نظریه‌ی یادگیری ماشین

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱ ـ ۱۴۰۰

مدرس: دکتر بیگی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

کوییز اول

زمان آزمون: ۱۵ دقیقه

مسئله‌ی ۱.

فرض کنید داشته باشیم $X = R^3$ و مجموعه کانسپت به شکل $c = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant r^2\}$ برای $r > 0$ باشد. ثابت کنید به ازای هر ϵ و δ این کلاس دارای قابلیت یادگیری PAC با پیچیدگی نمونه‌ی $m \geqslant (1/\epsilon)\log(1/\delta)$ است.

حل. ▷

Solution: Let T denote the training sample and let $L(T)$ be the concept with the smallest radius that is consistent with T.

Suppose our target concept c is the sphere around the origin with radius r. We will choose a slightly smaller radius s by

$$s := \inf\{s' \colon \mathbb{P}(s' \leq ||x|| \leq r) < \epsilon\}.$$

Let A denote the annulus between radii s and r; that is, $A := \{x \colon s \leq ||x|| \leq r\}$. By definition of s, we have $\mathbb{P}(A) \geq \epsilon$. In addition, our generalization

error, $\mathbb{P}(c \,\Delta\, L(T))$, must be small if T intersects A. We can state this as

$$\mathbb{P}(c \,\Delta\, L(T)) > \epsilon \implies T \cap A = \emptyset. \tag{2}$$

Thus, we know that any point in T chosen will miss region A with probability at most $1 - \epsilon$. Defining $error := \mathbb{P}(c \,\Delta\, L(T))$, we can combine this with (2) to see that

$$\mathbb{P}(error > \epsilon) \leq P(T \cap A = \emptyset) \leq (1 - \epsilon)^m \leq e^{-m\epsilon}.$$

Setting δ to be greater than or equal to the right-hand side leads to $m \geq \frac{1}{\epsilon}\log(\frac{1}{\delta})$. □

موفق باشید