



توجه: لطفاً از کتب درسی، اسلایدها، جزوه درس و از منابع اینترنتی برای حل مسایل استفاده نکنید. همچنین از مشورت با هم خودداری نمایید.

پرسش ۱: (ویژگی یکنوایی بعد VC) نشان دهید که رابطه زیر برای هر دو کلاس فرضیه $H' \subseteq H$ برقرار است. (۱۲ نمره)

$$VC(H') \leq VC(H).$$

پرسش ۲: (یادگیری در مدل PAC) فرض کنید $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ و \mathcal{C}_1 مجموعه‌ی مفاهیم بازه بسته باشد، به عبارت بهتر $\mathcal{C}_1 = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. نشان دهید \mathcal{C}_1 قابل یادگیری به مفهوم PAC است. (۱۲ نمره)

پرسش ۳: (بعد VC) مجموعه‌ی $\mathcal{H}_{\text{rec}}^2$ کلاس مستطیل‌های موازی محور مختصات است. ثابت کنید $\text{VCdim}(\mathcal{H}_{\text{rec}}^2) = 4$. (۱۲ نمره)

پرسش ۴: (تابع رشد) فرض کنید H_1 و H_2 دو خانواده از فرضیه‌ها باشند. اگر خانواده فرضیه H به صورت زیر تعریف شده باشد.

$$H = \{h_1 \cap h_2 \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$$

نشان دهید که

$$\Pi_H(m) \leq \Pi_{H_1}(m) \Pi_{H_2}(m)$$

پرسش ۵: (پیچیدگی راداماخر) کلاس توابع زیر را در نظر بگیرید. (۱۲ نمره)

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{x} \mapsto \text{sign}(\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{x} \rangle) : \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d, \|\boldsymbol{\theta}\|_2 = 1\}$$

فرض کنید که $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ نمونه‌های ما در فضا باشند که در آن $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$ ها مستقل خطی هستند و $d \geq n$ است. نشان دهید که پیچیدگی راداماخر تجربی برابر خواهد بود با

$$\hat{\mathcal{R}}_S(\mathcal{H}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}} \left[\sup_{f \in \mathcal{H}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i f(\mathbf{x}_i) \right| \right] = 1$$

پرسش ۶: (پیچیدگی راداماخر) برای مجموعه‌ی توابع \mathcal{F} و \mathcal{G} خواص زیر را اثبات کنید. (۴۰ نمره)

(آ) (۸ نمره) اگر $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ آن گاه $\mathcal{R}_n(\mathcal{F}) \leq \mathcal{R}_n(\mathcal{G})$

(ب) (۸ نمره) برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم $\mathcal{R}_n(\alpha \mathcal{F}) = |\alpha| \mathcal{R}_n(\mathcal{F})$

(ج) (۸ نمره) $\mathcal{R}_n(\mathcal{F}) = \mathcal{R}_n(\text{conv}(\mathcal{F}))$ که منظور از conv همان پوش محدب است.

(د) (۸ نمره) در حالت کلی $\mathcal{R}_n(\mathcal{F} + \mathcal{G}) \leq \mathcal{R}_n(\mathcal{F}) + \mathcal{R}_n(\mathcal{G})$

(ه) (۸ نمره) اگر تابع g یک تابع کراندار باشد

$$\mathcal{R}_n(\mathcal{F} + g) \leq \mathcal{R}_n(\mathcal{F}) + \frac{\|g\|_{\infty}}{\sqrt{n}}$$

موفق باشید.