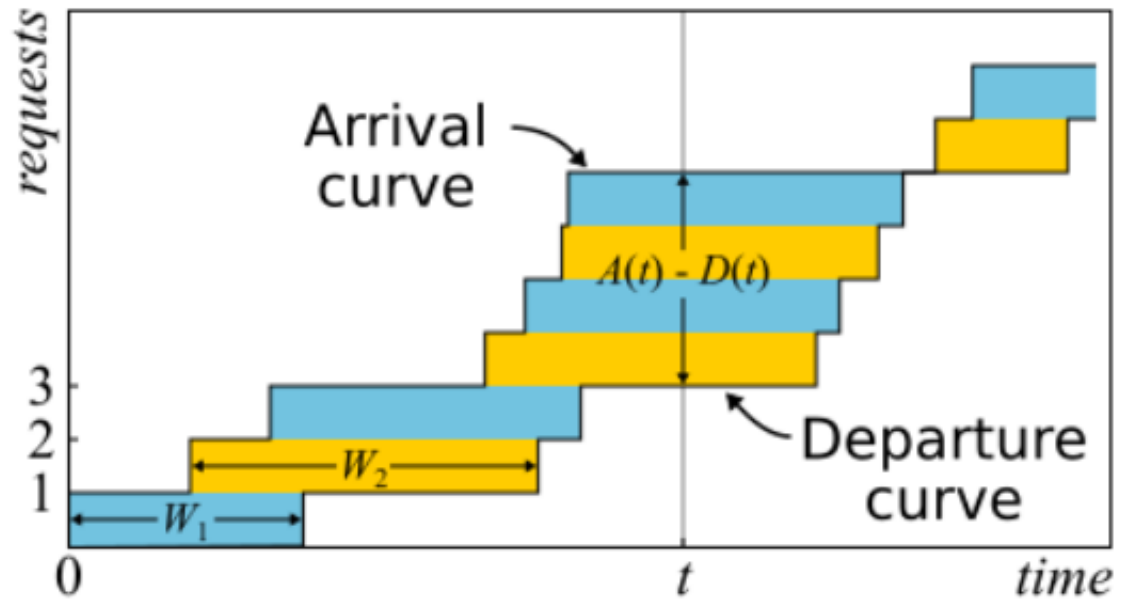
пусть $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{i=0}^N i P_i = \sum_{i=0}^N i \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho^i = \\
 &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho \sum_{i=0}^N \frac{d}{d\rho} (\rho^i) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho \frac{d}{d\rho} (\sum_{i=0}^N \rho^i) = \\
 &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho} \right) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho \frac{-N\rho^{N-1} + N\rho^N - \rho^N + 1}{(1-\rho)^2} = \\
 &= \rho \frac{-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1} + 1}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho)} = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}.
 \end{aligned}$$

При $\lambda = \mu$:

$$E(X) = \sum_{i=0}^N i P_i = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N i = \frac{1}{N+1} \frac{(N+1)N}{2} = \frac{N}{2}$$

3. Среднее время пребывания одного требования в системе



$$\frac{\sum W_i}{\Delta t} = \frac{N_t}{\Delta t} \frac{\sum W_i}{N_t} \Rightarrow E(X) = \bar{\lambda} E(T), \text{ где}$$

$$\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_n), \text{ т.к. очередь ограниченной длины}$$

Получаем, что среднее время пребывания в системе = среднее кол-во требований в системе / интенсивность входного потока (Закон Литтла)

Следовательно,

при $\lambda \neq \mu$:

$$E(T) = \frac{1}{\bar{\lambda}} E(X) = \frac{1}{\lambda(1-P_n)} \left(\frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}} \right)$$

при $\lambda = \mu$:

$$E(T) = \frac{1}{\bar{\lambda}} E(X) = \frac{1}{\lambda(1-P_n)} \frac{N}{2} = \frac{1}{\lambda \frac{N}{N+1}} \frac{N}{2} = \frac{N+1}{2\lambda}$$

4. Вероятность ожидания требования

Вероятность ожидания требования равна тому, что в системе находится как минимум 1 требование

При $\lambda \neq \mu$:

$$P_{wait} = 1 - P_0 = 1 - \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - (\frac{\lambda}{\mu})^{N+1}}$$

При $\lambda = \mu$:

$$P_{wait} = 1 - P_0 = 1 - \frac{1}{N+1} = \frac{N}{N+1}$$