نظریه‌ی یادگیری ماشین

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱ ـ ۱۴۰۰

مدرس: دکتر بیگی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

کوییز دوم

زمان آزمون: ۱۵ دقیقه

مسئله‌ی ۱.

(آ) اگر برای کلاس‌های فرضیه‌ی H_1 و H_2 داشته باشیم $H_1 \subseteq H_2$. ثابت کنید: $\text{VCdim}(H_1) \leqslant \text{VCdim}(H_2)$

(ب) اگر داشته باشیم $H_1 = H_2 \cup H_3$، آیا می‌توان $\text{VCdim}(H_1) \leqslant \text{VCdim}(H_2) + \text{VCdim}(H_3)$ را نتیجه گرفت؟ دلایل خود را بیان کنید.

حل. $\triangleright$

(آ) اگر فرض کنیم $\text{VCdim}(H_1) = d$، یعنی مجموعه‌ای از d نمونه وجود دارد که توسط فضای فرضیه‌ی H_1، shatter می‌شود و برای هر دسته‌بندی ممکن d نمونه، یک فرضیه‌ی $h_i \in H_1$ وجود دارد.

از آن جایی که H_2 تمامی فرضیه‌های H_1 را شامل می‌شود، بنابراین فضای فرضیه‌ی H_2 نیز d نمونه را shatter می‌کند. همچنین ممکن است H_2 فرضیه‌هایی را شامل شود که تعداد نمونه‌های بیشتر از d را shatter کند و این فرضیه‌ها در H_1 وجود نداشته باشند.

در نتیجه: $\text{VCdim}(H_1) \leqslant \text{VCdim}(H_2)$

(ب) خیر، مثال نقض:

فرض می‌کنیم:

$$H_2 = \{h\}, \forall x : h(x) = 0,$$

$$H_3 = \{h'\}, \forall x : h'(x) = 1$$

$$\Rightarrow \text{VCdim}(H_2) = \text{VCdim}(H_3) = 0$$

بنابراین:

$$H_1 = H_2 \cup H_3 = \{h, h'\}$$

$$\Rightarrow \text{VCdim}(H_1) = 1 > \text{VCdim}(H_2) + \text{VCdim}(H_3)$$

مسئله‌ی ۲.

کلاس‌های توابع H که فضای $\mathbb{R}$ را به $\{-1, +1\}$ نگاشت می‌کنند، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$h(x) = \begin{cases} +1 & \text{for } x \in [a, b] \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

یک کران بالا برای تابع رشد $\Pi_H(m)$ پیدا کنید و سپس با استفاده از آن یک کران بالا برای $\mathcal{R}_m(H)$ به‌دست آورید.

حل. ▷

$$\Pi_H(m) = \binom{m+1}{2} + 1 = \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m + 1$$

با توجه به Corollary 3.8 از کتاب Mohri داریم:

$$\mathcal{R}_m(H) \leqslant \sqrt{\frac{2\ln\left(\Pi_H(m)\right)}{m}} = \sqrt{\frac{2\ln\left(\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m + 1\right)}{m}}$$

همچنین می‌توان از لم Sauer استفاده کرد:

$$\Pi_H(m) \leqslant \sum_{i=0}^{d} \binom{m}{i}$$

با توجه به اینکه $d = \mathrm{VCdim}(H) = 2$ است، داریم:

$$\Pi_H(m) \leqslant \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} = \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m + 1$$

موفق باشید