نظریه‌ی یادگیری ماشین

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱ ــ ۱۴۰۰

مدرس: دکتر بیگی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

موعد تحویل: ۱۲ فروردین

تمرین سری دوم

مسئله‌ی ۱.

فرض کنید A و B مجموعه‌ای از توابع هستند که فضای X را به مجموعه‌ی $\{0,1\}$ نگاشت می‌کنند. همچنین داریم $\mathrm{VCdim}(A) = d_A$ و $\mathrm{VCdim}(B) = d_B$. d_A و d_B نیز مقادیر محدودی هستند. اگر مجموعه‌ی C اجتماع دو مجموعه‌ی A و B باشد:

(آ) ثابت کنید برای هر m داریم: $\Pi_C(m) \leqslant \Pi_A(m) + \Pi_B(m)$

(ب) با استفاده از لم Sauer–Shelah نشان دهید برای $m \geqslant d_A + d_B + 2$ داریم: $\Pi_C(m) < 2^m$، سپس یک کران برای بعد VC مجموعه‌ی C به دست آورید.

مسئله‌ی ۲.

خانواده‌ی فرضیه‌هایی از توابع سینوسی که به صورت $\{x \to \mathrm{sign}(\sin(\omega x)) : \omega \in \mathbb{R}\}$ تعریف می‌شوند را در نظر بگیرید.

(آ) نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}$ نقطه‌های x، $2x$، $3x$ و $4x$ نمی‌توانند با این خانواده از فرضیه‌ها shatter شوند.

(ب) نشان دهید که بعد VC خانواده‌ی توابع سینوسی نامتناهی است.

(راهنمایی: نشان دهید که $\{2^{-m} : m \in \mathbb{N}\}$ برای هر $m > 0$ می‌تواند به طور کامل shatter شود.)

مسئله‌ی ۳.

(آ) مجموعه‌ی صفحه‌های مبدأ گذر در $\mathbb{R}^n$ به فرم $\{x \in \mathbb{R}^n : w^\top x \geqslant 0\}$ که در آن‌ها $w \in \mathbb{R}^n$ است را با H^n_{origin} نشان می‌دهیم.

نشان دهید که $\mathrm{VCdim}(H^n_{\text{origin}}) = n$.

(ب) مجموعه‌ی صفحه‌های به فرم $\{x \in \mathbb{R}^n : w^\top x + b \geqslant 0\}$ که در آن‌ها $w \in \mathbb{R}^n$ و $b \in \mathbb{R}$ است را با H^n_{plane} نشان می‌دهیم.

نشان دهید که $\mathrm{VCdim}(H^n_{\text{plane}}) = n + 1$.

(ج) مجموعه‌ی اَبَرکره‌های به فرم $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leqslant r_0\}$ که در آن‌ها $x_0 \in \mathbb{R}^n$ و $r_0 \geqslant 0$ است را با H^n_{sphere} نشان می‌دهیم.

نشان دهید که $\mathrm{VCdim}(H^n_{\text{sphere}}) = n + 2$.

(راهنمایی: یک راه برای نشان دادن این موضوع، تبدیل اَبَرکره به یک اَبَرصفحه در فضایی دیگر و معرفی نگاشتی از $\mathbb{R}^n$ به آن فضا است)

(د) ثابت کنید که $\mathrm{VCdim}(H^n_{\text{sphere}}) \geqslant n+1$.

(ه) (امتیازی) نشان دهید که $\mathrm{VCdim}(H^n_{\text{sphere}}) = n+1$.

مسئله‌ی ۴.

ابتدا نشان دهید که بعد VC مجموعه‌ی متناهی فرضیه‌های H حداکثر برابر با $log_2|H|$ است، سپس:

(آ) یک مثال از مجموعه فرضیه‌های H بیابید که شامل تابع‌های روی بازه‌ی اعداد طبیعی $X = [0,1]$ باشد به صورتی که H نامحدود باشد اما داشته باشیم: $\mathrm{VCdim}(H) = 1$.

(ب) مثال دیگری بزنید که برای مجموعه‌ی متناهی فرضیه‌های H روی دامنه‌ی $X = [0,1]$ داشته باشیم: $\mathrm{VCdim}(H) = \lfloor log_2|H| \rfloor$.

مسئله‌ی ۵.

فرض کنید H_1 خانواده‌ای از توابع است که X را به $\{0,1\}$ نگاشت می‌کند و H_2 خانواده‌ای از توابع است که X را به $\{-1,+1\}$ نگاشت می‌کند. اگر $H = \{h_1h_2 : h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$، نشان دهید کران پیچیدگی تجربی رادامیچر H برای هر نمونه‌ی S با اندازه‌ی m برابر است با:

$$\hat{\mathcal{R}}_S(H) \leqslant \hat{\mathcal{R}}_S(H_1) + \hat{\mathcal{R}}_S(H_2)$$

(راهنمایی: می‌توانید از نامساوی Talagrand استفاده کنید.)

مسئله‌ی ۶.

برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و هر دو مجموعه فرضیه‌های H و H' از توابعی که X را به $\mathbb{R}$ نگاشت می‌کنند، موارد زیر را اثبات کنید:

$(m \geqslant 1)$

(آ) $\mathcal{R}_m(\alpha H) = |\alpha|\mathcal{R}_m(H)$

(ب) $\mathcal{R}_m(H + H') \leqslant \mathcal{R}_m(H) + \mathcal{R}_m(H')$

(ج) $\mathcal{R}_m(\{\max(h,h') : h \in H, h' \in H'\}) \leqslant \mathcal{R}_m(H) + \mathcal{R}_m(H')$

$\max(h,h')$ نشان دهنده‌ی تابع $x \to \max_{x\in X}(h(x), h'(x))$ است.

مسئله‌ی ۷.

فرض کنید $H = \{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ مجموعه‌ای نامحدود و شمارا از توابع دسته‌بند باینری باشد. نشان دهید نمی‌توان H را به صورتی وزن‌دهی نمود که:

(آ) H با استفاده از آن وزن‌ها قابلیت یادگیری غیریکنواخت داشته باشد. در واقع، تابع وزن‌دهی $w : H \to [0,1]$ شرط $\sum_{h\in H} w(h) \leqslant 1$ را رعایت کند.

(ب) وزن‌ها غیرنزولی باشند. یعنی برای $i < j$ داشته باشیم: $w(h_i) \leqslant w(h_j)$.

موفق باشید